DOI.

УДК 004.02

Відновлення вершин многокутника за серединами його сторін

А.О. Караєв[1], О.О. Стрельнікова[1,2]

[1]*Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна*
[2]*Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, 61046, Україна*
e-mail: a.karaiev@karazin.ua

В статті розглядається задача побудови плоского многокутника за заданими координатами середин його сторін. Такі задачі виникають при чисельному розв'язанні сингулярних і гіперсингулярних інтегральних рівнянь методом дискретних особливостей. Введені спеціальні матриці зсуву, проаналізовані їх властивості, що дозволило отримати в аналітичній формі координати вершин многокутника. Задача має єдине розв'язання при непарній кількості сторін. Наведено приклад відновлення вершин квадрата за сімома заданими вузловими значеннями. Це дозволяє побудувати границю розрахункової області при неповній інформації щодо неї.

Ключові слова: *побудова розрахункової області, матриці зсуву, відновлення вершин многокутника, точки колокації, кутові коефіцієнти.*

Many important technical problems lead to the solution of boundary value problems of differential equations with partial derivatives. With the help of boundary value problems, it is possible to describe such processes as heat and mass transfer, diffusion, fluid flow, propagation of acoustic waves, electromagnetism, deformation of a solid. Some boundary-related problems can be solved analytically. Usually in these cases the geometry of the region and boundary conditions are relatively simple, and the equations with partial derivatives are linear. In practical problems arising in engineering and applied sciences, it is difficult to rely on obtaining analytical solutions, even if the differential equations are linear, since these problems are characterized by extreme irregularity of the boundaries of the regions and (or) heterogeneity of the material; since the solution of problems can not be constructed with the help of simple mathematical functions. In such cases, looking for approximate numerical solutions. Let the coordinates of the points, which are the middle of the sides of the N-corner, are known. Need to find the coordinates of the vertices of the polygon. Such problems arise in the numerical solution of singular and hypersingular integral equations using the method of collocation. Note that the problem has a unique solution for an odd number of sides. With a pair of sides, the matrix of the system is degenerate, which leads to the need to impose additional conditions for the solution. In the paper we consider a problem of flat polygon construction using the coordinates of its side's centers. These problems arise in numerical solution of singular and hypersingular integral equations using the discrete singularities methods. The special shift matrixes were introduces to get the analytical solution of coordinates of polygon vertices. The problem has the only decision if the number of sides is odd. There was given the example of recovering the square vertices by the seven node's values. These results can help in construction of the calculation area if we haven't full information about it.

Keywords: *construction of calculation area, shift matrixes, flat polygon construction, colocation points, angular coefficients.*

1 Загальна актуальність задачі та метод дискретних особливостей

Багато важливих технічних проблем приводять до розв'язання крайових задач диференціальних рівнянь з частинними похідними. За допомогою крайових задач можна описати такі процеси як тепло- та масоперенос, дифузія, потік рідини, розповсюдження акустичних хвиль, електромагнетизм, деформування твердого тіла. Деякі крайові задачі вдається розв'язати аналітично. Зазвичай в цих випадках геометрія області та граничні умови достатньо прості, а рівняння з частинними похідними – лінійні. В практичних задачах, що виникають в інженерній справі та прикладних науках, важко розраховувати на отримання аналітичних розв'язків, навіть якщо диференціальні рівняння лінійні, оскільки для цих задач характерна надзвичайна нерегулярність границь областей та (або) неоднорідність матеріалу; оскільки розв'язок задач не може бути побудований за допомогою простих математичних функцій. В таких випадках шукають наближені чисельні рішення.

Наближені методи, що приводять до появи сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь при розв'язанні задач математичної фізики, останнім часом достатньо часто використовуються, оскільки клас прикладних задач, що приводять до сингулярних інтегральних рівнянь, досить широкий. Зокрема, до таких рівнянь можна звести контактні задачі теорії пружності, задачі визначення стаціонарних температурних полів в тілах з однорідними включеннями та тріщинами (розрізами), задачі визначення концентрації напружень в тілах, що містять тріщини, задачі визначення аеродинамічних навантажень на тонкі несучі поверхні, деякі задачі дифракції та акустики, задачі коливань рідини у пружних резервуарах та інші. [1-5].

Теорія та методи чисельного розв'язку одновимірних гіперсингулярних рівнянь на відрізку отримали закономірний розвиток у роботі Ю.В. Ганделя [6]. Основам методу дискретних особливостей та його обґрунтуванню присвячена монографія С.М. Білоцерковського та І.К.

Ліфанова [7]. Як свідчить огляд літературних джерел, важливим питанням при числовому розв'язанні сингулярних інтегральних рівнянь є відповідний вибір точок колокації. Ці точки обираються наступним чином.

Нехай $x_i \quad i = 1,2,...n$ відповідають границям елементів області, де розшукується розв'язок інтегрального рівняння. Тоді точки колокації обчислюються за формулою

$$\xi_i = x_i + \alpha_i (x_{i+1} - x_i), \quad i = 1,3,..n-1$$

При цьому вибір значень α_i першорядне значення. Питанням вибору точок колокації присвячено велику кількість досліджень. Серед них відзначимо роботи [2, 7-12]. Зазначається, що невдалий засіб вибору точок колокації може призвести до значних похибок і навіть до нестійкості при розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких зводяться сингулярні інтегральні рівняння внаслідок дискретизації. В роботах [1,7,12] на основі числового аналізу розв'язків сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь зроблено висновок про те, що при $\alpha_i = 0.5 \quad \forall i$ будуть отримані системи лінійних алгебраїчних рівнянь з суттєво домінуючими діагональними елементами, що дає змогу побудувати стійки обчислювальні схеми. Тому надалі обмежимось саме цим випадком.

2 Постановка задачі

Нехай відомі координати $N = 2m+1, m \in Z$ точок, що є серединами сторін *N*-кутника. Необхідно знайти координати вершин многокутника. Такі задачі виникають при числовому розв'язанні сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь при використанні методу колокацій. Зауважимо, що задача має однозначний розв'язок при непарній кількості сторін. При парній кількості сторін матриця системи є виродженою, що приводить до необхідності накладати додаткові умови для розв'язання.

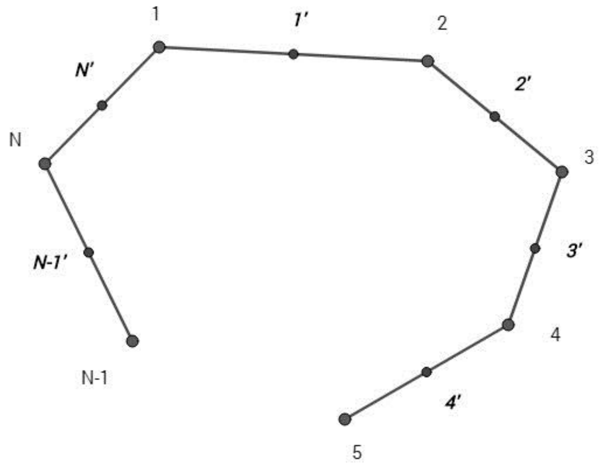

Рис. 1. Многокутник з відомими серединами сторін

3 Розв'язання задачі

Введемо позначення. Нехай $\{\overrightarrow{r_\alpha'}\}_{\alpha=1}^{N}$ – множина середин сторін многокутника, $\{\overrightarrow{r_\alpha}\}_{\alpha=1}^{N}$ – множина вершин многокутника.

Тоді зв'язок між радіус-векторами середин сторін та вершин задається системою співвідношень:

$$\begin{cases} \overrightarrow{r_1}' = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2}\right) \\ \overrightarrow{r_2}' = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{r_3}\right) \\ \dots \\ \overrightarrow{r_{N-1}}' = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_{N-1}} + \overrightarrow{r_N}\right) \\ \overrightarrow{r_N}' = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_N} + \overrightarrow{r_1}\right) \end{cases} \tag{3.1}$$

Матриця цієї системи має наступний вигляд:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \overrightarrow{r_1}' \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 & \overrightarrow{r_2}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \overrightarrow{r_{N-1}}' \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & \overrightarrow{r_N}' \end{array}\right) \tag{3.2}$$

Для того, щоб система була невиродженою, необхідно, щоб визначник матриці (3.2) не дорівнював нулю. Маємо

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^N \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^N \cdot 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$$

У цьому випадку обернена до заданої матриці (3.2) існує і має наступний вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Для подальшої побудови необхідно ввести допоміжні матриці, а саме матриці зсуву.

4 Матриці зсуву

Введемо наступні позначення для матриці верхнього зсуву та матриці нижнього зсуву:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Результатом матричного добутку UA, де A – будь-яка довільна матриця дозволеної розмірності, є зсув елементів матриці A на один рядок вгору, при цьому останній рядок заповнюється нулями. Аналогічним чином визначається добуток LA матриці нижнього зсуву з будь-якою довільною матрицею.

Подвійна дія U^2A матриці верхнього зсуву на будь-яку матрицю зсуває елементи матриці на два рядки вгору. Враховуючи це факт, можна зробити висновок, що операція U^kA підіймає матрицю на k рядків вгору. Аналогічно визначається дія матриці L^kA на довільну.

Використовуючи властивості матриць зсуву, можна записати обернену матрицю у наступному вигляді:

$$A^{-1}{}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k \left(U^k_{\alpha\beta} - L^k_{\alpha\beta}\right) \qquad (4.2)$$

Тоді розв'язок системи рівнянь у координатному вигляді може бути представлений наступним чином:

$$\overrightarrow{r_\alpha} = \left[\delta_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k \left(U^k_{\alpha\beta} - L^k_{\alpha\beta}\right)\right]\overrightarrow{r_\beta}' \qquad (4.3)$$

Таким чином, отримані вирази для радіусів-векторів вершин многокутника.

5 Рівняння сторін

Для подальшого використання в моделюванні важливо отримати вирази для рівнянь сторін многокутника.

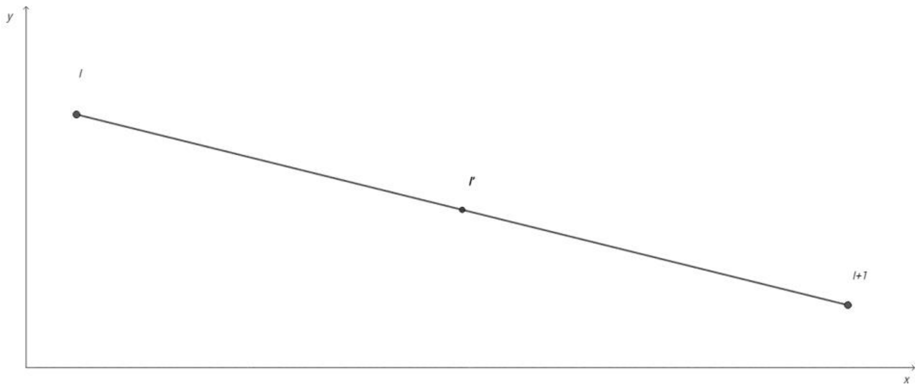

Рис.2. Сторона многокутника

Користуючись рівнянням прямої, що проходить через дві точки, можна легко знайти вираз для рівняння сторони многокутника, оскільки ми знаємо, що сторона l проходить через середину сторони $\overrightarrow{r_l}'$ та вершину $\overrightarrow{r_l}$, а саме:

$$y = \frac{y_l - y_l'}{x_l - x_l'} x + y_l' \qquad (5.1)$$

Тоді кутові коефіцієнти будуть визначатися наступною формулою:

$$k_k = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i y_i + \sum_{i=k+1}^{N} (-1)^{i+1} y_i}{\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i x_i + \sum_{i=k+1}^{N} (-1)^{i+1} x_i} \qquad (5.2)$$

Ці співвідношення дають змогу будувати рівняння відповідних сторін многокутника.

6 Приклад відновлення многокутника

Нехай границею тіла є квадрат зі стороною a. Розіб'ємо квадрат на 7 проміжків так, що вузли розташовані всередині кожного відрізка, на трьох сторонах по дві, на останній – одну. Введемо систему координат так, як показано на рис.3.

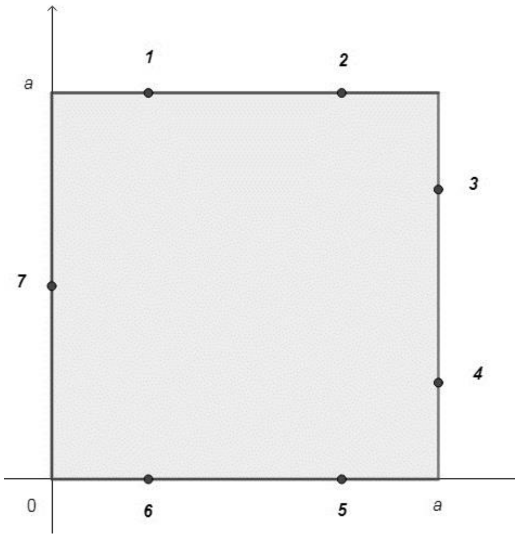

Рис.3. Задані вузли на границі

Координати вузлів в цьому випадку мають наступні значення:

$$\begin{cases} \overrightarrow{r_1}' = \left(\dfrac{a}{4}, a\right) \\ \overrightarrow{r_2}' = \left(\dfrac{3a}{4}, a\right) \\ \overrightarrow{r_3}' = \left(a, \dfrac{3a}{4}\right) \\ \overrightarrow{r_4}' = \left(a, \dfrac{a}{4}\right) \\ \overrightarrow{r_5}' = \left(\dfrac{3a}{4}, 0\right) \\ \overrightarrow{r_6}' = \left(\dfrac{a}{4}, 0\right) \\ \overrightarrow{r_7}' = \left(0, \dfrac{a}{2}\right) \end{cases} \tag{6.1}$$

Використовуючи отримані вище співвідношення (4.3), знайдемо координати вершин многокутника за такими формулами:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{a}{4} & a \\ \dfrac{3a}{4} & a \\ a & \dfrac{3a}{4} \\ a & \dfrac{a}{4} \\ \dfrac{3a}{4} & 0 \\ \dfrac{a}{4} & 0 \\ 0 & \dfrac{a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ \dfrac{a}{2} & a \\ a & a \\ a & \dfrac{a}{2} \\ a & 0 \\ \dfrac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

На рис.4 відображено вершини отриманого многокутника.

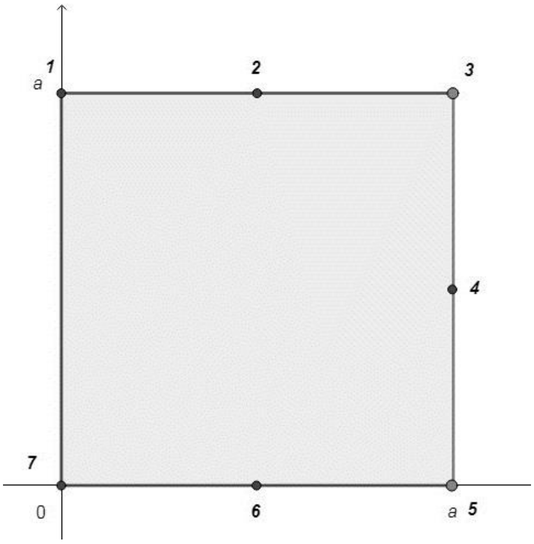

Рис.4. Вершини многокутника

Має місце повна узгодженість з рис.3, що свідчить про ефективність та точність методу.

Тобто, таким чином може бути відновлена область для чисельного інтегрування в умовах неповної інформації.

7 Висновки і напрямок подальших досліджень

Отримані аналітичні формули для побудови вершин многокутника при наявності інформації про координати середин граничних елементів при застосуванні числових методів розв'язання сингулярних та гіперсингулярних рівнянь. У подальшому передбачається розвинення методу на випадок довільного розташування точок колокації в межах граничного елементу.

ЛІТЕРАТУРА

1. I.K. Lifanov, L.N. Poltavskii, MG.M. Vainikko. Hypersingular Integral Equations and Their Applications, CRC Press, 2003. – 416p.
2. F.J. Rizzo. A weakly singular form of the hypersingular integral equations applied to 3-D acoustic wave problems, Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering, № 96, 1992.– P. 271-287.
3. О.Л. Зайденварг, Е.А. Стрельникова. Гиперсингулярные уравнения в задачах прочности элементов конструкций с трещинами при температурном нагружении. Вісник Харківського національного університету імені ВН Каразіна. серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», № 11, 2009. – С. 191-196.
4. Р.П. Москаленко, В.В. Науменко, Е.А. Стрельникова. Метод дискретних особливостей у задачі визначення частот і форм коливань лопатей гідротурбін Вісник Харківського національного університету, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» № 34, 2017. – С. 40-47.
5. V.I. Gnitko, K.G. Degtyariov, V.V. Naumenko, E.A. Strelnikova. Coupled BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks, International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements, Vol. 6, № 6, 2018.– P. 976-988.
6. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов, – Харьков: Изд. Харьк. национального ун-та им. В.Н.Каразина, 2000. –92 с.
7. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях, - М.: Наука, 1985. – 256с.
8. F. Erdogan, G.D. Gupta. On the numerical solution of singular integral equations, Quart. Appl. Math..–1972.–Vol.29, №4.–P.525-534.

9. S. Krenk. On quadrature formulas for singular integral equations, Quart. Appl. Math.–1975.–Vol. 32, №3.–P.225-233
10. Б.Я. Кантор, В.В. Науменко, Е.А. Стрельникова. О возможности выбора контрольных точек на границах элементов при численном решении сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Адамара, Докл. НАН Украины № 1, 1996. – С.20-27.
11. D. Rostami Varnos Fardami. A new aspect for choosing collocation points for solving bi-harmonic equations, Applied Math. And Applications, Vol. 181 (2), 2006. – P. 1112-1119.
12. L.E. Lindgran. From Weighted Residual Methods to Finite Element Method, – Cambrige, England, 2009. –231p.

REFERENCES

[1] I. Lifanov, L. Poltavskii, and M. Vainikko, *Hypersingular Integral Equations and Their Applications*. CRC Press, 2003.

[2] F.J. Rizzo, "A weakly singular form of the hypersingular integral equations applied to 3-D acoustic wave problems", *Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 96, pp. 271-287, 1992.

[3] O. Zaydenvarg and E. Strelnikova, "Hypersingular equations in strength problems of structural elements with cracks under temperature loading", *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University*, – Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems», Issue 11, pp. 191-196, 2009.

[4] R. Moskalenko, V. Naumenko, and E. Strelnokova, "Diskrete singularities methods in in the task of determining the frequencies and forms of oscillation of hydro turbine blades", *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University*, – Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems», Issue 34, pp. 40-47, 2017

[5] V.I. Gnitko, K.G. Degtyariov, V.V. Naumenko, E.A. Strelnikova. "Coupled BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks", *International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, vol.6, №6. pp. 976-988, 2018.

[6] Y. Handel, *Introduction to the methods of calculation singular and hypersingular integrals*. Kharkiv, Publishing house of V.N. Karazin Kharkiv National University, 2000.

[7] S. Belotserkovskyy and I. Lifanov, *Numerical methods in singular integral equations*. Moskow, Nauka, 1985.

[8] F. Erdogan, G.D. Gupta. "On the numerical solution of singular integral equations", *Quart*. Appl. Math. vol.29, №4. pp.525-534, 1972.

[10] B. Kantor, V. Naumenko, and E. Strelnikova, "Possibility of choosing control points on the elements' boundary in numerical solution of the singular integral equations with the Hadamard kernel", *Reports of NAS of Ukraine*, vol.1, pp.20-27, 1996.

[11] D. Rostami Varnos Fardami. "A new aspect for choosing collocation points for solving bi-harmonic equations", *Applied Math. And Applications*, vol. 181 (2), pp. 1112-1119, 2006.

[12] L.E. Lindgran. "From Weighted Residual Methods to Finite Element Method", – *Cambrige*, England, 2009.

***Караєв Артем Олександрович** – аспірант; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків-22, майдан Свободи, 4, 61022; e-mail: a.karaiev@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-3176-8496.*

***Стрельнікова Олена Олекснадрівна** – доктор технічних наук, професор; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків-22, майдан Свободи, 4, 61022; e-mail: elena15@gmx.com; ORCID: 0000-0003-0707-7214.*

Надійшла у першій редакції 25.02.2018, в останній – 10.04.2018.