

УДК 519.71

Ідентифікація лінійних систем макроекономічної динаміки з відомими входами

А. О. Борода, О. М. Назаренко

Сумський державний університет, Україна

Розглядається проблема специфікації та ідентифікації динамічної моделі міжгалузевого балансу макроекономічної системи. Моделювання фазових траєкторій і керувань проводиться з урахуванням циклічності, притаманній макроекономічним процесам, і відбувається шляхом виділення гармонічних хвиль, що розповсюджуються в даній системі.

Ключові слова: модель Леонтьєва, фазові координати, керування, циклічні процеси, специфікація, ідентифікація, прогнозування.

Рассматривается проблема спецификации и идентификации динамической модели межотраслевого баланса макроэкономической системы. Моделирование фазовых траекторий и управлений проводится с учетом цикличности, присущей макроэкономическим процессам, и происходит путем выделения гармонических волн, распространяющихся в данной системе.

Ключевые слова: модель Леонтьева, фазовые координаты, управления, циклические процессы, спецификация, идентификация, прогнозирование.

The problem of identification and specification of dynamic input-output model of macroeconomic system is considered. Modeling of phase trajectories and their control takes into account the cyclicity inherent in macroeconomic processes and is performed via the allocation of harmonious waves propagating in the system.

Key words: Leontief model, the phase coordinates, controls, cyclic processes, specification, identification, prediction.

1. Вступ

Макроекономічними моделями прийнято називати моделі народно-господарчого рівня з крупноагрегованими показниками, в рамках яких досліджується функціональна структура економічних систем. Математичні моделі макроекономіки є ефективним інструментом теоретичних досліджень процесу вивчення динаміки на основі економічної теорії. Вони використовуються для розробки концепції економічного і соціального розвитку, при вивченні можливих альтернатив економічної політики та їх довгострокових наслідків, для прогнозування системи узагальнених показників національної економіки. Саме тому побудова моделей макроекономічних систем та розробка апарату їх ідентифікації є актуальною задачею.

Наразі розроблено багато модифікацій динамічних макромоделей, які з теоретичної точки зору дозволяють висвітлити відповідний ефект в економічній системі. Серед них можна виділити класичні моделі, що описують поведінку випуску з необмеженим зростанням, випуску в умовах конкуренції, економічного циклу Хікса [1,2]. Однак в цих моделях недоліком є вивчення поведінки лише одного показника – випуску, при цьому поведінка інших факторів, які впливають на нього, постулюється заздалегідь відомою і незмінною. Одною з перших робіт, присвячених аналізу економіки країни як

єдиної системи, є модель Леонтьєва [3], яка знайшла широке застосування в макроекономічних дослідженнях.

Загальним недоліком вказаних моделей є припущення про відомі значення їх параметрів функціонування. В реальних умовах виникають ситуації, в яких є лише набір статистичних даних відносно динаміки макроекономічних показників. При цьому необхідно на основі економічної теорії про зв'язок між задіяними факторами специфікувати структуру моделі (або скористатись відомою моделлю) та ідентифікувати невідомі параметри, що входять до неї [4].

У даній роботі пропонується методика специфікації та ідентифікації динамічної моделі Леонтьєва міжгалузевого балансу макроекономічної системи. Моделювання фазових траєкторій і керувань проводиться з урахуванням циклічності, притаманній макроекономічним процесам, і відбувається шляхом виділення гармонічних хвиль, що розповсюджуються в даній системі.

2. Постановка задачі

Запропонована В.Леонтьєвим динамічна міжгалузева модель є класичним прикладом використання систем диференціальних рівнянь у дослідженні проблем економічного зростання. Модель має вигляд [3]

$$\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_*) = \mathbf{x}_*, \quad t \in [t_0, t_k], \quad (1)$$

де $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))'$ і $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))'$ – вектор-стовпці валових випусків і невиробничого споживання n галузей; A – матриця прямих витрат, B – матриця коефіцієнтів капіталоємкості приростів виробництва, t_* – точка відрізка $[t_0, t_k]$, в якій задано граничний стан.

Як відомо, задача Коші (1) при заданих матрицях і граничних умовах має єдиний розв'язок. Проте у багатьох реальних задачах матриці системи (1) невідомі. Більше того, граничні умови також можуть бути не заданими, наприклад, у випадку, коли t_* – момент часу, що розділяє базовий період і період прогнозування.

Нехай $\{\mathbf{x}_t\}$ і $\{\mathbf{u}_t\}$ – статистична інформація про динаміку траєкторій $\{\mathbf{x}(t)\}$ і $\{\mathbf{u}(t)\}$ в N дискретних моментах часу проміжку $[t_0, t_1]$, $t_1 \leq t_*$. Мета даної роботи полягає у знаходженні такого неперервного керування $\mathbf{u}(t)$ і параметрів моделі (1), щоб при переведенні системи із деякого початкового стану в момент часу t_0 в кінцеву бажану точку \mathbf{x}_* в момент часу t_* модельні траєкторії $\{\mathbf{x}(t)\}$, $\{\mathbf{u}(t)\}$ задовольняли ряд властивостей:

а) високу якість апроксимації, тобто співвідношення $\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_t$, $\mathbf{u}(t) \approx \mathbf{u}_t$ виконуються з високою точністю у дискретному наборі точок проміжку $[t_0, t_1]$, наприклад, у сенсі евклідової L^2 -норми [5];

б) високу якість прогнозу, тобто довірчі інтервали прогнозів фазового вектора $\mathbf{x}(t)$ і керування $\mathbf{u}(t)$ на проміжку $[t_1, t_k]$ мають мінімальну довжину [6];

в) робастність, тобто оцінки невідомих параметрів якомога менш чутливі до незначних коливань вхідної інформації $\{\mathbf{x}_t\}$, $\{\mathbf{u}_t\}$ [7].

Деякі із цих властивостей на практиці є конкуруючими, тому виникає необхідність у побудові такого мультикритеріального регулятора, що діє за принципом оберненого зв'язку [8,9], який би дозволив налаштувати досліджувану модель на вказаний набір властивостей.

При чисельній реалізації моделей, метою яких є прогнозування, граничні умови диференціальних рівнянь (1) зручно задовольняти в момент часу, що слідує за періодом ідентифікації. Покладемо $t_* = t_1 = N + 1$, тоді відрізок $[1, N]$ будемо називати періодом ідентифікації, а відрізок $[t_*, t_k]$ – періодом прогнозування. При оцінених значеннях параметрів A, B, \mathbf{x}_* розв'язок задачі Коші (1) дозволяє перевіряти імітаційні властивості на проміжку $[1, t_*)$ і встановлювати прогнозні властивості моделі (1) на відрізку $[t_*, t_k]$.

Зазначимо, що довжина N періоду ідентифікації повинна бути достатньо великою, щоб на ньому стабілізувались взаємозв'язки між елементами системи. У випадку нестационарних фінансових часових рядів прийнято вважати $N \geq 100$ [10]. Для макроекономічної динаміки часові ряди часто є стаціонарними, статистична інформація подається по рокам і тому обмежена в часі. Для даного дослідження важливо, щоб довжина часових рядів $l > 55$. Стаціонарність моделі будемо характеризувати високою якістю апроксимації, прогнозування та робастністю [5, 11]. Якщо виконані умови стаціонарності, то оцінену на періоді ідентифікації $[1, N]$ лінійну модель (1) можна переносити на період прогнозування $[t_*, t_k]$ за умови $t_k - t_* \ll N$ в силу інерційності динамічної системи [12].

Вектор $\mathbf{x}(t)$ можна шукати за допомогою декомпозиції траєкторій руху фазових координат на складові [13]. Якщо ці траєкторії ідентифіковані за даними спостережень, то вектор керувань $\mathbf{u}(t)$ може бути знайдений за допомогою оберненого зв'язку:

$$\mathbf{u}(t) = P \mathbf{x}(t) - B \mathbf{x}(t), \quad P = E - A, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (2)$$

Основна проблема, яка тут виникає, полягає у знаходженні оптимальних значень довжини N періоду ідентифікації, розмірності n фазового простору та специфікації компонент фазового вектора \mathbf{x} і вектора керувань \mathbf{u} . Велику роль при вирішенні цієї проблеми відіграє регулятор. У якості регулятора будемо використовувати допоміжну інформацію відносно величин, які не присутні в рівнянні руху, але є невід'ємною частиною даної динамічної системи [13]. Додатковими величинами системи повинні бути обрані такі її характеристики, що акумулюють якомога більше інформації про досліджувану систему в цілому і відносно яких є доступні статистичні дані. У цій роботі регулятор буде складатись з двох пристроїв, які у будь-який момент часу t формують сумарні значення фазових координат і керувань

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^n x_m(t), \quad \mathbf{u}(t) = \sum_{m=1}^n u_m(t). \quad (3)$$

Тоді, якщо модельні траєкторії $\mathbf{x}(t)$ і $\mathbf{u}(t)$ налаштовані на високі імітаційні та прогнозні властивості, то і сумарні траєкторії (3) повинні мати такі ж властивості.

3. Метод розв'язання задачі

Запропонований у даній роботі метод ідентифікації диференціальних рівнянь (1) відноситься до класу колокаційних методів, основна ідея яких полягає у розкладі фазових змінних по базисним функціям [8, 14]. Дотримуючись відомих методів виділення в рядах динаміки не випадкових складових [15], будемо припускати двокомпонентну адитивну схему розкладу фазових траєкторій (при додаванні шумів $\mathbf{v}(t)$ одержуються реальні траєкторії). Тенденцію розвитку будемо характеризувати лінійним трендом, а коливальний процес описувати лінійною комбінацією гармонік з деякими частотами. Тоді регресійну модель для траєкторій фазових координат будемо подавати у вигляді:

$$\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}(t - \bar{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} (\mathbf{a}_k \cos \omega_k t + \mathbf{b}_k \sin \omega_k t) + \mathbf{v}_t, \quad t = \bar{1}, \bar{N}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad (4)$$

де ω_k – частота k -ї гармоніки; $\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k$ – вектори невідомих коефіцієнтів розкладу в обрізаний ряд Фур'є; \mathbf{v}_t – вектор випадкових збурень. При вказаних значеннях частот вектор середніх значень залишків дорівнює нулю ($\bar{\mathbf{v}} = 0$).

Етап 1. Визначення періоду T коливань даної системи і встановлення частот із спектра (4), на які налаштовані гармонічні хвилі, можна здійснювати за допомогою першого пристрою регулятора (3), що обчислює сумарне значення фазових координат $x(t)$. Для нього складається регресійна модель, аналогічна (4), і за допомогою критерію Стюдента [6] виділяються значущі гармоніки.

Аналіз циклічних процесів, які відбуваються в макроекономічних системах показує [16], що в них можуть розповсюджуватись хвилі Кондратьєва ($k=1$), Кузнеця ($k=3$), Жугляра ($k=6$). Крім того, можуть бути присутніми й інші хвилі (довгі або короткі). Все це вказує на те, що кількість секторів $n \geq 5$, і до цього результату ми повинні прийти, оцінюючи відповідні регресійні моделі. Процес виділення значущих гармонік необхідно проводити сумісно з визначенням періоду коливань T . Якщо частоти належать спектру (4), то бажано покласти $N = T$. Оптимальне значення N підбираємо враховуючи поведінку досліджуваної системи поза періодом ідентифікації $[1, N]$. Для цього використаємо відому статистичну інформацію, що передує моменту t_0 . Якщо модельна траєкторія коливань сумарного значення $x(t)$ при $t \leq 0$ змінюється в напрямку статистичних даних, то вважаємо, що гіпотеза $N = T$ підтверджується.

Етап 2. Специфікація компонент вектора \mathbf{x} проводиться при встановленому значенні n . При поділі множини x на підмножини x_1, x_2, \dots, x_n необхідно враховувати фізичну сутність цих підмножин та їх значущість у загальній масі. Фазові координати повинні бути обраними такими, щоб властиві їм гармонічні хвилі налаштовувалися на частоти, ідентифіковані нами на етапі 1. Оскільки кожна підмножина множини x має свою специфіку функціонування, то кількості значущих гармонік у розкладі різних фазових координат можуть різнитись. Якщо фазова координата швидко реагує на якісні зміни у даній динамічній системі, то цій координаті відповідатиме максимальна кількість, тобто $n - 1$ гармонік. Мінімальна кількість гармонік буде у розкладі тих фазових координат, які слабо реагують на зміни в інших підмножинах системи.

Для МНК-оцінок коефіцієнтів трендів одержані наступні формули:

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \left\{ \left(\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}} \right) \left(t + \sum_k \left(\text{ctg} \frac{\omega_k}{2} \sin \omega_k t - \cos \omega_k t \right) \right) \right\} / \left((N^2 - 1) / 6 - \sum_k 1 / \sin^2 \frac{\omega_k}{2} \right). \quad (5)$$

Перевірку значущості гармонік, що розповсюджуються у кожній підмножині даної системи, можна проводити в рамках регресійної моделі коливань

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \sum_k (\mathbf{a}_k \cos \omega_k t + \mathbf{b}_k \sin \omega_k t) + \mathbf{v}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{b}}(t - \bar{t}), \quad t = \overline{1, N}. \quad (6)$$

МНК-оцінки коефіцієнтів розкладу розраховуються за формулами:

$$\hat{\mathbf{a}}_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{x}_t \cos \omega_k t - \hat{\beta}, \quad \hat{\mathbf{b}}_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{x}_t \sin \omega_k t + \hat{\mathbf{b}} \text{ctg} \frac{\omega_k}{2}. \quad (7)$$

Рафіновану (відкинуті всі незначущі МНК-оцінки) модель коливань фазових координат навколо відповідних трендів

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \sum_k (\hat{\mathbf{a}}_k \cos \omega_k t + \hat{\mathbf{b}}_k \sin \omega_k t) \quad (8)$$

екстраполюємо назад на проміжок $t \leq 0$ і перевіряємо відповідність статистичним значенням $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ ($t = 0, -1, \dots$). Якщо перевірка нас задовольняє, то можуть бути прийнятними і модельні траєкторії руху фазових координат

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{b}}(t - \bar{t}) + \sum_k (\hat{\mathbf{a}}_k \cos \omega_k t + \hat{\mathbf{b}}_k \sin \omega_k t). \quad (9)$$

У випадку незадовільних імітаційних властивостей модельних кривих (8), (9) необхідно провести іншу специфікацію фазових координат і переоцінити відповідні регресійні моделі.

Етап 3. Специфікація вектора керувань \mathbf{u} здійснюється при заданому фазовому векторі $\mathbf{x}(t)$ і його похідній $\dot{\mathbf{x}}(t)$. Для ідентифікації вектора керувань $\mathbf{u}(t)$ враховуючи (2), складаємо наступну регресійну модель (\mathbf{r}_t – вектор випадкових збурень):

$$\mathbf{u}_t - \mathbf{u} = P(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) - B(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{b}}) + \mathbf{r}_t. \quad (10)$$

Лінійна модель (10) оцінюється звичайним МНК, якщо на елементи матриць A і B не накладаються обмеження-нерівності. У випадку лінійних обмежень-нерівностей вигляду $\alpha_1 < a_{ij} < \alpha_2$, $\beta_1 < b_{ij} < \beta_2$ задача мінімізації суми квадратів відхилень регресійної моделі (10) за допомогою теореми Куна-Такера зводиться до задачі математичного програмування, яка розв'язується методом множників Лагранжа [17]. Якщо отримані МНК-оцінки \hat{P} і \hat{B} , то для модельних траєкторій керувань одержуємо

$$\mathbf{u}(t) = \hat{P}\mathbf{x}(t) - \hat{B}\dot{\mathbf{x}}(t). \quad (11)$$

Адекватність кривих (11) статистичним даним перевіряємо за допомогою коефіцієнтів детермінації, а також другого пристрою регулятора, який моделює траєкторію сумарного керування згідно другої балансової рівності (3). Якщо імітаційні та прогнозні властивості модельних кривих $\mathbf{u}(t)$ з якихось причин нас не влаштовують, то виникає необхідність у корегуванні алгоритму – специфікацію компонент $\mathbf{x}(t)$ (етап 2) треба розглянути заново, скорегувавши поділ заданої множини на підмножини.

4. Практична реалізація алгоритму

Апробація побудованої динамічної моделі проводилася на базі статистичних даних макроекономічного розвитку Франції [18]. Розділимо економіку Франції на n секторів. Тоді координатами фазового вектора \mathbf{x} моделі є валові випуски продукції секторів, а координати вектора керувань \mathbf{u} – невиробниче споживання продукції секторів. Оптимальне значення об'єму вибірки $N = 50$, при цьому 1960-2009 рр. – період ідентифікації, 2010-2011 рр. – період прогнозування. Аналіз залежності розмірності n фазового простору від рівня значущості α показує, що при $\alpha = 0,005$ економіку Франції необхідно ділити на 5 секторів. У якості п'яти секторів можна вибрати наступні: промисловість та сільське господарство (Industry; Agriculture); будівництво та транспорт (Construction; Transport); фінансовий сектор і нерухомість (Finance; Real estate); комунікації та наука (Communication; Science); сфера послуг (service Industries).

Аналіз статистичної інформації для економіки Франції за 1957 – 2009 рр. показує, що дана макроекономічна система розвивається циклічно (для всіх вказаних секторів і економіки в цілому фази підйому змінюються фазами спаду). Довгострокова тенденція розвитку характеризується прямолінійним трендом з додатним нахилом і спостерігається коливання випусків та невиробничого споживання навколо відповідних трендів. Тому логічним є використання запропонованого у даній роботі підходу, що базується на розкладанні фазових координат (випусків секторів) на трендову та періодичну складові.

Визначення періоду T коливань даної системи і встановлення частот із спектра (4), на які налаштовані гармонічні хвилі, проводиться шляхом обробки статистичної інформації для ВВП (валового випуску продукції). Тоді випуски вибраних секторів повинні відтворювати основні властивості ВВП.

Розкладання часового ряду $\{x_t\}$ на періоді ідентифікації на трендову і періодичну складові підтверджує у випадку $\alpha = 0,005$ наявність у макроекономіці Франції чотирьох значущих гармонік ($k=1, 2, 3, 6$). Це означає, що на ВВП Франції суттєво впливають чотири основні гармоніки: хвиля Кондратьєва ($k=1$), хвиля Кузнеця ($k=3$), хвиля Жугляра ($k=6$) і проявляє себе також хвиля з періодом, що дорівнює половині періоду хвилі Кондратьєва ($k=2$).

Оскільки розклад функцій випуску на складові містить один тренд і чотири гармоніки, то розмірність фазового простору $n = 5$. Наступним кроком є поділ макроекономіки Франції на п'ять секторів і розкладання часових рядів випусків на трендову і періодичну складові згідно (4). Основним критерієм вибору п'яти секторів є присутність у траєкторіях випусків цих секторів вказаних чотирьох гармонік, причому гармонічні хвилі з іншими частотами повинні бути незначущими, оскільки вони є нехарактерними для макроекономіки Франції.

Оцінювання регресійної моделі випусків секторів (4) дало наступні значення коефіцієнтів R^2 трендів, навколо яких відбуваються коливання (табл.1).

Табл.1. Коефіцієнти детермінації трендів

№ сектора	1	2	3	4	5	Σ
R^2	0,5231	0,8548	0,8993	0,8220	0,8756	0,8021

Аналіз табл.1 показує, що для деяких секторів (особливо для сектору промисловості та сільського господарства) і для економіки в цілому коливання випусків навколо відповідного тренду є відчутними. Періодичні складові стають причиною підйому та спаду економіки, а їх взаємодія на певних проміжках часу приводить до кризових явищ в економіці. Тому є актуальним виділення характерних для даної макроекономічної системи гармонічних хвиль і дослідження їх впливу на економічний розвиток країни.

Згідно (5), (7) гармонічні хвилі взаємодіють з трендом, і це ускладнює аналіз. Але, якщо розглядати чистий коливальний процес (8), то гармоніки ряду Фур'є стають некорельованими, і це спрощує аналіз впливу окремих гармонік на загальний коливальний процес. Частки дисперсій гармонік у загальній дисперсії коливань кожного сектору ($m = \overline{1, n}$) обчислюються за допомогою відповідних коефіцієнтів детермінації, значення яких наведені в табл. 2.

Табл.2. Коефіцієнти детермінації гармонік

№ сектора	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=6$	Σ
1	0,9523	0,0179	0,0205	0,0020	0,9926
2	0,6319	0,2883	0,0486	0,0072	0,9760
3	0,7604	0,1792	0,0385	0,0035	0,9815
4	0,8661	0,0911	0,0220	0,0045	0,9836
5	0,8174	0,1632	0,0061	0,0017	0,9882
Σ	0,8082	0,1596	0,0186	0,0046	0,9909

Як бачимо, хвиля Кондратьєва ($k=1$) суттєво впливає на всі сектори економіки. Хвиля з періодом 25 років ($k=2$) особливо впливає на другий (будівництво та транспорт), третій (фінанси та нерухомість) та п'ятий (сфера послуг) сектори. Хвиля Кузнеця більше проявляє себе в другому та третьому секторах. Вклад хвилі Жугляра є меншим у порівнянні з другими хвилями, але він є значущим у функціях випусків.

Сумарний вклад гармонік в дисперсію коливань випусків секторів становить від 97,60% (2-й сектор) до 99,26% (1-й сектор). Тому регресійні моделі коливань мають якісні апроксимаційні властивості і можна очікувати значущого вкладу в дисперсії випусків. Значення коефіцієнтів детермінації модельних траєкторій випусків приводяться в табл.3.

Табл.3. Якість модельних траєкторій випусків

№ сектора	1	2	3	4	5	Σ
R^2	0,9992	0,9991	0,9989	0,9989	0,9995	0,9992

На рис.1 приведені графіки модельних кривих ВВП і випусків п'яти секторів та траєкторій відповідних коливань. Тут точками зображені статистичні дані, а суцільною лінією – траєкторії руху (всі дані обезрозмірені діленням розрахункових значень на відповідне значення у початковому 1960 р.). Порівняння прогнозних значень з реальними даними (дві останні точки, що відповідають 2010 і 2011 рр.) свідчить про високоточні прогнозні властивості моделі (4).

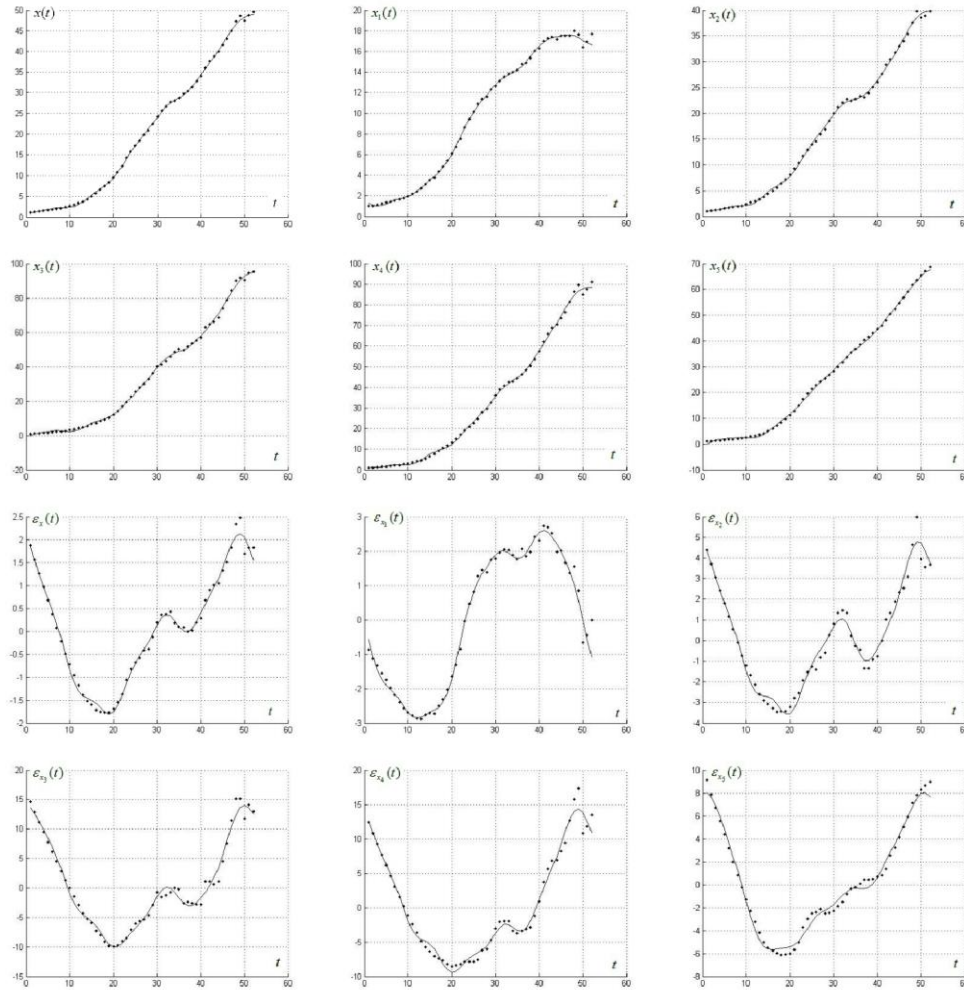


Рис. 1. Модельні криві ВВП і випусків секторів та відповідних коливань за 1960-2011 рр.

МНК-оцінки матриць A і B , подані у табл. 4 і 5, характеризують взаємозв'язок між різними секторами економіки і можуть бути використані для ефективного розподілу ресурсів при формуванні взаємовідносин між окремими галузями. Комплексна оцінка такого взаємозв'язку може суттєво впливати на динаміку і структуру виробництва, а створення раціональної та високоефективної міжгалузевої економіки дозволяє успішно управляти економікою країни в цілому.

Табл. 4. МНК-оцінки елементів матриці A

0.3816	0.0753	0.0299	0.0455	0.0253
0.0659	0.5951	0.0226	0.0618	0.0228
0.0379	0.0403	0.2213	0.0855	0.0278
0.0422	0.0208	0.0432	0.5119	0.0316
0.0286	0.0406	0.0413	0.0929	0.2374

Табл.5. МНК-оцінки елементів матриці B

0.0548	0.0146	0.0175	0.0113	0.0136
0.0114	0.0431	0.0174	0.0145	0.0196
0.0110	0.0129	0.0483	0.0136	0.0082
0.0140	0.0155	0.0117	0.0493	0.0101
0.0172	0.0145	0.0140	0.0096	0.0475

Рис.2 характеризує імітаційні та прогнозні властивості модельних траєкторій невиробничого споживання. Тут точками зображені статистичні дані, а суцільною лінією – модельні криві (всі дані обезрозмірені діленням розрахункових значень на відповідне значення у початковому 1960 р.). На періоді прогнозування порівняння з реальними даними (за 2010-2011 рр.) дає задовільні результати, як і у випадку модельних траєкторій випусків.

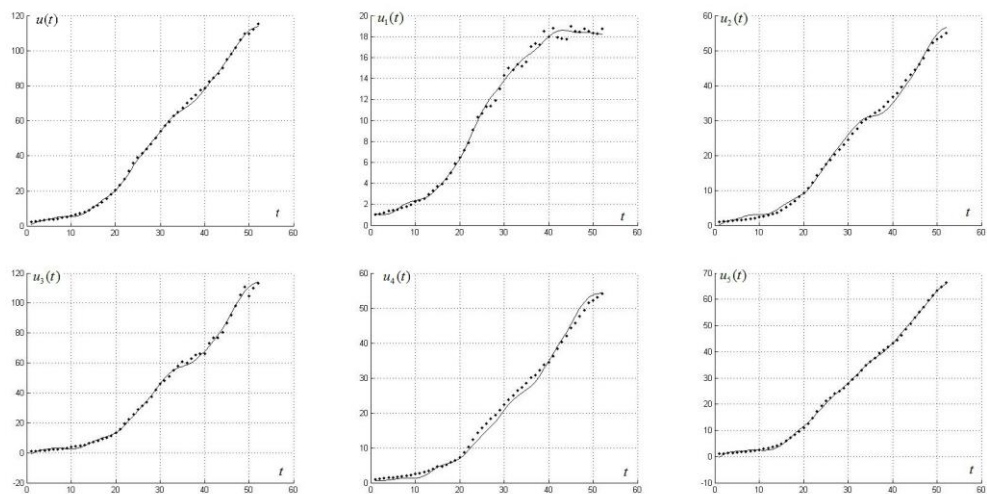


Рис.2. Модельні криві невиробничого споживання Франції на проміжку 1960-2011 рр.

5. Прогнозування макроекономічного розвитку

Спробуємо спрогнозувати економічний розвиток Франції. Будемо виходити з ВВП, для якого на етапі 2 отримана наступна модельна траєкторія:

$$x(t) = -4,4143 + 0,8570t + 2,9322\cos(\omega_1 t) - 2,0523\sin(\omega_1 t) + 1,4456\cos(\omega_2 t) + 0,6628\sin(\omega_2 t) + 0,3870\cos(\omega_3 t) - 0,3802\sin(\omega_3 t) + 0,1974\cos(\omega_6 t) - 0,1841\sin(\omega_6 t).$$

На рис. 3 зображені графіки першої, другої, третьої та шостої гармонік на проміжку $t \in [40, 80]$, тобто за 1999 – 2039 рр. Аналіз показує, що починаючи з 1999 р. (рік введення євро) перші три гармоніки знаходяться у фазі підйому, і тому цей період можна вважати «золотою ерою» Франції (і Західної Європи в цілому, оскільки Франція – одна з основних країн Євросоюзу).

Однак у 2005 р. надійшов сигнал від першої гармоніки (її амплітуда найбільша, і вона вступає у фазу спаду). Аналогічний сигнал від третьої гармоніки був у 2007 р. Як наслідок, вкінці 2007 р. почалася економічна криза.

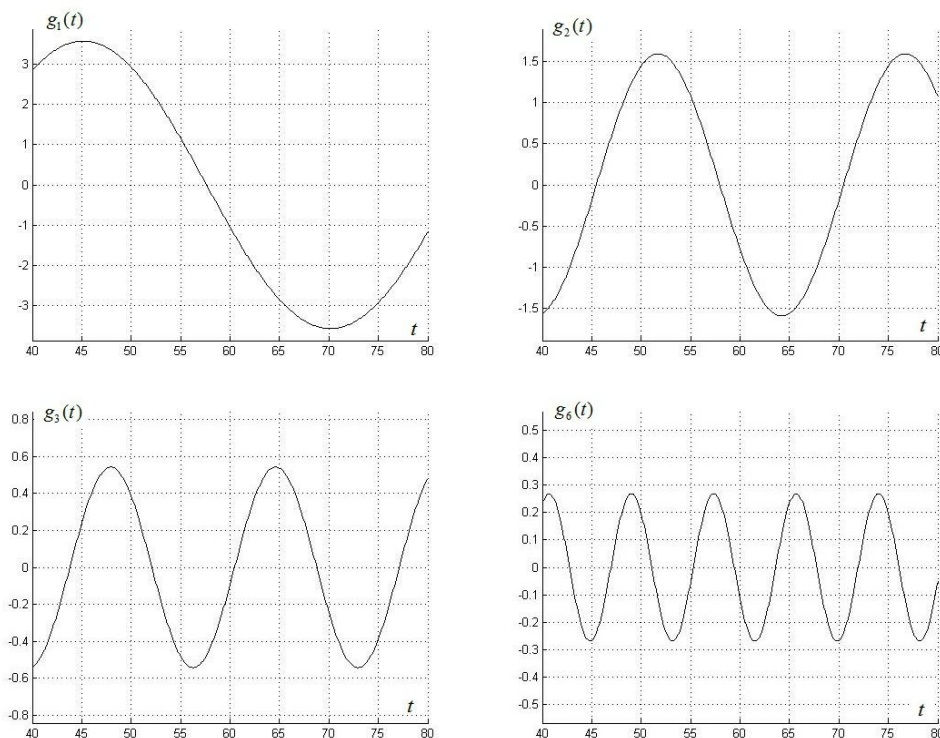


Рис.3. Модельні гармоніки, характерні для економіки Франції на проміжку 1999-2039 рр.

Обвалу економіки не відбувається, оскільки перші два роки система рухається за інерцією (за рахунок тренду), а починаючи з 2005 р. шоста хвиля вступає у фазу підйому (її амплітуда невелика, але вклад її в коливання макроекономічної системи є значущим). Подальший аналіз показує, що з другої половини 2016 р. починається фаза підйому хвилі Кузнеця, і тому з цього моменту слід очікувати поступового зростання економічного розвитку Франції, яке посилиться починаючи з 2023 р. – входження другої хвилі ($k=2$) у фазу підйому (на початку 2017 р. шоста хвиля вступає у фазу спаду, але вклад її в коливання менший). Отже, 2008-2022 рр. – не найкращі часи для Євросоюзу. А суттєвих змін слід очікувати починаючи з 2030 р., коли хвиля Кондратьєва увійде у фазу підйому. У 2033 р. до неї доповниться хвиля Кузнеця і всі чотири хвилі будуть у фазах підйому.

7. Висновки

У даній роботі запропонований алгоритм параметричної ідентифікації лінійної стаціонарної моделі Леонтєва, який дозволяє отримати незатухаючі стійкі коливання у випадку макроекономічних систем. Отримані траєкторії випусків і невиробничого споживання мають високоякісні імітаційні та прогностні властивості. Аналіз гармонічних хвиль, характерних для макроекономічної динаміки розвинутих країн, дозволяє виявляти підйоми і спади в економіці та прогнозувати перспективи економічного розвитку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Tu P.N.V. Dynamical systems. An introduction with applications in economic and biology. – Berlin: Springer-Verlag, 1994. – 314 p.
2. Красс М. С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учеб. – 2-е изд., испр / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – М.: Дело, 2001. – 688 с.
3. Leontief W. Input-Output Economics. – Oxford University Press, New York, 1986. – 436 p.
4. Kujundzic S.M. Methods and Models for Stability, Controllability Analysis of Systems Motion. – М.: Fizmatlit, 2004. – 544 p.
5. Greene W. H. Econometric Analysis. – 5th ed. – N.Y.: Pearson Educ. Int., 2003. – 1056 p.
6. Назаренко О. М. Основы эконометрики: Вид. 2-ге, перероб.: Підручник / О. М. Назаренко. – Київ: Центр навчальної літератури, 2005. – 392 с.
7. Хьюбер Д. П. Робастность в статистике / Д. П. Хьюбер. – М.: Мир, 1984. – 304 с.
8. Ljung L. System Identification. Theory for the user. 2nd ed. – N.J.: PTR Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999. – 432 p.
9. Бабаков И. М. Теория колебаний. Изд. 4-е, исправл / И. М. Бабаков. – М.: Наука, 2004. – 591с.
10. Назаренко А. М. Моделирование и идентификация в задачах многокритериальной оптимизации с линейным и квадратичным критериями качества в условиях статической неопределенности / А. М. Назаренко, М. В. Карпуша // Проблемы управления и информатики. – 2014. – № 2. – С. 28-40.
11. Назаренко А. М. Идентификация и оптимизация слабо формализованных процессов в классе стационарных LQ моделей / А. М. Назаренко, Фильченко Д. В. // Киберн. и вычисл. техника.– К., 2009. – Вып. 158. – С. 42–61.
12. Айвазян С. А.. Прикладная статистика и основы эконометрики / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1000 с.
13. Назаренко Побудова та ідентифікація лінійно-квадратичних моделей слабо формалізованих динамічних систем / О. М. Назаренко // Вісник ХНУ. Сер. «Матем. моделювання. Інформ. технології. Автом. системи управління». – 2008. Т. 10, № 833. – С. 185-192.
14. Ramsay J.O., et al. Parameter Estimation for Differential Equations: A Generalized Smoothing Approach. // Journal of the Royal Statistical Society. Series B. – 2007. – Vol. 69, № 5. – P. 741-796.
15. Hamilton J.D. Time Series Analysis. – N. J.: Princeton University Press, 1994. – 800 p.
16. Коротаев А. В. Кондратьевские волны в мировой экономической динамике / А. В. Коротаев // Системный мониторинг. Глобальное и региональное развитие. – М.: Либроком / URSS, 2010. – С. 189-229.
17. Лоусон Ч. Л. Численное решение задач метода наименьших квадратов / Ч. Л. Лоусон, Р. Дж. Хенсон. – Пер. с англ. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
18. INSEE. – Режим доступа : <http://www.bdm.insee.fr/bdm2/index.action>.