

УДК 004.932.72'1

Статистическая модель множества позиционных измерений на серии кадров участка небесной сферы

Н. Ю. Дихтяр¹, Я. С. Мовсесян¹, В. Е. Саваневич²¹Харьковский национальный университет имени радиоэлектроники, Украина²Ужгородский национальный университет, Украина

В статье разработано две статистических модели совокупности измерений, сформированных на серии кадров. Первая модель основана на предположении о том, что количество ложных измерений и измерений, принадлежащих другим классам объектов, имеет Пуассоновское распределение с известной интенсивностью. Вторая модель предполагает разделение кадров на элементарные объемы разрешения, в каждом из которых может быть сформировано только одно измерение, независимо от того, сколько небесных объектов ему соответствует. Данные статистические модели необходимы для разработки вычислительного метода формирования внутреннего каталога объектов неподвижных на серии кадров.

Ключевые слова: позиционные измерения, внутренний каталог, функция правдоподобия, внутрикадровая обработка.

У статті розроблено дві статистичних моделі сукупності вимірювань, сформованих на серії кадрів. Перша модель ґрунтується на припущенні про те, що кількість помилкових вимірювань і вимірювань, що належать іншим класам об'єктів, має Пуассонівський розподіл з відомою інтенсивністю. Друга модель припускає розподіл кадрів на елементарні обсяги дозволу, в кожному з яких може бути сформований тільки один вимір, не залежно від того, скільки небесних об'єктів йому відповідає. Дані статистичні моделі необхідні для розробки обчислювального методу формування внутрішнього каталогу об'єктів нерухомих на серії кадрів.

Ключові слова: позиційні вимірювання, внутрішній каталог, функція правдоподібності, внутрішньокадрова обробка.

The article presents two statistical models developed to treat the set of measurements performed on the sequence of coelosphere shots (frames). The first model is based on the assumption that the quantity of measurements, both false or related to other classes of objects, has the Poisson distribution of known intensity. In the second model, each frame is divided into elementary volumes, and for each of them only one measurement is made, not depending on number of the sky objects it contains. These models will be used to numerically determine fixed objects existing in sequential frames.

Key words: positional measurement, internal catalog, likelihood function, intraframe processing.

1 Введение

Астероидные наблюдения с автоматической или автоматизированной обработкой их результатов в настоящее время является значимым направлением астрометрии малых тел Солнечной системы. Астероиды наблюдаются на фоне большого количества звезд и распознаются на основании того, что они, в отличие от звезд, перемещаются, имеют не нулевое видимое движение.

Для качественного выделения астероидов (объектов с ненулевым видимым движением) на фоне большого количества звезд (объектов с нулевым видимым движением) необходима адекватная статистическая модель совокупности измерений, сформированных на исследуемой серии кадров.

2. Цель работы

Целью статьи является разработка адекватной статистической модели совокупности измерений, сформированных на исследуемой серии кадров, которая может быть использована при разработке вычислительного метода формирования внутреннего каталога объектов неподвижных на серии кадров.

3. Анализ литературы

Еще недавно астрометрические звездные каталоги формировались на основе двух обзоров (серий кадров) полученных через десятилетия одна от другой [1, 2, 3, 4]. Даже широко используемые сегодня астрометрические каталоги UCAC 4 [5, 6], XPM [7], Tycho-2 [8] сформированы по этому принципу. Возросшее количество наблюдений, доступное астрометристам, позволяет использовать до десятков и даже сотен наблюдений одного и того же небесного объекта при построении астрометрического каталога. Примером тому может быть проект GAIA [9] в котором, каждая звезда будет измерена от десятков до двухсот пятидесяти раз. При этом использование вычислительных методов, основанных на старом подходе, приведет к существенным потерям, содержащихся в измерениях информации. Следовательно, такой подход не кажется оправданным.

Параллельно с астрометрией в последние десятилетия бурно развивалась теория межкадровой (вторичной) обработки локационной информации [10, 11, 12]. При разреженном размещении контрастных объектов задача построения каталогов наблюдаемых объектов является тривиальной и может быть решена классическими стробовыми методами [11, 13, 14]. При плотных размещениях объектов и большом их количестве стробовые методы не обеспечивают заданные показатели качества построения каталогов наблюдаемых объектов. Данная ситуация исследовалась в работах Бакута П.А., Бар-Шалом, и других авторов [15, 16]

При формировании астрометрических каталогов, основанном на использовании десятков и сотен измерений положений каждой звезды, целесообразно использовать формальные методы и приемы, наработанные в теории межкадровой (вторичной) обработки локационной информации. При этом необходимо учесть основные особенности формирования астрометрических (позиционных) измерений в современных астрометрических обзорах [9, 17, 18, 19].

4. Изложение основного материала

Постановка задачи разработки статистической модели множества измерений, сформированных на N_{fr} кадрах. Для решения задачи необходимо записать выражение для соответствующей функции правдоподобия [20, 21, 22, 23, 24]. В качестве функции правдоподобия будет использована условная вероятность формирования на исследуемой серии кадров конкретного множества измерений с учетом наличия в исследуемом участке небесной сферы определенного количества небесных объектов Q_{sky} с параметрами их

положения и движения $\Omega_{sky} = \{\theta_1, \dots, \theta_j, \dots, \theta_{Q_{sky}}\}$. Множество измерений можно считать выборкой фиксированного объема.

В статье рассматриваются две статистические модели множества измерений, сформированных на исследуемой серии кадров. Первая модель предполагает, что количество измерений, не принадлежащих небесным объектам с практически нулевым видимым движением (объекты Солнечной Системы, ложные объекты), распределено по закону Пуассона с известной интенсивностью μ . Вторая модель предполагает возможность разделения кадра на элементарные объемы разрешения и возможность формирования в каждом элементе разрешения кадра только одного измерения, без относительно того, сколько небесных объектов ему соответствует.

Исходные предпосылки используемые при статистической модели множества измерений, сформированных на N_{fr} кадрах. Для обеих моделей справедливы следующие общие исходные предпосылки. Количество Q_{sky} небесных объектов, соответствующих исследуемому участку небесной сферы, не известно. Существует Q_{cat} каталогизированных объектов используемого звездного каталога, соответствующих исследуемому участку небесной сферы. Естественно, в исследуемом участке небесной сферы имеет место $Q_{nocat} = Q_{sky} - Q_{cat}$ некаталогизированных объектов.

Множество измерений n_{fr} -го кадра обозначается Ω_{nfr} и состоит из $\Omega_{nfr} = \{Y_{1nfr}, \dots, Y_{infr}, \dots, Y_{Qfr}\}$ измерений. При этом, каждое измерение $Y_{infr} = \{x_{in}; y_{in}; A_{in}\} = \{Y_{Kin}; A_{in}\}$ содержит оценки положения $Y_{Kin} = \{x_{in}; y_{in}\}$ и яркости (блеска) A_{in} небесных объектов. Множество измерений серии кадров Ω_{set} состоит из множеств измерений кадров Ω_{nfr} рассматриваемой серии $\Omega_{set} = \{\Omega_{1fr}, \dots, \Omega_{nfr}, \dots, \Omega_{Nfr}\}$.

На каждом кадре имеют место измерения как от неподвижных объектов, так и от ложных и подвижных объектов (объектов с ненулевым видимым движением). На одном кадре от одного небесного объекта не может быть более одного измерения. Ошибки координат i -го измерения положения и блеска небесного объекта на n_{fr} -ом кадре распределены по нормальному закону с нулевым средним и известной диагональной корреляционной матрицей Σ_{fin} . Данные ошибки можно считать независимыми как от измерения к измерению, так и от параметра к параметру в одном измерении. Координаты измерений ложных и подвижных объектов распределены равномерно и взаимно независимы. Из некоординатной информации используется только оценка блеска небесных объектов, содержащихся в измерениях.

При использовании первой модели (количество измерений от ложных и подвижных объектов распределено по закону Пуассона с известной интенсивностью) для записи выражения функции правдоподобия, описывающего множество Ω_{nfr} измерений, сформированных на исследуемой

серии кадров, дополнительно использованы следующие исходные предпосылки. Количество ложных и подвижных объектов на каждом кадре серии случайно и может быть описано законом Пуассона. Вероятность того, что на кадре присутствует измерение от j -го объекта n_c -го звездного каталога (вероятность правильного формирования измерения) равна $D_{\theta jnc}$ и зависит от блеска объекта и его взаимного расположения с соседними ему объектами на небесной сфере.

Функция правдоподобия должна учитывать следующие возможные результаты наблюдений. Во-первых, j -му небесному объекту с параметрами θ_j не соответствует ни одно из Q_{nfr} измерений n_{fr} -го кадра, то есть, все измерения принадлежат ложным и подвижным объектам (такие измерения, для краткости, в работе при описании метода формирования внутреннего каталога неподвижных объектов иногда называются ложными). Данная ситуация в статье называется «пропуском измерения». Во-вторых, только одному из Q_{sky} небесных объектов с параметрами θ_j соответствует одно измерение из Q_{nfr} , полученных на n_{fr} -ом кадре, остальные $(Q_{nfr} - 1)$ принадлежат ложным или подвижным объектам. В-третьих, только двум из Q_{sky} небесных объектов соответствует два измерения из Q_{nfr} , остальные $(Q_{nfr} - 2)$ измерения принадлежат ложным или подвижным объектам. И так далее. Перебор возможных вариантов причисления измерений объектам продолжается до тех пор, пока $Q_{nfr} - Q_{sky} \geq 0$.

Результатом внутрикадровой обработки является множество измерений. Реализацией шума (помехи) в результатах внутрикадровой обработки являются как ошибки оценок положения и блеска истинных небесных объектов, так и как «пропуск измерений» от истинных объектов, так и появление ложных измерений (измерений от ложных объектов).

Относительно исходных предпосылок, используемых при второй статистической модели множества измерений, сформированных на исследуемой серии кадров. Данная модель, как отмечалось ранее, предполагает возможность разделения кадра на множество элементарных объемов разрешения (ЭОР) и возможность формирования в каждом элементе разрешения кадра только одного измерения, без относительно того, сколько небесных объектов ему соответствует.

Размер кадра в этой связи выражается в ЭОР, задан (или может быть вычислен) и равен L_{EOR} . Данный размер определяется сингом (seeing) [25], выражаемым в угловых секундах, а через масштаб пикселя – и в пикселях. Синг характеризует качество астрономических изображений и обусловлен состоянием воздуха на пути светового луча от небесного объекта к телескопу [25]. Синг постоянен для различных объектов на кадре [25]. Как правило, в современной практике астрономических ПЗС-наблюдений при проведении астероидных обзоров размер ЭОР по одной координате составляет $3 \div 5$ пикселей.

Множество Ω_{nfr} измерений, сформированных на различных кадрах, по шуму (помехе) между собой независимо. Изначально шум (помеха) могут быть нестационарны. Однако за счет операций внутрикадровой обработки статистические характеристики шума (помехи) постоянны во времени и пространстве. Реализации шума (помехи) в различных измерениях (в результатах внутрикадровой обработки в различных ЭОР) независимы. Условная вероятность формирования измерения в ЭОР при отсутствии в нем небесного объекта F_{EOR} постоянна, известна и не равна своим предельным значениям 0 и 1; координаты ложных измерений распределены равномерно на кадре и взаимно независимы.

Условная вероятность формирования множества измерений кадра при заданном множестве небесных объектов исследуемого участка небесной сферы. Так как множества измерений различных кадров независимы, то далее будет обосновано выражение для условной вероятности формирования множества Ω_{nfr} измерений n_{fr} -го кадра при заданном множестве Ω_{sky} звезд исследуемого участка небесной сферы. При этом индекс n_{fr} , где это возможно, далее опущен.

В соответствии с исходными предпосылками выражение для условной вероятности формирования Q_{fr} измерений на n_{fr} -ом кадре при отсутствии ($Q_{sky} = 0$) хотя бы одной звезды $P_{\Omega_{nfr}/(0)}$ имеет вид:

$$P_{\Omega_{nfr}/(0)} = F_{EOR}^{Q_{sky}} (1 - F_{EOR})^{L_{EOR} - Q_{sky}} \cdot C^{Q_{sky}} \cdot \prod_{i=1}^{Q_{sky}} P_A(A_i/0), \quad (1)$$

где $C = \frac{1}{\Delta_{CCD}^2}$;

Δ_{CCD} – угловой размер пикселя ПЗС-матрицы;

$Q_{fr} = Q_{nfr}$ – количество измерений, сформированных на n_{fr} -ом кадре;

$P_A(A_i/0)$ – условная вероятность формирования оценки блеска небесного объекта A_i в i -ом измерении исследуемого кадра, при условии, что измерение принадлежит ложному объекту;

L_{EOR} – количество элементов разрешения, на которое можно разделить кадр.

В случае наличия на исследуемом участке небесной сферы одного объекта ($Q_{sky} = 1$) при условии, что на одном кадре от объекта (звезды) не может быть более одного измерения, возможны две ситуации. Первая носит название «пропуск измерения» и соответствует случаю, когда ни одно из измерений на кадре не принадлежит объекту. Ее вероятность определяется выражением:

$$P_{\Omega_{nfr} (0)/\theta} = F_{EOR}^{Q_{sky}} (1 - F_{EOR})^{L_{EOR} - Q_{sky} - 1} \cdot C^{Q_{sky}} (1 - D_{\theta}) \cdot \prod_{i=1}^{Q_{sky}} P_A(A_i/0), \quad (2)$$

или при $F_{EOR} \neq 1$:

$$P_{\Omega_{nfr} (0)/\theta} = P_{\Omega_{nfr} / (0)} \cdot \frac{1 - D_{\theta}}{1 - F_{EOR}}, \quad (3)$$

где D_{θ} – условная вероятность правильного обнаружения небесного объекта с параметрами видимого движения и блеска θ .

Во второй ситуации ровно одно (любое) измерение, сформированное на кадре, соответствует небесному объекту с параметрами видимого движения и блеска θ . (остальные ложные). Выражение для условной вероятности формирования множества измерений кадра при дополнительном условии, что I_{obj} -е измерение соответствует объекту (звезде), имеет вид:

$$P_{\Omega_{nfr} : I_{obj} / \theta} = F_{EOR}^{Q_{sky} - 1} \cdot (1 - F_{EOR})^{L_{EOR} - Q_{sky}} \times C^{Q_{sky} - 1} \cdot D_{\theta} \cdot P_A(A_{I_{obj}} / \theta) \cdot P_K(Y_{KI_{obj}} / \theta) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq I_{obj}}}^{Q_{sky}} P_A(A_i / 0). \quad (4)$$

где $P_K(Y_{Ki} / \theta)$, $P_A(A_i / \theta)$ – условные вероятности формирования оценки положения Y_{Ki} (координат) звезды и блеска A_i в i -ом измерении n_{fr} -го кадра, при условии, что измерение соответствует звезде с параметрами θ видимого движения и блеска, соответственно.

При использовании первой модели (количество измерений от ложных и подвижных объектов распределено по закону Пуассона с известной интенсивностью) вместо выражения (4) для условной вероятности формирования множества измерений кадра при дополнительном условии, что I_{obj} -е измерение соответствует звезде, целесообразно использовать выражение [26]:

$$P_{\Omega_{nfr} : I_{obj} / \theta} = P_{false}^{(Q_{sky} - 1)} \cdot C^{Q_{sky} - 1} \cdot (1 - D_{\theta}) \cdot D_{\theta} \cdot P_K(Y_{KI_{obj}} / \theta), \quad (5)$$

где $P_{false}^N = \frac{\mu^N}{N!} \cdot e^{-\mu}$ – вероятность формирования на исследуемом кадре ровно N измерений от ложных объектов, определенная с учетом того, что количество измерений от ложных объектов распределено по закону Пуассона [27] с интенсивностью μ .

Таким образом, выражение для условной вероятности формирования множества измерений кадра при наличии на кадре изображения одного небесного объекта с параметрами θ примет вид:

$$P_{\Omega nfr/\theta} = F_{EOR}^{Q_{sky}} (1 - F_{EOR})^{L_{EOR} - Q_{sky} - 1} \cdot C^{Q_{sky}} \cdot (1 - D_{\theta}) \prod_{i=1}^{Q_{sky}} P_A(A_i/0) +$$

$$+ F_{EOR}^{Q_{sky} - 1} (1 - F_{EOR})^{L_{EOR} - Q_{sky}} \cdot C^{Q_{sky} - 1} \times$$

$$\times \sum_{\eta=1}^{Q_{sky}} \left[D_{\theta} \cdot P_A(A_{Iobj}/\theta) \cdot P_K(Y_{KIobj}/\theta) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq Iobj}}^{Q_{sky}} P_A(A_i/0) \right], \quad (6)$$

или при $F_{EOR} \neq 0$, $F_{EOR} \neq 1$, $P_A(A_i/0) \neq 0$,

$$P_{\Omega nfr/\theta} = P_{\Omega nfr/(0)} \left[\frac{1 - D_{\theta}}{1 - F_{EOR}} + \frac{D_{\theta}}{F_{EOR}} \sum_{i=1}^{Q_{sky}} \frac{P_A(A_i/\theta)}{P_A(A_i/0)} \cdot \frac{P_K(Y_{KIobj}/\theta)}{C} \right]. \quad (7)$$

Вероятность формирования измерения от звезды с параметрами видимого движения и блеска θ на n_{fr} -м кадре в малой окрестности dy точки с координатами Y_{KIobj} определяется выражением:

$$P_K(Y_{KIobj}/\theta) = N_{Y_{KIobj}}(Y_{KIobj}(\theta); \Sigma_{fri n}) dy, \quad (8)$$

$$\text{где } N_x(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)} \quad (9)$$

– значение многомерного нормального распределения с математическим ожиданием μ и корреляционной матрицей Σ в точке x .

При записи выражения для условной вероятности формирования множества измерений на рассматриваемом кадре при наличии на нем изображений Q_{sky} звезд с параметрами блеска и видимого движения $\Omega_{sky} = \{\Theta_1, \dots, \Theta_{Q_{sky}}\}$ первоначально предполагается, что каждая звезда различаема, а изображения соседних объектов практически не пересекаются.

Из Q_{fr} измерений, сформированных на n_{fr} -ом кадре, H принадлежат объектам (звездам) $H = \overline{0, Q_{sky}}$, остальные являются ложными, а ситуация «пропуск измерения» на n_{fr} -м кадре повторяется $Q_{sky} - H$ раз.

Вероятность $P_{\Omega nfr(0)/\Omega_{sky}}$ отсутствия на кадре измерений от звезд ($H = 0$) равна произведению вероятностей одновременного пропуска всех Q_{sky} объектов и формирования в оставшихся $(L_{EOR} - Q_{sky})$ ЭОР кадра ровно Q_{fr} ложных измерений:

$$P_{\Omega nfr(0)/\Omega_{sky}} = P_{\Omega nfr/(0)} \cdot \prod_{j=1}^{Q_{fr}} \frac{1 - D_{\theta_j}}{1 - F_{EOR}}. \quad (10)$$

Вероятность формирования множества измерений кадра при одном

измерении от звезды (остальные измерения – ложные) на кадре $P_{\Omega_{nfr} (1)/\Omega_{sky}}$ по аналогии с (7) определяется Q_{fr} слагаемыми. Каждое из указанных слагаемых соответствует гипотезе о том, что очередное измерение соответствует изображению от j -го ($j = \overline{1, Q_{sky}}$) небесного объекта. Каждое из этих слагаемых содержит, в свою очередь, Q_{fr} слагаемых (по количеству гипотез о номере измерения, которое соответствует звезде):

$$P_{\Omega_{nfr} (1)/\Omega_{sky}} = P_{\Omega_{nfr} (0)/\Omega_{sky}} \sum_{j=1}^{Q_{sky}} \frac{1 - F_{EOR}}{1 - D_{\theta_j}} \times \frac{D_{\theta_j}}{F_{EOR}} \sum_{i=1}^{Q_{fr}} \left[\frac{P_A(A_i/\theta_j)}{P_A(A_i/0)} \frac{P_K(Y_{KlObj}/\theta_j)}{C} \right]. \quad (11)$$

Аналогичные выражения при двух, трех и H измерений звезд имеют вид:

$$P_{\Omega_{nfr} (2)/\Omega_{sky}} = P_{\Omega_{nfr} (0)/\Omega_{sky}} \sum_{j_1=1}^{Q_{sky}} \sum_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}} \frac{(1 - F_{EOR})^2}{(1 - D_{\theta_{j_1}})(1 - D_{\theta_{j_2}})} \times \frac{D_{\theta_{j_1}} D_{\theta_{j_2}}}{F_{EOR}^2} \sum_{i_1=1}^{Q_{fr}} \sum_{\substack{i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^{Q_{fr}} \left[\frac{P_A(A_{i_1}/\theta_{j_1}) P_A(A_{i_2}/\theta_{j_2})}{P_A(A_{i_1}/0) P_A(A_{i_2}/0)} \frac{P_K(Y_{KlObj1}/\theta_{j_2}) P_K(Y_{KlObj2}/\theta_{j_2})}{C^2} \right]; \quad (12)$$

$$P_{\Omega_{nfr} (3)/\Omega_{sky}} = P_{\Omega_{nfr} (0)/\Omega_{sky}} \cdot \left(\frac{1 - F_{EOR}}{F_{EOR}} \right)^3 \cdot \prod_{Iobj=1}^3 \left[\frac{D_{\theta_j}}{1 - D_{\theta_j}} \right] \times \sum_{j_1=1}^{Q_{sky}} \sum_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}} \sum_{j_3=j_2+1}^{Q_{sky}} \sum_{i_1=1}^{Q_{fr}} \sum_{\substack{i_2=1 \\ i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3 \\ i_1 \neq i_3}}^{Q_{fr}} \sum_{i_3=1}^{Q_{fr}} \left[\frac{1}{C^3} \prod_{Iobj=1}^3 \frac{P_A(A_{Iobj}/\theta_j) \cdot P_K(Y_{KlObj}/\theta_j)}{P_A(A_{Iobj}/0)} \right]; \quad (13)$$

$$P_{\Omega_{nfr} (H)/\Omega_{sky}} = P_{\Omega_{nfr} (0)/\Omega_{sky}} \cdot \left(\frac{1 - F_{EOR}}{F_{EOR}} \right)^H \left[\prod_{Iobj=1}^H \frac{D_{\theta_j}}{1 - D_{\theta_j}} \right] \frac{1}{C^H} \times \sum_{j_1=1}^{Q_{sky}} \sum_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}} \dots \sum_{j_H=j_{H-1}+1}^{Q_{sky}} \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_\alpha \neq i_\beta}}^{Q_{fr}} \dots \sum_{\substack{i_H=1 \\ for \forall \alpha, \beta}}^{Q_{fr}} \prod_{Iobj=1}^H \frac{P_A(A_{Iobj}/\theta_{j_{Iobj}}) \cdot P_K(Y_{KlObj}/\theta_j)}{P_A(A_{Iobj}/0)}. \quad (14)$$

Итоговая формула для условной вероятности формирования конкретного множества Ω_{nfr} измерений на кадре при наличии в соответствующем участке небесной сферы Q_{sky} звезд с параметрами $\Omega_{sky} = \{\theta_1, \dots, \theta_j, \dots, \theta_{Q_{sky}}\}$ в предположении, что все объекты различаемы, имеет вид:

$$P_{\Omega_{nfr} / \Omega_{sky}} = P_{\Omega_{nfr} (0)/\Omega_{sky}} \cdot \sum_{H=0}^{\min(Q_{fr}, Q_{sky})} \tilde{P}_{\Omega_{nfr} (H)/\Omega_{sky}}, \quad (15)$$

$$\text{где } \tilde{P}_{\Omega nfr (H)/\Omega sky} = \frac{P_{\Omega nfr (H)/\Omega sky}}{P_{\Omega nfr (0)/\Omega sky}}.$$

Впервые выражения, подобные (1), (14), (15), были использованы в качестве функции правдоподобия потока измерений/отметок/сигналов в работе [10]. По сути, это представление поля правдоподобия на входе межкадровой обработки смесью вероятностных распределений, в данном случае – многомерных нормальных распределений.

При использовании первой статистической модели множества измерений, сформированных на исследуемом кадре (количество измерений, не принадлежащих небесным объектам исследуемой группы или ложных измерений, распределено по закону Пуассона с известной интенсивностью) выражение (15) останется без изменения, а выражения (10) ÷ (14) примут следующий вид:

$$P_{\Omega nfr (0)/\Omega sky} = P_{\Omega nfr (0)} \cdot \prod_{j=1}^{Q_{sky}} (1 - D_{\theta_j}). \quad (16)$$

$$P_{\Omega nfr (1)/\Omega sky} = P_{\Omega nfr (0)/\Omega sky} \cdot \frac{Q_{fr}}{\mu \cdot \tilde{N}} \cdot \sum_{j=1}^{Q_{sky}} \left[D_{\theta_j} \sum_{i=1}^{Q_{fr}} P_K(Y_{KlObj}/\theta_j) \right]. \quad (17)$$

$$P_{\Omega nfr (2)/\Omega sky} = P_{\Omega nfr (0)/\Omega sky} \left[\frac{Q_{fr}}{\mu \cdot \tilde{N}} \right]^2 \times \\ \times \sum_{j_1=1}^{Q_{sky}} \sum_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}} D_{\theta_{j_1}} D_{\theta_{j_2}} \sum_{\substack{i_1=i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^{Q_{fr}} P_K(Y_{KlObj1}/\theta_{j_1}) \cdot P_K(Y_{KlObj2}/\theta_{j_2}). \quad (18)$$

$$P_{\Omega nfr (3)/\Omega sky} = P_{\Omega nfr (0)/\Omega sky} \left[\frac{Q_{fr}}{\mu \cdot C} \right]^3 \times \\ \times \sum_{j_1=1}^{Q_{sky}} \sum_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}} \sum_{j_3=j_2+1}^{Q_{sky}} \sum_{i_1=1}^{Q_{fr}} \sum_{\substack{i_2=1 \\ i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3}}^{Q_{fr}} \sum_{\substack{i_3=1 \\ i_1 \neq i_3}}^{Q_{fr}} \prod_{\eta=1}^3 P_K(Y_{KlObj}/\theta_j). \quad (19)$$

$$P_{\Omega nfr (H)/\Omega sky} = P_{\Omega nfr (0)/\Omega sky} \left[\frac{Q_{fr}}{\mu \cdot C} \right]^H \times \\ \times \sum_{j_1=1}^{Q_{sky}} \sum_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}} \dots \sum_{j_H=j_{H-1}+1}^{Q_{sky}} \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_\alpha \neq i_\beta}}^{Q_{fr}} \dots \sum_{\substack{i_H=1 \\ \text{for } \forall \alpha, \beta}}^{Q_{fr}} \prod_{\eta=1}^H P_K(Y_{KlObj}/\theta_j). \quad (20)$$

При допустимости ситуации покрытия звезд друг друга (ситуации

неразрешения) Q_{sky} звезд на исследуемом кадре занимают $\xi \leq Q_{sky}$ ЭОР. При этом два небесных объекта с параметрами Θ_α и Θ_β занимают $\xi_{\alpha\beta} \leq 2$ ЭОР, три небесных объекта занимают $\xi_{\alpha\beta\gamma} \leq 3$ ЭОР и т.д. Кроме того, в некоторых случаях изображение от некоторых звезд не обнаруживается. Вместе с тем при достаточно малых расстояниях между небесными объектами изображение от них выделяется весьма устойчиво. Данный факт при необходимости можно учесть введением совместной плотности распределения или соответствующих вероятностей яркостных и координатных параметров измерений от группы близких объектов/звезд $P_A(A_i/\theta_{j1}, \theta_{j2})$ и $P_K(Y_{KObj}/\theta_{j1}, \theta_{j2})$.

С целью минимизации громоздкости выражения для условной вероятности формирования множества Ω_{nfr} измерений кадра при наличии в соответствующем участке небесной сферы Q_{sky} звезд с параметрами $\Omega_{sky} = \{\theta_1, \dots, \theta_j, \dots, \theta_{Q_{sky}}\}$ предлагается следующий подход. Параметры множества Ω_{sky} звезд исследуемого участка неба прогнозируются на время привязки n_{fr} -го кадра. Определяются взаимные расстояния между объектами и определить взаимно-неразличаемые объекты. Такие объекты на n_{fr} -м кадре объединяются в один с параметрами $\Theta_j = (\Theta_m \vee \Theta_n)$. Указанные параметры характеризуют особенности законов распределения координат и блеска небесных объектов, которые соответствуют «совмещенным» измерениям. Сформированное таким образом множество Ω_{sky} звезд исследуемого участка небесной сферы подставляются в выражения (14), (15). При этом будет получен искомый закон условного распределения множества Ω_{nfr} измерений кадра при заданном множестве Ω_{sky} звезд исследуемого участка небесной сферы с учетом возможного покрытия (неразрешения) изображений звезд, принадлежащих компактным группам близких объектов. На другом кадре другие объекты будут или могут быть объединены в один объект, соответствующий неразрешаемой компактной группе близких звезд.

5. Выводы

В статье разработано две статистической модели совокупности измерений, сформированных на исследуемой серии кадров. Первая модель предполагает, что количество измерений, не принадлежащих небесным объектам с практически нулевым видимым движением (объекты Солнечной Системы, ложные объекты), распределено по закону Пуассона с известной интенсивностью. Вторая модель предполагает разделение любого кадра на элементарные объемы разрешения и возможность формирования в каждом элементе разрешения кадра только одного измерения, без относительно того, сколько небесных объектов ему соответствует. Введенные модели учитывают основные особенности формирования множества измерений на серии кадров.

Разработанные статистические модели могут быть использованы при

разработке вычислительного метода формирования внутреннего каталога объектов неподвижных на серии кадров.

Дальнейшие исследования целесообразно сконцентрировать на разработке вычислительного метода оценки параметров положений близких объектов, что особенно актуально при ненулевой вероятности перепутывания измерений от разных объектов, сформированных на серии кадров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fricke W., Schwan H., Corbin T. Fifth Fundamental Catalogue (FK5) Part II. The FK5 Extension Veroeff. Astron. Rechen-Institut Heidelb. – 1991. – N. 33.
2. Heckmann O., Dieckvoss W., et al.: Star catalogue of positions and proper motions north of -2.5 deg declination AGK3. Hamburg-Begerdorf – 1975. – V. 8.
3. Luyten, W. J. VizieR Online Data Catalog: NLTT Catalogue (Luyten, 1979). VizieR On-line Data Catalog: I/98A – 1995.
4. Gill D., Kapteyn J. C. The Cape photographic Durchmusterung. For the equinox 1875. Pt.1: Zones -18 deg. to -37 deg. Annals of the Cape Observatory, London: Darling, 1896
5. Zacharias, N.; Finch, C. T. et al (2013). The Fourth US Naval Observatory CCD Astrograph Catalog (UCAC4). The Astronomical Journal, 145(2), id. 44, 14.
6. Zacharias N. The fourth U.S. Naval Observatory CCD Astrograph Catalog (UCAC4) // Norbert Zacharias for the UCAC team, USNO, Washington DC. – July 2012 // [Электронный ресурс] – Режим доступа к ресурсу: http://ad.usno.navy.mil/ucac/readme_u4v5 – Название с экрана.
7. Fedorov P. N., Myznikov A. A., Akhmetov V. S. The XPM Catalogue: absolute proper motions of 280 million stars // MNRAS. – 2009. – V. 393. – P. 133-138
8. Hog E.; Fabricius C.; Makarov V. V. The Tycho-2 catalogue of the 2.5 million brightest stars // Astronomy and Astrophysics, – 2000. – V. 355. – P. L27-L30
9. Gaia Follow-Up Network for Solar System Objects [Электронный ресурс] — Режим доступа: <https://gaiafunso.imcce.fr/> — Загл. с экрана.
10. Бакут П.А., Жулина Ю.В., Иванчук Н.А. Обнаружение движущихся объектов. – М.: «Сов. Радио». – 1980. – 288 с.
11. Кузьмин С.З. Цифровая радиолокация. Введение в теорию / С.З. Кузьмин – К.: Издательство КвіЦ, 2000. – 428 с.
12. Bar-Shalom Y. Kalman Filter Versus IMM Estimator: When Do We Need / Y. Bar-Shalom // IEEE Trans. on AES. – 2003. – Vol. 39, № 4. – P. 1452 – 1456.
13. Кузьмин С.З. Основы проектирования систем цифровой обработки радиолокационной информации – М.: "Радио и связь", 1986 - 352 с.
14. Кузьмин С.З. Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации – М.: "Сов. радио", 1974 г. - 432 с.
15. Саваневич В.Е. Програма CoLiTec автоматизированного обнаружения небесных тел со слабым блеском / В. Е. Саваневич, А. Б. Брюховецкий, А. М. Кожухов, Е. Н. Диков, В. П. Власенко // Космічна наука і технологія. – 2012. – т.18. – №1. – С. 39 – 46.
16. Брюховецкий, А. Б. Вычислительные методы обработки данных для обнаружения объектов с локально неизменными параметрами видимого

- движения / А. Б. Брюховецкий // Радиоэлектроника и информатика : науч.-техн. журн. – Х. : Изд-во ХНУРЭ, 2012. – Вып. 2. – С. 15-22.
17. The Large Synoptic Survey Telescope [Электронный ресурс] — Режим доступа: <http://www.lsst.org/> — Загл. с экрана.
 18. Ory, M. THE MOROCCO OUKAIMEDEN SKY SURVEY, THE MOSS TELESCOPE [Текст] / M. Ory, A. Daassou, F. Colas, et.al. // Asteroids, Comets, Meteors – 2012
 19. Spacewatch Project Telescopes on Kitt Peak [Электронный ресурс] — Режим доступа: <http://spacewatch.lpl.arizona.edu/> – Загл. с экрана.
 20. Брандт З. Анализ данных: Статистические и вычислительные методы для научных работников и инженеров / З. Брандт; пер. с англ. – М.: Мир, АСТ, 2003. – 686 с.
 21. Закс Ш. Теория статистических выводов / Ш. Закс; пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 776 с.
 22. Леман Э. Проверка статистических гипотез / Э. Леман; пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 408 с.
 23. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Кобзарь А. [Текст] / Кобзарь А.И. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.
 24. Андреева М.И., Горелик Р.Е., Чесноков О.К., Случайные величины и законы их распределения: учеб. пособие [Текст] / М.И.Андреева, Р.Е. Горелик, О.К. Чесноков, ВолгГТУ.: – Волгоград, 2010. - 116 с.
 25. Frederick Chromey R. To measure the sky : an introduction to observational astronomy (1. publ. ed.) / Chromey R. Frederick // Cambridge: Cambridge University Press. –2010 – P. 140.
 26. Симонова О.Г. МНК–оценка параметров зависимых линейных траекторий по классифицированной выборке // Системи обробки інформації: Зб. наук. пр. – Харків: НАНУ, ПАНМ, ХВУ, 2004. Вип. 9 (37). – С. 164 – 169.
 27. Вагис Г.А., Гупал А.М., Сергиенко И.В. Эффективность байесовской процедуры распознавания. Дискретный случай // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 4. – С. 3 – 13.