УДК 51-72, 517.958

Точное решение начально-краевой задачи для уравнения аномальной диффузии

В. В. Николенко, В. А. Ячменёв
Сумский государственный университет, Украина

В этой статье мы представляем точное решение начально-краевой задачи для дробного дифференциального уравнения аномальной диффузии с дробной производной Римана-Лиувилля по времени порядка (0, 1), что соответствует режиму так называемой медленной диффузии. Решение получено для отрезка [*0, l*] с использованием преобразований Лапласса и в предположении, что один из концов отрезка (*x*=0) изолирован, а на другом (*x*=*l*) поддерживается постоянная концентрация вещества. Полученное решение записано в замкнутом виде и представляет собой обобщенный степенной ряд.

Ключевые слова: *Дробные операторы Римана-Лиувилля, аномальная диффузия, начально-краевая задача, точное решение.*

У цій статті отримано точний розв'язок початково-крайової задачі для дробового рівняння аномальної дифузії з дробовою похідною Рімана-Ліувілля за часом порядку (0, 1), що відповідає режиму так званої повільної дифузії. Розв'язок отримано для відрізка [0, l] з використанням перетворень Лапласа і в припущенні, що один із кінців відрізка (x = 0) ізольований, а на іншому (x = l) підтримується постійна концентрація речовини. Отриманий розв'язок записано в замкненому вигляді і являє собою узагальнений степеневий ряд.

Ключові слова: *Дробові оператори Рімана-Ліувілля, аномальна дифузія, початково-крайова задача, точний розв'язок.*

In this paper, we present an exact solution of the initial boundary value problem of fractional differential equation for anomalous diffusion with Riemann-Liouville time derivative of the order (0, 1), which corresponds to the so-called slow diffusion. A solution over the interval [*0, l*] is obtained using the Laplace transformation and assuming that one of the endpoints (*x* = 0) is isolated and at the another endpoint (*x* = *l*) the constant concentration is kept. The resulting solution is written in fundamental form and represents a generalized power series.

Key words: *Riemann-Liouville fractional operators, anomalous, diffusion, initial-boundary value problem, exact solution.*

1. Введение

Как известно, описание процессов диффузии основано на законах Фика, а классическое уравнение одномерной диффузии имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где D - коэффициент диффузии, а $u = u(x,t)$.

Для уравнений такого рода хорошо разработаны как точные, так и численные методы решения краевых задач [1].

Однако было замечено, что поведение некоторых процессов, таких как пластическая деформация распространение тепла, диффузия и др. не укладывается в рамки классического описания с помощью дифференциальных уравнений с производными целого порядка. Однако, оказалось, что процессы, проходящие, в частности, во фрактальных средах, можно моделировать дифференциальными уравнениями, содержащими дробные производные [2, 3]. Впрочем, впервые дробные частные производные были использованы в 1948 году А. Н. Герасимовым в его работе [4] при обобщении задач теории пластичности и их приложений к задачам внутреннего трения.

Отметим, что дробная производная по времени возникает при учете нелокальности по времени, которая связана с прилипанием диффундирующих атомов к стенкам пор [5].

К настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных решению различного рода краевых задач для уравнений дробного порядка, но в основном численными методами [6–10]. Тем не менее, для проведения достаточно полного «качественного» исследования изучаемой проблемы, желательно использование точных решений.

В данной работе получено точное решение начально-краевой задачи для уравнения аномальной диффузии с дробной производной по времени.

2. Постановка задачи и математическая модель

Будем изучать аномальную диффузию в ограниченном стержне $0 < x < l$. Будем считать, что вещество равномерно распределено внутри интервала $(0, l)$, на одном из торцов поддерживается постоянная концентрация, а другой конец изолирован. Задача сводится к решению уравнения

$$\left(D_{0+t}^{\alpha} u\right)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

при начальном условии

$$u\big|_{t=0} = u_0 \tag{2.2}$$

и граничных условиях

$$\begin{aligned} &\left(D_{0+t}^{1-\alpha} u\right)(0,t) = 0, \\ &u(l,t) = u_1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь

$$\left(D_{0+t}^{\alpha} u\right)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau$$

дробная производная Римана-Лиувилля относительно $t = 0$ порядка α ($\alpha = p/q$, где $p, q \in Z$). Здесь мы будем полагать, что $0 < \alpha < 1$, т.е. в данной статье рассматривается «медленная» диффузия, а λ^2 - коэффициент диффузии.

3. Решение задачи

К уравнению (2.1) и также к начальному (2.2) и граничным (2.3) условиям применим преобразование Лапласа относительно переменной t

$$U(x,s)=\int_0^\infty u(x,t)e^{-st}dt$$

В результате приходим к операторному уравнению

$$\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{s^\alpha}{\lambda^2}U=-\frac{u_0}{\lambda^2} \tag{3.1}$$

и следующим граничным условиям

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0}=0,\quad U\Big|_{x=l}=\frac{u_1}{s}. \tag{3.2}$$

Общее решение операторного уравнения (3.1) имеет вид

$$U=\frac{u_0}{s^\alpha}+c_1\cdot sh\left(\frac{x}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}\right)+c_2\cdot ch\left(\frac{x}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Произвольные постоянные c_1 и c_2 определим учитывая граничные условия (3.2). Имеем:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\dfrac{dU}{dx}\right|_{x=0}=c_2ch\left(\dfrac{s^{\alpha/2}}{\lambda}\right)=0\\ U\Big|_{x=l}=\dfrac{u_0}{s^\alpha}+c_1\cdot sh\left(\dfrac{l}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}\right)+c_2\cdot ch\left(\dfrac{l}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}\right)=\dfrac{u_1}{s}\end{array}\right\} \tag{3.3}$$

Из системы (3.3) получим

$$c_1=0\,,\ c_2=\frac{\left(\dfrac{u_1}{s}-\dfrac{u_0}{s^\alpha}\right)}{s}\Bigg/ch\left(\frac{l}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Таким образом, решение в изображениях имеет вид

$$U(x,s)=\frac{u_0}{s^\alpha}-\left(\frac{u_1}{s}-\frac{u_0}{s^\alpha}\right)\cdot ch\left(\frac{x}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}\right)\Bigg/ch\left(\frac{l}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}\right) \tag{3.4}$$

Для перехода от изображения $U(x,s)$ к оригиналу $U(x,t)$ воспользуемся обобщением правила дробных показателей [11].

Теорема. Пусть $U(x,s)\to 0$ при $s\to\infty$, $\operatorname{Re} s<0$ и не имеет в конечной s-плоскости никаких особенностей, кроме начала координат $s=0$, которое является точкой разветвления конечного порядка q.

Тогда, если разложение $U(x,s)$ в обобщенный ряд имеет вид:

$$U(x,s)=s^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x)s^{\beta k},$$

где β - рационально и положительно, то оригиналом $U(x,s)$ служит (умноженный на функцию Хевисайда $\eta(t)$) ряд

$$u(x,t)=\frac{1}{t^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k(x)}{\Gamma(-\alpha-k\beta)}\cdot\frac{1}{t^{k\beta}},$$

в котором вычеркнуты все члены с целыми неотрицательными $\alpha+k\beta$.

Действительно, обратимся к выражению (3.4). Гиперболические функции $ch\left(\frac{x}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $ch\left(\frac{l}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}\right)$ представим в виде обобщенных степенных рядов:

$$ch\left(\frac{x}{\lambda}s^{\alpha/2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{x}{\lambda}s^{\alpha/2}\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x)s^{\alpha k},\tag{3.5}$$

$$ch\left(\frac{l}{\lambda}s^{\alpha/2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{l}{\lambda}s^{\alpha/2}\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k s^{\alpha k},\tag{3.6}$$

где

$$b_k(x)=\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{x}{a}\right)^{2k},\ a_k=\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{l}{a}\right)^{2k}.$$

Выполнив деление степенных рядов (3.5) и (3.6), получим ряд

$$\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x)s^{\alpha k},$$

где коэффициенты $c_k(x)$ находятся последовательно из соотношений

$$a_0c_0 = b$$
$$a_0c_1 + a_1c_0 = b_1$$
$$..........................$$
$$a_0c_n + a_1c_{n-1} + ... + a_nc_0 = b_n$$
$$...$$

Здесь аргумент x для $b_k(x)$ опущен.

Таким образом, изображение $U(x,s)$ может быть представлено в виде ряда

$$U(x,s) = \frac{u_0}{s^\alpha} + \frac{1}{a_0}\left(\frac{u_1}{s} - \frac{u_0}{s^\alpha}\right)\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x)s^{\alpha k} \tag{3.7}$$

Тогда согласно сформированной ранее теоремы находим, что оригиналом для (3.7) служит выражение

$$u(x,t) = u_0 + \frac{u_1}{a_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k(x)}{\Gamma(1-k\alpha)}\cdot\frac{1}{t^{k\alpha}} - \frac{u_0}{a_0 t^{\frac{\alpha}{2}+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k(x)}{\Gamma(1-k\alpha)}\cdot\frac{1}{t^{k\alpha}},$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

4. Заключение

Полученное решение можно использовать для проведения численных экспериментов при моделировании процессов аномальной диффузии в системах, обладающих фрактальной структурой.

Вместе с тем на основании описанного в статье приема можно получить решение так называемого «волнового» уравнения

$$\left(D_{0+t}^{\alpha}u\right)(x,t) = \lambda^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial y^2},$$

где $1 < \alpha < 2$.

Отметим также, что фундаментальное решение для уравнения такого типа получено в работах [13, 14].

Авторы выражают благодарность Шпоте И. В. и Беде И. Н. за ценные советы и помощь в подготовке статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фарлоу, С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров : пер. с англ. / С. Фарлоу . – М. : Мир, 1985
2. R Gorenflo, F Mainardi, D Moretti and P Paradisi. Time fractional diffusion: a discrete random walk approach. Nonlinear Dynamics 29 (1-4), 129-143
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск.: Наука и техника, 1987. - 688 с.

4. Герасимов А.Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // АН СССР. Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12. С. 529-539.
5. Golovizin V. M., Kiselyov V. P., Korotkin I. A. Chislennye metody uravneniya drobnoy diffuzii v odnomernom sluchaye. M., 2002 (pereprint /IBR AE RAN. IBRAE-2002-01)
6. Бейбалаев В.Д. Численный метод решения математической модели теплопереноса в средах с фрактальной структурой // Фундаментальные иследования. – 2007. – 12. – С. 249-251.
7. Корчагина А. Н. Численное моделирование диффузионных процессов в фрактальных средах / А. Н. Корчагина, Л. А. Мержиевский // Ученые записки ЗГУ. Серия: Физика, математика, техника, технология. - 2013. - № 3 (50). - С. 53-59.
8. Мейланов Р.П., Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д., Шахбанова М.Р. Уравнение параболического типа с дифференцированием дробного порядка// Вестник ДНЦ РАН,- 2006,-С. 11-15.
9. Головизнин В.М., Короткий И.А. Методы численного решения некоторых одномерных уравнений с дробными производными // Дифференц. уравнения. 2006. - Т42, №7. - С. 907-913.
10. Фильштинський Л. А., Мукомел Т. В., Кірічок Т. А. Одновимірна початково-крайова задача для дробово-диференціального рівняння теплопровідності // Вісник Запорізького національного університету №1, 2010, с. 113-118
11. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.-716 с.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962, 1100 с.
13. Huang, F., Liu,F., The Space-Time Fractional Diffusion Equation with Caputo Derivatives, Journal of. Applied Mathematics and Computing, 19 (2005), 1-2, pp. 179-190.
14. Mainardi, F., The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation, Appl. Math. Lett., 9(6), (1996), pp. 23-28.

Надійшла у першій редакції 29.04.2015, в останній - 22.10.2015.