УДК 539.3

Построение фундаментального решения уравнений статики изотропных пластин с использованием теории С. П. Тимошенко

И. П. Боков, Е. А. Стрельникова
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАНУ, Украина

Для вывода двумерных уравнений теории упругости для изотропных пластин использован метод аппроксимации перемещений, напряжений и деформаций рядами Фурье по полиномам Лежандра от поперечной координаты. Этот подход позволяет учесть поперечные касательные и нормальные напряжения. На основе полученных с помощью этого подхода уравнений для изотропных пластин разработана методика их расчета при действии сосредоточенных силовых воздействий. Фундаментальное решение полученных уравнений найдено с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье и методики обращения, построенной с помощью специальной G-функции.

Ключевые слова: *изотропные пластины, теория Тимошенко, уравнения статики, н.д.с. изотропной пластины, фундаментальное решение.*

Для виведення двовимірних рівнянь теорії пружності для ізотропних пластин використаний метод апроксимації переміщень, напруг і деформацій рядами Фур'є за поліномами Лежандра від поперечної координати. Цей підхід дозволяє врахувати поперечні дотичні і нормальні напруги. На основі отриманих за допомогою цього підходу рівнянь для ізотропних пластин розроблена методика їх розрахунку при дії зосереджених силових впливів. Фундаментальне рішення отриманих рівнянь знайдено за допомогою двовимірного інтегрального перетворення Фур'є і методики звернення, побудованої за допомогою спеціальної G-функції.

Ключові слова: *ізотропні пластини, теорія Тимошенко, рівняння статики, н.д.с. ізотропної пластини, фундаментальний розв'язок.*

The displacements, stresses and strains approximations via Fourier series in Legendre polynomials on the transverse coordinate method were used to derive the equations of two-dimensional theory of elasticity for isotropic plates. This allows us to take into account the transverse shear and normal stresses. Based on this approach, a calculation method was developed for isotropic plates under effects of concentrated forces. The fundamental solution of the equationsis obtained using a two-dimensional Fourier integral and conversion technicsbuilt using the special G-function.

Key words: *isotropic plate, theory of Timoshenko, the static equation, stress-strain state isotropic plate, fundamental solution.*

Введение

Разработке методов построения фундаментальных решений (решений, соответствующих сосредоточенным воздействиям) уравнений теории упругих тонких пластин и оболочек посвящено большое количество отечественных и зарубежных работ. Постановки задач, методы их решения и ряд конкретных решений содержатся в монографиях и научных статьях С.А. Амбарцумяна [1], А.Л. Гольденвейзера [2], S. Lukasiewicz [3], а также в ряде обзоров В.М. Даревского [4], Ю.П. Жигалко [5] и других.

Классическая теория Кирхгофа-Лява удовлетворительно описывает напряженно-деформированное состояние (н.д.с.) сравнительно тонких изотропных пластин, но не учитывает явления, обусловленные сдвигами и обжатием. С другой стороны, решение задач теории упругости в трехмерной постановке приводит к значительным математическим трудностям. Поэтому вопрос построения уточненных теорий тесно связан с проблемой приведения трехмерных задач к двумерным.

Таким образом, исследование на базе уточненных теорий напряженно-деформированного состояния изотропных пластин при сосредоточенных силовых воздействиях является актуальной и важной научно-технической задачей.

В работе для приведения трехмерной задачи для изотропных пластин к двумерной используется метод разложения искомых функций в ряды по полиномам Лежандра от нормальной координаты. Этот подход позволяет учесть поперечные касательные и нормальные напряжения. На основе полученных с помощью этого подхода уравнений для изотропных пластин разработана методика их расчета при действии сосредоточенных силовых воздействий.

Достоверность научных результатов обеспечивается корректностью постановки задачи и строгим математическим подходом к ее решению.

1. Постановка задачи

Рассматривается изотропная пластина толщины $2h$ в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z.

Пусть на пластину в начале координат (особой точке) действует сосредоточенная сила $\vec{F}$. В действительности так называемых сосредоточенных нагрузок не существует. Сосредоточенную силу можно представлять себе как некоторую абстракцию (конечную по величине силу, действующую на малый участок поверхности [6, с. 231]).

При решении задач о действии сосредоточенных сил искомое н.д.с. считаем локальным, т.е. не распространяющимся до линии внешнего контура пластины. Поэтому пластину считаем бесконечной и предполагаем, что искомые компоненты н.д.с. стремятся к нулю на бесконечности. Справедливость данного предположения проверяется после решения задачи.

Математическая постановка задачи содержит полную систему уравнений теории упругости без учёта граничных условий на краях реальной пластины. Искомые функции стремятся к нулю на бесконечности.

Система уравнений н.д.с. изотропных пластин на базе теории С.П. Тимошенко, описывающая н.д.с. при изгибе, состоит из [7, с. 35-37]:

- геометрических соотношений

$$e_{x1} = h\frac{\partial \gamma_x}{\partial x}, \quad e_{xy1} = h\left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x}\right), \quad e_{xz0} - \frac{e_{xz2}}{5} = \gamma_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (x \to y). \quad (1.1)$$

- соотношений упругости

$$M_x = D\left(e_{x1} + \nu e_{y1}\right), \quad M_y = D\left(e_{y1} + \nu e_{x1}\right), \quad H = \frac{1-\nu}{2} D e_{xy1}, \quad (1.2)$$

$$Q_x = \Lambda\left(e_{xz0} - \frac{e_{xz2}}{5}\right) \ (x \to y),$$

где $D = \frac{2h^2}{3}\frac{E}{1-\nu^2}$, $\Lambda = \frac{5hG}{3}$.

- уравнений равновесия

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x + m_x = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} - Q_y + m_y = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z = 0.$$

Чтобы найти фундаментальное решение системы (1.1)-(1.3), компоненты вектора объёмной силы в формулах (1.3) следует взять в виде

$$m_x(x,y) = h^2 m_x^* \delta(x,y), \quad m_y(x,y) = h^2 m_y^* \delta(x,y), \tag{1.4}$$

$$q_z(x,y) = h^2 q_z^* \delta(x,y) \ (x \to y),$$

где $m_x^*, m_y^*, q_z^* = const$, $\delta(x,y)$ – двумерная дельта-функция Дирака [8].

2. Определение трансформант обобщенных перемещений

Подставив геометрические соотношения (1.1) в соотношения упругости (1.2) и перейдя в безразмерную систему координат $x_1 = x/h$, $x_2 = y/h$, $x_3 = z/h$, получим

$$M_1 = D_0\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2}\right), \quad M_2 = D_0\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1}\right),$$

$$H = \frac{1-\nu}{2} D_0\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1}\right), \tag{2.1}$$

$$Q_1 = \Lambda_0\left(\gamma_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x_1}\right), \quad Q_2 = \Lambda_0\left(\gamma_2 + \frac{\partial w_0}{\partial x_2}\right),$$

где $D_0 = \frac{D}{Eh^2} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-\nu^2}$, $\Lambda_0 = \frac{5G}{3E}$.

Изгибающие и крутящий моменты определены в отношении к величине Eh^2, а перерезывающие силы – в отношении к величине Eh.

Переведя в безразмерную систему координат уравнения равновесия, получим

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1}+\frac{\partial H}{\partial x_2}-Q_1+m_1=0\,,\qquad \frac{\partial M_2}{\partial x_2}+\frac{\partial H}{\partial x_1}-Q_2+m_2=0\,,\tag{2.2}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}+q_3=0\,,$$

где $m_1=m_1^*\delta(x_1,x_2)$, $m_2=m_2^*\delta(x_1,x_2)$, $q_3=q_3^*\delta(x_1,x_2)$.

Решив систему, получаем трансформанты обобщенных перемещений:

$$\tilde{\gamma}_1=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{m_1^*}{D_0}\frac{\xi_1^2}{p^4}+3(1+\nu)m_1^*\frac{\xi_2^2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)}+\frac{q_3^*}{D_0}\frac{i\xi_1}{p^4}+\frac{m_2^*}{D_0}\frac{\xi_1\xi_2}{p^4}-\right.$$

$$\left.-3(1+\nu)m_2^*\frac{\xi_1\xi_2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)}\right],\tag{2.3}$$

$$\tilde{\gamma}_2=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{m_2^*}{D_0}\frac{\xi_2^2}{p^4}+3(1+\nu)m_2^*\frac{\xi_1^2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)}+\frac{q_3^*}{D_0}\frac{i\xi_2}{p^4}+\frac{m_1^*}{D_0}\frac{\xi_1\xi_2}{p^4}-\right.$$

$$\left.-3(1+\nu)m_1^*\frac{\xi_1\xi_2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)}\right],$$

$$\tilde{w}_0=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{m_1^*}{D_0}\frac{i\xi_1}{p^4}-\frac{m_2^*}{D_0}\frac{i\xi_2}{p^4}+\frac{q_3^*}{D_0}\frac{1}{p^4}+\frac{q_3^*}{\Lambda_0}\frac{1}{p^2}\right],$$

где $p^2=\xi_1^2+\xi_2^2$; (ξ_1,ξ_2) – координаты точки в пространстве трансформант.

3. Определение перерезывающих сил в пространстве трансформант

Применим преобразование Фурье к уравнениям закона Гука (2.1):

$$\tilde{M}_1=-D_0\left(i\xi_1\tilde{\gamma}_1+i\nu\xi_2\tilde{\gamma}_2\right),\quad \tilde{M}_2=-D_0\left(i\xi_2\tilde{\gamma}_2+i\nu\xi_1\tilde{\gamma}_1\right),$$

$$\tilde{H}=\frac{1-\nu}{2}D_0\left(i\xi_2\tilde{\gamma}_1+i\xi_1\tilde{\gamma}_2\right),\tag{3.1}$$

$$\tilde{Q}_1=\Lambda_0\left(\tilde{\gamma}_1-i\xi_1\tilde{w}_0\right),\ \tilde{Q}_2=\Lambda_0\left(\tilde{\gamma}_2-i\xi_2\tilde{w}_0\right).$$

Подставим ранее полученные трансформанты обобщенных перемещений (2.3) в трансформанты перерезывающих сил (3.1):

$$\tilde{Q}_1=\frac{2{,}5}{2\pi}\left[m_1^*\frac{\xi_2^2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)}-m_2^*\frac{\xi_1\xi_2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)}\right]-\frac{q_3^*}{2\pi}\frac{i\xi_1}{p^2}\,,\tag{3.2}$$

$$\tilde{Q}_2=\frac{2{,}5}{2\pi}\left[m_2^*\frac{\xi_1^2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)}-m_1^*\frac{\xi_1\xi_2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)}\right]-\frac{q_3^*}{2\pi}\frac{i\xi_2}{p^2}\,.$$

Обозначим

$$\widetilde{\Phi}_1(\xi_1,\xi_2)=\frac{i\xi_1}{p^2},\quad \widetilde{\Phi}_2(\xi_1,\xi_2)=\frac{\xi_1^2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)},\widetilde{\Phi}_3(\xi_1,\xi_2)=\frac{\xi_1\xi_2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)}. \quad (3.3)$$

Тогда перерезывающие силы в пространстве трансформант запишутся так

$$\widetilde{Q}_1=\frac{2{,}5}{2\pi}\left[m_1^*\widetilde{\Phi}_2(\xi_2,\xi_1)-m_2^*\widetilde{\Phi}_3(\xi_1,\xi_2)\right]-\frac{q_3^*}{2\pi}\widetilde{\Phi}_1(\xi_1,\xi_2), \quad (3.4)$$

$$\widetilde{Q}_2=\frac{2{,}5}{2\pi}\left[m_1^*\widetilde{\Phi}_2(\xi_1,\xi_2)-m_2^*\widetilde{\Phi}_3(\xi_1,\xi_2)\right]-\frac{q_3^*}{2\pi}\widetilde{\Phi}_1(\xi_2,\xi_1).$$

4. Нахождение перерезывающих сил

Необходимо теперь обратить выражения (3.4). Сначала найдём оригиналы функций (3.3) с использованием интегрального преобразования Фурье [9, с. 58]

$$F^{-1}\left[\widetilde{f}(\xi_1,\xi_2)\right]=f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{f}(\xi_1,\xi_2)e^{-i(\xi_1x_1+\xi_2x_2)}d\xi_1d\xi_2. \quad (4.1)$$

Получим

$$\Phi_1(x_1,x_2)=\frac{x_1\left(x_2^2-x_1^2\right)}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2},\ \Phi_3(x_1,x_2)=\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}G_{1,1}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right), \quad (4.2)$$

$$\Phi_2(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\left[G_{0,0}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)+\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2+x_2^2}G_{1,1}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\right],$$

где $G_{n,\nu}(rz)$ – специальная G-функция [10].

Применяя формулу обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье (4.1) к трансформантам внутренних силовых факторов (3.4) и учитывая выражения (4.2), запишем выражения для Q_1,Q_2 в пространстве оригиналов

$$Q_1=\frac{2{,}5}{2\pi}\left[\frac{m_1^*}{2}\left\{G_{0,0}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)+\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2+x_2^2}G_{1,1}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\right\}-\right.$$

$$\left.-m_2^*\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}G_{1,1}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\right]-\frac{q_3^*}{2\pi}\frac{x_1\left(x_2^2-x_1^2\right)}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}, \quad (4.3)$$

$$Q_2=\frac{2{,}5}{2\pi}\left[\frac{m_2^*}{2}\left\{G_{0,0}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)+\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}G_{1,1}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\right\}-\right.$$

$$\left.-m_1^*\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}G_{1,1}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\right]-\frac{q_3^*}{2\pi}\frac{x_2\left(x_1^2-x_2^2\right)}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}.$$

5. Анализ результатов численных исследований

Численные исследования были проведены для следующих материалов пластин: золото и железо. Коэффициенты Пуассона (ν) для данных материалов равны: 0,42 и 0,28 соответственно [11, с. 200].

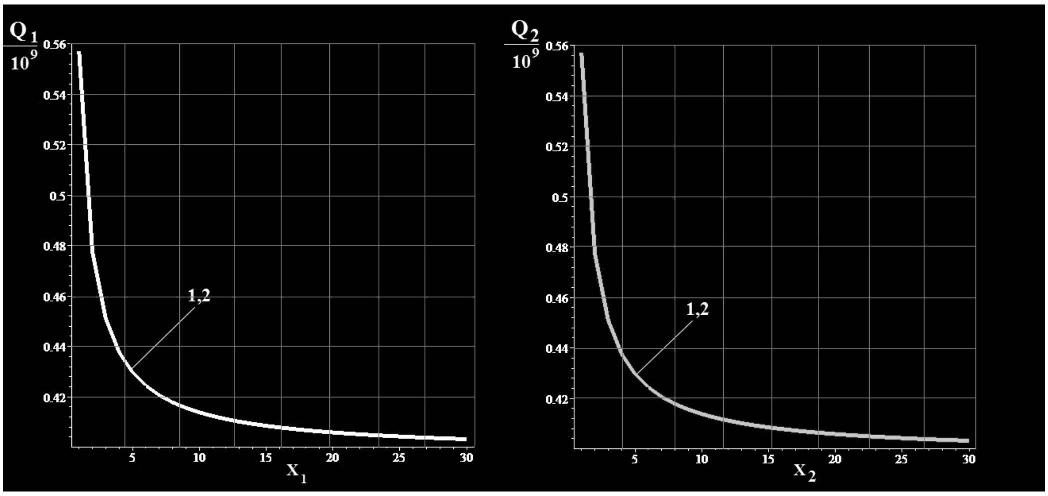

Рис.1. Перерезывающие силы Q_1, Q_2

На рис. 1 представлены графики обобщенных перерезывающих сил Q_1, Q_2 соответственно. Кривая 1 – материал золото, кривая 2 – железо. Для второго материала значение коэффициента Пуассона уменьшено. Видно, что обобщенные перерезывающие силы Q_1, Q_2 от упругих констант не зависят.

Заключение

Трехмерные уравнения теории упругости приведены к двумерным путем разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра относительно толщинной координаты. Построено фундаментальное решение полученных уравнений. Исследовано влияние упругих параметров на н.д.с. пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян.– М.: Наука, 1974.– 446 с.
2. Гольденвейзер А. Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки / А. Л. Гольденвейзер // Прикл. математика и механика. – 1944. – 8, вып. 6. – С. 441 – 467.
3. Lukasiewicz S. Introduction of concentrated loads in plate and shells / S. Lukasiewicz // Progress in Aerospace Sciences. – 1976. – 17, N 2. – P. 109 – 1046.

4. Даревский В. М. Контактные задачи теории оболочек (действие локальных нагрузок на оболочки) / В. М. Даревский // Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С. 927 – 933.
5. Жигалко Ю. П. Расчет тонких упругих цилиндрических оболочек на локальные нагрузки (обзор литературы, метод и результате) / Ю. П. Жигалко // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966. – Вып. 4. – С. 3 – 41.
6. Хан Х. Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения / Х. Хан.– М.: Мир, 1988.– 344 с.
7. Пелех Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько.– К.: Наук. думка, 1982.– 296 с.
8. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров.– М.: Наука, 1976.– 280 с.
9. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон.– М.: Издательство иностранной литературы, 1955.– 668 с.
10. Хижняк В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко; ДонГУ.– Донецк: ДонГУ, 1980.– 128 с.
11. Дементьев А. Д. Прикладные задачи теории упругости / А. Д. Дементьев, Л. А. Назаров, Л. А. Назарова.– Новосибирск, 2002.– 224 с.

Надійшла у першій редакції 21.05.2015, в останній - 26.05.2015.