

УДК 539.3: 534.1

Моделювання динамічного відгуку шаруватих конструкцій на імпульсне навантаження

Н.В. Сметанкіна, С.В. Угрімов, О.М. Шупіков

*Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, вул. Пожарського, 2/10,
м. Харків, 61046, Україна
e-mail: nsmetankina@ukr.net*

На основі різних дискретно-структурних теорій проведено порівнювальний аналіз параметрів напружено-деформованого стану шаруватих конструкцій при імпульсному навантаженні. Розроблено метод дослідження нестационарних коливань шаруватих пластин. Метод дозволяє вірогідно описувати динамічну поведінку шаруватих елементів конструкцій з різними фізико-механічними властивостями шарів. Встановлено істотний вплив локалізованого навантаження на напруження. Запропонований підхід може бути використаний при проектуванні шаруватого оскління.

Ключові слова: дискретно-структурні теорії, шаруваті конструкції, імпульсне навантаження, нестационарні коливання.

На основе различных дискретно-структурных теорий проведен сравнительный анализ параметров напряженно-деформированного состояния слоистых конструкций при импульсном нагружении. Разработан метод исследования нестационарных колебаний многослойных пластин. Метод позволяет достоверно описывать динамическое поведение многослойных элементов конструкций с различными физико-механическими свойствами слоев. Установлено существенное влияние локализованной нагрузки на напряжения. Предложенный подход может быть использован при проектировании многослойного остекления.

Ключевые слова: дискретно-структурные теории, слоистые конструкции, импульсное нагружение, нестационарные колебания.

Parameters of a laminated structure effect considerably on the selection of a theory being used. Layers in the pack, which have significantly differing physical characteristics, make the structure all the more susceptible to transverse strain, viz. shear and reduction. The application of 3D elasticity theory equations for investigating non-stationary deformation in laminated structures is faced with significant mathematical complexities. Therefore, 2D theories have found extensive implementation in the design of real structures. The key feature of the modern stage of development of multilayer structures mechanics consists in the transition from more simple 2D models to more complex ones possessing higher accuracy. Therefore, the development of refined 2D models of multilayered structures for the investigation of non-stationary deformation processes is an important problem. The purpose of this research is to develop a method for calculating the response of layered plates under impulse loading, as well as a comparative analysis of possibilities of different 2D theories.

The layer-wise refined model of elastodynamic of laminated plates for investigation dynamic process is presented. This model is based on expanding displacement vector components of each layer into power series about the transverse coordinate. It takes into account transverse shear and normal strains in each layer. This allows to describe reliably the dynamic behavior of laminated structural elements with different physical and mechanical properties of layers. The motion equations and boundary condition are obtained from a variational principle. The solution method is an analytical-numerical one.

The model possibilities are illustrated on investigations of three-layer structures under impulse loading. The results are compared with data obtained from the classical theory as well as the layer-wise theory based on the broken line hypothesis (the Grigoliuk-Chulkov's model). Special attention is placed on analyzing the stress-strained state of laminated structures subjected to local loads. The proposed approach can be used in design of the laminated glazing.

Keywords: layer-wise theories, laminated structures, impulse loading, non-stationary vibrations.

1 Вступ

Складність розв'язання задач про коливання шаруватих конструкцій в рамках тривимірної теорії пружності стимулює розвиток двовимірних теорій пластин і оболонок [1 – 4]. Можна виділити два основних підходи до побудови таких теорій. Перший підхід заснований на використанні єдиних вздовж товщини пластини або оболонки кінематичних і статичних гіпотез. У цьому випадку порядок визначальних рівнянь не залежить від кількості шарів. Другий підхід пов'язаний з побудовою теорії на основі прийняття незалежних кінематичних та статичних гіпотез до кожного шару. У цьому випадку порядок системи рівнянь залежить від кількості шарів оболонки. Це дає можливість більш точно описати напружений стан шаруватих конструкцій, але супроводжується як ускладненням самої моделі, так і збільшенням розмірності системи визначальних рівнянь. Тому необхідно чітко розуміти, коли слід використовувати той або інший підхід та теорію. Їх вибір обумовлюється співвідношенням фізико-механічних параметрів матеріалів шарів, геометрією об'єкта, параметрами навантаження. Найчастіше ці питання досліджуються для задач статички і вільних коливань шаруватих конструкцій [3 – 5].

Тому актуальною задачею залишається дослідження перерахованих вище факторів при нестационарному навантаженні.

Метою дослідження є розробка методу для розрахунку коливань шаруватих пластин при імпульсному навантаженні, а також порівняльний аналіз результатів розрахунку параметрів напружено-деформованого стану, які отримано на основі різних теорій.

2 Постановка задачі. Математична модель шаруватої конструкції

Розглянемо багат шарову прямокутну шарнірно оперту пластину, зібрану з довільного числа I ізотропних шарів постійної товщини h_i ($i = \overline{1, I}$). Фізико-механічні властивості шарів у пакеті можуть значно відрізнятися. Введемо декартову систему координат $Oxyz$, яку зв'яжемо з зовнішньою поверхнею першого шару пластини. На пластину діють деякі нестационарні навантаження $P = \{p_j(x, y, t)\}$ ($j = \overline{1, 3I+3}$, t – час). Припустимо, що напруження в шарах пластини не перевищують границь пружності матеріалів шарів, а навантаження є такими, що допускають використання геометрично лінійної теорії шаруватих пластин.

Математична модель, що описує нестационарне деформування пластини, заснована на гіпотезах уточненої теорії першого порядку, що враховує деформації поперечного зсуву, обтиснення вздовж товщини та інерцію обертання нормального елемента в кожному шарі [6]. При цьому припускається, що для пакета справедлива гіпотеза ламаної лінії, а контакт між шарами виключає їх розшарування і взаємне проковзування. Таким чином, переміщення точки i -го шару в напрямку координатних осей має вигляд

$$u_k^i = u_k + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+I(k-1)+j} + (z - \delta_{i-1}) u_{3+I(k-1)+i}, \quad k = 1, 2, 3, \quad i = \overline{1, I}, \quad (1)$$

де $u_k = u_k(x, y, t)$, $k = 1, 2, 3$ – переміщення точки координатної поверхні в напрямку координатних осей; $u_{3+I(k-1)+i} = u_{3+I(k-1)+i}(x, y, t)$, $k = 1, 2$ – кути повороту нормального елемента в i -у шарі; $u_{3+2I+i} = u_{3+2I+i}(x, y, t)$ – обтиснення нормального елемента в межах i -го шару; $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$, $\delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i$, $i = \overline{1, I}$.

На основі варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона [6] отримуємо систему рівнянь руху пластини

$$\Omega \mathbf{U}_{,tt} - \Lambda \mathbf{U} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_{,t} = 0, \quad t = 0 \quad (2)$$

і граничні умови на контурі

$$\mathbf{B}^T \mathbf{U} = 0 \quad (3)$$

відносно незалежних функцій переміщень (1) $\mathbf{U} = \{u_i\}$, $i = \overline{1, 3I+3}$.

Тут Λ і \mathbf{B}^T – матриці, елементами яких є диференціальні оператори [6].

Елементи матриці Ω , які не дорівнюють нулю, мають вигляд

$$\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Omega_{33} = C_\rho^I, \quad \Omega_{13+i} = \Omega_{3+i1} = \Omega_{23+I+i} = \Omega_{3+I+i2} = \Omega_{33+2I+i} = \Omega_{3+2I+i3} = D_\rho^i,$$

$$\Omega_{3+i3+j} = \Omega_{3+I+i3+I+j} = \Omega_{3+2I+i3+2I+j} = \eta_\rho^{ij},$$

$$C_\rho^i = \sum_{j=1}^i \alpha_\rho^j, \quad D_\rho^i = h_i (C_\rho^I - C_\rho^i) + \beta_\rho^i, \quad K_\rho^i = h_i^2 (C_\rho^I - C_\rho^i) + \gamma_\rho^i,$$

$$\eta_\rho^{ij} = \begin{cases} h_j D_\rho^i, & j < i, \\ K_\rho^i, & j = i, \\ h_i D_\rho^j, & j > i, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, I}.$$

3 Метод розв'язання проблеми

Через те, що пластини шарнірно оперта, розв'язок отриманої системи рівнянь руху (2)

знаходимо шляхом розвинення переміщень і зовнішніх навантажень у ряди Фур'є за функціями, що задовольняють граничним умовам (3)

$$u_j(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{jmn}(t) B_{jmn}(x, y), \quad p_j(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}(t) B_{jmn}(x, y), \quad (4)$$

$$\text{де } B_{1mn} = \cos \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B}, \quad B_{2mn} = \sin \frac{m\pi x}{A} \cos \frac{n\pi y}{B}, \quad B_{3mn} = \sin \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B},$$

$$B_{3+i mn} = B_{1mn}, \quad B_{3+I+i mn} = B_{2mn}, \quad B_{3+2I+i mn} = B_{3mn}, \quad j = \overline{1, 3I+3}, \quad i = \overline{1, I}, \quad m = \overline{1, m^*}, \\ n = \overline{1, n^*};$$

A і B – розміри пластини в плані.

Система (2) з урахуванням розвинень (4) зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яка інтегрується модифікованим методом розвинення розв'язку в ряд Тейлора [7].

Після обчислення коефіцієнтів розвинення в ряди (4) визначаються переміщення u_k (1) і напруження σ_x^i у шарах пластини.

4 Чисельні результати

Для оцінки достовірності розробленого методу проведено дослідження коливань квадратної тришарової пластини під впливом імпульсного навантаження

$$p_3 = \begin{cases} P_0 \cdot \left(1 - \frac{t}{\tau_+}\right) \cdot \exp\left(-\alpha \frac{t}{\tau_+}\right), & 0 < t < \tau_+, \\ 0, & t \geq \tau_+ \end{cases}$$

де $\tau_+ = 7,7$ мс; $\alpha = 0,55$; $P_0 = 68948$ Па.

Геометричні характеристики пластини – $A = B = 1,325$ м, $h_1 = h_3 = 4,76$ мм, $h_2 = 1,52$ мм. Фізико-механічні властивості шарів – $E_i = 72$ ГПа, $\rho_1 = \rho_3 = 2500$ кг/м³, $\nu_i = 0,25$; $E_2 = 0,274$ ГПа, $\rho_2 = 1100$ кг/м³, $\nu_2 = 0,38$ (E_i – модуль пружності, ν_i – коефіцієнт Пуасона, ρ_i – густина матеріалу i -го шару).

Результати розрахунку за запропонованим методом порівнювалися із даними аналогічного дослідження, проведеного L. R. Dharani на основі класичної теорії [8].

На рис. 1 показано зміння прогинів за часом посередині пластини. Суцільна лінія відповідає уточненій теорії, штрихова – теорії Е. І. Григолюка-П. П. Чулкова [3], точками – дані, отримані L. R. Dharani за класичною теорією. Спостерігається добре узгодження усіх наведених результатів, що підтверджує їх достовірність і працездатність запропонованого підходу.

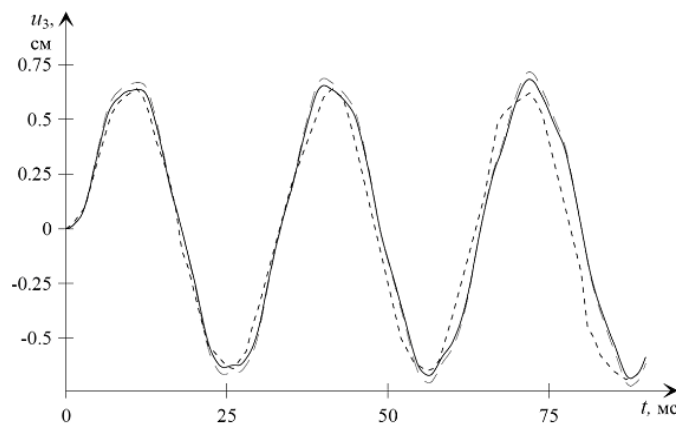


Рис. 1. Зміння прогинів за часом

Слід зазначити, що розглянута пластинка відноситься до тонких, а навантаження діє по всій зовнішній поверхні першого шару пластини. Саме цим пояснюються співпадіння результатів, які

отримані за усіма розглянутими моделями. При збільшенні товщини пластини або при наявності нетонких м'яких шарів, а також при впливі локалізованих навантажень результати розрахунків за розглянутими моделями будуть істотно відрізнятися.

Досліджено динамічну поведінку тришарової квадратної шарнірно опертої пластини при імпульсному навантаженні

$$p_3 = \frac{1}{2} P_0 [1 + \text{sign}(t_1 - t)] \sin \frac{\pi t}{t_1} \sin \pi \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \sin \pi \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad (5)$$

що прикладене до зовнішньої поверхні першого шару по прямокутній ділянці $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1 \leq y \leq y_2$, $t_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ с.

Геометричні й механічні параметри пластини – $A = B = 0,5$ м, $h_1 = h_3 = 15$ мм, $h_2 = 3$ мм; $E_1 = E_3 = 61,2$ ГПа, $E_2 = 0,28$ ГПа; $\nu_1 = \nu_3 = 0,22$, $\nu_2 = 0,39$; $\rho_1 = \rho_3 = 2500$ кг/м³, $\rho_2 = 1200$ кг/м³ (ν_i – коефіцієнт Пуасона, ρ_i – густина матеріалу i -го шару).

Коливання цієї пластини досліджено при імпульсному розподіленому і локалізованому навантаженні (5). Розподілене навантаження, що діє майже по всій поверхні зовнішнього шару, має наступні параметри $x_1 = y_1 = 0,01$ м, $x_2 = y_2 = 0,49$ м, $P_0 = 7,8125$ кПа, а локалізоване, яке розподілене по квадратній площадці розміром $4,8$ мм х $4,8$ мм – $x_1 = y_1 = 0,2476$ м, $x_2 = y_2 = 0,2524$ м, $P_0 = 78,125$ МПа.

На рис. 2, а, б показано розподіл нормальних напружень σ_x^i вздовж товщини посередині пластини ($x_p = y_p = 0,25$ м) у момент часу, коли вони досягають максимальних значень. Рис. 2, а відповідає розподіленому навантаженню, а рис. 2, б – локалізованому. Напруження в шарі з полімерного матеріалу ($i = 2$) на рисунках не наведено, оскільки вони суттєво менші за аналогічні значення для несучих шарів ($i = 1, 3$). Суцільна лінія відповідає уточненій теорії, штрихова – теорії Е. І. Григолюка-П. П. Чулкова.

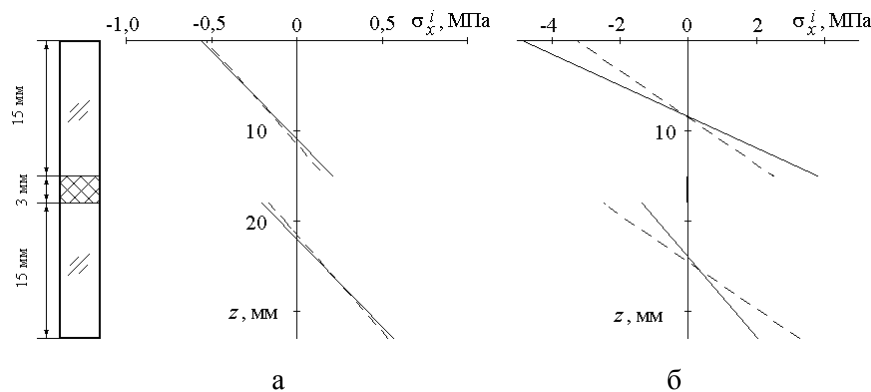


Рис. 2. Розподіл напружень σ_x^i вздовж товщини пластини

Змінення прогинів $w^3 = u_3^3(x, y, t)$ і напружень σ_x^3 в часі в точці $x_p = y_p = 0,25$ м, $z = \delta_3$ на зовнішній поверхні третього шару під дією локалізованого навантаження наведено на рис. 3, а, б. Суцільна лінія відповідає уточненій теорії, штрихова – теорії Е. І. Григолюка-П. П. Чулкова [3, 6, 7].

Порівняльний аналіз залежностей (рис. 2, 3) показує, що при впливі розподіленого навантаження результати, які отримані без урахування поперечного обтиснення шарів, добре узгоджуються з аналогічними даними розрахунку за запропонованою уточненою теорією першого порядку (рис. 2, а та рис. 3, а). Коли на пластину діє локалізоване навантаження, результати, що отримані за розглянутими моделями, вже значно відрізняються (рис. 3, б).

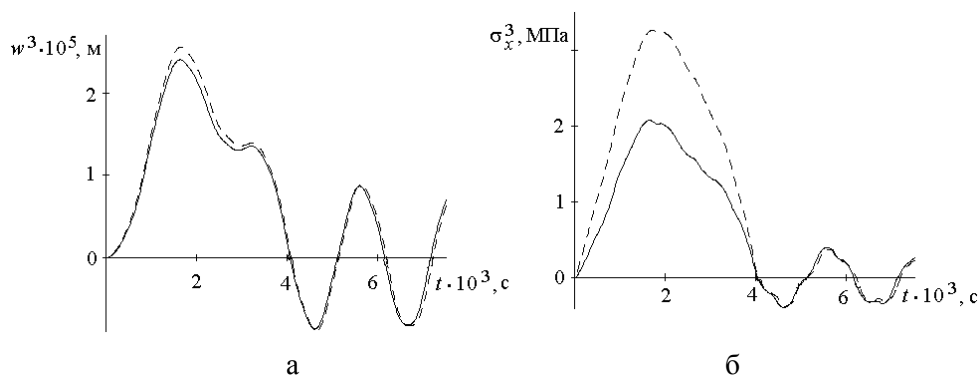


Рис.3 Залежність переміщень w^3 і напружень σ_x^3 від часу

Досліджено вплив характерного розміру площадці (області) навантаження (5) на максимальні значення напружень у несучих шарах розглянутої пластини. Як і раніше, припускається, що навантаження діє на квадратній площадці зі стороною $L = x_2 - x_1 = y_2 - y_1$, яка розташована симетрично відносно центру зовнішньої поверхні пластини. Загальна сила, що прикладається до пластини, залишається завжди сталою і дорівнює 1,8 кН. Характерний розмір області навантаження L варіюється в діапазоні від 48 см до 0,48 см. Граничні значення діапазону відповідають розглянутим раніше випадкам розподіленого та локалізованого навантажень.

На рис. 4 наведено максимальні значення напружень посередині зовнішніх поверхонь несучих шарів. Суцільна лінія відповідає уточненій теорії, штрихова – теорії Е. І. Григолюка-П. П. Чулкова. Видно, що різниця в результатах, які отримані за цими теоріями, збільшується при зменшенні розмірів області навантаження. Відмінності стають помітними при розмірі площадки навантаження, яка менше за 10 см, що відповідає приблизно трьом товщинам пластини. За теорією Е. І. Григолюка-П. П. Чулкова, яка не враховує поперечні деформації шарів пакету, для розглянутої пластини на зовнішніх шарах отримано однакові за модулем значення напружень. Але при локалізованому навантаженні характер розподілу реальних напружень вздовж товщини має більш складний характер (див. рис. 2, б). У результаті за моделлю Е. І. Григолюка-П. П. Чулкова на зовнішній поверхні першого шару згинні напруження є меншими за аналогічні значення, які отримано за запропонованою уточненою теорією, а на зовнішній поверхні третього шару, навпаки, напруження мають більші значення. Теорія Е. І. Григолюка-П. П. Чулкова в розглянутому випадку дозволяє одержати осереднені значення дійсних напружень.

Для випадку локалізованого навантаження квадратної тришарової пластини $A = B = 0,5$ м симетричної будови ($h_1 = h_3$) з такими ж механічними параметрами шарів, як для розглянутої вище пластини, проведено дослідження впливу співвідношення товщин шарів на максимальні значення згинних напружень. Товщина другого, більш м'якого, шару варіювалася в діапазоні від 3 мм до 27 мм при сталій товщині пластини у 33 мм.

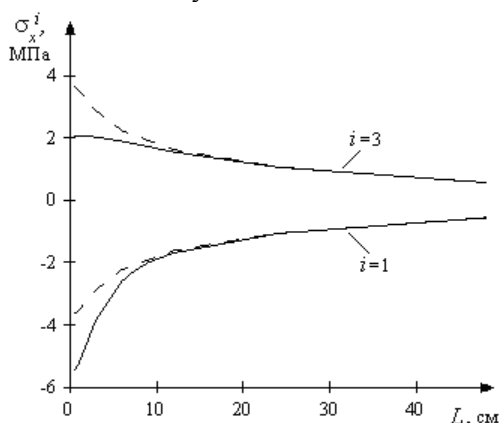


Рис. 4. Залежність максимальних значень згинних напружень від характерного розміру області навантаження

На рис. 5 показано змінення напружень у зовнішніх шарах у залежності від товщини другого шару при локалізованому навантаженні. Суцільна лінія відповідає уточненій теорії, штрихова – теорії Е. І. Григолюка-П. П. Чулкова. При збільшенні товщини м'якого шару обтиснення пластини стає більш помітним і різниця між результатами, які отримані за моделями, що враховують і не враховують обтиснення, збільшується.

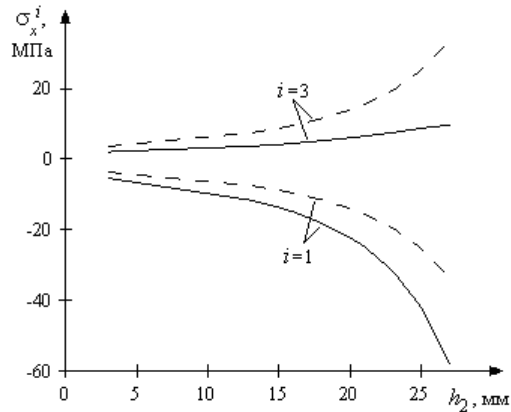


Рис. 5. Залежність максимальних значень згинних напружень від товщини другого шару при локалізованому навантаженні

Висновки

Створено метод дослідження напружено-деформованого стану шаруватих пластин, який базується на уточненій дискретно-структурній теорії шаруватих пластин, що враховує деформації поперечного зсуву, обтиснення вздовж товщини та інерцію обертання нормального елемента в кожному шарі.

На тестовій задачі розрахунку процесу нестационарного деформування тонкої тришарової пластини під впливом імпульсного розподіленого навантаження доведено ефективність розробленого методу. Результати розрахунку за запропонованим методом порівнювалися із даними аналогічного дослідження, яке проведене L. R. Dharani на основі класичної теорії, та з даними, які отримані на основі уточненої теорії Е. І. Григолюка-П. П. Чулкова. Спостерігається добре узгодження результатів за усіма розглянутими моделями для випадку відносно тонкої пластини при розподіленому навантаженні.

На чисельних прикладах розрахунку тришарових конструкцій симетричної будови проведено дослідження їх напружено-деформованого стану при розподілених й локалізованих навантаженнях. Показано, що при локалізованому навантаженні врахування поперечного обтиснення шарів істотно впливає на значення отриманих напружень.

Запропонований підхід може бути використаний при розрахунку на динамічну міцність шаруватого оскління транспортних засобів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Carrera E. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells // Archives of Computational Methods in Engineering. – 2002. – Vol. 9, № 1. – P. 1-60.
2. Луговой П. З., Мейш В. Ф., Штанцель Э. Ф. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – К.: Изд-во полиграф. центру «Киевский университет», 2005. – 536 с.
3. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Пути развития теории упругих многослойных пластин и оболочек // Вестник Тамбов. гос. техн. ун-та. – 2005. – Т. 11, № 2А. – С. 439-448.
4. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – К.: Академперіодика, 2006. – 472 с.
5. Курпа Л. В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – 408 с.

6. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. – Харьков: Изд-во «Міськдрук», 2011. – 376 с.
7. Шупиков А. Н., Бузько Я. П., Сметанкина Н. В., Угримов С. В. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация. – Харьков: Изд-во ХНЭУ, 2004. – 252 с.
8. Dharani L.R., Wei J. Dynamic response of laminated glass under blast loading: effect of negative phase // Structures under shock and impact VIII, Crete, Greece, March 2004. – 2004. – P. 181-190.

REFERENCES

1. E. Carrera, “Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells,” *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 9, № 1, pp. 1-60, 2002.
2. P. Z. Lugovoy, V. F. Meysh, E. F. Shtantsel, *Nestatsionarnaya dinamika neodnorodnykh obolochechnykh konstruktsiy*, K.: Izd-vo poligraf. tsentru «Kievskiy universitet», 2005.
3. E. I. Grigolyuk, G. M. Kulikov, “Puti razvitiya teorii uprugih mnogoslonykh plastin i obolochek,” *Vestnik Tambov. gos. tehn. un-ta*, T. 11, No. 2A, pp. 439-448, 2005.
4. Ya. M. Grigorenko, G. G. Vlaykov, A. Ya. Grigorenko, *Chislennno-analiticheskoe reshenie zadach mehaniki obolochek na osnove razlichnykh modeley*, K.: Akadempriodika, 2006.
5. L. V. Kurpa *Metod R-funktsiy dlya resheniya lineynykh zadach izgiba i kolebaniy pologih obolochek*, Harkov: NTU «HPI», 2009.
6. N. V. Smetankina, *Nestatsionarnoe deformirovanie, termouprugost i optimizatsiya mnogoslonykh plastin i tsilindricheskikh obolochek*, Kharkov: Izd-vo «Miskdruk», 2011.
7. A. N. Shupikov, Ya. P. Buzko, N. V. Smetankina, S. V. Ugrimov, *Nestatsionarnyye kolebaniya mnogoslonykh plastin i obolochek i ih optimizatsiya*, Kharkov: Izd-vo HNEU, 2004.
8. L. R. Dharani, J. Wei, “Dynamic response of laminated glass under blast loading: effect of negative phase,” *In Structures under shock and impact VIII: Proceedings of the VIII International Conference on Structures Under Shock and Impact: SUSI VIII , Crete, Greece, March 2004*. N. Jones, C.A. Brebbia, Eds. Southampton: WIT Press, 2004, pp 181-190.

Сметанкіна Наталя Володимирівна – доктор технічних наук, завідувач відділом вібраційних і термоміцнісних досліджень, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, м. Харків-46, вул. Пожарського 2/10, 61046; e-mail: nsmetankina@ukr.net; ORCID: 0000-0001-9528-3741

Угримов Сергій Вікторович – доктор технічних наук, провідний науковий співробітник, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, м. Харків-46, вул. Пожарського 2/10, 61046; e-mail: sugrimov@ipmach.kharkov.ua; ORCID: 0000-0002-0846-4067

Шупіков Олександр Миколайович – доктор технічних наук, провідний науковий співробітник, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, м. Харків-46, вул. Пожарського 2/10, 61046; e-mail: shupikov@ipmach.kharkov.ua; ORCID 0000-0002-9502-7040