

УДК 519.6

Вимушені коливання рідини в циліндричних резервуарах під дією вертикального збудження

Д.В. Крютченко

*Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ,
вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, 61046, Україна
e-mail: wollydenis@gmail.com*

Під час експлуатації оболонки та оболонкові конструкції, що містять різного роду рідкі заповнювачі, можуть піддаватися дії інтенсивних динамічних впливів. Для аналізу міцності конструкцій в цих умовах необхідно враховувати нелінійні явища при русі рідини, оскільки застосування лінійних рівнянь не дає адекватної оцінки для визначення тиску та амплітуди плескань. В даній роботі проведено дослідження коливань рідини в жорсткому циліндричному резервуарі при частковому заповненні рідиною за умови вертикального збудження. Наведені системи диференціальних рівнянь, які відповідають лінійному та нелінійному формулюванню задачі. Вважається, що рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух, індукований зовнішніми впливами, є безвихровим. В цих умовах існує потенціал швидкостей, що задовольняє рівнянню Лапласа. Як граничні умови для розв'язання крайової задачі обираються умови не протікання на змочених поверхнях оболонки. На вільній поверхні задаються кінематична та статична умови. Статична умова полягає в рівності тиску на поверхні рідини атмосферному тиску. Тис визначається з інтегралу Коші-Лагранжа. При цьому лінеаризація інтегралу Коші - Лагранжа веде до лінійного формулювання задачі. В нелінійному формулюванні враховуються квадратичні доданки. Для формулювання кінематичної умови вводиться додаткова невідома функція, яка описує саме рух вільної поверхні. Кінематична умова полягає в рівності швидкості рідини, яка описується потенціалом швидкостей, та швидкості самої вільної поверхні. Якщо задається вертикальне збудження, то це веде до появи додаткового прискорення. При цьому в лінійному формулюванні отримуємо систему нез'язаних диференціальних рівнянь, кожне з яких є рівнянням Матьє. Це дозволяє дослідити явища параметричного резонансу. При аналізі диференціальних рівнянь, що виникають в нелінійній задачі, виявилось, що розв'язки таких рівнянь суттєво залежать від початкових умов. Наведені фазові портрети динамічної системи зі зазначенням резонансів. Проведено числовий аналіз диференціального рівняння, що відповідає нелінійному формулюванню.

Ключові слова: оболонки обертання, коливання рідини, циліндричний резервуар.

The shell and shell structures containing various types of liquid fillers can be exposed to intense dynamic effects during the exploitation. In order to analyze the strength of structures in these conditions, it is necessary to take into account nonlinear phenomena in fluid motion, since the application of linear equations does not provide an adequate assessment for the determination of the pressure and amplitude of the splashing. In this paper, a study of fluid fluctuations in a rigid cylindrical reservoir partially filled with the liquid under condition of vertical agitation has been carried out. The systems of differential equations that correspond to the linear and nonlinear formulation of the problem are presented. The fluid is believed to be perfect and incompressible, and its movement induced by external influences is non-vortex. Under these conditions there is a velocity potential that satisfies the Laplace equation. The conditions of non-leakage on the wetted surfaces of the shell are chosen as the boundary conditions for solving the boundary value problem. The kinematic and static conditions are specified on a free surface. The static condition consists in the equality of pressure on the liquid surface with atmospheric pressure. The pressure is determined from the Cauchy-Lagrange integral. In this case the linearization of the Cauchy-Lagrange integral leads to the linear formulation of the problem. Quadratic components are taken into account for the nonlinear formulation. To formulate the kinematic condition an additional unknown function describing the motion of the free surface is introduced. The kinematic condition is the equality of the liquid velocity described by the velocity potential and the velocity of the free surface itself. If there is a vertical agitation, an additional acceleration will be present. Therefore for the linear formulation we obtain a system of unbounded differential equations, each of which is the equation of Mathieu. This allows us to investigate the phenomena of parametric resonance. When analyzing differential equations which occur in case of a nonlinear problem, it has been found that the solutions of such equations depend essentially on the initial conditions. The phase portraits of a dynamic system with indication of resonances are presented. A numerical analysis of the differential equation corresponding to nonlinear formulation has been carried out.

Key words: rotation shells, fluid fluctuations, cylindrical reservoir.

Во время эксплуатации оболочки и оболочечных конструкций, которые содержат разного рода жидкие заполнители, оболочки могут подвергаться воздействию интенсивных динамических воздействий. Для анализа прочности конструкций в этих условиях необходимо учитывать нелинейные явления при движении жидкости, поскольку применение линейных уравнений не дает адекватной оценки для определения давления и амплитуды плесканий. В данной работе проведено исследование колебаний жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре при частичном заполнении жидкостью при вертикальном возбуждении. Приведены системы дифференциальных уравнений, соответствующие линейным и нелинейным формулировкам задач. Считается, что жидкость является идеальной и несжимаемой, а ее движение, индуцированное внешними воздействиями, является безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей, который удовлетворяет уравнению Лапласа. Как граничные условия для решения краевой задачи избираются условия непротекания на смоченных поверхностях оболочки. На свободной поверхности задаются кинематическое и статическое условия. Статическое условие состоит в равенстве давления на поверхности жидкости и атмосферном давлении. Давление определяется из интеграла Коши-Лагранжа. При этом линейаризация

інтеграла Коши - Лагранжа веде до лінійної формулювання задачі. В нелінійній формулюванні враховуються квадратичні слагаємі. Для формулювання кінематичного умови вводиться додаткова невідома функція, яка описує рух вільної поверхні. Кінематичне умовою є рівність швидкості рідини, яка описується потенціалом швидкостей, і швидкості самої вільної поверхні. Якщо задано вертикальне збудження, то це веде до появи додаткового прискорення. При цьому в лінійній формулюванні отримуємо систему незалежних диференціальних рівнянь, кожне з яких є рівнянням Мат'є. Це дозволяє дослідити явища параметричного резонансу. При аналізі диференціальних рівнянь, які виникають в нелінійній задачі, виявилось, що рішення таких рівнянь суттєво залежить від початкових умов. Приведені фазові портрети динамічної системи з резонансом. Проведений чисельний аналіз диференціального рівняння, який відповідає нелінійній формулюванні.

Ключові слова: оболонки обертання, коливання рідини, циліндричний резервуар, вертикальне збудження.

1. Актуальність роботи

Оболонки та оболонкові конструкції з відсіками, які частково заповнені рідиною, знаходять широке застосування в різних галузях сучасної промисловості. Під час експлуатації такі конструкції можуть піддаватися дії інтенсивних динамічних впливів, наприклад, при землетрусах, русі танкерів з нафтою в умовах шторму, та ін. Для аналізу міцності конструкцій в цих умовах необхідно враховувати нелінійні явища при русі рідини, оскільки застосування лінійних рівнянь не дає адекватної оцінки для визначення тиску та амплітуди плескань [1]. Існують методи з вивчення нелінійних рівнянь, які засновані на використанні гіпотез потенційної течії, при цьому розглядаються гармонічні навантаження на оболонкову конструкцію. Форма вільної поверхні та тиск рідини у таких випадках зображуються у вигляді рядів за базисними функціями. У [2] доведено, що у якості базисних функцій можуть бути обрані форми власних коливань рідини в припущеннях лінійної теорії. В роботі [3] проведено експериментальне та чисельне дослідження резервуара, на який діє сейсмічне або імпульсне навантаження у лінійному та нелінійному формулюваннях. В статті [4] досліджено вплив вертикальних перегородок на частоти коливань рідини у плоскому прямокутному резервуарі. При розв'язанні задачі з урахуванням нелінійних явищ виникає необхідність розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь та їх систем. Задачі плескань рідини в нелінійному формулюванні досліджено в роботі [5]. Для розв'язання нелінійних рівнянь використовується метод гармонічного балансу. При цьому застосовують гармонічну лінеаризацію нелінійного динамічного об'єкта, тобто використовують заміну вхідної задачі лінійною моделлю, яка описує першу гармонічну складову відклику об'єкта на вхідний синусоїдальний вплив.

Доведено [5], що нелінійні системи при збудженні гармонічним імпульсом дають відгук з нескінченною кількістю гармонік.

Метод гармонічного балансу застосовують для розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, які містять поліноміальну нелінійність невідомих функцій [6]. У [7] розглянуто метод нелінійних нормальних форм. Зауважимо, що аналізу саме диференціальних нелінійних рівнянь приділено недостатньо уваги. Також незаняту увагу приділено дослідженням вимушених коливань резервуарів з рідиною за дії вертикального навантаження, як в лінійному, так і в нелінійному формулюванні.

2. Формулювання задачі та основні співвідношення

Дослідимо коливання рідини в жорсткій циліндричній оболонці внаслідок дії вертикального гармонічного збудження, рис. 1. Тут S_0 - вільна поверхня рідини, S_1 - змочена поверхня оболонки, h - рівень заповнення оболонки рідиною.

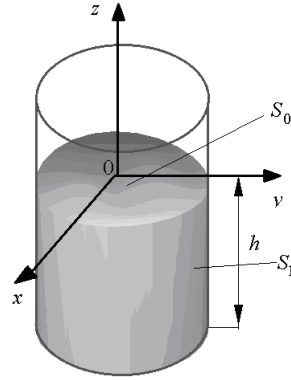


Рис. 1 Циліндрична оболонка, частково заповнена рідиною

Припустимо, що рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух, індукований вібраціями оболонки, є потенційним. Тоді існує потенціал швидкостей $\Phi(x, y, z, t)$, такий, що

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Цей потенціал за вказаних умов задовольняє рівнянню Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Нехай функція $\zeta = \zeta(t, x, y)$ описує локацію і рух вільної поверхні. В стані спокою, до початку дії сили збудження маємо

$$\zeta(0, x, y) = 0, \quad \dot{\zeta}(0, x, y) = 0. \quad (1)$$

Розглянемо задачу в аксіально-симетричному формулюванні. Крайова задача в слабкому нелінійному формулюванні для знаходження потенціалу Φ та функції ζ в циліндричній системі координат (ρ, θ, z) формулюється таким чином [8]:

$$\nabla^2 \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}; \quad p - p_0 \Big|_{S_0} = 0, \quad (2)$$

де p_0 – атмосферний тиск, \mathbf{n} - зовнішня одинична нормаль до відповідної поверхні.

Величину тиску p знаходимо з інтегралу Коші-Лагранжа

$$p - p_0 = -\rho_l \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (a_s(t) + g)\zeta + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \right]. \quad (3)$$

Для виконання умов існування розв'язку крайової задачі (2) необхідно також задовольнити умову Неймана

$$\iint_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0.$$

В роботах [9,10] доведено, що потенціал швидкостей та функцію $\zeta = \zeta(t, x, y)$ для розв'язання нелінійної задачі можна наближати рядами за базисними функціями, що є розв'язками відповідної лінійної задачі [11,12]. Тому зобразимо невідомі функції Φ та ζ у вигляді

$$\Phi = \sum_{k=1}^M d_k(t) \varphi_k, \quad (4)$$

$$\zeta = \sum_{k=1}^M c_k(t) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}}. \quad (5)$$

В виразах (4), (5) залежні від часу функції $c_k(t)$, $d_k(t)$ визначатимуться з крайових умов на вільній поверхні. Для знаходження функцій φ_k в [13,14] отримано такі крайові задачі:

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + g\zeta = 0. \quad (7)$$

Продиференціюємо друге рівняння в (7) по t і підставимо отриману рівність для $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ в перше рівняння з (7). Далі зобразимо функцію φ_k як $\varphi_k(t, x, y, z) = e^{i\chi_k t} \varphi_k(x, y, z)$. Приходимо до проблеми власних значень

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_k \Big|_{S_0}, \quad \iint_{S_0} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0. \quad (8)$$

У разі, якщо конструкція, яка розглядається, є оболонкою обертання можна застосовувати такі подання:

$$\varphi_k(r, z, \theta) = \varphi_k(r, z) \cos \alpha \theta, \quad (9)$$

де α - номер гармоніки. Оскільки в даній роботі розглядається аксіально-симетричне формулювання, то $\alpha = 0$.

Тобто спочатку розглядаємо задачу вільних коливань рідини в лінійному формулюванні.

Подання (4) та (5) забезпечують виконання рівняння Лапласа, а також задовольняють умові на жорстких змочених стінках резервуару. Для розв'язання задачі про вимушені коливання рідини в резервуарі в нелінійному формулюванні треба задовольнити таким умовам на вільній поверхні:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (a_s(t) + g)\zeta + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}. \quad (10)$$

Обчислимо градієнт потенціалу швидкостей у циліндричній системі координат

$$\text{grad } \Phi = \vec{e}_\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \vec{e}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

В рівняння (10) підставимо значення $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, ζ , $\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}$ і $\frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2$.

Обчислимо квадрат модуля градієнта. Оскільки розглядаємо аксіально-симетричні коливання, то $\alpha = 0$. Тоді Φ не залежить від θ , тобто $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0$. Звідси

$$|\text{grad } \Phi|^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2.$$

Для циліндричного баку без перегородок функції φ_k згідно з [8] мають вигляд

$$\varphi_k = J_0 \left(\frac{\zeta_{0k} \rho}{R} \right) \cosh \left(\zeta_{0k} \frac{z+h}{R} \right) \left(\cosh \left(\zeta_{0k} \frac{h}{R} \right) \right)^{-1},$$

а на вільній поверхні

$$\varphi_k = J_0 \left(\frac{\zeta_{0k} \rho}{R} \right). \quad (11)$$

Базисні функції в поданні для функції ζ є такими:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial z} = \frac{\zeta_{0k}}{R} J_0 \left(\frac{\zeta_{0k} \rho}{R} \right) \frac{\sinh \left(\zeta_{0k} \frac{z+h}{R} \right)}{\cosh \left(\zeta_{0k} \frac{h}{R} \right)},$$

а на вільній поверхні

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial z} = \frac{\zeta_{0k}}{R} J_0\left(\frac{\zeta_{0k} \rho}{R}\right) \tanh\left(\zeta_{0k} \frac{h}{R}\right). \quad (12)$$

Константи ζ_{0k} є коренями рівняння

$$\left. \frac{\partial J_0(\zeta_{0k} \rho / R)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = 0.$$

Підставив вирази (11), (12) та відповідні похідні в співвідношення (10), та виконав скалярний добуток отриманих рівнянь на функції $J_0\left(\frac{\zeta_{0m} \rho}{R}\right)$, отримаємо систему неоднорідних нелінійних диференціальних рівнянь порядку $3M$ відносно $c_k(t)$, $d_k(t)$

$$\sum_{k=1}^M \dot{d}_k(t) \varphi_k(\rho, z) + (g + a_s(t)) \sum_{k=1}^M c_k(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, z)}{\partial z} + \frac{1}{2} \sum_{k,m=1}^M d_k(t) d_m(t) |\nabla \varphi_k(\rho, z)| |\nabla \varphi_m(\rho, z)| \Big|_{z=0} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^M d_k(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, z)}{\partial z} - \sum_{k=1}^M \dot{c}_k(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, z)}{\partial z} - \frac{1}{g} \sum_{k,m=1}^M \chi_k^2 c_k(t) d_m(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, z)}{\partial \rho} \frac{\partial \varphi_m(\rho, z)}{\partial \rho} \Big|_{z=0} = 0. \quad (13)$$

Спростимо співвідношення (13), використавши зв'язок між базисними функціями на вільній поверхні. Отримаємо рівняння

$$\sum_{k=1}^M \dot{d}_k(t) \varphi_k(\rho, 0) + (g + a_s(t)) g^{-1} \sum_{k=1}^M \chi_k^2 c_k(t) \varphi_k(\rho, 0) + \frac{1}{2} \sum_{k,m=1}^M d_k(t) d_m(t) |\nabla \varphi_k(\rho, z)| |\nabla \varphi_m(\rho, z)| \Big|_{z=0} = 0,$$

$$\frac{1}{g} \sum_{k=1}^M \chi_k^2 d_k(t) \varphi_k(\rho, 0) - \frac{1}{g} \sum_{k=1}^M \chi_k^2 \dot{c}_k(t) \varphi_k(\rho, 0) - \frac{1}{g} \sum_{k,m=1}^M \chi_k^2 c_k(t) d_m(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, 0)}{\partial \rho} \frac{\partial \varphi_m(\rho, 0)}{\partial \rho} = 0.$$

Зауважимо, що $\varphi_k = J_0\left(\frac{\zeta_{0k} \rho}{R}\right)$ та здійснимо отриманих рівнянь на $\varphi_m = J_0\left(\frac{\zeta_{0m} \rho}{R}\right)$. В результаті будемо мати таку систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{d}_m(t) + (g + a_s(t)) g^{-1} \chi_m^2 c_m(t) + \frac{1}{2(\varphi_m, \varphi_m)} \sum_{k,l=1}^M d_k(t) d_l(t) |\nabla \varphi_k(\rho, 0)|^2 |\nabla \varphi_l(\rho, 0)|^2 = 0, \\ \chi_m^2 [d_m(t) - \dot{c}_m(t)] - \frac{1}{(\varphi_m, \varphi_m)} \sum_{k,l=1}^M \chi_k^2 c_k(t) d_l(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, 0)}{\partial \rho} \frac{\partial \varphi_l(\rho, 0)}{\partial \rho} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Розв'язання системи (14) потребує завдання $2M$ початкових умов. Ці умови отримуємо з рівнянь (1) та (10). Маємо

$$c_k(t) = 0, \quad d_k(0) = d_{0k}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (15)$$

Таким чином, задачу про вимушені коливання рідини в циліндричній оболонці, підданій дії вертикального збудження, зведено до розв'язання системи диференціальних рівнянь (14) з граничними умовами (15).

3. Аналіз результатів

3.1 Лінійне формулювання

Нехтуючи квадратичними доданками в (14), маємо таку незв'язану систему диференціальних рівнянь:

$$\dot{d}_m(t) + (g + a_s(t)) g^{-1} \chi_m^2 c_m(t) = 0, \quad d_m(t) - \dot{c}_m(t) = 0 \quad (16)$$

З граничними умовами (15).

Продиференціюємо перше з рівнянь (16) за t та підставимо в отриману рівність друге рівняння з (16). Маємо таку систему:

$$\ddot{d}_m(t) + (g + a_s(t)) g^{-1} \chi_m^2 d_m(t) = 0 \quad (17)$$

з граничними умовами

$$d_m(t) = d_{0m}, \quad \dot{d}_m(0) = d_{1m}, \quad k = \overline{1, M}.$$

Будемо розглядати коливання рідини за дії гармонічного вертикального збудження. Це збудження опишемо як $a_s(t) = -a \cos(\omega t)$. Тоді рівняння (17) набудуть вигляду

$$\ddot{d}_m(t) + \chi_m^2 d_m(t) - a \cos(\omega t) g^{-1} \chi_m^2 d_m(t) = 0. \tag{18}$$

Зауважимо, що рівняння (18) – це класичні рівняння Матьє [15].

Далі побудуємо фазові портрети динамічної системи. Розглядаємо такі початкові умови:

$$d_m(t) = 0, \quad \dot{d}_m(0) = 0.05, \quad k = \overline{1, M}.$$

Припустимо, що $a = 1$. Розглянемо жорстку циліндричну оболонку з розмірами $R = 1, H = 1$. Маємо такі значення перших частот вільних осесиметричних коливань [8,9]

$$\chi_1 = 6.1224; \chi_2 = 8.2962$$

Вивчимо вплив частоти сили збурення на поведінку динамічної системи. Припускалось, що частота збурення приймає такі значення

$$\omega = 1; 6.1283; 10.5; 2 \cdot 6.1283; 8.2962; 18.36.$$

На рис. 2 зображені фазові портрети $d_1(t), \dot{d}_1(t)$ для наведених вище частот вертикальної сили збурення.

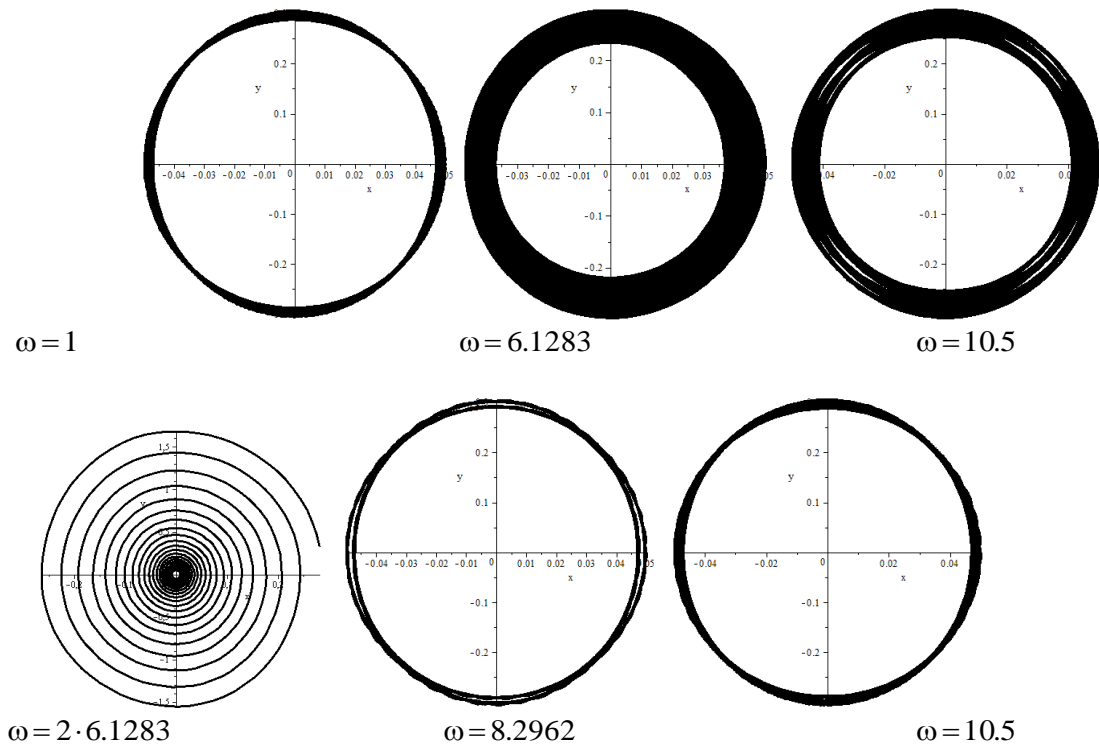


Рис.2. Фазові портрети динамічної системи

Спостерігаємо наявність двох резонансів, що відповідають першій частоті вільних коливань рідини в циліндричному резервуарі $\omega = 6.1283$ та подвоєній першій частоті $\omega = 2 \cdot 6.1283$. Це відповідає отриманим в [13] теоретичним результатам, які свідчать про те, що параметричний резонанс має місце, коли

$$\omega = \frac{2\chi_1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

При цьому головний параметричний резонанс відбувається саме при подвоєній частоті вільних коливань, коли амплітуди $d_1(t), \dot{d}_1(t)$ необмежено зростають.

Зауважимо що в лінійному формулюванні маємо систему незв'язаних диференціальних рівнянь, перехід до нелінійної задачі, окрім появи квадратичних доданків, призводить до зв'язаності системи. Для спрощення аналізу розглянемо спочатку рівняння нелінійної задачі, коли враховується лише один член рялу в розкладах (4), (5).

3.2 Дослідження нелінійного рівняння

Обмежимося $M = 1$ у рівняннях (14) в припущенні відсутності сили збурення. Маємо

$$\varphi_1 = J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \frac{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{(z+h)}{R}\right)}{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right)}$$

Обчислимо квадрат градієнту цієї функції дає

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} = -\frac{\zeta_{01}}{R} J_1\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \frac{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{(z+h)}{R}\right)}{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right)}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\zeta_{01}}{R} J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \frac{\sinh\left(\zeta_{01} \frac{(z+h)}{R}\right)}{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right)},$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2 = \left[-\frac{\zeta_{01}}{R} J_1\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \frac{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{(z+h)}{R}\right)}{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right)}\right]^2 + \left[\frac{\zeta_{01}}{R} J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \frac{\sinh\left(\zeta_{01} \frac{(z+h)}{R}\right)}{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right)}\right]^2.$$

На вільній поверхні ($z=0$) маємо

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2 = \frac{(\zeta_{01})^2}{R^2} \left[J_0^2\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + J_1^2\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \tanh^2\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right) \right]$$

Рівняння на вільній поверхні для визначення $d_1(t)$ приймуть від

$$\ddot{d}_1(t)\varphi_1(\rho, 0) + g d_1(t) \frac{\partial \varphi_1(\rho)}{\partial z} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi_1(\rho)|^2 = \ddot{d}_1(t) J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + g \frac{\zeta_{01}}{R} J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \tanh\left(\frac{\zeta_{01}}{R}\right) d_1(t) +$$

$$+ \frac{1}{2} (\dot{d}_1(t))^2 \left(\frac{\zeta_{01}}{R}\right)^2 \left[J_0^2\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + J_1^2\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \tanh^2\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right) \right]$$

Введемо позначення

$$\omega_1^2 = g \frac{\zeta_{01}}{R} \tanh\left(\frac{\zeta_{01}h}{R}\right)$$

$$\tau(\rho) = \left(\frac{\zeta_{01}}{R}\right)^2 \left[J_0^2\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + J_1^2\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \tanh^2\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right) \right]$$

Тоді маємо

$$\ddot{d}_1(t)\varphi_1(\rho, 0) + g d_1(t) \frac{\partial \varphi_1(\rho)}{\partial z} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi_1(\rho)|^2 = \ddot{d}_1(t) J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + \omega_1^2 d_1(t) + \frac{1}{2} (\dot{d}_1(t))^2 \tau(\rho)$$

З кінематичної умови на вільній поверхні маємо

$$\ddot{d}_1(t) J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + \omega_1^2 d_1(t) J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + \frac{1}{2} (\dot{d}_1(t))^2 \tau(\rho) = 0 \quad (19)$$

Знайдемо скалярний добуток (19) на $J_0\left(\frac{\zeta_{01}}{R}\rho\right)$

$$\ddot{d}_1(t) + \omega_1^2 d_1(t) + \frac{1}{2} (\dot{d}_1(t))^2 \frac{(\tau(\rho), J_0(\rho))}{(J_0(\rho), J_0(\rho))} = 0. \quad (20)$$

При нульових початкових умовах рівняння (11) має тривіальний розв'язок. Тому розглянемо такі ненульові початкові умови

$$d_1(0) = 0; \dot{d}_1(0) = 1$$

Знайдемо аналітичний розв'язок рівняння (20) за умови, що $\tau(\rho) = 0$, тобто коли нелінійні ефекти не враховуються

$$d_1(t) = \frac{1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \quad (21)$$

На рис 3. зображено зміну рівня вільної поверхні у центральній точці ($r=0, z=H$). Пунктирна лінія відповідає аналітичному розв'язку (21), суцільна лінія відповідає розв'язку рівняння (20), отриманого чисельно за допомогою методу Рунге-Кутта 4-5-го порядку. Бачимо, що урахування нелінійного ефекту суттєво збільшує амплітуду коливань.

Проаналізуємо вплив початкових умов на поведінку розв'язків лінійного та нелінійного рівнянь для знаходження зміни рівня вільної поверхні. При $d_1(0) = 0, \dot{d}_1(0) = 1.1$ бачимо суттєве збільшення амплітуди коливань при незначному збільшенні початкової швидкості $\dot{d}_1(0)$.

Ще більш цікавий результат було отримано при $\dot{d}_1(0) = 1.17$. Бачимо ефект «падіння хвилі».

Відмітимо, що при $\dot{d}_1(0) = 1.16$ падіння хвилі ще не відбувається, але амплітуди коливань при врахуванні нелінійних ефектів суттєво зростає. Це може бути пояснено невиконанням умови Пенлеве [14], яка полягає у наступному: звичайне диференціальне рівняння має властивість Пенлеве, якщо його загальний розв'язок не має рухомих критичних особливостей.

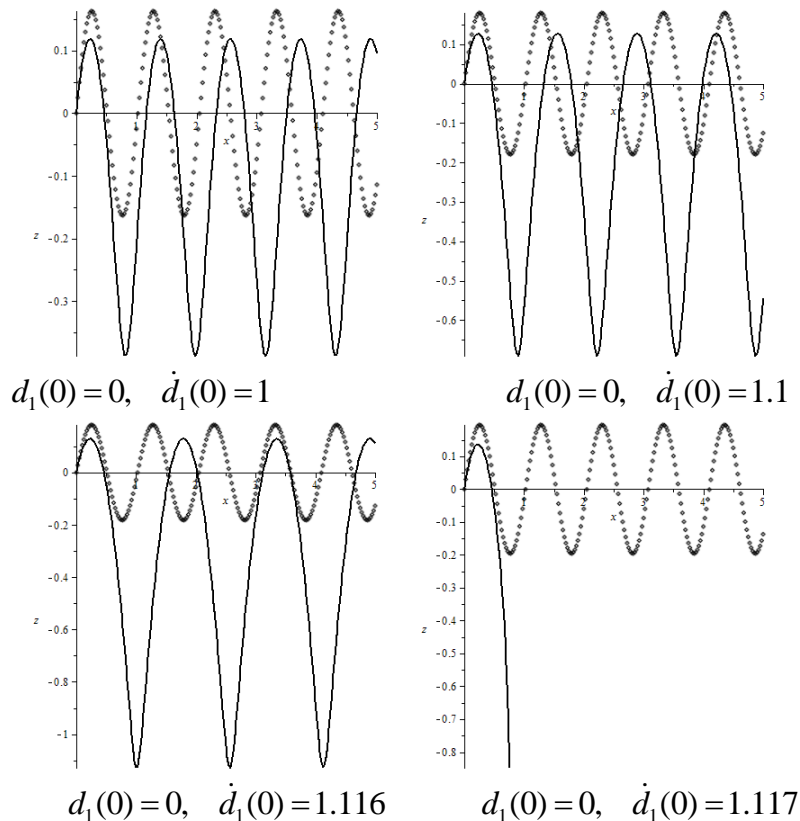


Рис 3. Зміна рівня ζ у центральній точці вільної поверхні за різні початкові умови.

Введемо позначення $\alpha = \frac{1}{2} \frac{(\tau(\rho), J_0(\rho))}{(J_0(\rho), J_0(\rho))}$. Шляхом заміни змінної $w(d_1) = (\dot{d}_1(t))^2$ рівняння

$$\ddot{d}_1(t) + \omega_1^2 d_1(t) + \alpha (\dot{d}_1(t))^2 = 0$$

зводиться до лінійного диференціального рівняння першого порядку

$$w' + \omega_1^2 d_1 + \alpha w = 0,$$

яке має такий аналітичний розв'язок при $d_1(0) = 0$:

$$\dot{d}_1^2(t) = \frac{\omega_1^2}{2\alpha^2} - \frac{d_1}{\alpha^2} + \left[(\dot{d}_1(0))^2 - \frac{\omega_1^2}{2\alpha^2} \right] \exp(-2\alpha d_1). \quad (22)$$

З рівняння (22) бачимо, що при $d_1(t) < 0$ та $y'(0)^2 - \frac{\omega_1^2}{2\alpha^2} > 0$ спостерігається швидке зростання $\dot{d}_1(t)$ (рис. 3), що веде до «падіння хвилі». Зауважимо, що в розглянутому випадку $\omega_1^2 \approx 37.556$, $2\alpha^2 \approx 30.109$, а саме, отримуємо $\frac{\omega_1^2}{2\alpha^2} \approx 1.2473$, $\sqrt{1.2473} \approx 1.118$. Саме цю границю для втрати стійкості отримано числовим методом.

Зауважимо, що коли початкові дані такі, що $d_1(0) < 0$, $\dot{d}_1(0) = 0$, втрати стійкості не спостерігались, навіть для досить великих від'ємних значень $d_1(0)$. Ці результати проілюстровано на рис. 4.

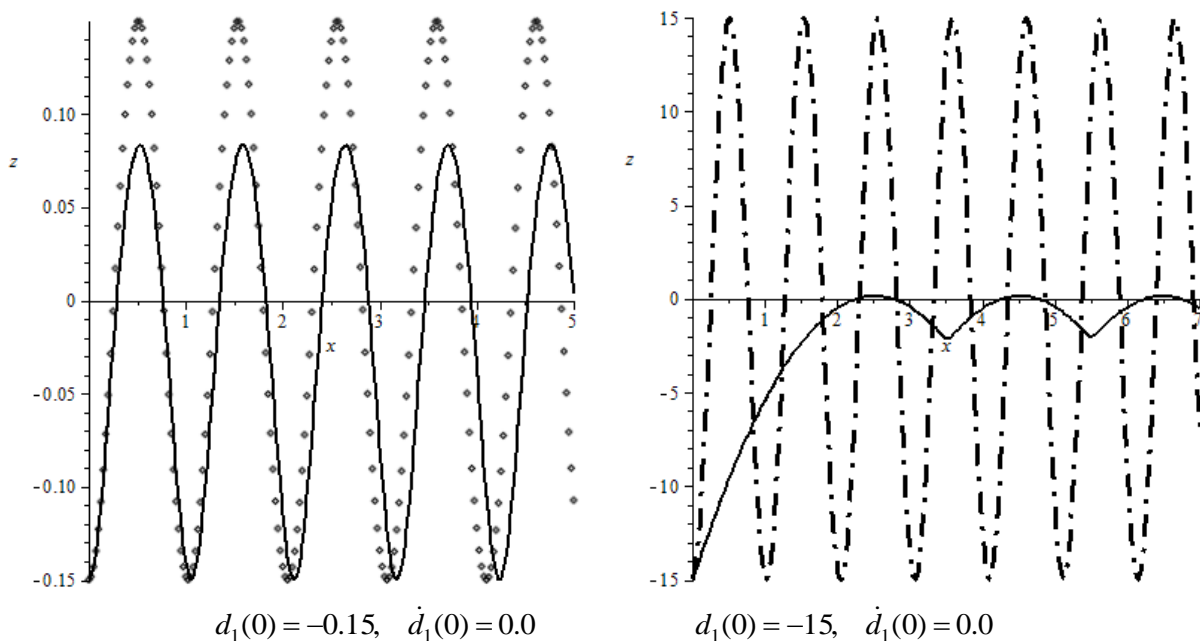


Рис.4. Поведінка розв'язку нелінійного рівняння за різні граничні умови

Таким чином, врахування нелінійності призводить до необхідності дослідження рівнянь, розв'язки яких суттєво залежать від початкових умов. За деяких початкових умов спостерігається втрата стійкості.

4. Висновки

В роботі отримані диференціальні рівняння, що описують вимушені коливання рідини в циліндричному резервуарі під дією вертикального гармонічного збудження в аксіально-

симетричному формулюванні. Проведено числовий аналіз задачі в лінійному формулюванні. На відміну від горизонтальних збуджень спостерігається поява подвійної резонансної частоти. Для аналізу нелінійних коливань проведено попереднє дослідження одного характерного диференціального рівняння за відсутності сили, що збуджує. Цей аналіз дозволив виявити суттєвий вплив початкових умов на поведінку динамічної системи. В подальшому планується дослідження нелінійних коливань рідини в резервуарах, що є оболонками обертання, за дії як вертикальних, так і горизонтальних сил збудження.

ЛІТЕРАТУРА

1. Feschenko S.F., Lukovsky I.A., Rabinovich B.I. Methods for determining added fluid mass in mobile cavities, Kiev, Naukova Dumka, 2000.
2. Abramson H.N.; The dynamic behavior of liquids in moving containers; NASA SP-106; 1966
3. Khezzar L., Seibi A. C., Goharzadeh A.. Water Sloshing in Rectangular Tanks – An Experimental Investigation & Numerical Simulation. International Journal of Engineering (IJE), Vol. 3, No. 2, 2010, pp. 174-184.
4. Curadelli, O., Ambrosini, D., Mirasso, A., Amani, M. Resonant frequencies in an elevated spherical container partially filled with water: FEM and measurement. Journal of Fluids and Structures 26, 2010, pp. 148–159.
5. Беловодский В.Н., Сухоруков М.Ю., Метод гармонического баланса применительно к построению бифуркационных диаграмм колебательных систем с полиномиальной нелинейностью, Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины, Донецьк: ПИММ НАН України, 2013, Т. 26, С. 12-20..
6. Toure C., Normal form theories and nonlinear normal modes, Theoretical settings and applications, Paris, 2012, pp-232-238,
7. Ibrahim R.A. Liquid Sloshing Dynamics Cambridge University Press, New York, 2005.
8. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences, V1, No1, 2016, pp. 14-27.
9. Ravnik J., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K., Ogorodnyk U., BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 67, 2016: pp. 13-18
10. D.V . Krutchenko, E.A. Strelnikova, Yu.S. Shuvalova, Вісник Харківського національного університету. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління". 2017, Т.35, No1, С. 31-37.
11. Еселева Е.В., Гнитко В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью, Институт пробл. машиностроения. 2006, №1, С.105-118.
12. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. Государственное издательство теоретико-технической литературы. Москва, 1956, 600с.
13. Polyanin, A. D., Zaitsev, V. F., Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, 2nd Edition , Chapman & Hall/CRC, Boca Raton 2003.
14. Кудряшов Н.А.. Свойство Пенлеве в теории дифференциальных уравнений, Соросовский образовательный журнал, №9, 1999. с. 121-122.

REFERENCES

1. S.F Feschenko., I.A. Lukovsky, B.I. Rabinovich, Methods for determining added fluid mass in mobile cavities, Kiev, Naukova Dumka, 2000.
2. Abramson H.N.; The dynamic behavior of liquids in moving containers; NASA SP-106; 1966
3. L. Khezzar, A. C. Seibi, A. Goharzadeh. Water Sloshing in Rectangular Tanks – An Experimental Investigation & Numerical Simulation. International Journal of Engineering (IJE), Vol. 3, No. 2, ,pp. 174-184, 2010.
4. O. Curadelli, D. Ambrosini, , A. Mirasso, M. Amani, *Resonant frequencies in an elevated spherical container partially filled with water: FEM and measurement*. Journal of Fluids and Structures 26, pp. 148–159, 2010.

5. Belovodskiy V.N. Sukhorukov M.Y. *The harmonic balance method for the finding of bifurcation diagrams of oscillatory systems with polynomial nonlinearity*. "Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine", Donetsk: IAMM of NAS of Ukraine, Vol. 26, pp. 12-20, 2013. [in Russian]
6. C.Toure, *Normal form theorems and nonlinear normal modes*, Theoretical settings and applications, Paris, pp-232-238, 2012.
7. R.A. Ibrahim, *Liquid Sloshing Dynamics*, Cambridge University Press, New York, 2005.
8. K. Degtyarev, V.Gnitko, V.Naumenko, E.Strelnikova, *Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles* Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences, V1, No1, pp. 14-27, 2016.
9. Ravnik J., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K., Ogorodnyk U., *BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 67, pp. 13-18, 2016
10. D.V.Krutchenko, E.A.Strelnikova, Yu.S.Shuvalova. *Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. Вісник Харківського національного університету. , Серія "Математичне моделювання. 2017, Т.35, No1, С. 31-37.
11. Yeseleva E., Gnitko V., Strelnikova E. A. *Intrinsic oscillations of high pressure tanks when interacting with a liquid*, Pidgorny Institute of Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, №1, P.105-118, 2006. [in Russian]
12. Bolotin V.V. *The Dynamic Stability of Elastic Systems*. Gostekhizdat, Moscow. 600 p. 1956 [in Russian]
13. A. D Polyanin, V. F Zaitsev, *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton 2003.
14. Kidryashov N.A. *The Painlevé property in the theory of differential equations*. Soros Education Journal №9, pp. 121-122, 1999. [in Russian]

Крютченко Денис Владимирович – аспирант;. *Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного, ул. Пожарского, 2/10, г.Харьков, Украина, 61046. ORCID: 0000-0002-6804-6991.*

Крютченко Денис Владимирович – аспирант. *Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного, ул. Пожарского, 2/10, г.Харьков, Украина, 61046. ORCID: 0000-0002-6804-6991.*

Kriutchenko Denys - graduate student, *A. Pidgorny Institute of mechanical engineering problems, vul. Pozharskogo, 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046. ORCID: 0000-0002-6804-6991.*