

УДК 621.9:658.5

Моделирование тепловых процессов в режущей пластинеА. В. Агулов², Р. Ю. Бондаренко¹, Л. В. Васильева²,А. А. Гончаров^{1,2}¹Сумський державний університет, Україна²Донецька державна машинобудівна академія, Україна

Рассмотрен процесс тепловыделения в процессе обработки металлов резанием. Разработана математическая модель распределения температуры в режущей пластине. Проведена дискретизация математической модели на основе локально одномерной схемы А. А. Самарского. Реализован численный расчет температурного поля пластины. Благодаря введению вспомогательных дробных шагов получена устойчивая схема, что уменьшает объем вычислений. Данный метод позволяет частично снизить затраты на проведение экспериментальных исследований.

Ключевые слова: математическая модель, распределение температуры, режущая пластина.

Розглянуто процес виділення тепла в процесі обробки металів різанням. Розроблено математичну модель розподілу температури в ріжучій пластині. Проведена дискретизація математичної моделі на основі локально одновимірної схеми О. А. Самарського. Реалізовано чисельний розрахунок температурного поля пластины. Завдяки введенню допоміжних дрібних кроків отримана стійка схема, завдяки чому зменшується обсяг обчислень. Даний метод дозволяє частково знизити витрати на проведення експериментальних досліджень.

Ключові слова: математична модель, розподіл температури, ріжуча пластина.

The process of heat generation in course of metal cutting treatment was investigated. The mathematical model was developed, which describes the temperature distribution in the cutting plate. The model discretization was based on the locally one-dimensional scheme by A.A. Samarskiy. This allowed the authors to perform numerical calculation of the temperature field over the plate. Introduction of auxiliary fractional steps had provided a stable scheme, which reduced the amount of computations. Application of this method will partially scale down the cost of experimental research.

Key words: mathematical model, temperature distribution, cutting plate.

1. Введение

Машиностроительная промышленность уделяет большое внимание вопросам повышения надежности, экономичности и ресурса выпускаемых изделий. Решение их требует применения материалов, способных работать в агрессивных средах, в условиях высоких температур и давлений, повышенных вибраций при различных нагрузках [1].

Работоспособность режущего инструмента зависит от многих факторов, главную роль играет сопротивляемость контактных площадок изнашиванию и разрушению, которые происходят в результате трения [2].

Процесс резания металлов сопровождается значительным тепловыделением. Наиболее интенсивное выделение тепла происходит в области стружкообразования. Тепло распространяется от точек с более высокой температурой к точкам с низкой температурой [3].

В начале обработки температура в зоне резания растет до какого-то определенного значения и устанавливается постоянной, соответствующей стационарному тепловому режиму [4]. Для практических целей наибольший интерес представляет температура рабочей части инструмента и обрабатываемой заготовки.

2. Математическая модель

Смоделируем тепловой процесс, протекающий в режущей пластине и проиллюстрируем возможность применения метода сеток для расчета этого процесса. Рассмотрим следующую задачу теплопроводности (рис. 1). На участке $S_c := [a, b]$ и $S_g := [a, c]$ режущей пластины температуру [5] пластины можно считать заданной и равной (быть может, уменьшенной как некоторую константу) температуре стружки u_c . На участке S_p заданы условия теплообмена с окружающей средой, которые могут быть различны в зависимости от наличия или отсутствия и типа применяемой СОЖ, а также наличия или отсутствия прилегающих деталей, например, стружколома.

На участках передней и задней поверхности резца S_1 и S_2 задана экспоненциальная зависимость температуры. В простейшем случае можно считать, что «поток теплоты» определяется условиями теплообмена с воздушной средой C_e (обычно $C_e \approx 0$): $\left\langle \frac{du}{dx}(t, x), h_{S_i} \right\rangle + C_e(u(t, x) - u_e) = 0$, при $x \in S_i$, $i = 1, 2$, где h_{S_i} – нормаль к поверхности S_i , $i = 1, 2$, $u(t, x)$ – температура пластины, t – время, $x := (x^1, x^2)$, $\frac{du}{dx} := \left(\frac{du}{dx^1}, \frac{du}{dx^2} \right)$, $C_e > 0$ – постоянный коэффициент, U_e – температура воздуха.

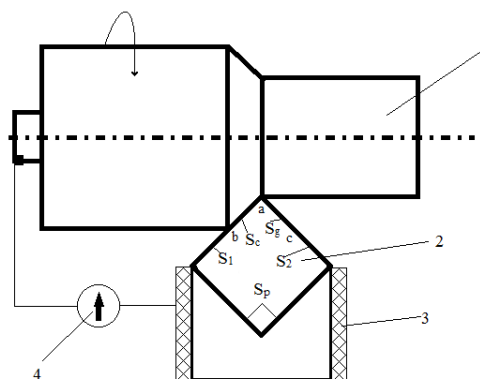


Рис. 1. Схема измерения температуры в зоне резания методом естественной термопары, где 1- обрабатываемая заготовка, 2- резец, 3-изоляция, 4-милливольтметр

В данных обозначениях задача примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - C_0 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}\right)u(t, x) = 0 \quad (\forall (t, x) \in R_+ \times D_n); \quad (1.1a)$$

$$u(0, x) = u_g \quad (\forall x \in D_n); \quad (1.1б)$$

$$u(t, x) = u_c \quad (\forall (t, x) \in R_+ \times S_c); \quad (1.1в)$$

$$u(t, x) = u_g \quad (\forall (t, x) \in R_+ \times S_g) \quad (1.1г)$$

$$\left\langle \frac{du}{dx}(t, x), h_{S_i} \right\rangle + C_g(u(t, x) - u_g) = 0 \quad (\forall (t, x) \in R_+ \times (S_1 \cup S_2)), \quad (1.1д)$$

где $R_+ := \{t \in R: t \geq 0\}$; D_n – область пространства R^n , соответствующая режущей пластине (рис. 1), u_g, u_c, u_g, C_g, C_0 – соответствующие положительные константы. Начальные условия в данной постановке задаются для двух задач Коши: на основании $\{0\} \times D_n$ – (1.1б), и на боковой поверхности $R_+ \times \partial D_n$ – условия (1.1в) – (1.1д), цилиндра $R_+ \times D_n$ (через ∂D_n мы обозначим границу D_n в R^2). В то же время, условия (1.1в) – (1.1д) на ∂D_n недостаточны, т.е. одна из величин $u(t, x)$, либо $u_x(t, x)$ оказывается неопределенной. В классе аналитических функций условия (1.1б) достаточно, так как из него вытекает однозначная определенность $u(0, x)$ при всех $x \in R^2$. Условия (1.1в) – (1.1д) в этом случае избыточны, и в общем случае несовместимы с (1.1б) (в частности, если $u_c \neq u_g$, что как раз естественно предполагать). Таким образом, даже в классе непрерывных всюду функций $u(t, x)$ решения данной задачи, например, в случае $u_c \neq u_g$ не существует.

Будем искать условия согласования на функции $f(x) \in C_2(R^2, R)$ и $g(t, x) \in C_2(R^3, R)$, при которых существует решение задачи

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - C_0 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}\right)u(t, x) = 0 \quad (\forall (t, x) \in R_+ \times D_n); & (1.2a) \\ u(0, x) = f(x) \quad (\forall x \in D_n); & (1.2б) \\ C_1 u(t, x) + C_2 \langle b, u_x(t, x) \rangle = g(t, x) \quad (\forall (t, x) \in R_+ \times \partial D_n), & (1.2в) \end{cases}$$

где D_n – область гомоморфная шару, f и g – достаточно гладкие функции, $b \in R^2$ – заданный вектор $\|b\| = 1$, $C_i, i = 1, 2$ – постоянные, $C_0 > 0, C_1 \geq 0, C_2 \geq 0$.

Задача (1.2а) - (1.2в) имеет единственное аналитическое решение $u(t, x)$, которое однозначно определяется первым условием (1.2б). Второе краевое условие (1.2в) однозначно определяется первым условием, если рассматривается класс аналитических решений $u(t, x)$ при аналитических функциях f и g [6].

3. Численное решение

Математическая постановка задачи будет иметь вид:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad \begin{cases} 0 < x < Lx, \\ 0 < y < Ly. \end{cases} \quad (2)$$

Начальные и граничные условия:

$$t = 0 : T = T_0, 0 < x < Lx, 0 < y < Ly;$$

$$x = 0 : -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = S_p, t > 0;$$

$$x = Lx : \begin{cases} 0 < \frac{Ly}{2}, T = S_2, t > 0, \\ \frac{Ly}{2} < Ly, T = S_g, t > 0; \end{cases}$$

$$y = 0 : -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = S_p, t > 0;$$

$$y = Ly : \begin{cases} 0 < \frac{Lx}{2}, T = S_1, t > 0, \\ \frac{Lx}{2} < Lx, T = S_c, t > 0. \end{cases}$$

Дискретизацию уравнения (2) будем проводить на основе локально одномерной схемы А. А. Самарского [7], которая является абсолютно устойчивой и обладает свойством суммарной аппроксимации. Сущность этого подхода состоит в том, что шаг по времени реализуется в два этапа – на промежуточном временном шаге проводим дискретизацию двумерного уравнения (2) только в направлении оси x и получаем одномерное уравнение, после его решения проводим вновь дискретизацию уравнения (2), но уже в направлении оси y и, решая полученное одномерное уравнение, определяем поле температуры на целом шаге по времени (рис. 2).

Такая дискретизация позволила преобразовать дифференциальные уравнения в системы алгебраических уравнений [8]. Указанная область решения D покрывается координатной сеткой, а все переменные заменяются сеточными функциями, т.е. значения переменных исследовались не для всего бесконечного множества точек области, а лишь для некоторого конечного подмножества G , причем при решении помимо координатной сетки вводится сетка времени. Размерность дискретной задачи определяется произведением числа точек координатной сетки на количество независимых переменных в исходных дифференциальных уравнениях.

Множество точек $G = \{x_i = ih \mid i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ называется равномерной одномерной координатной сеткой, а число h – шагом сетки [9].

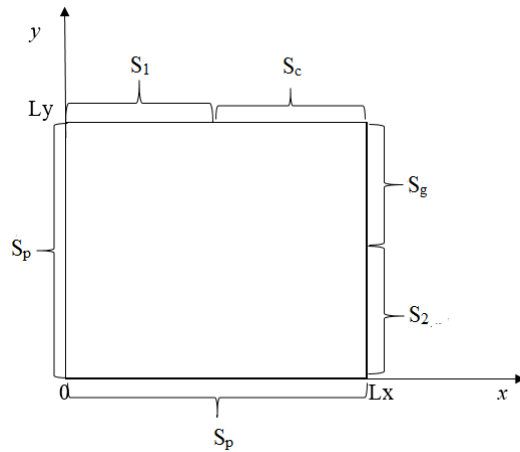


Рис. 2. Область решения

Координатная сетка $G = \{x_i | i = 0, 1, 2, \dots, n, x_0 = 0, x_n = s\}$ будет иметь шаг $h_i = x_i - x_{i-1}$, который зависит от номера i узла x_i .

Вместо производных в уравнении теплопроводности используют разности по формулам:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \approx \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h},$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h} \left[\frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} - \frac{u(x,t) - u(x-h,t)}{h} \right] =$$

$$= \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2},$$

подобным образом запишем

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u(x,t+\tau) - u(x,t)}{\tau}, \quad h < l, \tau < T.$$

Здесь $x = 0, x = l, t = 0, t = T$ – прямые, которые формируют треугольник (рис. 3).

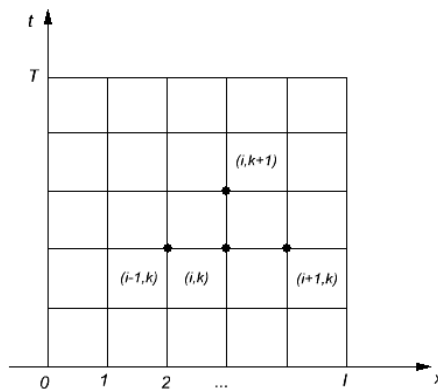


Рис. 3. Разностная сетка области решения

На его нижней и двух боковых сторонах определены значения начальной функции $u(x, t)$.

Далее для обозначения узлов сетки будем использовать (i, k) . Прямые $x = ih, t = k\tau$ носят название сетчатых слоев.

Для нахождения приближенных значений решения в узлах сетки обозначим $u(ih, k\tau) = u_{i,k}$ и заменим уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на соответствующее ему уравнение в конечных разностях в точке $(ih, k\tau)$:

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2}.$$

На основе этого определим $u_{i,k+1}$:

$$u_{i,k+1} = \left(1 - \frac{2a^2\tau}{h^2}\right)u_{i,k} + a^2 \frac{\tau}{h^2} (u_{i+1,k} - u_{i-1,k}).$$

Итак, при определенных трех значениях на k -м слое можно найти значение $u_{i,k+1}$ на $(k+1)$ -м слое.

С помощью метода интерполяции могут быть найдены приближенные значения $u(x, t)$ между узлами сетки [10].

Функции $f(x)$ и $g(t, x)$, определяющие начальные и граничные условия, могут быть получены в результате проведения эксперимента.

Программно реализован численный расчет температурного поля пластины. Организован вывод результатов в численном и графическом виде в заданные моменты времени (рис. 4, 5).

Для реализации программы была выбрана режущая пластина с сплава ВК-8. Определены начальные и граничные условия.

В начальный момент времени температура режущей пластины во всех ее точках равняется 20°C что соответствует начальным условиям.

Граничные условия для данного случая будут такими. На границе S_c режущая пластины непосредственно соприкасается с обрабатываемой деталью, где температуру резания можно считать заданной 1200°C , на границе S_1 температура распространяется по экспоненциальной зависимости $700 * e^{\frac{1}{2}}$ это граничное условие первого рода (рис. 2).

Через границу S_g проходит срезанная стружка которая равняется температуре резания 1200°C . на участке S_2 температура тоже распространяется по экспоненциальной зависимости $700 * e^{\frac{1}{2}}$ от более горячих участков к менее горячим участкам. На этой границе граничное условие первого рода.

На участках левой и нижней границы S_p заданные граничное условие второго рода, означающее, что поток тепла изменяется по заданному закону. Условия теплообмена с окружающей средой могут быть различны в зависимости от наличия или отсутствия прилегающих деталей.

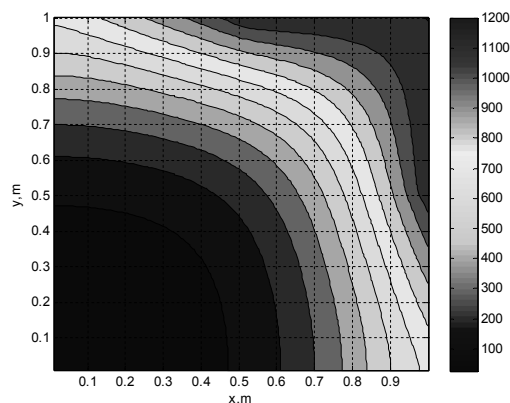


Рис. 4. Распределение температуры в $\frac{t}{2}$ момент времени при заглаблении
резца на 50%

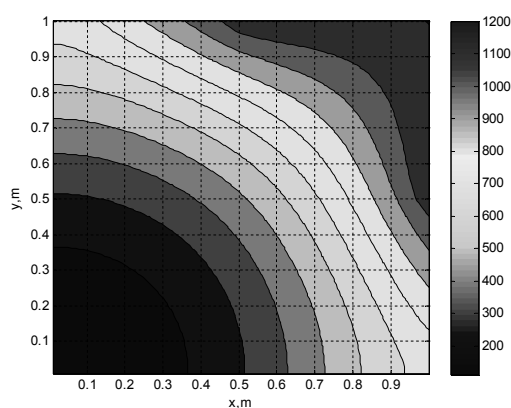


Рис. 5. Распределение температуры в конечный момент времени при
заглаблении резца на 50%

4. Заключение

Рассмотрен процесс тепловыделения в процессе обработки металлов резанием. Разработана математическая модель распределения температуры в режущей пластине.

Проведена дискретизация математической модели на основе локально одномерной схемы А.А. Самарского, которая является абсолютно устойчивой и обладает свойством суммарной аппроксимации. Благодаря введению вспомогательных дробных шагов получена устойчивая схема, позволяющая вместо одной матричной прогонки применять две обычные, что значительно уменьшает объем вычислений.

Данная работа позволяет частично снизить затраты на проведение экспериментальных исследований при изучении вопроса влияния температуры в зоне резания на процесс износа режущего инструмента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матушкина Е.И., Мохамед Моаз, Ивченко Т.Г. «Исследование тепловых явлений в детали при точении инструментами из сверхтвердых материалов». Студенческий научно-технический журнал "Инженер"/ Донецк: ДонНТУ, 2008, № 9. - С.35-38.
2. Мацевитый В.М., Казак И.Б., Романова Л.М. Влияние износостойкого покрытия на условия фрикционного контакта стружки с передней поверхностью инструмента//Трение и износ.-1985.-Т.6,№2.-С.333-338.
3. Лыков А.В. «Теория теплопроводности». М. Высшая школа. 1967. 600с.
4. Верещака А.С., Третьяков И.П. Режущие инструменты износостойкими покрытиями.-М: Машиностроение, 1986.-190 с.
5. Мацевитый В.М. Покрытия для режущего инструмента (Харьков: Вища школа: 1987).
6. Ивченко Т.Г., Смирнова М.А. Моделирование тепловых потоков в зоне резания в зависимости от износа режущего инструмента // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. – Донецк: ДонНТУ, 2008. Вып. 35. – с. 69-74.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. (М.: Наука: 1977) .
8. Гончаров А.А., Бондаренко Р.Ю., Василева Л.В., Агулов О.В. Моделирование тепловых процессов в режущей пластине//Труды XVII международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» - 2015. – С.75-78
9. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие. / Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.
10. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решение многомерных задач математической физики. 1967. 197с.