

УДК 53.01

PACS numbers: 52.35.Mw; 47.35.Bb ;
47.55.pb; 68.35.B

О математических моделях описания параметрических и модуляционных неустойчивостей

В.М. Куклин

*Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна
e-mail: kuklinvm1@gmail.com; v.m.kuklin@karazin.ua*

Рассмотрено развитие модуляционной неустойчивости волны конечной амплитуды. Модифицированная S-теория, ранее разработанная в работах В.Е. Захарова была использована для описания неустойчивых режимов. Отмечено, что вблизи порога неустойчивости самоподобная пространственная волновая структура может формироваться в разных масштабах. Вдали от порога нестабильность анализируется в модели высокоинтенсивного практически незатухающего океанического волнения, показан механизм формирования волн аномальной амплитуды. Обсуждаются режимы возбуждения параметрических неустойчивостей. Отмечено сходство в развитии модуляционной и параметрической неустойчивостей, однако есть и различия, связанные с характером динамики волновых пакетов неустойчивых возмущений. Характер параметрической неустойчивости связан с наличием высокочастотной, пространственно однородной составляющей одного или нескольких параметров среды. Поскольку волновое число таких высокочастотных колебаний равно нулю или чрезвычайно мало, по сравнению с характерными длинами системы, спектр неустойчивых возмущений также расположен симметрично, напоминая нестабильный спектр модуляционной неустойчивости. Однако растущие возмущения практически не движутся в пространстве. Вдали от порога параметрической нестабильности может формироваться сильная мелкомасштабная модуляция параметров окружающей среды, которая часто принимает характер процесса с обострением. Представлено формирование самоподобных пространственных структур в развитой конвекции тонкого слоя жидкости или газа вследствие развития модуляционной неустойчивости. Тороидальные конвекционные вихри создают полоидальные вихри большого масштаба - эффект гидродинамического динамо. Представлены экспериментальные результаты исследования самоподобных структур на графите.

Ключевые слова: модуляционные и параметрические неустойчивости, самоподобные волновые структуры, волны аномальной амплитуды, мелкомасштабная модуляция параметрических процессов.

Розглянуто розвиток модуляційної нестійкості хвилі великої амплітуди. Модифікована S-теорія, раніше розроблена в роботах В.Є. Захарова була використана для опису нестійких режимів. Відзначено, що поблизу порогу нестійкості самоподібна просторова хвильова структура може формуватися в різних масштабах. Далеко від порога нестабільність аналізується в моделі високоінтенсивного практично невщухаючого океанічного хвилювання, де показаний механізм формування хвилі аномальної амплітуди. Обговорюються режими збудження параметричних нестійкостей. Відзначено схожість у розвитку модуляційної і параметричної нестійкостей, проте є і відмінності, пов'язані з характером динаміки хвильових пакетів нестійких збурень. Характер параметричної нестійкості пов'язаний з наявністю високочастотної, просторово однорідної складової одного або декількох параметрів середовища. Оскільки хвильове число таких високочастотних коливань дорівнює нулю або надзвичайно мало, в порівнянні з характерними довжинами системи, спектр нестійких збурень також розташований симетрично, нагадуючи нестабільний спектр модуляційної нестійкості. Однак зростаючі обурення практично не рухаються в просторі. Далеко від порогу параметричної нестабільності може формуватися сильна дрібномасштабна модуляція параметрів середовища, яка часто приймає характер процесу з загостренням. Характер самоузгоджених параметричних нестійкостей аналогічний процесам модуляційної нестійкості. Представлено формування самоподібних просторових структур в розвиненому конвекції тонкого шару рідини або газу внаслідок розвитку модуляційної нестійкості. Тороїдальні конвекційні вихори створюють полоїдальним вихори великого масштабу - ефект гідродинамічного динамо. Представлені експериментальні результати дослідження самоподібних структур на графіті.

Ключові слова: модуляційні і параметричні нестійкості, самоподібні хвильові структури, хвилі аномальної амплітуди, дрібномасштабна модуляція параметричних процесів.

The development of modulation instability of a finite amplitude wave is considered. A modified S-theory, previously developed in the works of V. Ye. Zakharov, was used to describe unstable modes. It is noted that near the instability threshold a self-similar spatial wave structure can form at different scales. The dynamics of the instability is analyzed in a model of a high intensity practically undamped oceanic wave, the mechanism of the formation of anomalous amplitude waves is shown. The modes of excitation of parametric instabilities are discussed. It is noted, that there is a similarity in the development of modulation and parametric instabilities, however there are also differences related to the nature of the dynamics of the wave packets of unstable perturbations. The nature of parametric instabilities is associated with the presence of a high-frequency, spatially homogeneous component of one or more parameters of the medium. Since the wave number of such HF oscillations is zero, or extremely small, in comparison with the characteristic lengths of the system, the spectrum of unstable disturbances is also located symmetrically, resembling the unstable spectrum of modulation instability. However, the growing perturbations practically do not move in space. Far from the threshold of parametric instability, a strong small-scale modulation of environmental parameters can form, which often takes on the character of a process with aggravation. The formation of self-

similar spatial structures in the developed convection of a thin liquid or gas layer due to the development of modulation instability. The toroidal convection vortices generate poloidal vortices of large scale - the effect of a hydrodynamic dynamo and the experimental results of the investigation self-similar structures on the graphite are presented. The nature of self-consistent parametric instabilities is similar to the processes of modulation instability.

Keywords: modulation and parametric instabilities, self-similar wave structures, waves of anomalous amplitude, small-scale modulation of parametric processes.

Модуляционные неустойчивости. Как известно, монохроматическая волна конечной амплитуды $A(x, t) \cdot \exp\{i\omega t - ikx\}$ в средах с наиболее распространенным видом локальной кубической нелинейности, например,

$$\omega = \omega_0 + \beta \cdot \vec{k}^2 + \alpha \cdot |A|^2, \quad (1)$$

оказывается неустойчивой с возбуждением двух симметричных или несимметричных спектров волновых возмущений в окрестности своего волнового числа [1-4]. Уравнение Лайтхилла (часто называемое НУШ), описывающее медленную эволюцию огибающей колебаний в этих условиях принимает вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\delta A - i \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - iA |A|^2 + g, \quad (2)$$

где δ – декремент поглощения и g – внешний источник волновой энергии. Опираясь на учет лишь двух диаграмм взаимодействия, а именно

$$2\omega_0 = \omega(k) + \omega(-k) \quad (3)$$

и

$$\omega(k) + \omega(-k) = \omega(k') + \omega(-k'), \quad (4)$$

где ω_0 - частота основной волны, были сформулированы подходы к описанию нелинейной стадии модуляционной неустойчивости, что в дальнейшем получило название S-теории [5]. Хотя для корректного описания отдельных волн пакетов пришлось уравнения S-теории несколько модифицировать [6].

В случае большого уровня поглощения волновой энергии в среде и при наличии источника, который поддерживает интенсивность основной волны, возникают условия для формирования узких спектров, практически линейчатого спектра модулированной волны, что приводит к высокой пространственной четкости возникающей крупномасштабной модуляции. Модуляция основной волны происходит на значительно большем масштабе. Замечательным явлением, обнаруженным в работах [7,8], стало формирование самоподобных структур. Причина их появления - каскады следующих крупномасштабных модуляционных неустойчивостей, возникающих в условиях формирования линейчатых спектров модулированных волн.

Далеко от порога модуляционной неустойчивости волны конечной амплитуды, возбуждаемые моды формируют волновые пакеты, представляющие собой наборы стоячих волн, которые смещаются навстречу друг другу, формируя огибающую, амплитуда которой в случае плоских волновых фронтов в три раза превосходить среднюю амплитуду основной волны [9].

Поверхностные волны большой амплитуды на поверхности морей и океанов (которые называют гравитационными) вдали от берегов в регионах, где развито судоходство, могут оказаться опасными. Для частоты и волнового вектора этих волн справедливо выражение

$$\omega = \sqrt{g \cdot k} \cdot \{1 + |A|^2 k^2 / 2\} \quad (5)$$

здесь амплитуда отклонений поверхности воды равна A , для скорости волны и ускорения свободного падения использованы обозначения W и g . Следует обратить внимание на сравнительно небольшую ширину спектра этих волн. Именно поэтому уравнение для комплексной медленной меняющейся (здесь исключена зависимость $\propto \exp\{-i\omega_0 t\} = \exp\{-igk_0 t\}$) амплитуды поля $k_0 + K$ пространственной моды представляется в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_K}{\partial t} &= -\delta A_K - i(\sqrt{g(k_0 + K)} - \sqrt{gk_0})A_K - i\sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \{|A|^2 A\}_K = \\
&= -\delta A_K - i(\sqrt{g(k_0 + K)} - \sqrt{gk_0})A_K - i\sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \cdot \\
&\cdot \{A_K [2|A_0|^2 + 2 \sum_{K' \neq K, 0} |A_{K'}|^2 + |A_K|^2] + A_{-K}^* \{A_0^2 + \sum_{K' \neq K, 0} A_{K'} \cdot A_{-K'}\}\},
\end{aligned} \tag{6}$$

Вид этого волнового пакета неустойчивых возмущений обнаружен как при рассмотрении динамики модуляционной неустойчивости [9], так и при поиске методами обратной задачи автомодельных решений волнового движения конечной амплитуды в консервативной среде [10], что подтвердили эксперименты [11]. При искажении волновых фронтов, возможен еще больший рост амплитуды огибающей [12], что согласуется с наблюдениями и экспериментами. Таким образом особенности динамики модуляционной неустойчивости связаны с характером развития возмущений разного масштаба, которые формируют или линейчатые спектры в среде с большим уровнем поглощения волновой энергии и соответственно самоподобные структуры, или в условиях почти консервативных сред короткоживущие возмущения аномальной амплитуды [9].

Другие виды модуляции периодических структур. Модуляционная неустойчивость регулярной пространственной структуры может возникнуть и в неволновых средах. Например, возможна модуляционная неустойчивость системы конвективных ячеек в рамках описания чрезвычайно продуктивной модели Проктора-Сивашинского-Письмена. Подобная модуляция системы конвективных ячеек (тороидальные вихри) возникает между недостаточно хорошо проводящими тепло горизонтальными стенками и определяется возникновением полоидальных вихревых движений. Результатом модуляционной неустойчивости системы конвективных ячеек также является формирование плоских полоидальных вихрей значительно большего масштаба [6]. Другими словами, это эффект гидродинамического (вихревого) динамо [9]. Для его возникновения, как полагал еще профессор Моисеев С.С., не обязательно должна существовать нескомпенсированная спиральность и вполне возможна регулярная динамика развития такого процесса. Таким образом при модуляционной неустойчивости системы развитых конвективных ячеек не только появляется самоподобная структура – конвективные ячейки разного масштаба, но и формируется крупномасштабный полоидальный вихрь. Высокая пространственная четкость вихревых структур определялась небольшим превышением порога обсуждаемых неустойчивостей, которые формировали линейчатые спектры, обеспечивающие развитие последующих каскадов процессов.

Каждая структура кристалла как в объеме, так и на поверхности, возникает в результате процесса упорядочения при фазовых переходах. Это формально является первичным процессом, который характеризуется некоторым характерным временем и насыщающей нелинейностью. Нелинейность связана с отклонением от равновесия однородной системы атомов или молекул, где взаимодействия важны лишь между ближайшими их соседями. Ибо остальные дальние взаимодействия достаточно слабы и в первичном процессе себя заметно не проявляют. Система в целом чувствительна к напряжениям и перегревам, а вынос энергии обусловленный упругими волнами- фононами, определяет значительное ослабление любых возмущений. Нелинейность обычно кубическая по амплитуде возмущений, именно из-за ослабления дальних взаимодействий.

Но кроме основного процесса упорядочения, который формирует первичную систему, возможны вторичные неустойчивости, более слабые, которые могут только исказить возникшую структуру. Они проявляют себя уже после завершения формирования периодической системы кристаллов. Поверхность кристалла имеет несколько иную структуру, отличную от той, которая формируется в объеме. Возмущения поверхности также могут быть периодическими, причем наблюдается подобие между микроструктурой на уровне элементарных ячеек и масштабными возмущениями поверхности.

Хорошо исследованы крупномасштабные ромбовидные регулярные образования на поверхности монокристалла кремния (так называемая, "7×7 ячейка". Здесь можно увидеть дюжину возмущений электронной плотности, которые отвечают положениям отдельных атомов.

Эксперименты с помощью сканирующего микроскопа, которые обсуждаются в книге [9], показали, что на поверхности образцов графита можно увидеть периодическую модуляцию (гофрировку) электронной плотности, с коэффициентом подобия равном десяти или ста, что

отвечает разным видам внутренней структуры графита. Однако, в отличие от предыдущих исследований здесь наблюдается вертикальная гофрировка, причем в первом случае подобие крупномасштабной модуляции как в горизонтальном, так и в вертикальном направлении с элементарной ячейкой на поверхности образцов полное.

Параметрические неустойчивости. Природа параметрических неустойчивостей связана с наличием высокочастотной составляющей у одного или нескольких параметров среды. При этом возможен рост амплитуды низкочастотных волн или возмущений. Обычно рассматривают однородные в пространстве и осциллирующие во времени высокочастотные возмущения параметров среды.

Причиной таких осцилляций могут быть интенсивные однородные в пространстве переменные поля. Так как волновое число таких ВЧ колебаний равно нулю, или чрезвычайно мало, в сравнении с характерными длинами системы, то спектр ВЧ и НЧ неустойчивых возмущений располагается также симметрично, напоминая нестабильный спектр модуляционной неустойчивости. Однако растущие возмущения практически не перемещаются в пространстве. Вблизи порога неустойчивости в нелинейном режиме также могут формироваться узкие спектральные линии и анализ устойчивости такого нелинейного решения подобен обсуждаемой выше околопороговой модуляционной неустойчивости.

Вдали от порога параметрической неустойчивости может формироваться сильная мелкомасштабная модуляция параметров среды, которая часто приобретает характер процесса с обострением. На это явление обратил внимание В. Е. Захаров, обнаруживший такие режимы при распаде однородных в пространстве ленгмюровских колебаний в двухкомпонентной неизотермической плазме [13].

Плотность энергии поля при этом предполагалась много меньше плотности тепловой энергии электронов (а ионы считались холодными). Выбор такого вида поля объяснялся значительными длинами ленгмюровских волн, возбуждаемых в плазменных приборах корпускулярными и лазерными потоками. В сравнении с характерными размерами задач, длины этих ленгмюровских волн были весьма значительными и как представлялось физикам, поле этих колебания можно было считать пространственно однородным. Наличие каверн плотности плазмы позволяло говорить о модуляции ее плотности, поэтому процесс распада мощного ленгмюровского поля в неизотермической плазме с легкой руки В. Е. Захарова был назван «модуляционной неустойчивостью ленгмюровских колебаний». Более строгое рассмотрение распада однородного мощного ленгмюровского поля, но для случая холодной плазмы (физически это соответствует случаю, когда плотность энергии поля была много больше тепловой энергии электронов плазмы) было проведено В. П. Силиным и его коллегами [14-15]. Этот процесс обоснованно был назван «параметрической неустойчивостью ленгмюровских колебаний». Так как формально описания В. Е. Захарова и В. П. Силина отвечали случаям параметрического распада интенсивных однородных в пространстве ленгмюровских колебаний, то из нелинейных уравнений В. П. Силина, которые были обобщены в работах [16-17] можно было без труда получить уравнения В. Е. Захарова, по крайней мере в одномерном случае [18].

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{v_{Te}^2}{\omega_{pe}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E + \frac{\omega_{pe}}{32 M c_s^2 n_0} |E|^2 E = 0. \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} + c_s^2 \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} = \frac{1}{16\pi M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |E|^2. \quad (8)$$

где ω_{pe} - частота ленгмюровской волны, v_{Te} - тепловая скорость электронов и c_s - скорость звука, M - масса иона, n_0 - плотность плазмы.

Следует отметить, что параметрические неустойчивости, рассматриваемые в плазме, традиционно являются самосогласованными, в отличие например уравнения Матъе или Хилла, где учет обратного воздействия на источник осцилляций параметров среды не проводится.

Выбор В. Е. Захаровым названия заведомо параметрической неустойчивости как модуляционной был связан лишь с последствиями ее развития, ибо рассмотренный им с коллегами ранее случай воздействия однородного магнитного поля на материал, где возбуждались спиновые волны, был корректно назван «параллельной накачкой или параметрическим возбуждением спиновых волн» [5].

Появление глубоких каверн плотности плазмы было способно приводить к быстрому нагреву плазмы, как поначалу полагали за счет затухания Ландау [19]. Это обстоятельство привело к обилию исследований как теоретических, так и экспериментальных, причем последние подтвердили эффективность такого нагрева. Однако, формирование большого числа каверн при более корректном теоретическом описании ионов частицами, правда лишь в одномерном случае, приводило к формированию Максвелловского распределения частиц по скоростям за счет рассеяния их на неоднородностях поля, то есть механизмом термализации, по крайней мере ионов [18], оказался эффект Ферми.

Процессы, описываемые в моделях В.Е. Захарова и В.П. Силина описания параметрических неустойчивостей ленгмюровских волн конечной амплитуды подобны, что закономерно, ибо уравнения модели Захарова, могут быть получены из уравнений модели Силина при уменьшении интенсивности поля ленгмюровской волны и при учете температуры электронов.

С уменьшением затухания ВЧ мод функция распределения ионов все меньше отличается от Максвелловской, что позволяет говорить о температуре ионов, причем в модели Силина процесс неустойчивости характеризуется наличием большой доли быстрых частиц.

ЛІТЕРАТУРА

1. Lighthill M.J. Contribution to the theory of waves in nonlinear dispersive system. *J.Inst. Math. Appl.*, 1965. Vol.1, No.2. P.269–306.
2. Silin V.P. Parametric resonance in plasma. *ЖЭТФ*. 1965. Vol. 48, No.6. P. 1679–1691.
3. Zakharov V.E. Stability of nonlinear waves in dispersive media. *J Teor. Prikl.Fiz.* 1966. Vol. 51. P. 668–671.
4. Benjamin T.B., Feir J.E. The disintegration of wave trains on deep water. *J. Fluid Mech.* 1967. Vol.27. P. 417–430.
5. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения :УФН. 1974. Т.114, №.4. С.609–654.
6. Куклин В.М. Роль поглинання та дисипації енергії у формуванні просторових нелінійних структур у нерівноважних середовищах. *УФЖ. Огляди*. 2004. Т. 1, № 1. С. 49–81.
7. Куклина О.В., Киричок А.В., Куклин В.М. Динамика формирования самоподобных структур в нелинейных волновых диссипативных средах с нераспадным спектром. *The Journal of Kharkiv National University, physical series "Nuclei, Particles, Fields"*. 2001. №541, Iss.4(16). P.73–76.
8. Куклин В.М., Киричок А.В., Куклина О.В. О механизмах образования самоподобных структур в неравновесной сплошной среде . *Вопросы атомной науки и техники. (ВАНТ). - Сер. Плазменная электроника и новые методы ускорения*. 2000. № 1. С. 222–224.
9. Куклин В. М. Избранные главы (теоретическая физика). Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2018. 224с.
10. Akhmediev N., Korneev V. Modulation instability and periodic solutions of the nonlinear Schrodinger equation. *Theoretical and Mathematical Physics*. 69 (2). 1986. P. 1089–1093.
11. Chabchoub A., Hoffmann N., Akhmediev N. Rogue wave observation in a water wave tank. *Physical Review Letters*. 106 (20) (2011) 204502.
12. McAllister M.I., Draycott S., Adcock T.A.A., Taylor P.H. and van den Breemetr/V.860. 10 February. 2019. P. 767–786.
13. Захаров В.Е. Коллапс ленгмюровских волн: ЖЭТФ, 1972. Т. 62, № 5. С. 1745–1759.
14. Силин В.П. Параметрический резонанс в плазме: ЖЭТФ, 1965. Т. 48. 1679 с.
15. Силин В.П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. М.: Наука, 1973. 287 с.
16. Chernousenko V. V, Kuklin V.M., Panchenko I.P. The structure in nonequilibrium media. In book: *The integrability and kinetic equations for solitons*. AN USSR, ITPh. K. Nauk. Dumka. 1990. 472 с.
17. Куклин В.М., Севидов С.М. К нелинейной теории устойчивости интенсивных колебаний холодной плазмы. *Физика плазмы*. 1988. Т. 14, № 10. С. 1180–1185.
18. Загородний А. Г., Киричок А. В., Куклин В. М. Одномерные модели модуляционной неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в плазме на основе уравнений Захарова и Силина. *УФН*. 2016. Т. 186, №7. С. 743–762.
19. Захаров В.Е. и др. Кинетика трехмерного ленгмюровского коллапса: ЖЭТФ, 1989. Т. 96, № 4. 591 с.

REFERENCES

1. Lighthill M.J. "Contribution to the theory of waves in nonlinear dispersive system". J.Inst. Math. Appl., Vol.1, No.2. P.269-306, 1965.
2. Silin V.P. "Parametric resonance in plasma", JETP., Vol. 48, No.6, 1965, P. 1679-1691.
3. Zakharov V.E. "Stability of nonlinear waves in dispersive media", J Teor. Prikl.Fiz, Vol. 51, P. 668-671, 1966,
4. Benjamin T.B., Feir J.E. "The disintegration of wave trains on deep water", J. Fluid Mech., Vol.27, P. 417-430, 1967.
5. Zakharov V.E., Lvov V.S., Starobinets S.S. "Turbulence of spin waves beyond the threshold of their parametric excitation", UFN, - T.114, No.4, pp.609-654. 1974.[in Russian]
6. Kuklin V.M. "The role of the discrepancy of energy in formulating large-scale non-linear structures in the new medium means", UPhZ. Review, V. 1, № 1, pp. 49-81, 2004, [in Ukrainian]
7. Kuklina O.V., Kirichok A.V., Kuklin V.M. "Dynamics of the formation of self-similar structures in nonlinear wave dissipative media with a non-decay spectrum", *The Journal of Kharkiv National University, physical series "Nuclei, Particles, Fields"*, №541. Iss.4 (16), pp. 73-76, 2001. [in Russian]
8. Kuklin V.M., Kirichok A.V., Kuklina O.V. "On the mechanisms of formation of self-similar structures in a nonequilibrium continuous medium", *Problems of Atomic Science and Technology. Ser. Plasma electronics and new acceleration methods*. № 1, p. 222-224, 2000. [in Russian]
9. Kuklin V. M. *Selected chapters (theoretical physics)*. Kh.:VN Karazin KNU, 2018. 224 P. [in Russian]
10. Akhmediev N., Korneev V. "Modulation instability and periodic solutions of the nonlinear Schrodinger equation", *Theoretical and Mathematical Physics* 69 (2), 1089-1093, 1986.
11. Chabchoub A., Hoffmann N., Akhmediev N. "Rogue wave observation in a water wave tank", *Physical Review Letters*, 106 (20), 204502, 2011.
12. McAllister M.I., Draycott S., Adcock T.A.A., Taylor P.H. and van den Bremer, V.860. 10, pp. 767-786, February 2019.
13. Zakharov V.E. "Collapse of Langmuir Waves", JETP. V. 62. № 5, P. 1745-1759, 1972. [in Russian]
14. Silin V.P. *Parametric resonance in plasma*, JETP. 1965. T. 48. p. 1679. [in Russian]
15. Silin V.P. Parametric effect of high power radiation on the plasma. M., Science, 287с. 1973. [in Russian]
16. Chernousenko V. V, Kuklin V.M., Panchenko I.P. The structure in nonequilibrium media. In book: *The integrability and kinetic equations for solitons*, AN USSR, ITPh. K. Nauk. Dumka. – С. 472. 1990.
17. Kuklin V.M., Sevidov S.M. "On the nonlinear theory of the stability of intense oscillations of a cold plasma", *Plasma Physics*, V. 14, № 10, P. 1180-1185, 1988. [in Russian]
18. Zagorodnii, A.G., Kirichok, A.V., Kuklin, V.M., "One-Dimensional Models of the Modulation Instability of Intense Langmuir Oscillations in a Plasma Based on the Zakharov and Silin Equations", UFN., V. 186, №7, p. 743-762, 2016. [in Russian]
19. Zakharov B.E. et al., *Kinetics of Three-Dimensional Langmuir Collapse*, JETP, T. 96, № 4, p. 591, 1989. [in Russian]

Куклін Володимир Михайлович – доктор фізико-математичних наук, професор; завідувач кафедри штучного інтелекту та програмного забезпечення, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: v.m.kuklin@karazin.ua; kuklinvm1@gmail.com ; ORCID: 0000-0002-0310-1582.

Kuklin Volodymyr M. PhD, Doctor of Science, Professor, Head of Department of Artificial Intelligence and Software V. N. Karazin National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine, v.m.kuklin@karazin.ua; kuklinvm1@gmail.com ORCID: 0000-0002-0310-1582.

Куклин Владимир Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедры искусственного интеллекта и программного обеспечения, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: v.m.kuklin@karazin.ua; kuklinvm1@gmail.com; ORCID: 0000-0002-0310-1582.