УДК 681.142

Практическое использование результатов первой фундаментальной теоремы Гаусса в системе остаточных классов

А. А. Замула[1], В. А. Краснобаев[1], В. Н. Курчанов[2]

1 - Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Украина,

2 - Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка, Украина

В статье рассмотрен метод определения вещественного остатка целого комплексного числа по комплексному модулю. Метод основан на использовании результатов первой фундаментальной теоремы Гаусса. Приведены примеры определения вычетов в комплексной числовой области. На основании метода разработан алгоритм определения вещественного вычета целого комплексного числа по комплексному модулю в соответствии, с которым синтезировано устройство для его технической реализации. На устройство получен патент Украины на изобретение, что подтверждает новизну и практическую ценность результатов исследований. Результаты, полученные в статье, целесообразно использовать при реализации задач и алгоритмов в системе остаточных классов (СОК) в комплексной числовой области. Результаты исследований также целесообразно использовать при обработке комплексных чисел в СОК. Использования рассмотренного метода способствует повышению эффективности практического использования СОК при реализации целочисленных операций в комплексной числовой области.

Ключевые слова: *комплексные числа, система остаточных классов, остаток, изоморфизм.*

У статті розглянуто метод визначення дійсного лишку цілого комплексного числа по комплексному модулю. Метод заснований на використанні результатів першої фундаментальної теореми Гауса. Наведено приклади визначення залишків в комплексній числовий області. На підставі методу розроблено алгоритм визначення дійсного лишку цілого комплексного числа по комплексному модулю відповідно до якого синтезовано пристрій для його технічної реалізації. На пристрій отримано патент України на винахід, що підтверджує новизну і практичну цінність результатів досліджень. Результати, які отримано в статті, доцільно використовувати при реалізації завдань і алгоритмів в системі залишкових класів (СЗК) в комплексній числовий області. Результати досліджень також доцільно використовувати при обробці комплексних чисел в СЗК. Використання методу, що розглянуто, сприяє підвищенню ефективності практичного використання СЗК при реалізації цілочисельних операцій в комплексній числовий області.

Ключові слова: *комплексні числа, система залишкових класів, залишок, ізоморфізм.*

The method of determining the real remainder of a complex integer with respect to a complex modulus is considered in the paper. The method is based on the results of the first fundamental Gauss theorem. The examples of the definition of residues in a complex number domain are given. On the basis of the method, the algorithm for determining the real residue of an integer complex number by a complex module has been developed. Accordingly, the device for its technical implementation has been synthesized. The device has received a patent of Ukraine for an invention that confirms the novelty and practical value of the research results. The obtained results can be used for implementing tasks and algorithms in the residual class system (RCS) in the complex number area. The results can be used for the processing complex numbers in RCS as well. The method allows increasing the efficiency of practical use of RCS in the implementation of integer operations in the complex number area.

Key words: *complex numbers, residual class system, remainder, isomorphism.*

1 Введение

В системе остаточных классов (СОК) есть возможность представить комплексные числа в образе их вещественных вычетов, т.е. установить изоморфизм между комплексными и вещественными вычетами чисел. Это дает возможность заменить арифметические операции над целыми гауссовыми числами аналогичными операциями над системой вещественных чисел по вещественным модулям, равным нормам выбранных комплексных оснований СОК. В этом аспекте существует такая актуальная практическая задача, как преобразование остатков числа в СОК из комплексной числовой области в вещественную числовую область. Данная задача преобразования числа в СОК из комплексной числовой области в вещественную область решается путем использования результатов первой фундаментальной теореме Гаусса [1-3].

Цель статьи – рассмотрения метода определения наименьшего вещественного вычета h целого комплексного числа $\dot{A} = a + bi$ по комплексному модулю $\dot{m} = p + qi$ СОК.

2 Основная часть

Рассмотрим один из наиболее интересных и важных вопросов теории целых комплексных чисел – определение класса наименьших вычетов и связанной с этим первой фундаментальной теоремой Гаусса. Эта теорема устанавливает изоморфизм между множеством вещественных и комплексных вычетов чисел.

Изложенный выше материал подводит к первой фундаментальной теореме Гаусса. Эта теорема устанавливает изоморфизм между комплексными и вещественными вычетами [3].

Теорема. По заданному комплексному модулю $\dot{m} = p + qi$, норма N которого равна $N = p^2 + q^2$ и для которого p и q являются взаимно простыми числами, каждое целое КЧ $\dot{A} = a + bi$ по комплексному модулю $\dot{m}$ сравнимо с одним и только одним вещественным вычетом из ряда чисел $\overline{0, N-1}$, т.е. имеем, что $\dot{A} \equiv h (\mathrm{mod}\, \dot{m})$.

Доказательство. Из теории чисел известно, что для двух взаимно простых чисел p и q можно найти такие два целых числа u и v, что выполняется условие

$$u \cdot p + v \cdot q = 1. \quad (1)$$

Вначале покажем, что существует следующее тождество

$$i = u \cdot p - v \cdot q + \dot{m} \cdot (v + ui). \quad (2)$$

Действительно

$$\begin{aligned} i &= u\cdot q - v\cdot p + (p + q\cdot i)\cdot(v + u\cdot i) = \\ &= u\cdot q - v\cdot p + (p\cdot v + p\cdot u\cdot i + q\cdot v\cdot i + q\cdot u\cdot i^2) = \\ &= u\cdot q - v\cdot p + (p\cdot v + p\cdot u\cdot i + q\cdot v\cdot i - q\cdot u) = \\ &= u\cdot q - q\cdot u - v\cdot p + p\cdot v + p\cdot u\cdot i + q\cdot v\cdot i = \\ &= (u\cdot p + v\cdot q)\cdot i. \end{aligned}$$

Пусть дано КЧ $\dot{A} = a + bi$. Тогда с учётом (2) получим

$$a + bi = a + b\cdot[u\cdot q - v\cdot p + \dot{m}\cdot(v + ui)] = a + (u\cdot q - v\cdot p)\cdot b + \dot{m}\cdot(v\cdot b + u\cdot bi)]. \quad (3)$$

Обозначим через h наименьший положительный вещественный вычет числа $a + (u\cdot q - v\cdot p)\cdot b$ по модулю N , т.е.

$$h \equiv [a + (u\cdot q - v\cdot p)\cdot b] \bmod N . \quad (4)$$

На рис. 1 представлена схема соответствия произвольного комплексного вычета $\dot{A}(\bmod \dot{m})$ вещественному h вычету $\mathrm{Z} \equiv h(\bmod N)$.

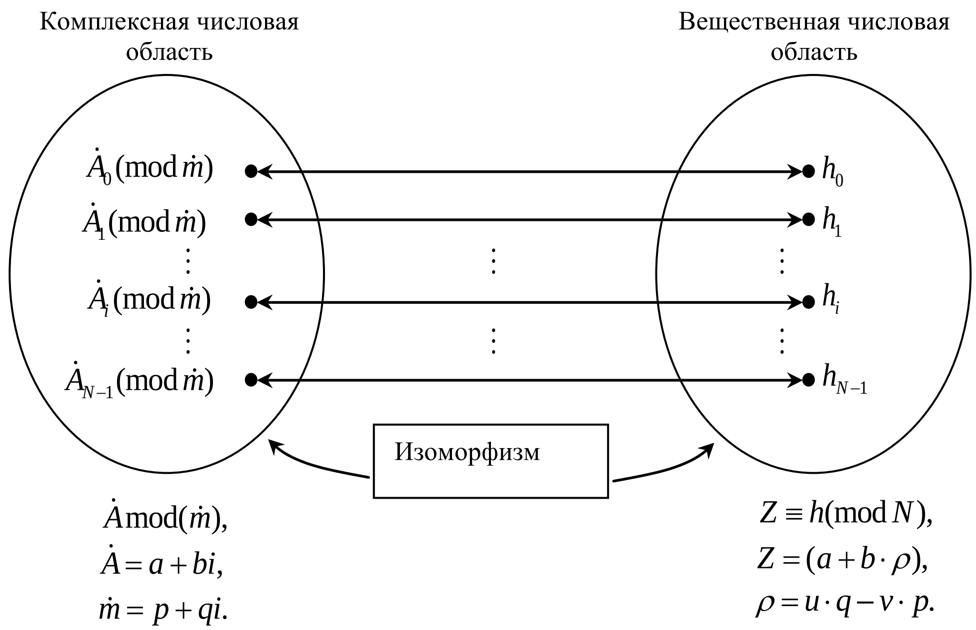

Рис. 1 Схема соответствия произвольного комплексного вычета $\dot{A}\ (\bmod \dot{m})$ *вещественному* h *вычету* $\mathrm{Z} \equiv h(\bmod N)$

С учетом выражения (1) имеем, что $i = i$. Таким образом тождество (2) справедливо.

Запишем выражение (4) в виде

$$a + (u\cdot q - v\cdot p)\cdot b = h + s\cdot N = h + s(p + qi)\cdot(p - qi) = h + \dot{m}\cdot(p\cdot s - q\cdot si) . \quad (6)$$

Тогда, с учётом (3), будет выполняться равенство

$$a + bi = h + \dot{m}\cdot(p\cdot s - q\cdot si) + \dot{m}\cdot(v\cdot b + u\cdot bi) = h + \dot{m}\cdot\left[p\cdot s + v\cdot b + (u\cdot b - q\cdot s)i\right],$$

или в форме сравнения

$$(a + bi) \equiv h(\bmod \dot{m}) .$$

Таким образом, доказано, что наименьший комплексный вычет $x+yi$ КЧ $a+bi$ сравним по модулю m_i с одним и только одним из вещественных чисел $0,1,2,\ldots,N-1$.

Докажем, методом от противного, что это число единственное. Допустим, что имеются два сравнения

$$(a+bi)\equiv h_1(\mathrm{mod}\,\dot{m}),$$
$$(a+bi)\equiv h_2(\mathrm{mod}\,\dot{m}).$$

На основании свойства сравнений имеем

$$h_1\equiv h_2(\mathrm{mod}\,\dot{m})$$

или

$$(h_1-h_2)\equiv 0(\mathrm{mod}\,\dot{m}),$$

т. е.

$$(h_1-h_2)=\dot{m}\cdot(e+f\cdot i). \qquad (7)$$

Из (7) следует выполнение следующего равенства

$$(h_1-h_2)=(p+qi)\cdot(e+fi),$$
$$(h_1-h_2)\cdot(p-qi)=(p+qi)\cdot(p-qi)\cdot(e+fi),$$
$$(h_1-h_2)\cdot(p-qi)=(p^2+q^2)\cdot(e+fi),$$
$$(h_1-h_2)\cdot(p-qi)=N\cdot(e+fi),$$
$$(h_1-h_2)\cdot p-(h_1-h_2)\cdot qi=N\cdot e+N\cdot fi,$$

которое эквивалентно следующим двум вещественным равенствам

$$\begin{cases}(h_1-h_2)\cdot p=N\cdot e,\\ (h_1-h_2)\cdot q=-N\cdot f,\end{cases} \qquad (8)$$

так как КЧ равны между собой, то равны их вещественные и мнимые части. Умножив первое равенство (8) на значение u и второе на значение v и сложим их. Получим

$$(h_1-h_2)\cdot(u\cdot p+v\cdot q)=N\cdot(e\cdot u-f\cdot v),$$

откуда, принимая во внимание выражение (1), следует

$$(h_1-h_2)\equiv N\cdot(e\cdot u-f\cdot v),$$

или

$$(h_1-h_2)\equiv 0(\mathrm{mod}\,N). \qquad (9)$$

Так, как по предположению $h_1,h_2<N$, то сравнение (9) возможно только в случае $h_1=h_2$. Таким образом, исключается возможность существования двух различных чисел h_1 и h_2, меньших N, которые были бы сравнимы с числом $a+bi$ по модулю $\dot{m}$. Имеется только одно такое h число, которое определяется из сравнения

$$[a+(u\cdot q-v\cdot p)\cdot b]\equiv h(\mathrm{mod}\,N), \qquad (10)$$

или

$$\mathrm{Z}=(a+b\cdot\rho)\equiv h(\mathrm{mod}\,N). \qquad (11)$$

Выражение $\rho=u\cdot q-v\cdot p$, посредством которого устанавливается соответствие между комплексным и вещественным вычетом по модулю $\dot{m} = p + qi$, называется коэффициентом изоморфизма (КИ).

В качестве примера, по формулам (10) и (11), определим значения вещественных вычетов $Z_i \equiv h_i (\mod N)$ $(i = \overline{0, N-1})$, соответствующих наименьшим комплексным вычетам $x + yi$ по модулю $\dot{m} = 1 + 2i$.

Вначале определим значение коэффициента изоморфизма $\rho = u \cdot q - v \cdot p = u \cdot 2 - v \cdot 1$. Значения u и v определяются из известного в теории чисел соотношения $u \cdot p + v \cdot q = 1$, т.е. $u \cdot 1 + v \cdot 2 = 1$. Путем подбора (перебора) определяем, что $u = -1$, а $q = 1$. Таким образом, $\rho = (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 = -3$, или $(-3) \mod 5 = 2$ $(N = p^2 + q^2 = 1^2 + 2^2 = 5)$.

Определим значения наименьших вещественных положительных вычетов h_i, изоморфных наименьшим комплексным вычетам.

Для $\dot{A} = 0 + 0i$. $Z_0 = a + b\rho = 0 + 0 \cdot \rho = 0$. $h_0 \equiv 0 (\mod 5)$.

Для $\dot{A} = -1 + i$. $Z_1 = -1 + 1 \cdot (-3) = -4$. $h_1 \equiv 1 (\mod 5)$.

Для $\dot{A} = i$. $Z_2 = 0 + 1 \cdot (-3) = -3$. $h_2 \equiv 2 (\mod 5)$.

Для $\dot{A} = -1 + 2 \cdot i$. $Z_3 = -1 + 2 \cdot (-3) = -1 - 6 = -7$. $h_3 \equiv 3 (\mod 5)$.

Для $\dot{A} = 2 \cdot i$. $Z_4 = 0 + 2 \cdot (-3) = -6$. $h_3 \equiv 4 (\mod 5)$.

Результаты вычислений h_i помещены в таблицу 1.

Таблица 1. Совокупность изоморфных вещественных положительных вычетов h

Наименьшие комплексные вычеты $x + y_i$ по комплексному модулю	Наименьшие вещественные положительные вычеты h_i $(i = \overline{0, N-1})$
0	0
$-1 + i$	1
i	2
$-1 + 2i$	3
$2i$	4

На основе результатов теоремы Гаусса не трудно можно показать следующее соотношения между наименьшими комплексными и вещественными вычетами. Пусть для двух чисел $\dot{A}_1 = a_1 + b_1 i$ и $\dot{A}_2 = a_2 + b_2 i$ существуют такие значения чисел h_1 и h_2, $h_\pm$ и $h_\times$, что если $\dot{A}_1 \equiv h_1 (\mod \dot{m})$ и $\dot{A}_2 \equiv h_2 (\mod \dot{m})$, то выполняются следующие соотношения $\dot{A}_1 \pm \dot{A}_2 \equiv h_\pm (\mod \dot{m})$ и $\dot{A}_1 \cdot \dot{A}_2 \equiv h_\times (\mod \dot{m})$. Тогда $h_\pm \equiv (h_1 \pm h_2) \mod N$ и $h_\times \equiv (h_1 \cdot h_2) \mod N$, где $N = p^2 + q^2$.

Приведем конкретные примеры определения вещественного вычета целого комплексного числа по комплексному модулю.

Пример 1. Решить сравнение $(16+7i) \equiv h \bmod (5+2i)$.

Поскольку НОД $(5,2)=1$, то условие первой фундаментальной теоремы Гаусса выполняется, следовательно, существует полная система вещественных вычетов по модулю $N = p^2 + q^2 = 5^2 + 2^2 = 29$. Вещественный вычет h определяется из сравнения (11), т.е.

$$16 + 7 \cdot \rho \equiv h (\bmod 29).$$

Коэффициент изоморфизма ρ равен $\rho = u \cdot q - v \cdot p = u \cdot 2 - v \cdot 5$, где значения u и v определяются из условия равенства (1)

$$u \cdot p + v \cdot q = 1.$$

В данном случае имеем, что $u=1$ и $v=-2$, т.е. $1 \cdot 5 + (-2) \cdot 2 = 5 - 4 = 1$.

В этом случае КИ $\rho = 1 \cdot 2 - (-2) \cdot 5 = 2 + 10 = 12$. Поэтому $16 + 7 \cdot \rho = 16 + 7 \cdot 12 \equiv h (\bmod 29)$ и $h \equiv 13 (\bmod 29)$. Можно записать, что $16 + 7i \equiv 13 \bmod (5+2i)$.

Пример 2. Решить сравнение $(1+i) \equiv h \bmod (1+2i)$.

Поскольку НОД $(p,q) = (1,2) = 1$. $N = p^2 + q^2 = 1 + 2^2 = 5$. $\dot{A} \equiv h (\bmod \dot{m})$. $h \equiv (a + b \cdot \rho) \bmod N$.

Значение КИ равен значению $\rho = u \cdot q - v \cdot p = u \cdot 2 - v \cdot 1$, а значения u и v определяются из соотношения (1). Получим, что $u = -1$, $v = 1$. В этом случае КИ равен $\rho = (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 = -2 - 1 = -3 \equiv 2 (\bmod 5)$.

$$Z = a + b \cdot \rho = 1 + 1 \cdot (-3) = -2.$$

$$Z \equiv h (\bmod N).$$

$$(-2) \equiv h (\bmod 5).$$

$$h = 3.$$

$$x + yi = 4 + 2i \; \square \; h = 3$$

т.е.

$$(1+i) \equiv 3 \bmod (1+2i).$$

Рассмотрим примеры определения комплексного и вещественного вычетов целого комплексного числа по комплексному модулю $\dot{m} = 1 + 2i$ с контролем правильности решения задачи.

Пример 3. Определить комплексный вычет $x + yi$ КЧ $\dot{A} = 1 + i$ по комплексному модулю $\dot{m} = 1 + 2i$, т.е. найти $\dot{A} \equiv (x + yi) \bmod \dot{m}$ ($a = 1$, $b = 1$; $p = 1$, $q = 2$; $N = 5$). По формуле [3] имеем, что

$$\begin{cases} (1 \cdot 1 + 1 \cdot 2) \equiv (x \cdot 1 + y \cdot 2) \bmod 5, \\ (1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) \equiv (y \cdot 1 - x \cdot 2) \bmod 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = x + 2y, \\ -1 = -2x + y. \end{cases}$$

$$x = 3 - 2y,$$

$$-1 = -2 \cdot (3 - 2y) + y,$$

$$-1 = -6 + 4y + y\,,$$
$$5y = 5\,,$$
$$y = 1.$$
$$x = 3 - 2y = 3 - 2 = 1;\; x = 1\,.$$

Ответ: комплексный вычет $x + yi$ КЧ $\dot{A} = 1 + i$ по комплексному модулю $\dot{m} = 1 + 2i$ равен комплексному числу $x + yi = 1 + i$.

Пример 4. Определить наименьший вычет $x + yi$ числа $\dot{A} = 1 + i$ по модулю $\dot{m} = 1 + 2i$, т.е. определить значение $\dot{A} \equiv (x + yi)\,\mathrm{mod}(1 + 2i)$ ($a = 1, b = 1;\; p = 1, q = 2;\; N = 5$). По формуле [3] имеем, что

$$\Gamma = (1\cdot 1 + 1\cdot 2)\,\mathrm{mod}\,5 = 3;\; \Gamma' = (1\cdot 1 - 1\cdot 2)\,\mathrm{mod}\,5 = (-1)\,\mathrm{mod}\,5 = 4.$$

$$x + yi = \frac{3\cdot 1 - 4\cdot 2}{5} + \frac{4\cdot 1 + 3\cdot 2}{5} i = -\frac{5}{5} + \frac{10}{5} i = -1 + 2i\,.$$

Таким образом, $x + yi = -1 + 2i$ или $\dot{A} \equiv (-1 + 2i)\,\mathrm{mod}(1 + 2i)$.

Пример 5. Решить сравнение $\dot{A} \equiv h\,\mathrm{mod}\,\dot{m}$, где $(1 + i) \equiv h\,\mathrm{mod}(1 + 2i)$ ($a = 1, b = 1;\; p = 1,\; q = 2;\; N = 5$); формулы (1), (10), (11))

$$u\cdot p + v\cdot q = 1,\; u = -1,$$
$$u\cdot 1 + v\cdot 2 = 1.\; v = 1.$$
$$\rho = u\cdot q - v\cdot p\,.$$
$$Z = a + b\cdot \rho \to Z \equiv h\,\mathrm{mod}\,N\,.$$
$$\rho = (-1)\cdot 2 - 1\cdot 1 = -2 - 1 = -3\,.$$
$$Z = [1 + 1\cdot(-3)]\,\mathrm{mod}\,5 = (-2)\,\mathrm{mod}\,5 = 3\,.$$

Проверка. Проведём проверку полученных результатов. В примере 4 получили наименьший комплексный вычет $(-1 + 2i)$, а в примере 5 получили вещественный вычет $h = 3$. В соответствии с данными таблицы 2 имеем, что $(-1 + 2i) \sim 3$. Что и требовалось показать.

Пример 6. Определить комплексный вычет $x + yi$ КЧ $\dot{A} = 3 + 4i$ по комплексному модулю $\dot{m} = 1 + 2i$. $N = p^2 + q^2 = 1^2 + 2^2 = 5$.

В соответствии с известным [3] правилом, составим систему сравнений в виде

$$\begin{cases} (3\cdot 1 + 4\cdot 2) \equiv (x\cdot 1 + y\cdot 2)\,\mathrm{mod}\,5, \\ (4\cdot 1 - 3\cdot 2) \equiv (y\cdot 1 - x\cdot 2)\,\mathrm{mod}\,5. \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} 11 \equiv (x + 2y)\,\mathrm{mod}\,5, \\ (-2) \equiv (-2x + y)\,\mathrm{mod}\,5. \end{cases}$$

На основании системы сравнений составим систему из двух линейных уравнений

$$\begin{cases} x+2y=11, \\ -2x+y=+3, \end{cases}$$

так, как $(-2)=3\bmod 5$.

$$x=11-2y,$$
$$-2\cdot(11-2\cdot y)+y=3,$$
$$-22+4y+y=3,$$
$$5y=25,$$
$$y=5.$$
$$x=11-2y=11-10=1.$$

Таким образом, $x+yi=1+5i$.

Пример 7. Определить наименьший комплексный вычет $x+yi$ КЧ $\dot{A}=3+4i$ по комплексному модулю $\dot{m}=1+2i$; $N=5$.

В соответствии с выражением в [3], имеем, что наименьший комплексный вычет равен значению

$$(x+yi)=\frac{\Gamma\cdot p-\Gamma'\cdot q}{N}+\frac{\Gamma'\cdot p+\Gamma\cdot q}{N}i.$$

Предварительно определим значения Γ и Γ'

$$\Gamma=(a\cdot p+b\cdot q)\bmod N=(3\cdot 1+4\cdot 2)\bmod 5=11(\bmod 5)=1;$$
$$\Gamma'=(b\cdot p-a\cdot q)\bmod N=(4\cdot 1-3\cdot 2)\bmod 5=(-2)\bmod 5=3.$$

В этом случае имеем, что

$$(x+yi)=\frac{1\cdot 1-3\cdot 2}{5}+\frac{3\cdot 1+1\cdot 2}{5}=-\frac{5}{5}+\frac{5}{5}=-1+i.$$

Таким образом, наименьший комплексный вычет равен $-1+i$.

Пример 8. Определить вещественный вычет h КЧ $\dot{A}=3+4i$ по модулю $\dot{m}=1+2i$; $N=5$. Или можно сформулировать задачу следующим образом. Решить сравнение вида $(3+4i)\equiv h\bmod(1+2i)$.

В соответствии с выражением (11) имеем, что $(a+b\rho)\equiv h(\bmod N)$, где коэффициент изоморфизма ρ равен $\rho=u\cdot q-v\cdot p$. На основе формулы (1) определим значения u и v

$$u\cdot p+v\cdot q=1 \text{ или } u\cdot 1+v\cdot 2=1.$$

Так, при значениях $u=-1$ и $v=1$, выполняется условие (1), т.е. $(-1)\cdot 1+1\cdot 2=1$.

На основании расчётов получим, что $\rho=u\cdot q-v\cdot p=(-1)\cdot 2-1\cdot 1=-3$.

$$\mathrm{h}=(a+b\cdot\rho)=(3+4\cdot(-3))\bmod 5 \text{ или } (-9)\bmod 5=1.$$

Проверка. Проведём проверку полученных результатов. В примере 7 получили наименьший комплексный вычет $(-1+i)$, а в примере 8 получим вещественный вычет $h=1$. В соответствии с данными таблицы 1 имеем, что $(-1+i)\sim 1$. Что и требовалось показать.

3 Выводы

В представленной статье был рассмотрен метод определения вещественного вычета целого комплексного числа по комплексному модулю, основанный на использовании результатов первой фундаментальной теоремы Гаусса. Приведены конкретные примеры определения вычетов целочисленных данных в комплексной числовой области. На основании представленного метода разработано устройство для его технической реализации [4]. На устройство получен патент Украины на изобретение, что подтверждает новизну и практическую ценность результатов исследований. Результаты, полученные в статье, целесообразно использовать при решении задач и алгоритмов в СОК в комплексной числовой области. Использования рассмотренного метода способствует повышению эффективности использования СОК для реализации целочисленных операций в комплексной числовой области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Синтез и анализ параллельных процессов в адаптивных времяпараметризованных вычислительных системах / Г. А. Поляков, С. И. Шматков, Е. Г, Толстолужская, Д. А. Толстолужский: монография. – Харьков: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2012.-672с.
2. Филиппенко И. Г. Взаимодействующие нейроавтоматы и нейроавтоматно-вычислительные структуры: Под редакцией О. Г. Руденко. – К.: Каравелла, 2015, 440с. Табл.-31. Ил.-197. Библиогр.-435.
3. Акушский И. Я., Юдицкий Д. И. Машинная арифметика в остаточных классах. – М.: Сов. радио, 1968. – 440 с.
4. Патент на винахід № 114063, Україна, МПК G 06 F 7/72 (2006.01), H 03 M 7/18 (2006.01). Краснобаєв В. А., Горбенко І. Д., Янко А. С., Кошман С. А., Мороз С. О., Горбенко Ю. І Пристрій для визначення лишків дійсних та комплексних чисел у системі залишкових класів. № а 2016 06697. Заявл. 21.06.2016. Опубл. 10.04.2017, Бюл. № 7.-7с.

Надійшла – 13.12.2017.