УДК 539.3

Компьютерное моделирование вынужденных колебаний жидкости в призматическом резервуаре

Д.В. Крютченко
Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ,
вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, 61046, Україна
e-mail: wollydenis@gmail.com

Разработан метод исследования свободных и вынужденных колебаний жидкости в жестком призматическом резервуаре. Предполагается, что жидкость в резервуаре идеальная, несжимаемая, а её течение, вызванное действием приложенной нагрузки, безвихревое. Давление жидкости на стенки резервуара определяется из интеграла Бернулли. Определены собственные значения и формы колебаний жидкости в призматическом резервуаре. Полученные собственные формы и частоты колебаний жидкости образуют базисную систему функций для задачи о вынужденных колебаниях жидкости под действием приложенной нагрузки. Рассмотрен случай периодического внешнего воздействия в горизонтальном направлении. Определена функция, описывающая положение и форму свободной поверхности в зависимости от времени. Исследована зависимость изменения уровня свободной поверхности в зависимости от частоты вынуждающей силы.

Ключевые слова: *призматический резервуар с жидкостью, свободные и вынужденные колебания, периодическое внешнее воздействие, идеальная несжимаемая жидкость*

Дослідження коливань рідини в резервуарах під дією зовнішніх навантажень є актуальною задачею, оскільки інтенсивний рух рідини може призвести до суттєвого підвищення тиску рідини на стінки оболонки та її руйнування. В роботі запропоновано метод для дослідження вільних та вимушених коливань рідини у жорсткому призматичному резервуарі при його частковому заповненні. Це дає змогу оцінити рівень підйому вільної поверхні та тиск рідини на стінки оболонки. Вважається, що рідина, яка міститься в резервуарі, є ідеальною, нестисливою, а її рух, викликаний дією прикладеного навантаження, є безвихровим. Тиск рідини на стінки резервуара визначається з лінеарізованого інтегралу Бернуллі за наявності сили тяжіння. Сформульовано мішану крайову задачу для рівняння Лапласа відносно потенціалу швидкостей. Визначені власні значення та форми коливань рідини в призматичному резервуарі. Отримані власні форми створюють базисну систему функцій для дослідження вимушених коливань рідини під дією навантаження, якому піддана оболонка. Розглянуто випадок періодичного зовнішнього впливу в горизонтальному напрямку. Визначено функцію, яка описує локацію та форму вільної поверхні в залежності від часу. Отримано систему незв’язаних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яку розв’язано при нульових початкових умовах. Ці умови відповідають стану спокою до початку дії зовнішнього навантаження. Проведено дослідження збіжності ряду для функції, що описує вільну поверхню. Базисними функціями для цього ряду слугують нормальні похідні від базисних функцій для потенціалу швидкостей. Досліджено залежність зміни рівня вільної поверхні в залежності від частоти зовнішнього навантаження. Встановлено, що коли частота зовнішнього навантаження близька до частоти вільних коливань, відбувається значне зростання амплітуди коливань. Поведінка тиску в залежності від частоти зовнішнього навантаження має аналогічний характер. Це свідчить про те, що градієнт потенціалу швидкостей є досить великим, тому при таких умовах слід враховувати нелінійну складову в рівнянні Бернуллі.

Ключові слова: *призматичний резервуар з рідиною, вільні та вимушені коливання, періодичний зовнішній вплив, ідеальна нестислива рідина*

The method for simulating free and forced liquid vibrations in a prismatic tank is proposed. The liquid is supposed to be ideal, incompressible, and its current caused by applied loading is irrotational. The problem of force vibrations is solved by using the eigenmodes as basic functions. The resonance frequencies are defined. Thin-walled structure elements are wildly used in different engineering areas: chemical and aerospace industries, transportation, oil and gas producing. Usually these structures operate under intensive thermal and stress loadings and interact with the fluids located in their containers. These loadings can cause the destruction of thin shells containing dangerous liquids and can cause an ecological catastrophe. So the topical issue is estimating stress-strain characteristics, frequencies and modes of vibrations of such facilities. Liquid sloshing often occurs when the extreme loads are applied to the structure elements with compartments partially filled with different liquids. Vibration modes usually affect liquid sloshing modes, so the joint problem of fluid-structure interaction is crucial. Since there are no analytical solutions for tanks and reservoirs with complicated geometrical shapes, numerical methods have been employed for solving the linear boundary value problems of liquid sloshing in addition to the analytical ones. The presence of baffles can drastically change the dynamical behavior of fluid-filled structures as well. This paper is devoted to free and forced vibrations of cylindrical tanks filled with an incompressible ideal liquid. The dynamic analysis of shell structures is often performed by using finite and boundary element programs. The liquid pressure on the walls of the reservoir is defined by Cauchy-Lagrange integral. The external horizontal periodic loading is considered. The eigenvalues and the modes of free liquid vibrations in a prismatic tank have been obtained.

Key words: *fuel tank, free and forced vibrations, baffle, periodic external loading, basic functions, ideal liquid, Cauchy-Lagrange.*

1. Актуальность работы

Оболочечные конструкции широко используются в аэрокосмической, нефтехимической промышленности и на транспорте как топливные баки, резервуары для хранения жидкости.

Динамика оболочечных конструкций, частично заполненных жидкостью, изучается в работах многих авторов. Первые работы в этой области появились в 60-е годы прошлого столетия и были вызваны необходимостью изучения устойчивости движения космических аппаратов [1]. Уточненный анализ динамических явлений требует учета плесканий жидкости, упругости стенок резервуаров, наличия демпфирующих перегородок. Фундаментальная монография [2], посвященная анализу плесканий, опубликована R.A. Ibrahim в 2005 году. В этой монографии не рассматриваются упругие резервуары, изучаются только свободные колебания. Локальные максимумы давления могут вдвое превышать значения соответствующих величин в незаполненных резервуарах [3]. Свободные и вынужденные колебания цилиндрических и конических резервуаров с жидкостью рассмотрены в работах [4-6]. В работе [7] метод конечных элементов использован для определения частот и форм свободных колебаний жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре. Плескания оказывают наиболее существенное влияния на прочность резервуаров, которые частично заполнены жидкостью, поскольку интенсивное движение жидкости приводит к существенному повышению давления на стенки и крышки резервуаров, что в свою очередь может привести к разрушению резервуара или потери устойчивости в процессе транспортировки. Поэтому актуальным является изучение именно вынужденных колебаний оболочек и оболочечных конструкций с жидкостью. Этот вопрос недостаточно исследован в литературе.

2.Постановка задачи

В данной статье рассмотрены задачи о свободных и вынужденных колебаниях жидкости в призматических резервуарах, рис 1.

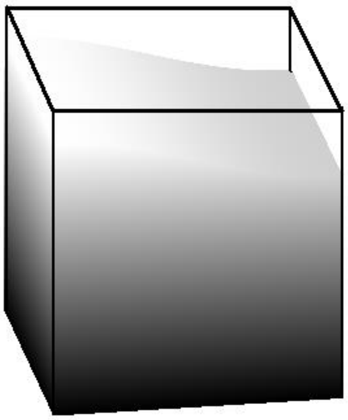

Рис. 1. Призматический резервуар, частично заполненный жидкостью

Пусть S_i $i=1,2,3,4$ -боковые поверхности призматического резервуара, S_b.- поверхность днища, а S_0 -свободная поверхность. Обозначим . $S_w = S_b \cup S_{s1} \cup S_{s2} \cup S_{s3} \cup S_{s4}$

Предположим, что жидкость, заполняющая резервуар является идеальной и несжимаемой, а ее движение- безвихревое. В этих условиях существует потенциал скоростей Ф, удовлетворяющий уравнению Лапласа.

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0$$

Величину давления p на стенки оболочки определяем из линеаризованного интеграла Бернули по формуле

$$p=-\rho_l\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+gz\right)+p_0$$

где g – ускорение свободного падения, z – вертикальная координата точки жидкости, ρ_l – плотность жидкости, p_0 – атмосферное давление.

Краевая задача для определения потенциала скоростей формулируется следующим образом [8]

$$\nabla^2\Phi = 0\,;\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_w} = 0\,;\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t};\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\zeta\right|_{S_0} = 0 \quad (1)$$

где функция ζ описывает форму и положение свободной поверхности.

Для выполнения условий разрешимости краевой задачи (1) необходимо также удовлетворить условию Неймана

$$\iint\limits_{S_0} \frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{n}} dS_0 = 0\,.$$

Рассмотрим потенциал Φ в виде следующего разложения:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{M} \dot{d}_k \varphi_k$$

Продиференцируем последнее равенство в (1) по t и подставим в полученное выражение значение производной ς_t' из второго равенства в (1).

Представим базисные функции φ_k в виде $\varphi_k(t,x,y,z) = e^{i\chi_k t}\varphi_k(x,y,z)$.

Получим для определения функций φ_k задачи на собственные значения

$$\nabla^2\varphi_k = 0\,,\quad \left.\frac{\partial\varphi_k}{\partial \mathrm{n}}\right|_{S_1} = 0\,,\quad \left.\frac{\partial\varphi_k}{\partial \mathrm{n}} = \frac{\chi_k^2}{g}\varphi_k\right|_{S_0}\,,\quad \iint\limits_{S_0} \frac{\partial\varphi_k}{\partial \mathrm{n}} dS_0 = 0\,.$$

Требуется определить гармоническую функцию Φ, удовлетворяющую уравнению Лапласа, и функцию $\zeta(x,y,t)$ из условий (1).

2. Определение собственных форм колебаний жидкости в жестком резервуаре

Для определения собственных частот и форм колебаний жидкости используем метод разделения переменных Фурье. Находим решение краевой задачи (1) в виде

$$\Psi_{kl} = A_{kl} ch\sqrt{\left(\frac{\pi k}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{2b}\right)^2}\, z * cos\frac{\pi k}{2a} x cos\frac{\pi l}{2b} y\,.$$

Используя условия на свободной поверхности определим

$$\omega_{kl} = \sqrt{g\lambda_{kl}\tanh(\lambda_{kl}H)}$$

Здесь частотный параметр λ_{kl} вычисляется по формуле

$$\lambda_{kl} = \sqrt{\left(\frac{\pi k}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{2b}\right)^2}$$

Для построения системы базисных функций для решения задачи о вынужденных колебаниях жидкости в резервуаре, получим собственные формы колебаний в виде

$$\Psi_{01}(x) = C_1\cos(0\cdot x)\sin\frac{\pi}{2b}y,\ \Psi_{10}(x) = C_2\sin\frac{\pi}{2a}x\cos(0\cdot y),\ \Psi_{11}(x) = C_3\sin\frac{\pi}{2a}x\sin\frac{\pi}{2b}y,$$

$$\Psi_{20}(x) = C_4\cos\frac{\pi}{a}x\cos(0y)\,,..$$

В табл. 1 приведены численные значения частот ω_{ij} и частотного параметра λ_{ij} для призматического резеруара в форме куба a=b=H=1м.

Таблица 1. Собственные частоты колебаний жидкости в призматическом резервуаре

n	i	j	λ_{ij}	ω_{ij}
1	0	1	1.772453851	4.051164194
2	1	0	1.772453851	4.051164194
3	1	1	2.506628275	5.710012556
4	2	0	3.544907703	5.892165855

Определим функцию ζ .Используем уравнения для нахождения потенциала скоростей

$$\Phi = \sum_{n=1}^{M} \dot{c}_n(t)\Phi_n ,$$

где зависимость $n = n(i, j)$ показана в табл.1, функции Φ_n определяются по формуле

$$\Phi_n = \frac{1}{ab}\frac{\cosh(\lambda_{ij}z)}{\cosh(\lambda_{ij}H)}\Psi_{ij}(x, y); \quad n = n(i, j)$$

Отсюда для функции ζ получим следующее выражение:

$$\zeta = \sum_{n=1}^{M} c_n(t)\frac{\partial\Phi_n}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{S_0} , \tag{2}$$

где $\frac{\partial\Phi_n}{\partial\mathbf{n}}$, $n = 1..M$ -нормальные производные потенциалов, вычисленные на свободной поверхности.

Собственные формы колебаний свободной поверхности показаны на рис. 2

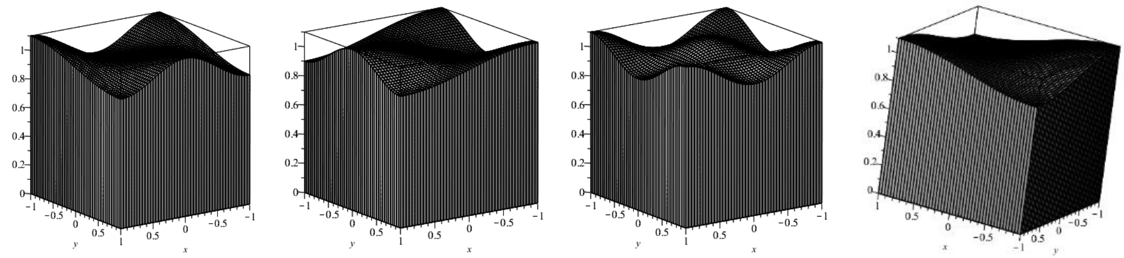

Рис.2. Формы колебаний свободной поверхности(n=1,2,3,4)

Таким образом, построена базисная система функций для исследования вынужденных колебаний жидкости в призматических резервуарах.

3. Вынужденные колебания жидкости в жестком резервуаре

Предположим, что в начальный момент времени жидкость в резервуаре находилась в состоянии покоя. На резервуар действует периодическая нагрузка cosωt, приложенная в горизонтальном направлении (параллельно оси Ox).

Составим систему дифференциальных уравнений движения жидкости, исходя из граничного условия на свободной поверхности

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\zeta(x, y) + xa_s(t)\bigg|_{z=H} = 0, \tag{3}$$

где $a_s(t) = \cos\omega t$. Подставляя ряд (2) в соотношение (3), получим

$$\sum_{k=1}^{N}\ddot{c}_k(t)\Phi_k(x, y, H) + g\sum_{k=1}^{N}c_k(t)\frac{\partial\Phi_k(x, y, z)}{\partial z}\bigg|_{z=H} + x\cos\omega t = 0 \tag{4}$$

Умножим равенство (4) скалярно на Φ_n и воспользуемся ортогональностью собственных форм. Запишем первые три первых дифференциальных уравнения полученной системы.

$$\begin{gathered}\ddot{c}_1(t) + \omega_1^2 c_1(t) - \frac{8}{9\pi^2}\cos\omega t = 0,\\ \ddot{c}_2(t) + \omega_2^2 c_2(t) - \frac{8}{25\pi^2}\cos\omega t = 0, \ddot{c}_3(t) + \omega_3^2 c_3(t) - \frac{8}{121\pi^2}\cos\omega t = 0\end{gathered} \tag{5}$$

Система (5) при нулевых начальных условиях имеет следующее решение

$$d_1(t) = -\frac{8}{9\pi^2(\omega_1^2 - \omega^2)}\left(\cos\omega t - \cos\omega_1 t\right), \quad d_2(t) = -\frac{8}{25\pi^2(\omega_2^2 - \omega^2)}\left(\cos\omega t - \cos\omega_2 t\right),$$
$$d_3(t) = -\frac{8}{121\pi^2(\omega_3^2 - \omega^2)}\left(\cos\omega t - \cos\omega_3 t\right) \tag{6}$$

Подставив выражения (6) в формулу (2), получим функцию, описывающую поведение свободной поверхности. Поведение свободной поверхности, описанное функцией ζ, при *M*=3 и *M*=4 показано на рисунке 3. Точками показано решение полученное при *M*=3, сплошной линией при *M*=4. Результаты практически совпадвют.

Находим изменение уровня подъема свободной поверхности в зависимости от времени в точке *x*=0, *y*=0, *H*=1 в течение 10 сек. При различных значениях частоты вынужденных колебаний.

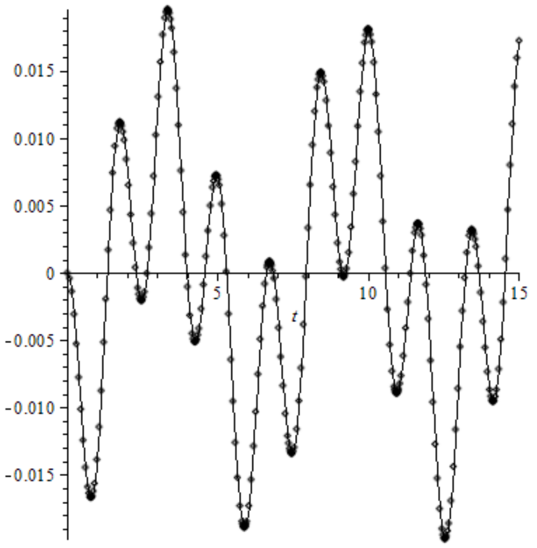

Рис. 3. Изменение уровня подъема свободной поверхности в точке x=0, y=0, H=1 при $\omega = 1$

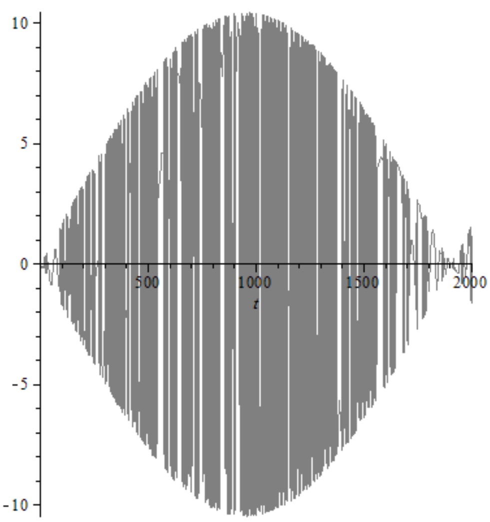

Рис.4. Изменение уровня подъема свободной поверхности в точке $\omega = 3.75$

На рисунке 4 показаны изменения уровня свободной поверхности при частоте, близкой к критической. Для определения динамической составляющей давления служит уравнение

$$p = -\rho\sum_{n=1}^{M}\ddot{c}_n(t)\Phi_n ,$$

де ρ - плотность жидкости. В рассматриваемом случае характер поведения давления такой же, как и характер поведения уровня свободной поверхности.

Если частота вынуждающей силы близка к частоте свободных колебаний, происходит значительный рост амплитуды колебаний. Это свидетельствует о том, что градиент скорости достаточно высок, и при решении таких задач следует учитывать нелинейную составляющую в интеграле Бернулли.

4. Выводы

Разработан метод расчета колебаний жидкости в призматическом резервуаре при действии периодической горизонтальной нагрузки. Определена зависимость уровня подъема жидкости в резервуаре от времени. Установлен характер поведения жидкости в резервуаре в зависимости от частоты вынуждающей силы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abramson H.N.; The dynamic behavior of liquids in moving containers; NASA SP-106; 1966
2. Ibrahim R.A.. Liquid Sloshing Dynamics Cambridge University Press, New York, 2005.

3. Khezzar L., Seibi A. C., Goharzadeh A.. Water Sloshing in Rectangular Tanks – An Experimental Investigation & Numerical Simulation. International Journal of Engineering (IJE), Vol. 3, No. 2. pp. P. 174-184, 2010.
4. Degtyarev K., Gnitko V., NaumenkoV., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences, V1, No1, 2016, pp 14-27.
5. Ravnik J., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K., Ogorodnyk U., BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 67, 2016: 13-25.
6. Шувалова Ю.С, Крютченко Д.В, Стрельникова Е.А, Интегральные уравнения в задаче о свободных и вынужденных колебаниях жидкости в жестких резервуарах, Вісник Херсонського національного технічного університету, випуск 3, 2016, с. 456-459.
7. Curadelli, O., Ambrosini, D., Mirasso, A., Amani, M. Resonant frequencies in an elevated spherical container partially filled with water: FEM and measurement. Journal of Fluids and Structures 26, pp. 148–159, 2010.
8. D.V. Krutchenko, E.A. Strelnikova, Yu.S. Shuvalova, Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs, Вісник Харківського національного університету. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління". Т.35.№1, с. 31-37, 2017.

REFERENCES

1. H.N. Abramson; The dynamic behavior of liquids in moving containers; NASA SP-106; 1966
2. R.A. Ibrahim. Liquid Sloshing Dynamics. *Cambridge University Press*, New York, 2005.
3. L. Khezzar, A. C. Seibi, A. Goharzadeh. Water Sloshing in Rectangular Tanks – An Experimental Investigation & Numerical Simulation. International Journal of Engineering (IJE), Vol. 3, No. 2., 2010, pp. 174-184
4. Degtyarev K., Gnitko V., NaumenkoV., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*, V1, No1, 2016, pp. 14-27.
5. J. Ravnik, E. Strelnikova, V. Gnitko, K. Degtyarev, U. Ogorodnyk, BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 67, 2016, pp13-25.
6. Ю.С. Шувалова, Д.В. Крютченко, Е.А. Стрельникова, Интегральные уравнения в задаче о свободных и вынужденных колебаниях жидкости в жестких резервуарах, *Вісник Херсонського національного технічного університету*, випуск 3, 2016, с. 456-459.
7. O. Curadelli, D. Ambrosini, A. Mirasso, Amani, M. *Resonant frequencies in an elevated spherical container partially filled with water: FEM and measurement*. Journal of Fluids and Structures 26, 2010, pp. 148–159.
8. D.V. Krutchenko, E.A. Strelnikova, Yu.S. Shuvalova, *Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs*, *Вісник Харківського національного університету. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління"*. Т.35.№1, 2017, ,с. 31-37.

***Крютченко Денис Владимирович** – аспирант;. Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного, ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, 61046.*

ORCID: 0000-0002-6804-6991

Научные интересы:

- *математическое моделирование колебаний оболочечных конструкций с жидкостью*

Надійшла у першій редакції 25.02.2018, в останній – 14.10.2018.