

УДК 519.63:532.5

Задача ідентифікації масообмінного параметра сингулярно збуреного процесу очищення рідин від багатокомпонентного забруднення

А. Я. Бомба, А. П. Сафоник

*Національний університет водного господарства та природокористування,
м. Рівне, Україна*

Запропоновано просторове узагальнення математичної моделі процесу очищення рідини від багатокомпонентного забруднення, яка, в припущенні домінування конвективних складових цього процесу над дифузійними, враховує зворотний вплив визначальних факторів (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнт пористості, дифузії), і включає спеціальним чином задану додаткову умову (умову перевизначення) для знаходження невідомого малого масообмінного коефіцієнта. Побудовано алгоритм розв'язку відповідної нелінійної оберненої сингулярно збуреної задачі типу «конвекція-дифузія-масообмін». На цій основі проведено комп'ютерний експеримент.

Ключевые слова: фільтрування, багатокомпонентна концентрація, конвекція, дифузія, масообмін, асимптотика, просторова нелінійна сингулярно збурена задача.

Предложено пространственное обобщение математической модели процесса очистки жидкости от многокомпонентного загрязнения, которая, в предположении доминирования конвективных составных этого процесса над диффузными, учитывает обратное влияние определяющих факторов (концентрации загрязнения жидкости и осадка) на характеристики среды (коэффициент пористости, диффузии), и включает специальным образом заданное дополнительное условие (условие переопределения) для нахождения неизвестного малого массообменного коэффициента. Построен алгоритм решения соответствующей нелинейной обратной сингулярно возмущенной задачи типа « конвекция-диффузия-массообмен». На этой основе проведен компьютерный эксперимент.

Ключові слова: фільтрування, багатокомпонентна концентрація, конвекція, дифузія, масообмін, асимптотика, просторова нелінійна сингулярно збурена задача.

The proposed spatial generalization of the mathematical model for the process of cleaning liquid from multicomponent pollution assumes the dominance of convective composite process over diffusion ones. It takes into account the influence of the determining factors (the concentration of fluid contamination and sediment) on the characteristics of the medium (porosity, diffusion) and includes specified in a special manner additional condition (condition overrides) to find unknown small mass-transfer coefficient. The algorithm for solving the corresponding nonlinear inverse singularly perturbed problem type "convection-diffusion-mass transfer" is constructed. On this basis the computer experiment have been carried out.

Key words: filtering, multicomponent concentration, convection, diffusion, mass exchange, asymptotic, spatial nonlinear singular the indignant tasks.

1. Загальна постановка задачі та її актуальність

Аналіз результатів досліджень [1, 13] свідчить про наявність складної структури взаємозалежності різних факторів, які визначають процеси фільтрації й фільтрування через пористі середовища й не враховувалися в традиційних

(класичних, феноменологічних) моделях таких систем. У роботі [8] показано, що задання форми фільтра відіграє суттєву роль у процесі фільтрування позаяк це може призвести як до збільшення (зменшення) параметрів фільтрування, так і до збільшення продуктивності його роботи загалом. В свою чергу для побудови математичних моделей процесів очищення рідин від багатокомпонентного забруднення просторовим фільтром на даний час практично відсутні “модельні механізми”, що враховують зворотній вплив різного роду характеристик процесу на характеристики середовища та ідентифікації невідомих параметрів, що входять до відповідних моделей. У роботі [9] розроблено математичну модель процесу очищення рідини у пористій фільтруючій насадці, що враховує зворотній вплив характеристик процесу (концентрації осаду) на фільтраційні параметри, при цьому деякі коефіцієнти розглянутого процесу, визначалися експериментальним шляхом.

Метою даної роботи є просторове узагальнення математичної моделі процесу очищення рідини від багатокомпонентного забруднення [10], яка, в припущенні домінування конвективних складових цього процесу над іншими, враховує зворотній вплив визначальних факторів (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнт пористості, дифузії), і включає спеціальним чином задану додаткову умову (умову перевизначення) для знаходження невідомого малого масообмінного коефіцієнта, та побудова асимптотичного розв’язку відповідної нелінійної оберненої сингулярно збуреної задачі.

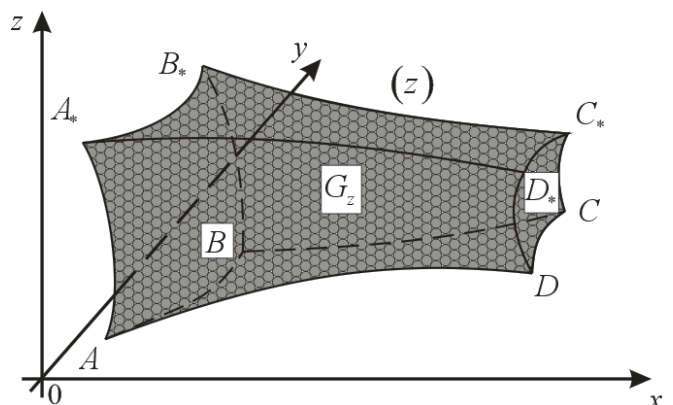


Рис. 1. Просторова фізична область G_z (пористий фільтр)

Постановка задачі. Розглянемо зернистий (пористий) фільтр, що має форму криволінійного паралелепіпеда $G_z = ABCDA^*B^*C^*D^*$, обмежений гладкими ортогональними між собою в кутових точках і ребрах еквіпотенціальними поверхнями $ABB^*A^* = \{z: f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD^*C^* = \{z: f_2(x, y, z) = 0\}$ та поверхнями течії $ADD^*A^* = \{z: f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC^*B^* = \{z: f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{z: f_5(x, y, z) = 0\}$, $A^*B^*C^*D^* = \{z: f_6(x, y, z) = 0\}$ (див. рис. 1). Припускаємо [9], що частинки забруднення домішок речовини можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення-відриву, сорбції-десорбції тощо) і при цьому концентрації

забруднення «впливають» на характеристики відповідного середовища (пористість, коефіцієнт фільтрації, тощо). Концентрація забруднення є багатокомпонентною ($C = C(x, y, z, t) = (C_1, \dots, C_m) = (C_1(x, y, z, t), \dots, C_m(x, y, z, t))$), де C_i концентрація i -ої компоненти домішки ($i = \overline{1, m}$) у рідкому фільтруючому середовищі. Відповідний процес фільтрування для області $G = G_Z \times (0, \infty)$ опишемо наступною модельною задачею:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(P)C_i)}{\partial t} = \varepsilon\alpha_i(t)\rho_i - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C_i - \beta_i \left(\sum_{p=1}^m q_p C_p \right) - \\ - \varepsilon f_{m-1} \left(\sum_{p_1, \dots, p_m=1}^m h_{i, p_1, \dots, p_m} C_i^{\gamma_{p_1}} C_{p_1}^{\gamma_{p_2}} \dots C_{p_m}^{\gamma_{p_m}} \right) + D_i \Delta C_i, \\ \frac{\partial P}{\partial t} = \left(\sum_{i=1}^m \beta_i C_i \right) - \varepsilon\alpha(t)P, i = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (1)$$

$$C_i \Big|_{ABB, A_s} = C_{i, *}(M, t), \frac{\partial C_i}{\partial \vec{n}} \Big|_{CDD, C_s} = 0, \frac{\partial C_i}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD, A_s \cup BCC, B_s \cup ABCD \cup A, B, C, D_s} = 0, \\ C_i(x, y, z, 0) = C_{i, 0}^0(x, y, z), P(x, y, z, 0) = P_0^0(x, y, z), \quad (2)$$

$$\vec{v} = \kappa \nabla \varphi, \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (3)$$

$$\varphi \Big|_{ABB, A_s} = \varphi_*, \varphi \Big|_{CDD, C_s} = \varphi^*, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD, A_s \cup BCC, B_s \cup ABCD \cup A, B, C, D_s} = 0; \quad (4)$$

$$\alpha(t) \iiint_G P(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, t) d\vec{x} d\vec{y} d\vec{z} = \mu(t), \quad (5)$$

де $P(x, y, z, t)$ – концентрація осаду у внутрішній точці (x, y, z) області G (завантаження фільтра) в момент часу t ; β_i – коефіцієнти, що характеризують масові об'єми осадження домішок за одиницю часу, $\alpha(t)$ – шуканий коефіцієнт, що характеризує масові об'єми відірваних від гранул завантаження частинок, $\mu(t)$ – функція, що характеризує масові розподілу осаду з часом (знаходиться експериментальним способом [13]), (4) – умова пере визначення [11]; $\sigma(P)$ – пористість середовища ($\sigma(P) = \sigma_0 - \varepsilon\sigma_* P(x, y, z, t)$); $\vec{\nabla}$ – оператор Гамільтона; $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ – оператор Лапласа; $D_i = d_{0i}\varepsilon$ – коефіцієнт дифузії домішки у рідині; σ_* , d_{0i} , ε – тверді параметри (характеризують відповідний м'який параметр $\sigma(P)$), що знаходяться експериментальним способом, ε – малий параметр (він характеризує переваги одних складників процесу над іншими, а саме, десорбційні складники та явища міжкомпонентної взаємодії цього процесу є малими порівняно з іншими його складниками); $C_i^*(M, t)$, $C_{i, 0}^0(x, y, z)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G ; M – довільна точка відповідної поверхні; φ – фільтраційний потенціал ($0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$); $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – вектор швидкості фільтрації ($|\vec{v}| > v_* \gg \varepsilon$), κ - коефіцієнт фільтрації.

Шляхом введення пари функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ (просторово квазікомплексно спряжених із функцією $\varphi(x, y, z)$) таких, що

$\kappa \cdot \text{grad } \varphi = \text{grad } \psi \times \text{grad } \eta$ [9] і заміною граничних умов на умови: $\psi|_{ADD,A} = 0$, $\psi|_{BCC,B_*} = Q_*$, $\eta|_{ABCD} = 0$, $\eta|_{A,D,C,B_*} = Q^*$, задача замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу квазіконформного відображення області G_Z на відповідну область комплексного квазіпотенціалу $G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\}$, де Q_* , Q^* – невідомі параметри, $Q_* \cdot Q^* = Q = \int_{EFF_*E_*} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds$ – кількість рідини, що проходить через деяку квазіеквіпотенціальну поверхню EFF_*E_* області G_Z (повна фільтраційна витрата). Прийmemo, що дана задача на просторове конформне відображення $G_w \mapsto G_Z$ ($G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \bar{\varphi}_* < \varphi < \bar{\varphi}^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\}$ – відповідна G_Z область комплексного квазіпотенціалу) при деякому усередненому значенні $\kappa \in$ розв’язана [9], зокрема, побудовано динамічну сітку та поле швидкості \vec{v} , обчислено фільтраційну витрату $Q = Q_* Q^*$. Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у системі (1) та умовах (2), приходимо до відповідної задачі для області $G_w \times (0, \infty)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho)c_i)}{\partial t} = \varepsilon\alpha(t)\rho - v^2 \frac{\partial c_i}{\partial \varphi} - \beta_i \sum_{p=1}^m q_p C_p - \varepsilon \sum_{p=1, i \neq p}^m h_{i,p} c_{i,j-1} c_{p,j-1} + \\ + \varepsilon d_{0i} \left(v^2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial c_i}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial c_i}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i=1}^m \beta_i c_i - \varepsilon\alpha(t)\rho, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} c_i(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t) &= c_i^*(\psi, \eta, t), c_{i,\varphi}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t) = 0, \\ c_{i,\psi}(\varphi, 0, \eta, t) &= c_{i,\psi}(\varphi, Q_*, \eta, t) = c_{i,\eta}(\varphi, \psi, 0, t) = c_{i,\eta}(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0, \\ c_i(\varphi, \psi, \eta, 0) &= c_{i,0}^0(\varphi, \psi, \eta), \rho(\varphi, \psi, \eta, 0) = \rho_0^0(\varphi, \psi, \eta), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\alpha(t) \iiint_{G_w} \rho(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta} = \mu(t), \quad (8)$$

$$\text{де } c_i = c_i(\varphi, \psi, \eta, t) = C_i(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$\rho = \rho(\varphi, \psi, \eta, t) = P(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$b_1 = b_1(\varphi, \psi, \eta) = (\bar{\nabla}\psi)^2, b_2 = b_2(\varphi, \psi, \eta) = (\bar{\nabla}\eta)^2, d_1 = d_1(\varphi, \psi, \eta) = \Delta\psi,$$

$$d_2 = d_2(\varphi, \psi, \eta) = \Delta\eta,$$

$$v^2(\varphi, \psi, \eta) = v_x^2(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) + v_y^2(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) + v_z^2(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \quad (\text{див., напр., [9]}).$$

Асимптотика розв’язку. Розв’язок задачі (6), (8) з точністю $O(\varepsilon^n)$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів [8, 9, 10]:

$$c_i = c_{i,0} + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j c_{i,j} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \Pi_{i,j} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \tilde{\Pi}_{i,j} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\Pi}}_{i,j} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}_{i,j} + R_{c,i}, \quad (9)$$

$$\rho = \rho_0 + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \rho_j + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \bar{P}_j + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \tilde{P}_j + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{P}}_j + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\tilde{P}}}_j + R_\rho, \quad (10)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \sum_{j=1}^k \varepsilon^j \alpha_j + R_\alpha, \quad (11)$$

де $R_{c,i}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $R_\rho(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $R_\alpha(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ — залишкові члени, $c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\rho_j(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\alpha_j(t)$ — члени регулярної частини асимптотики ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{0, n}$); $\Pi_{i,j}(\xi, \psi, \eta, t)$, $\bar{P}_j(\xi, \psi, \eta, t)$ — функції типу примежового шару в околі $\varphi = \bar{\varphi}^*$ (поправки на виході з фільтра) ($j = \overline{0, 2}$), $\tilde{\Pi}_{i,j}(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t)$, $\tilde{P}_j(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t)$ — в околі $\varphi = \bar{\varphi}^*$ (поправки на вході у фільтр) ($j = \overline{0, 2}$), а функції $\tilde{\tilde{\Pi}}_{i,j}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}_{i,j}(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{\Pi}}_{i,j}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}_{i,j}(\varphi, \psi, \tilde{\tilde{\eta}}, t)$ та $\tilde{P}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{P}}_j(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{P}}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\tilde{\tilde{\tilde{P}}}_j(\varphi, \psi, \tilde{\tilde{\eta}}, t)$ ($j = \overline{0, 3}$) — в околах $\psi = 0$, $\psi = Q^*$, $\eta = 0$, $\eta = Q^*$ (поправки в околі бічних «стінок» фільтра), відповідно; $\xi = (\varphi^* - \varphi)/\varepsilon$, $\tilde{\xi} = (\varphi - \varphi_*)/\varepsilon$, $\tilde{\psi} = \psi/\sqrt{\varepsilon}$, $\tilde{\tilde{\psi}} = (Q_* - \psi)/\sqrt{\varepsilon}$, $\tilde{\eta} = \eta/\sqrt{\varepsilon}$, $\tilde{\tilde{\eta}} = (Q^* - \eta)/\sqrt{\varepsilon}$ — «розтяги» відповідних змінних.

Шляхом підстановки співвідношень (9)-(11) у (6)-(8) і виконання стандартної процедури «прирівнювання» коефіцієнтів при однакових степенях ε , одержимо такі задачі для знаходження $c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\rho_j(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($j = \overline{0, n}$).

$$\begin{cases} \sigma_0 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial \varphi} + \beta_i c_{i,0} = 0, & \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \sum_{i=1}^m \beta_i c_{i,0}, \\ c_{i,0}(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_{i,0}^0, & c_{i,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = c_{i,*}(\psi, \eta, t), \\ \rho_0(\varphi, \psi, \eta, 0) = \rho_0^0; \\ \alpha_0(t) \iiint_{G_w} \rho_0(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta} = \mu(t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sigma_* \rho_{j-1} \frac{\partial c_{i,j}}{\partial t} = U_{i,j} - v^2 \frac{\partial c_{i,j}}{\partial \varphi} - \beta_i \left(\sum_{j=1}^m q_j c_j \right), \\ \frac{\partial \rho_j}{\partial t} = \sum_{i=1}^m \beta_i c_{i,j} - \sum_{k=1}^j \alpha_{j-k} \rho_{k-1}, \\ c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, & c_{i,j}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0, \\ \rho_j(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0; \end{cases}$$

$$\alpha_0 \iiint_{G_w} \rho_j(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta} + \alpha_1 \iiint_{G_w} \rho_{j-1}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta} + \dots + \alpha_j \iiint_{G_w} \rho_0(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta} = 0.$$

В результаті їх розв'язання отримаємо:

$$c_{i,0} = \begin{cases} c_{i,*}(\psi, \eta, t - f) \exp\left[-\beta_i \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)}\right], & t \geq f, \\ c_{i,0}^0(f^{-1}(f - t, \psi, \eta), \psi, \eta) \exp\left[-\frac{\beta_i t}{\sigma_0}\right], & t < f, \end{cases}$$

$$\rho_0 = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m \beta_i c_{i,0}\right) d\tilde{t} + \rho_0^0, \quad \alpha_0 = \frac{\mu}{\iiint_{G_w} \rho_0(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta}},$$

$$c_{i,j} = \begin{cases} e^{-\lambda_i} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{U_{i,j}(s, \psi, \eta, f(s, \psi, \eta) - f + t)}{v^2(s, \psi, \eta)} e^{\lambda_2(s, \psi, \eta, t)} ds, & t \geq f, \\ -\frac{e^{-\lambda_i}}{\sigma_*} \int_0^t \frac{U_{i,j}(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta, s)}{\rho_{j-1}(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} e^{\lambda_2(\varphi, \psi, \eta, s)} ds, & t < f, \end{cases}$$

$$\rho_j = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m \beta_i c_{i,j} - \sum_{k=1}^j \alpha_{j-k} \rho_{k-1}\right) d\tilde{t}, \quad \alpha_j = \frac{\sum_{k=1}^j \alpha_{j-k} \iiint_{G_w} \rho_j(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta}}{\iiint_{G_w} \rho_0(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta}},$$

$$\text{де } U_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t) = d_{0i} \left(v^2 \frac{\partial^2 c_{i,j}}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c_{i,j}}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c_{i,j}}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial c_{i,j}}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial c_{i,j}}{\partial \eta} \right) + \alpha_{j-1} \rho_{j-1} - \sum_{l,g=1, l \neq g}^m k_{l,g} c_{l,j-1} c_{g,j-1}, \quad (j = \overline{2, n}),$$

$$\lambda_1(\varphi, \psi, \eta, t) = -\beta_i \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\rho_{j-1}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f) c_{i,j}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f)}{v^2(s, \psi, \eta)} ds,$$

$$\lambda_2(\varphi, \psi, \eta, t) = -\beta_j \int_0^t \frac{\rho_{j-1}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s}) c_{i,j}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s})}{\sigma(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\tilde{s},$$

$$f(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \bar{\psi}, \bar{\eta})} \text{ — час проходження відповідною частинкою шляху}$$

від точки $(x(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in ABB_*A_*$ до точки $(x(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in G_z$ уздовж відповідної лінії течії (як перетину деяких двох поверхонь $\psi(x, y, z) = \bar{\psi}$, $0 \leq \bar{\psi} \leq Q_*$, $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}$, $0 \leq \bar{\eta} \leq Q^*$), f^{-1} — функція, обернена до f відносно змінної φ (відзначимо, що така функція існує, оскільки $v^2(\varphi, \psi, \eta)$ — неперервно диференційовна, обмежена, додатно визначена функція).

Функції $\Pi_{i,j}(\xi, \psi, \eta, t), \bar{P}_j(\xi, \psi, \eta, t)$ ($i = 0, 1$), $\bar{\Pi}_{i,j}(\xi, \psi, \eta, t), \bar{P}_j(\xi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\Pi}_{i,j}(\varphi, \tilde{\mu}, \eta, t), \tilde{P}_{i,j}(\varphi, \tilde{\mu}, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{\Pi}}_{i,j}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \tilde{\tilde{P}}_{i,j}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \hat{\Pi}_{i,j}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ та $\tilde{\tilde{P}}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \hat{P}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \hat{\hat{P}}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ знаходяться аналогічно [9]. Оцінка залишкових членів проводиться аналогічно [10]. Обґрунтування збіжності розв'язку проводиться аналогічно до [9].

3. Результати числових розрахунків

Наведемо результати числового експерименту для фільтра, обмеженого поверхнями: $f_1(x, y, z) = z - 1,25$; $f_2(x, y, z) = (z - 2,5466434)^2 + y^2 + x^2 - 0,1187841$, $f_3(x, y, z) = (z - 1,25)^2 + (y - 3,8471044)^2 + x^2 - 16,3627124$; $f_4(x, y, z) = (z - 1,25)^2 + x^2 + (y + 3,8471044)^2 + x^2 - 16,3627124$; $f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = [z(z - 2,5) + y^2 + x^2]^2 + 6,25y^2 - 36,4276695x^2$. Для такого фільтра характерна значна просторовість засипки, «монотонність звуження» в напрямку від входу до виходу фільтра (вибір саме такої форми «підказує» практика), та взаємна ортогональність граней уздовж ребер і в кутових точках (це суттєве для спрощення процедури побудови просторового конформного відображення). На основі [9] побудовано розрахункову динамічну сітку в G_z : $\varphi(x, y, z) = \bar{\varphi}_i \stackrel{\text{df}}{=} \varphi_* + [(\varphi^* - \varphi_*)i]/n, i = \overline{0, n}$, $\psi(x, y, z) = \bar{\psi}_j \stackrel{\text{df}}{=} (Q_*j)/m, j = \overline{0, m}, \eta(x, y, z) = \bar{\eta}_k \stackrel{\text{df}}{=} (Q^*k)/l, k = \overline{0, l}$ для $\varphi_* = 0, \varphi^* = 8000, \kappa = 1, n = 30, m = 16, l = 16$ (параметри n, m і l вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної), знайдено фільтраційну витрату $Q = 0,651$, обчислено величини швидкості фільтрації $|v|$ та функцій $b_i(\varphi, \psi, \eta), d_i(\varphi, \psi, \eta)$ ($i = 1, 2$). При цьому нев'язки розрахованих конструкцій не перевищують 0,001. На рис. 2 проілюстровано розподіл концентрації c_1, c_2 і ρ з часом вздовж ліній течії для $L = 1\text{м}, \beta_i = 0,3\text{м}^2/\text{с}, \alpha_0 = 0,0056\text{м}^2/\text{с}, \sigma_0 = 0,5, \varepsilon = 0,001; k = 1; c_{1,0}^0(\varphi, \psi, \eta) = 0,017 \exp(-\varphi^2), c_{2,0}^0(\varphi, \psi, \eta) = 0,021 \exp(-\varphi^2), c_1^*(\psi, \eta, t) = 0,017, c_2^*(\psi, \eta, t) = 0,021, \rho_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 0$.

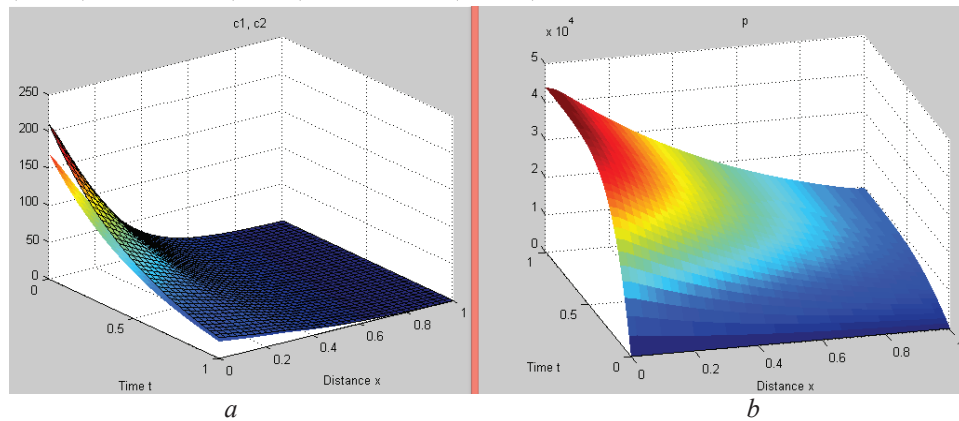


Рис. 2. Просторовий розподіл концентрації c_1, c_2 - (a) і ρ - (b)

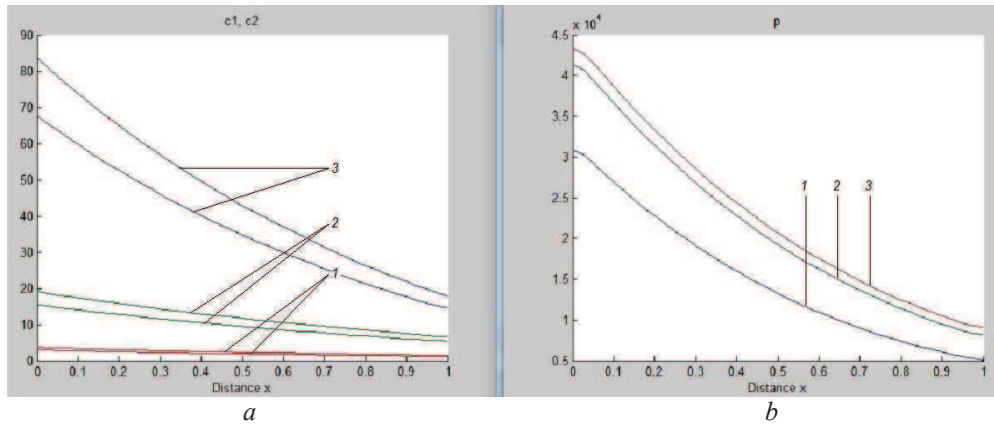


Рис. 3. Розподіл концентрації c_1, c_2 - (a) і ρ - (b) вздовж фільтра в різні моменти часу (для $t_1 = 10$ год, $t_2 = 20$ год, $t_3 = 30$ год)

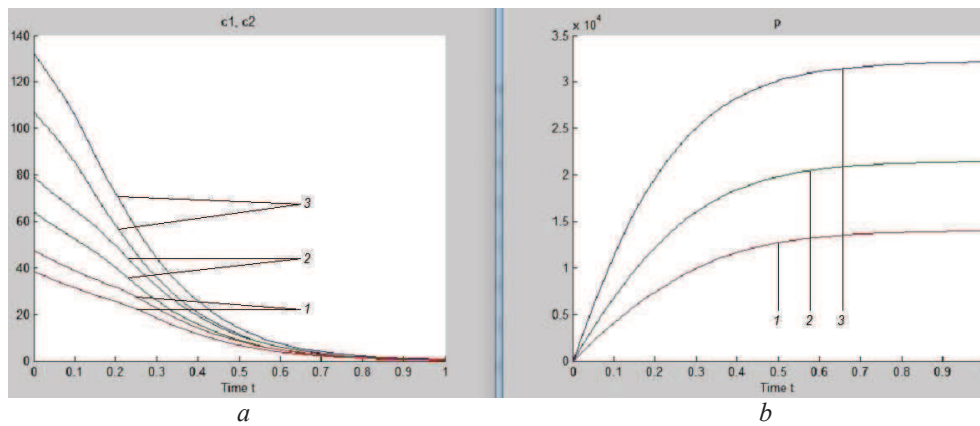


Рис. 4. Розподіл концентрації c_1, c_2 - (a) і ρ - (b) з часом в різних поперечних перерізах фільтра (для $x_1 = 25$ см, $x_2 = 50$ см, $x_3 = 75$ см)

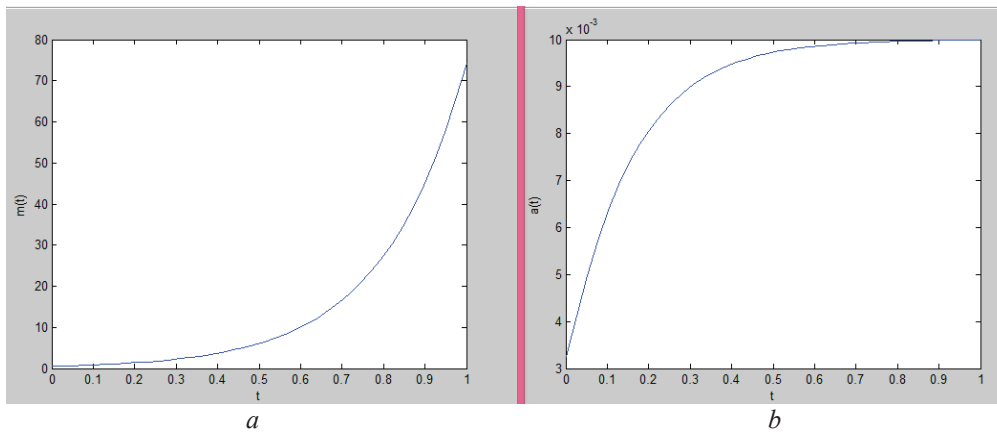


Рис. 5. Масовий розподіл осаду $\mu(t)$ - (a) і відповідного масо обмінного коефіцієнта $\alpha(t)$ - (b) з часом

На рисунках 3, 4 проілюстровано розподіл концентрації c_1, c_2 і ρ з часом та в різних поперечних перерізах фільтра відповідно вздовж ліній течії.

В результаті інтерполяції експериментальних даних [13] нами отримане масовий розподіл $\mu(t)$ осаду з часом (див. рис. 5a). Залежність відповідного масообмінного коефіцієнта $\alpha(t)$ від часу зображено на рисунку 5b. Зростання масообмінного коефіцієнта з часом пояснюється тим, що (для даного випадку при отриманому експериментально значенні $\mu(t)$) у процесі осадження часток гранули пористої засипки максимально насичуються домішковими частинками й під дією гідравлічного напору ймовірність відриву частинок від гранул зростає до часу τ_3 ефективної роботи фільтра.

Провівши аналіз із розрахунковими даними, отриманими в [10], бачимо, що розрахунки на основі просторово узагальненої математичної моделі процесу очищення рідини можуть характеризувати протікання процесу фільтрування як з кращої так і гіршої сторони, в залежності від форми задання просторового фільтра.

4. Висновки за результатами і напрямком подальших досліджень

Запропоновано просторове узагальнення математичної моделі процесу очищення рідини від багатоконпонентного забруднення, яка, в припущенні домінування конвективних складових цього процесу над іншими, враховує зворотний вплив визначальних факторів (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнт пористості, дифузії), і включає спеціальним чином задану додаткову умову (умову перевизначення) для знаходження невідомого малого масообмінного коефіцієнта. Побудований розв'язок відповідної оберненої задачі дає можливість істотно наблизити числові розрахунки до реальних експериментальних даних (у порівнянні з класичними, феноменологічними моделями [13]), більш точно прогнозувати й розраховувати ефективність процесу осадження домішок різних технологічних водно-дисперсних систем. Аналіз результатів дослідження показав, що задання форми фільтра відіграє суттєву роль у процесі фільтрування позаяк це може призвести як до збільшення (зменшення) параметрів фільтрування, так і до збільшення продуктивності його роботи загалом У перспективі – моделювання процесів фільтрування в умовах неповних даних та автоматизація відповідних процесів (див., напр., [10, 14, 15]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Elimelech M. Predicting collision efficiencies of colloidal particles in porous media, *Water Research.*, 26(1), 1-8, 1992.
2. Elimelech M. Particle deposition on ideal collectors from dilute flowing suspensions: Mathematical formulation, numerical solution and simulations. *Separations Technology*, 4, 186-212, 1994.
3. Jegatheesan V. Effect of surface chemistry in the transient stages of deep bed filtration, Ph Dissertation, University of Technology Sydney, pp. 300, 1999.

4. Johnson P.R. and Elimelech, M., Dynamics of colloid deposition in porous media: Blocking based on random sequential adsorption, *Langmuir*, 11(3), 801-812, 1995.
5. Ison C.R. and Ives, K.J., Removal mechanisms in deep bed filtration, *Chem. Engng. Sci.*, 24, 717-729, 1969.
6. Ives K.J. Rapid filtration, *Water Research*, 4(3), 201-223, 1970.
7. Petosa A.R., Jaisi, D.P., Quevedo, I.R., Elimelech, M., and Tufenkji, N. "Aggregation and Deposition of Engineered Nanomaterials in Aquatic Environments: Role of Physicochemical Interactions", *Environmental Science & Technology*, Volume 44, September 2010, pages 6532-6549.
8. Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових модельних задач процесу фільтрування / Андрій Бомба, Юрій Климюк, Андрій Сафоник, Віктор Сівак. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 11. – С. 29-38.
9. Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін за умов неповних даних / Бомба А. Я., Гаврилюк В.І., Сафоник А.П., Фурсачик О.А. // Монографія. – Рівне : НУВГП, 2011. – 276 с.
10. Бомба А.Я. Математическое моделирование процесса фильтрования жидкости от многокомпонентного загрязнения с учетом обратного влияния характеристик процесса на характеристики среды / Бомба А.Я., Сафоник А.П. // Проблемы управления и информатики. 2013. – № 2. – С. 49-54.
11. Иванчов Н. И. Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении / И.Н. Иванчов // Сиб. мат. журнал. - 1998.—Т. 39, N 3.—С. 539-550.
12. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи / С. И. Кабанихин . – Новосибирск : Сибирское научное издательство, 2009. – 458 с.
13. Орлов В. О. Водоочисні фільтри із зернистою засипкою / В. О. Орлов. – Рівне : НУВГП, 2005. – 163с.
14. Сергиенко И. В. Решения комбинированных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем / И. В. Сергиенко, В. С. Дейнека // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – №5. – С. 48-71.
15. Сергиенко И. В. Идентификация градиентными методами параметров задач диффузии вещества в нанопористой среде / И. В. Сергиенко, В. С. Дейнека // Проблемы управления и информатики. – 2010. – №6. С. – 5-18.