

УДК 517.95 : 517.988

## Метод двобічних наближень у чисельному аналізі однієї мікроелектромеханічної системи

О.С. Кончаковська, М.В. Сидоров

Харківський національний університет радіоелектроніки, пр. Науки, 14, м. Харків, 61166, Україна  
e-mail: oksana.konchakovska@nure.ua, maxim.sidorov@nure.ua

Розглядається задача чисельного аналізу електростатичної мікроелектромеханічної системи, для математичного опису якої використано нелінійне еліптичне рівняння з оператором Лапласа та заданими крайовими умовами. На основі методу послідовних наближень побудовано алгоритм отримання двобічних наближень до розв'язку задачі. Метод проілюстровано обчислювальними експериментами для задачі, розглядуваної у круговій області, які подано у вигляді числової та графічної інформації.

**Ключові слова:** електростатична мікроелектромеханічна система, додатний розв'язок, метод двобічних наближень, інваріантний конусний відрізок, метод функцій Гріна, монотонний оператор.

Рассматривается задача численного анализа электростатической микроэлектромеханической системы, для математического описания которой использовано нелинейное эллиптическое уравнение с оператором Лапласа и заданными краевыми условиями. На основе метода последовательных приближений построен алгоритм получения двусторонних приближений к решению задачи. Метод проиллюстрирован вычислительными экспериментами для задачи, рассматриваемой в круговой области, которые представлены в виде числовой и графической информации.

**Ключевые слова:** электростатическая микроэлектромеханическая система, положительное решение, метод двусторонних приближений, инвариантный конусный отрезок, метод функций Грина, монотонный оператор.

In this paper, we consider the problem of numerical analysis of an electrostatic microelectromechanical system. Microelectromechanical systems are devices of microsystem technology that combine electronic and mechanical components of micron sizes. Electrostatic activation is one of the most common types of activation of microelectromechanical systems used in accelerometers, optical switches, micropumps, etc. The disadvantages of such devices consist in their pull-instability. This effect occurs when the voltage applied to the moving electrode exceeds the critical value. As a result the system loses its stationary configuration. To ensure the stable operation of the microelectromechanical system, it is proposed to control the dielectric properties of the device components. For a mathematical modeling of the process, we use a nonlinear elliptic equation with the Laplace operator and the given boundary conditions. To construct an approximate solution of the problem under consideration, we propose to use methods of nonlinear analysis in semi-ordered spaces, in particular, the results of the solvability of nonlinear operator equations with a monotone operator obtained by M.A. Krasnosel'skij. The boundary value problem that modes a microelectromechanical system is reduced to the Hammerstein integral equation using the Green's function. The paper substantiates the possibility of constructing two-sided approximations to a positive solution of the problem. The method is illustrated by computational experiments for the problem considered in a unit circular domain. The computational experiments are presented in a numerical and graphical format.

**Keywords:** electrostatic microelectromechanical system, positive solution, two-sided approach method, invariant cone segment, Green's method of functions, monotone operator.

### 1. Вступ

Сучасні дослідження мікросистемної техніки (МСТ) в основному присвячені застосуванню різноманітних методів математичного моделювання для опису механічних (деформація), електромагнітних (діелектрична та магнітна проникність), оптичних та інших властивостей. Мікроелектромеханічні системи поєднують електронні та механічні компоненти для проектування багатьох видів мікроскопічних пристроїв, що використовуються в медицині, авіаційній техніці, автомобілебудуванні, робототехніці, системах зв'язку, атомній енергетиці тощо. Застосування МСТ у різних областях фізики зумовило розробку мікроелектромеханічних (МЕМС), мікрооптоелектромеханічних, мікроакустоелектромеханічних та інших систем [4].

Для найбільш точних та складних моделей основними методами знаходження розв'язку є чисельні методи, що потребують проведення великого обсягу обчислень на ЕОМ. Ці методи дають змогу отримати гарний кількісний та навіть якісний результат для опису моделі. Проте вони мають недоліки, оскільки не завжди можна оцінювати похибку отриманих чисельних розв'язків. Вільними від цього недоліку є чисельні методи, які дають ітераційну послідовність, що мають двобічну збіжність. Це дозволяє апостеріорно оцінювати похибку наближеного розв'язку на кожному кроці ітераційного процесу.

Отже, розробка і вдосконалення існуючих засобів математичного моделювання і чисельного аналізу задач, що виникають при проектуванні МСТ, в частині використання методів із зазначеними властивостями, є актуальною науковою задачею.

## 2. Постановка задачі

Основним елементом МЕМС є актюатор – виконавчий механізм, що дозволяє перетворювати один із видів енергії (електричну, магнітну, теплову, хімічну) на механічну роботу, що призводить до виконання дії, заданої керуючим сигналом. Одним із найпоширеніших типів активації МЕМС є електростатичний актюатор, що використовує для роботи силу притягання між електродами з різними зарядами. Характерною особливістю електростатичних актюаторів є нестабільність відхилення (*pull-in instability*). Цей ефект виникає, коли напруга, що подається на електрод, перевищує критичне значення, внаслідок чого система втрачає стаціонарну конфігурацію, яка забезпечує збереження структури механічних компонентів МЕМС. Для зменшення впливу цієї особливості електростатичних актюаторів пропонується підбирати діелектричні властивості МЕМС пристроїв [6, 8 – 10]. У статті [12] вперше була розглянута математична модель найпростішої електростатичної МЕМС для дослідження цієї можливості.

Основним елементом електростатичних актюаторних МЕМС є пристрій, що складається із закріпленої вздовж межі еластичної діелектричної мембрани, що розташована над жорсткою нееластичною пластиною, яка добре проводить струм. При цьому поверхня мембрани покрита тонкою металевою плівкою. Внаслідок подачі напруги на плівку мембрана відхиляється до пластини і може відбутися злипання електродів. Зворотній процес називається стійким станом системи. Отже, при проектуванні МЕМС необхідно визначити параметри системи для функціонування її у стійкому стані. Схема роботи найпростішої електростатичної МЕМС зображена на рис. 2.1.

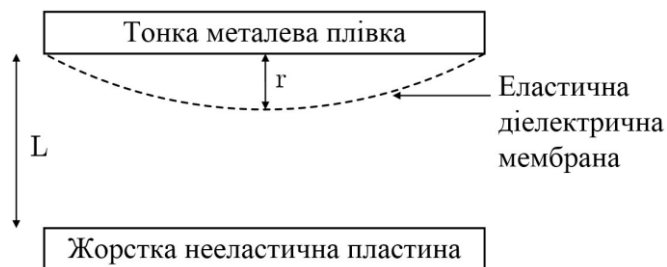


Рис. 2.1 Схема роботи найпростішої електростатичної МЕМС

Розглянемо механічну систему, що складається з пружного тіла та доданих до нього зовнішніх «мертвих» сил, тобто таких сил, що зберігають величину і напрямок при деформаціях системи; тіло вважаємо закріпленим так, що його переміщення як жорсткого цілого виключені [1].

У [11] показано, що повна потенційна енергія такої консервативної системи в навантаженому стані визначається сумою потенційної енергії деформації тіла та потенціалу зовнішніх сил.

Потенціал зовнішніх сил визначається за формулою

$$W = - \int_{\Omega} \frac{f(\mathbf{x})V^2}{L + r(\mathbf{x})} d\mathbf{x},$$

де  $f(\mathbf{x})$  – співвідношення відносної діелектричної проникності середовища до діелектричної проникності мембрани,  $L$  – відстань між двома електродами за відсутності деформації мембрани,  $V$  – фіксована електрична напруга,  $r$  – величина деформації мембрани,  $\Omega$  – обмежена область у  $\mathbf{R}^2$ .

Якщо в системі наявні пружні деформації, то  $r \neq 0$ .

Потенціальна енергія деформації тіла визначається сумою потенціальних енергій зміни об'єму та форми і має вигляд

$$R = \int_{\Omega} \left( \frac{T}{2} |\nabla r|^2 + \frac{D}{2} |\Delta r|^2 \right) d\mathbf{x},$$

де  $T > 0$  – стала напруги,  $D = \frac{2h^3Y}{3(1-\nu^2)}$ ,  $h$  – товщина пластини,  $Y$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Отже, повна потенціальна енергія системи дорівнює

Отже, повна потенціальна енергія системи дорівнює

$$E = R + W = \int_{\Omega} \left( \frac{T}{2} |\nabla r|^2 + \frac{D}{2} |\Delta r|^2 - \int_{\Omega} \frac{f(\mathbf{x}) V^2}{L+r} \right) d\mathbf{x}.$$

Необхідна умова мінімуму функціонала  $E$  (рівняння Ейлера-Остроградського) має вигляд

$$T\Delta r - D\Delta^2 r = \frac{f(\mathbf{x})V^2}{(L+r)^2} \text{ у } \Omega,$$

$$r|_{\partial\Omega} = 0.$$

Оскільки нижній електрод тонкий, то його товщиною можна знехтувати щодо його розмірів ( $D=0$ ). Введемо заміну  $r = -u$  та покладемо  $L=1$ ,  $T=1$ ,  $\lambda = V^2$ , тоді отримуємо нелінійну крайову задачу, яка є математичною моделлю MEMS [7]:

$$-\Delta u = \frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-u)^2} \text{ у } \Omega \subset \mathbf{R}^2, \quad (2.1)$$

$$0 < u < 1 \text{ у } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.2)$$

де  $\lambda > 0$ ,  $0 < f(\mathbf{x}) \leq 1$ .

Один із способів досягнення великих значень напруги при одночасному збільшенні відстані відхилення (pull-in distance) полягає у введенні просторово-змінної діелектричної проникності мембрани. Це дозволить врахувати взаємодію молекул в матеріалі мембрани, що виникають внаслідок деформації.

Оберемо  $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^\alpha = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\alpha}{2}}$ . У роботі [8] досліджено питання розв'язуваності задачі (2.1), (2.2) в залежності від параметра  $\lambda$ , а саме, отримано оцінки інтервалів зміни параметра  $\lambda$ , для яких існує єдиний додатний розв'язок, декілька додатних розв'язків або не існує жодного розв'язку. Зокрема, отримано, що при  $\lambda \in (0, \lambda_c(\alpha))$ , де  $\lambda_c(\alpha) = \frac{4(2+\alpha)^2}{27}$ ,

задача (2.1), (2.2) у одиничному колі має єдиний додатний розв'язок.

Дана робота продовжує дослідження, розпочаті у [2], де було обрано  $f(\mathbf{x}) = 1$ .

### 3. Метод чисельного аналізу

Побудуємо двобічний процес послідовних наближень до розв'язку задачі (2.1), (2.2), застосовуючи методи нелінійного аналізу в напівупорядкованих просторах [3, 5].

У банаховому просторі  $C(\bar{\Omega})$  неперервних у  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  функцій виділимо конус  $K_+$  невід'ємних функцій. За допомогою конуса  $K_+$  введемо у  $C(\bar{\Omega})$  напівупорядкованість за правилом:  $u, w$ , якщо  $w - u \in K_+$ . Зазначимо, що конус  $K_+$  у  $C(\bar{\Omega})$  є нормальним (і навіть гострим) [3, 5]. Розглянемо еквівалентне задачі (2.1), (2.2) нелінійне операторне рівняння  $u = Tu$  з

$$Tu = \lambda \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{s}|^\alpha G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s},$$

де  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна першої крайової задачі для оператора  $-\Delta$ .

Розв'язком (узагальненим) задачі (2.1), (2.2) називатимемо функцію  $u^* \in C(\bar{\Omega})$ , яка є розв'язком рівняння  $u = Tu$ .

Оператор  $T$  є неперервним і монотонним на конусі  $K_+$ , оскільки для будь-яких елементів конуса  $u_1, u_2$ , таких, що  $u_1, u_2 < 1$ , справджується нерівність

$$Tu_1 \leq Tu_2.$$

З огляду на монотонність оператора  $T$  побудуємо інваріантний конусний відрізок

$$\langle v_0, w_0 \rangle = \{u | v_0 \leq u \leq w_0\},$$

$$T \langle v_0, w_0 \rangle \subset \langle v_0, w_0 \rangle.$$

Для цього при  $\lambda \in (0, \lambda_c(\alpha))$  розглянемо схему послідовних наближень

$$u_{n+1}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{s}|^{\alpha} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - u_n(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

За допомогою (3.1) сформуємо два ітераційні процеси, які починаються з функцій  $v_0 = 0$  і  $w_0 = \beta = \text{const} \in (0, 1)$  відповідно. Тоді для кожного з них маємо перші наближення

$$w_1(\mathbf{x}) = \frac{\lambda}{(1 - \beta)^2} \int_{\Omega} |\mathbf{s}|^{\alpha} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} = \frac{\lambda u_0(\mathbf{x})}{(1 - \beta)^2},$$

$$v_1(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} |\mathbf{s}|^{\alpha} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} = \lambda u_0(\mathbf{x}),$$

де  $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} |\mathbf{s}|^{\alpha} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}$ .

Оскільки оператор  $T$  є неперервним і монотонним на конусі  $K_+$ , то завжди виконується нерівність  $v_0 \leq v_1$ . Нерівність  $w_1 \leq w_0$  буде виконано, якщо  $\beta$  визначається з системи нерівностей

$$\lambda \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u_0(\mathbf{x}) \leq \beta(1 - \beta)^2, \quad 0 < \beta < 1. \quad (3.2)$$

Продовжуючи ітерації, дістанемо послідовні наближення, які для  $\lambda \in (0, \lambda_c(\alpha))$  двобічно збігаються до єдиного додатного розв'язку задачі (2.1), (2.2):

$$0 = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_k \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_k \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

Отже, справджується така теорема.

**Теорема.** Оператор  $Tu = \lambda \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{s}|^{\alpha} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - u(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s}$ , де  $\Omega$  – одиничне коло, має при  $\lambda \in (0, \lambda_c(\alpha))$  єдину

нерухому точку  $u^*$  на конусному відрізку  $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle 0, \beta \rangle$ , де  $\beta$  визначається нерівностями (3.2). Послідовні наближення, які формуються за правилом (3.1), двобічно збігаються до  $u^*$ .

#### 4. Результати чисельного аналізу

Обчислювальний експеримент для задачі (2.1), (2.2) було проведено у області

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\} \subset \mathbf{R}^2.$$

Нехай  $\alpha = 1$ , тобто  $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . Досліджувана задача має єдиний розв'язок при  $\lambda \in \left(0, \frac{4}{3}\right)$  і еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{s}| G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - u(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s}.$$

Для обчислюваного експерименту оберемо  $\lambda = 1$ . Тоді послідовні наближення формуються за ітераційною схемою

$$u^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{s}| G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - u^{(k)}(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s}.$$

Тут  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна для одиничного кола, яка має вигляд

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho r_{\mathbf{x}\mathbf{s}^1}},$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ ,  $\rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$ , точки  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{s}^1$  – точки, симетричні відносно одиничного кола,  $r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}$ ,  $r_{\mathbf{x}\mathbf{s}^1}$  – відстань між точками  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{s}$  та  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{s}^1$  відповідно.

З нерівностей (3.2) отримаємо, що

$$0,155970 \leq \beta \leq 0,550901.$$

На рис. 4.1 наведені верхні наближення (суцільна лінія) та нижні наближення (штрихована лінія) при  $n$  від 0 до 8 в перерізі  $x_2 = 0$ .

У таблицях 1 та 2 представлено значення  $w_n(\mathbf{x})$  та  $v_n(\mathbf{x})$  відповідно при  $n$  від 0 до 8 в точках області  $\Omega$  з полярними координатами  $(\rho_i, \varphi_j)$ , де  $\rho_i = 0,25i$ ,  $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$ ,  $i$  від 0 до 2,  $j$  від 0 до 5 (значення в інших чвертях симетричні).

Зауважимо, що у будь-якій із обраних точок  $w_n(\mathbf{x})$ ,  $v_n(\mathbf{x})$ , значення  $w_n(\mathbf{x})$  спадають, а значення  $v_n(\mathbf{x})$  – зростають.

Таблиця 1. Значення  $w_n(\mathbf{x})$  в точках області  $\bar{\Omega}$  при  $n$  від 0 до 8

| $\varphi$<br>$\rho$ | 0        | $\frac{\pi}{10}$ | $\frac{\pi}{5}$ | $\frac{3\pi}{10}$ | $\frac{2\pi}{5}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $n$ |
|---------------------|----------|------------------|-----------------|-------------------|------------------|-----------------|-----|
| 0                   | 0,155970 | 0,155970         | 0,155970        | 0,155970          | 0,155970         | 0,155970        | 0   |
|                     | 0,142902 | 0,142902         | 0,142902        | 0,142902          | 0,142902         | 0,142902        | 2   |
|                     | 0,138345 | 0,138345         | 0,138345        | 0,138345          | 0,138345         | 0,138345        | 4   |
|                     | 0,138122 | 0,138122         | 0,138122        | 0,138122          | 0,138122         | 0,138122        | 6   |
|                     | 0,138112 | 0,138112         | 0,138112        | 0,138112          | 0,138112         | 0,138112        | 8   |
| 0,25                | 0,155970 | 0,155970         | 0,155970        | 0,155970          | 0,155970         | 0,155970        | 0   |
|                     | 0,140111 | 0,140135         | 0,140160        | 0,140178          | 0,140196         | 0,140193        | 2   |
|                     | 0,135677 | 0,135699         | 0,135720        | 0,135734          | 0,135748         | 0,135739        | 4   |
|                     | 0,135461 | 0,135483         | 0,135504        | 0,135518          | 0,135531         | 0,135523        | 6   |
|                     | 0,135451 | 0,135473         | 0,135494        | 0,135508          | 0,135521         | 0,135513        | 8   |
| 0,5                 | 0,155970 | 0,155970         | 0,155970        | 0,155970          | 0,155970         | 0,155970        | 0   |
|                     | 0,123436 | 0,123538         | 0,123641        | 0,123699          | 0,123758         | 0,123662        | 2   |
|                     | 0,119648 | 0,119743         | 0,119839        | 0,119887          | 0,119936         | 0,119834        | 4   |
|                     | 0,119468 | 0,119563         | 0,119659        | 0,119707          | 0,119755         | 0,119653        | 6   |
|                     | 0,119460 | 0,119555         | 0,119650        | 0,119698          | 0,119746         | 0,119645        | 8   |

Таблиця 2. Значення  $v_n(\mathbf{x})$  в точках області  $\bar{\Omega}$  при  $n$  від 0 до 8

| $\varphi$<br>$\rho$ | 0        | $\frac{\pi}{10}$ | $\frac{\pi}{5}$ | $\frac{3\pi}{10}$ | $\frac{2\pi}{5}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $n$ |
|---------------------|----------|------------------|-----------------|-------------------|------------------|-----------------|-----|
| 0                   | 0        | 0                | 0               | 0                 | 0                | 0               | 0   |
|                     | 0,132365 | 0,132365         | 0,132365        | 0,132365          | 0,132365         | 0,132365        | 2   |
|                     | 0,137845 | 0,137845         | 0,137845        | 0,137845          | 0,137845         | 0,137845        | 4   |
|                     | 0,138099 | 0,138099         | 0,138099        | 0,138099          | 0,138099         | 0,138099        | 6   |
|                     | 0,138111 | 0,138111         | 0,138111        | 0,138111          | 0,138111         | 0,138111        | 8   |
| 0,25                | 0        | 0                | 0               | 0                 | 0                | 0               | 0   |
|                     | 0,129864 | 0,129884         | 0,129904        | 0,129916          | 0,129928         | 0,129919        | 2   |
|                     | 0,135192 | 0,135214         | 0,135235        | 0,135249          | 0,135249         | 0,135254        | 4   |
|                     | 0,135438 | 0,135460         | 0,135482        | 0,135495          | 0,135509         | 0,135500        | 6   |
|                     | 0,135450 | 0,135471         | 0,135493        | 0,135507          | 0,135520         | 0,135512        | 8   |
| 0,5                 | 0        | 0                | 0               | 0                 | 0                | 0               | 0   |
|                     | 0,114781 | 0,114870         | 0,114959        | 0,115002          | 0,115044         | 0,114946        | 2   |
|                     | 0,119244 | 0,119339         | 0,119434        | 0,119482          | 0,119530         | 0,119428        | 4   |
|                     | 0,119449 | 0,119544         | 0,119640        | 0,119688          | 0,119736         | 0,119634        | 6   |
|                     | 0,119459 | 0,119554         | 0,119649        | 0,119697          | 0,119745         | 0,119644        | 8   |

Оскільки

$$v_8(\mathbf{x}), w^*(\mathbf{x}), w_8(\mathbf{x}),$$

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w_8(\mathbf{x}) - v_8(\mathbf{x})) = 0,1 \cdot 10^{-5},$$

то з точністю  $0,5 \cdot 10^{-6}$  маємо

$$u^*(\mathbf{x}) \approx \frac{w_8(\mathbf{x}) + v_8(\mathbf{x})}{2}.$$

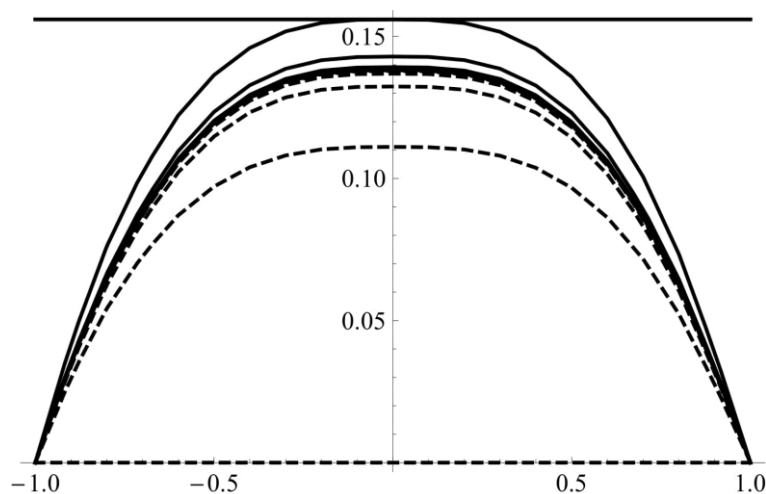


Рис. 4.1 Графіки  $w_n(x_1, 0)$  та  $v_n(x_1, 0)$  при  $n$  від 0 до 8

У таблиці 3 наведено значення наближеного розв'язку з точністю  $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-6}$  в точках області  $\bar{\Omega}$  з полярними координатами  $(\rho_i, \varphi_j)$ , де  $\rho_i = 0,25i$ ,  $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$ ,  $i$  від 0 до 2,  $j$  від 0 до 5. Поверхня наближеного розв'язку  $u_8(\mathbf{x})$  та його лінії рівня представлені на рис. 4.2 і 4.3 відповідно.

Зміна норми наближеного розв'язку задачі з точністю  $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-6}$  в залежності від параметра  $\lambda$  представлена у таблиці 4 і на рис. 4.4.

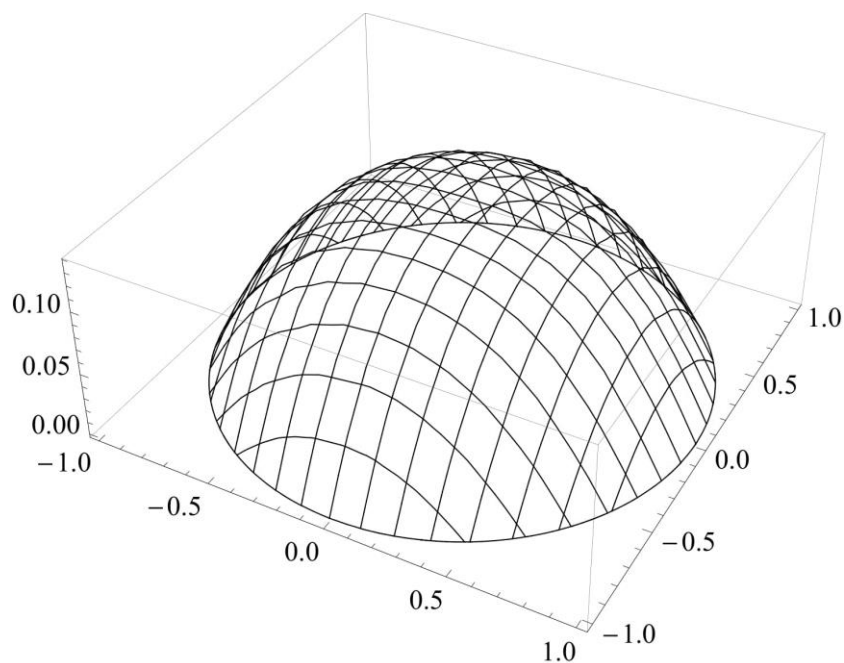
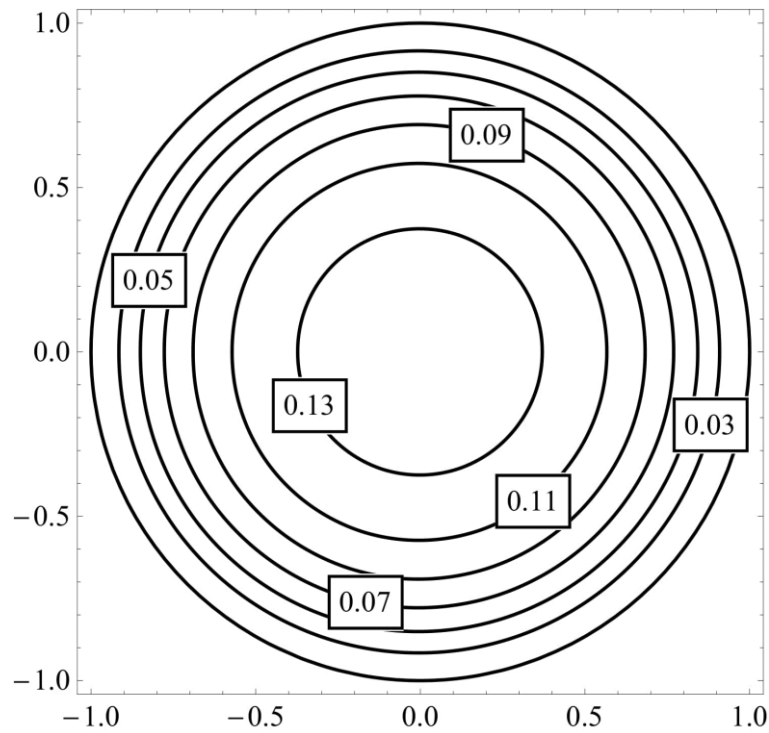


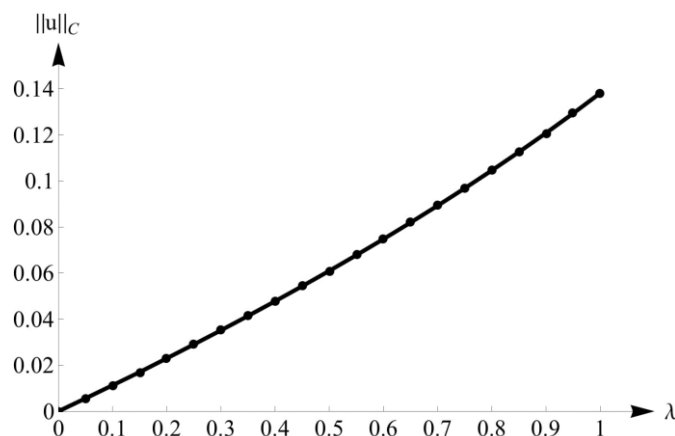
Рис. 4.2 Поверхня наближеного розв'язку  $u_8(\mathbf{x})$

Рис. 4.3 Лінії рівня наближеного розв'язку  $u_g(\mathbf{x})$ Таблиця 3. Значення наближеного розв'язку  $u_g(\mathbf{x})$  в точках області  $\bar{\Omega}$ 

| $\frac{\varphi}{\rho}$ | 0        | $\frac{\pi}{10}$ | $\frac{\pi}{5}$ | $\frac{3\pi}{10}$ | $\frac{2\pi}{5}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|------------------------|----------|------------------|-----------------|-------------------|------------------|-----------------|
| 0                      | 0,138111 | 0,138111         | 0,138111        | 0,138111          | 0,138111         | 0,138111        |
| 0,25                   | 0,135450 | 0,135472         | 0,135494        | 0,135508          | 0,135521         | 0,135513        |
| 0,5                    | 0,119460 | 0,119555         | 0,119650        | 0,119698          | 0,119746         | 0,119645        |

Таблиця 4. Значення норми наближеного розв'язку в залежності від параметра  $\lambda$ 

| $\lambda$ | $\ u\ _C$ | $\lambda$ | $\ u\ _C$ | $\lambda$ | $\ u\ _C$ | $\lambda$ | $\ u\ _C$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0,05      | 0,005602  | 0,30      | 0,035151  | 0,55      | 0,067793  | 0,80      | 0,104566  |
| 0,10      | 0,011301  | 0,35      | 0,041404  | 0,60      | 0,074775  | 0,85      | 0,112554  |
| 0,15      | 0,017010  | 0,40      | 0,047786  | 0,65      | 0,081930  | 0,90      | 0,120791  |
| 0,20      | 0,023004  | 0,45      | 0,054310  | 0,70      | 0,089271  | 0,95      | 0,129302  |
| 0,25      | 0,029020  | 0,50      | 0,060975  | 0,75      | 0,096811  | 1,00      | 0,138111  |

Рис. 4.4 Значення норми наближеного розв'язку в залежності від параметра  $\lambda$

Також обчислювальний експеримент було проведено для різних значень  $\alpha$ . У таблиці 5 представлено значення норм наближеного розв'язку задачі (2.1), (2.2) в залежності від параметрів  $\alpha$  та  $\lambda$ .

Таблиця 5. Значення норми наближеного розв'язку в залежності від параметрів задачі

| $\alpha$ | $\lambda_c(\alpha)$ | $\lambda$ | $\ u\ _C$ | $\alpha$ | $\lambda_c(\alpha)$ | $\lambda$ | $\ u\ _C$ |
|----------|---------------------|-----------|-----------|----------|---------------------|-----------|-----------|
| 0        | 0,59259             | 0,10      | 0,026001  | 2        | 2,37037             | 1,30      | 0,093904  |
|          |                     | 0,25      | 0,069545  |          |                     | 1,65      | 0,125435  |
|          |                     | 0,40      | 0,120867  |          |                     | 2,00      | 0,161459  |
|          |                     | 0,55      | 0,185344  |          |                     | 2,35      | 0,204254  |
| 1        | 1,33333             | 0,50      | 0,060975  | 3        | 3,70370             | 1,70      | 0,076398  |
|          |                     | 0,75      | 0,096811  |          |                     | 2,35      | 0,111724  |
|          |                     | 1,00      | 0,138111  |          |                     | 3,00      | 0,152533  |
|          |                     | 1,25      | 0,187902  |          |                     | 3,65      | 0,201951  |

### 5. Обговорення результатів

Отже, було розглянуто нелінійну крайову задачу для еліптичного рівняння (2.1), (2.2) при  $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  та  $\lambda = 1$ . За допомогою методу двобічних наближень отримано наближений розв'язок з точністю  $0,5 \cdot 10^{-6}$ . Згідно з отриманими результатами, наведеними в таблицях 4, 5 і на рис. 4.4, значення норми наближеного розв'язку  $\|u\|_C$  збільшується при збільшенні параметрів  $\alpha$  та  $\lambda$ . Запропонований у даній роботі метод можна використовувати для мембран різної форми, для яких відома функція Гріна.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н. А. Алфутов. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.
2. Кончаковська О. С. Чисельний аналіз одного нелінійного еліптичного рівняння, що виникає при моделюванні мікроелектромеханічних систем / О. С. Кончаковська, М. В. Сидоров // Радіоелектроніка та інформатика. – 2016. – 73, № 2. – С.23-29.
3. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
4. Мухуров Н. И. Электромеханические микроустройства / Н. И. Мухуров, Г. И. Ефремов. – Минск: Беларус. навука, 2012. – 257 с.
5. Опойцев В. И. Нелинейные операторы в пространствах с конусом / В. И. Опойцев, Т. А. Хуродзе. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с.
6. Esposito P. Compactness of a nonlinear eigenvalue problem with a singular nonlinearity / P. Esposito // Communications in Contemporary Mathematics. – 2008. – 10, № 01. – P.17-45.
7. Esposito P. Mathematical analysis of partial differential equations modeling electrostatic MEMS / P. Esposito, N. Ghoussoub, Y. Guo. – American Mathematical Soc., 2010.
8. Ghoussoub N. On the partial differential equations of electro-static MEMS devices: stationary case / N. Ghoussoub, Y. Guo // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 2007. – 38, № 5. – P.1423-1449.
9. Guo Y. Touchdown and pull-in voltage behavior of a MEMS device with varying dielectric properties / Y. Guo, Z. Pan, M. J. Ward // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 2005. – 66, № 1. – P.309-338.
10. Guo Z. Infinitely many turning points for an elliptic problem with a singular non-linearity / Z. Guo, J. Wei // Journal of the London Mathematical Society. – 2008. – 78, № 1. – P.21-35.
11. Lin F. Nonlinear non-local elliptic equation modeling electrostatic actuation / F. Lin, Y. Yang // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – The Royal Society, 2007. – 463, №. 2081. – P.1323-1337.
12. Pelesko J. A. Mathematical modeling of electrostatic MEMS with tailored dielectric properties / J. A. Pelesko // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 2002. – 62, № 3. – P.888-908.



## REFERENCES

1. N. A. Alfutov *Fundamentals of calculation for the stability of elastic systems*, M.: Mashinostroenie, 1978 (in Russian).
2. O. S. Konchakovska, M. V. Sidorov “Numerical analysis of one nonlinear elliptic equation that modelling microelectromechanical system”, *Radioelektronika i informatika*, vol. 73, no. 2, pp. 23-29, 2016 (in Ukrainian).
3. M. A. Krasnosel'skij, *Positive Solutions of Operator Equations*. Moscow: Fizmatgiz, 1962 (in Russian).
4. N. I. Muhurov, G. I. Efremov *Electromechanical microdevices*, Minsk: Belarus. navuka, 2012 (in Russian).
5. V. I. Opojtsjev and T. A. Khurodze, *Nonlinear Operators in Spaces with a Cone*, Tbilisi, USSR: Izdatel'stvo Tbilisskogo Universiteta, 1984 (in Russian).
6. P. Esposito “Compactness of a nonlinear eigenvalue problem with a singular nonlinearity”, *Communications in Contemporary Mathematics*, vol. 10, no. 1, pp. 17-45, 2008.
7. P. Esposito, N. Ghoussoub and Y. Guo *Mathematical analysis of partial differential equations modeling electrostatic MEMS*, American Mathematical Soc., 2010.
8. N. Ghoussoub, Y. Guo “On the partial differential equations of electro-static MEMS devices: stationary case”, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 38, no. 5, pp. 1423-1449, 2007.
9. Y. Guo, Z. Pan and M. J. Ward “Touchdown and pull-in voltage behavior of a MEMS device with varying dielectric properties”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 66, no. 1, pp. 309-338, 2005.
10. Z. Guo and J. Wei “Infinitely many turning points for an elliptic problem with a singular nonlinearity” *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 78, no. 1, pp. 21-35, 2008.
11. F. Lin and Y. Yang “Nonlinear non-local elliptic equation modeling electrostatic actuation”, *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 463, no. 2081, pp. 1323-1337, 2007.
12. J. A. Pelesko “Mathematical modeling of electrostatic MEMS with tailored dielectric properties”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 62, no. 3, pp. 888-908, 2002.

**Кончаківська Оксана Сергіївна** – аспірант каф. прикладної математики; Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків-166, пр. Науки, 14, 61166; e-mail: oksana.konchakovska@nure.ua; ORCID: 0000-0002-0836-6045.

**Сидоров Максим Вікторович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент; Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків-166, пр. Науки, 14, 61166; e-mail: maxim.sidorov@nure.ua; ORCID: 0000-0001-8022-866X.