УДК 51.76, 519.6

Обратное преобразование Радона не содержащее сингулярной фильтрации

А. И. Вайсбурд, Т. Г. Вихтинская, К. Э. Немченко
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

В работе изложены результаты исследования в области компьютерной томографии, на основе которого предложен метод восстановления внутреннего структуры исследуемого объекта. Идея заключается в использовании обратного преобразования Радона, которое не приводит к возникновению сингулярного ядра. В работе проведен проверка данного метода и его сравнение с уже существующими методиками.

Ключевые слова: *преобразования Радона, теорема о центральном сечении, обратное проектирование, рамп - фильтр, гауссов фильтр низких частот.*

В роботі викладені результати дослідження в області комп'ютерної томографії, на основі якого запропонований метод відновлення внутрішнього структури досліджуваного об'єкта. Ідея полягає в використанні зворотного перетворення Радону, яка не призводить до виникнення сингулярного ядра. В роботі проведено перевірка даного методу і його порівняння з уже існуючими методиками.

Ключові слова: *перетворення Радону, теорема про центральний перетин, зворотне проектування, рамп-фільтр, гаусів фільтр низьких частот.*

The paper presents the results of a study in the field of computed tomography, on the basis of which the method for reconstructing the internal structure of a studied object has been proposed. The idea is to use the inverse Radon transform, which does not lead to the emergence of a singular nucleus. In this work, this method has been tested and compared with the existing methods.

Keywords*: Radon transform, central cross-section theorem, reverse projection, ramp filter, Gaussian low-pass filter.*

1. Введение

Во многих областях науки, таких как медицина, геофизика, астрофизика, промышленная дефектоскопия, диагностика плазмы и других, возникает проблема определения внутренней структуры объекта. Для решения данной задачи во многих случаях являются неприемлемыми прямые методы исследования, связанные с разрушением объекта, поэтому создаются специальные системы получения данных. Физический принцип этих систем состоит в использовании воздействия, представляющего собой процесс произвольной природы (излучение, волновое поле и т.д.), и последующей регистрацией отклика этого процесса на объект.

Важную роль в определении внутренней структуры объекта играют исследования связанные с определением 3D - функций истинного распределения таких параметров как температуры, плотности, концентрации компонент в объемах исследуемых объектов. Возможность получения такого рода данных позволяет разрабатывать новые, более точные модели физических объектов, глубже понимать физические процессы и явления протекающие в них и пр. Поэтому, разработка новых методов для решения задач реконструкции функций распределения исследуемых параметров объектов является актуальной задачей.

2. Преобразования Радона

В основе большинства томографов лежит идея, состоящая в том, что внутреннюю структуру объекта можно представить, получив ряд параллельных поперечных сечений [1-5]. Поэтому главная задача компьютерной томографии состоит в получении двумерного (плоского) изображения поперечного сечения исследуемого объекта, которая и будет рассмотрена далее.

Метод получения двумерного томографического изображения содержит два этапа. На первом этапе формируются проекционные данные, на втором по проекционным данным восстанавливается изображение поперечного сечения. Обозначив плотность распределения в исследуемом слое как $f(x,y)$ для регистрируемого одномерного изображения $F(X,\alpha)$, которое соответствует проекции сделанной под углом α, получаем следующее выражение:

$$F(X,\alpha) = \int f(x,y)dl\,. \qquad (1)$$

Здесь интеграл берется вдоль луча проектирования, X – координата на детекторе, dl – элемент длины луча проектирования.

Связь между декартовыми координатами x и у в слое, и координатами l на луче и X и детекторе дается соотношениями

$$\begin{cases} x(l,X) = X\cos\alpha - l\sin\alpha \\ y(l,X) = X\sin\alpha + l\cos\alpha \end{cases} \text{ и } \begin{cases} X = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ l = y\sin\alpha - y\cos\alpha \end{cases}, \qquad (2)$$

которые позволяют переписать интеграл (1) в виде двукратного интеграла:

$$F(X,\alpha) = \int dxdy\delta(x\cos\alpha + y\sin\alpha - X)\,f(x,y)\,. \qquad (3)$$

Если входящую в (3) дельта-функцию записать через ее Фурье-представление:

$$\delta(x) = \int \frac{dQ}{2\pi}\exp(iQx)\,, \qquad (4)$$

то выражение (3) приобретет вид:

$$F(X,\alpha) = \int \frac{dQ}{2\pi}\int dxdy\exp(iQ(x\cos\alpha + y\sin\alpha - X))\,f(x,y) \qquad (5)$$

Теперь, как и для дельта-функции, следует записать Фурье представление исходной функции распределения:

$$f(x,y) = \int \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2}\, g(k_x,k_y)\exp(ik_x x + ik_y y) \qquad (6)$$

где $g(k_x, k_y)$ – Фурье-образ функции $f(x, y)$, который определяется следующим образом:

$$g(k_x,k_y) = \int dxdy f(x,y)\exp(-ik_x x - ik_y y) \qquad (7)$$

Подставив (6) в (5) и выполняя интегрирование по пространственным координатам для функции $F(X,\alpha)$ получаем выражение

$$F(X,\alpha)=\int\frac{dQ}{2\pi}e^{+iQX}g(Q\cos\alpha,Q\sin\alpha)\,. \tag{8}$$

Это выражение формально является разложением Фурье

$$F(X,\alpha)=\int\frac{dQ}{2\pi}e^{+iQX}G(Q,\alpha) \tag{9}$$

функции $F(X,\alpha)$, поэтому для Фурье–образа этой функции получаем следующее соотношение

$$G(Q,\alpha)=g(Q\cos\alpha,Q\sin\alpha)\,, \tag{10}$$

Суть преобразования Радона сводится к использованию проекции $F(X,\alpha)$ для нахождения исходной функции распределения $f(x,y)$. С этой целью в (6) совершаем переход в полярную систему координат в соответствии с законом преобразования

$$\begin{cases}k_x=k\cos\beta\\ k_y=k\sin\beta\end{cases},\ \text{где}\qquad 0<k<+\infty\,,\ 0\le\beta<2\pi\,. \tag{11}$$

В этих координатах соотношение (6) представляется в виде

$$f(x,y)=\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{kdkd\beta}{(2\pi)^2}g(k\cos\beta,k\sin\beta)\exp(ikx\cos\beta+iky\sin\beta)\,. \tag{12}$$

Далее в этом соотношении необходимо перейти к новым переменным, которые равны старым $q = k$ и $\gamma = \beta$, но заданным в другой области определения:

$$-\infty<q<+\infty\,,\ 0\le\beta<\pi\,.$$

В этих переменных интегрирование (12) примет вид

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{|q|dqd\gamma}{(2\pi)^2}g(q\cos\gamma,q\sin\gamma)\exp(iqx\cos\gamma+iqy\sin\gamma) \tag{13}$$

Сравнение (13) и (10) показывает, что в них входит одна и та же функция $g(q\cos\gamma,\ q\sin\gamma)$ своих аргументов, причем области определения аргументов совпадают. Это заключение позволяет связать Фурье–образ $G(Q,\alpha)$, где α – угол проекции в обычном пространстве, с Фурье–образом плотности $g(q\cos\gamma,\ q\sin\gamma)$, где γ – угловая переменная в Фурье– пространстве:

$$g(q\cos\gamma,q\sin\gamma)=G(Q,\alpha)\Big|_{\alpha=\gamma,Q=q}\,. \tag{14}$$

Полученное соотношение представляет собой так называемую теорему о центральном сечении [6-8].

Используя связь (15) приводим (14) к виду

$$f(x,y)=\int\frac{|Q|dQd\alpha}{(2\pi)^2}G(Q,\alpha)\exp(iQx\cos\alpha+iQy\sin\alpha)\,. \tag{15}$$

Это выражение представляет собой искомое решение задачи о восстановлении и отражает суть преобразований Радона. Таким образом, исходя из (15), обратное преобразование Радона может быть записано в виде

$$f(x,y)=\int d\alpha dXF(X,\alpha)R(X-x\cos\alpha-y\sin\alpha)\,. \tag{16}$$

Здесь

$$R(z)=\int\frac{|Q|dQ}{(2\pi)^2}\exp(-iQz) \tag{17}$$

формально представляет собой ядро обратного преобразования Радона, и дальнейшие исследования теперь сводятся к поиску явного вида этой функции.

Основной проблемой при этом является тот факт, что интеграл (17) содержит особенность и, поэтому, вместо него используется приближенные функции [8-10], которые отражают основные свойства функции (17), но при этом приводят к приближенному восстановлению.

К простейшим из таких методов относится введение максимальной пространственной частоты Q_{max}:

$$R(z)=\int_{-Q_{\max}}^{Q_{\max}}\frac{|Q|dQ}{(2\pi)^2}\exp(-iQz)\,, \tag{18}$$

которое приводит к следующему явному виду функции G:

$$R(z)=\frac{2}{(2\pi)^2}\left[\frac{Q_{\max}\sin(Q_{\max}z)}{z}-\frac{1-\cos(Q_{\max}z)}{z^2}\right]. \tag{19}$$

К недостаткам такого метода относится отсутствие алгоритма выбора максимальной пространственной частоты Q_{max}, зависимость наилучшего выбора такой частоты от частотных свойств исходного изображения, а также наличие артефактов в восстановленном изображении.

3. Предлагаемая методика восстановления

Основной идеей данной работы является использование обратного преобразования Радона в общем виде:

$$f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int|Q|dQd\alpha dX\,F(X,\alpha)\exp(-iQ(X-x\cos\alpha-y\sin\alpha)) \tag{20}$$

В этом случае не возникает понятия фильтра R (18), который используется для фильтрации (обработки) проекций перед процедурой обратного проектирования (16). Вместо этого предлагается не менять порядок интегрирования в общем соотношении (20) и вести обработку исходных данных всегда с помощью тройного интегрирования:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty|Q|\,dQ\int d\alpha dXF(X,\alpha)\cos\big(Q(X-x\cos\alpha-y\sin\alpha\big) \tag{21}$$

Такой метод позволяет избавиться от целого ряда недостатков стандартной методики (16).

Во-первых, отсутствует необходимость искусственного подбора максимальной частоты восстановления Q_{max}, или других подгоночных параметров фильтров [8-10], что кроме прочих преимуществ, позволяет избавиться от характерных для приближенного восстановления (16) артефактов.

Во-вторых, сходимость интегралов в (21) при этом обеспечивается частотными характеристиками исходных проекций $F(X,\alpha)$, что позволяет одинаково хорошо восстанавливать амплитуды всех частотных компонент исходного распределения плотности $f(x,y)$.

В-третьих, такой подход позволяет явным образом переходить к реальным исследованиям, в которых угловая переменная α и координата на детекторе X являются дискретными величинами. Такой переход особенно важен, так как конечной целью исследования является малоракурсная томография, или томосинтез, в котором количество проекций резко ограничено, а форма пучка рентгеновского излучения является конусной.

Для того, чтобы убедиться, что любое приближение фильтра (19) вносит артефакты в восстановленное изображение, заменим в (20) истинный «наклонный фильтр» (ramp filter) $|Q|$ на его обобщенное приближение в форме гауссовой кривой:

$$|Q| \to |Q| \exp(-Q^2 / 2Q_0^2) \qquad (22)$$

Здесь Q_0 – эффективный параметр фильтрации высоких частот, аналогичный $Q_{\max}$ в (18).

Используя (22) в формуле обращения (20) с учетом (3) получаем выражение для восстановленной функции в виде свертки:

$$\tilde{f}(x,y) = \int dx_1 dy_1 f(x_1, y_1) F(x - x_1) F(y - y_1) \qquad (23)$$

Здесь

$$F(x) = \int \exp\left(iQx - \frac{Q^2}{2Q_0^2} \right) \frac{dQ}{(2\pi)} = \sqrt{\frac{Q_0^2}{2\pi}} \exp\left(- x^2 Q_0^2 / 2 \right). \qquad (24)$$

Выражение (23), как и следовало ожидать, представляет собой ничто иное, как гауссов фильтр низких частот, поэтому восстановление с фильтрами типа (22) обязательно приводит к потерям и артефактам при восстановлении границ и объектов малого размера.

Таким образом, явное введение фильтрации в обратном преобразовании Радона всегда приводит к ухудшению качества восстановления.

Результаты данной работы являются основой для дальнейшего исследования вопроса о восстановлении внутренних структур объектов. Следующим шагом должно стать изучение применимости предложенного метода в случае ограниченного числа проекций, а также рассмотрения веерного и конусного проецирования. Необходимо будет оценить возможные потери точности в данных случаях и провести аналитическое и экспериментальное сравнение существующих и предложенного методов восстановления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anger, B. and Portenier, C. Radon Integrals. – Boston, MA: Birkhäuser, 1992. – 329 p.
2. Deans, S. R. The Radon Transform and Some of Its Applications. – New York: Wiley, 1983. – 462 p.
3. Kak, A. C. and Slaney, M. Principles of Computerized Tomographic Imaging. – IEEE Press, 1988. – 323 p.
4. Esser, P. D. (Ed.). Emission Computed Tomography: Current Trends. – New York: Society of Nuclear Medicine, 1983. – 249 p.
5. Shepp, L. A. and Kruskal, J. B. Computerized Tomography: The New Medical X-Ray Technology // Amer. Math. Monthly. – 1978. – V. 85. – P. 420-439.
6. Nievergelt, Y. Elementary Inversion of Radon's Transform. // SIAM Rev. – 1986. – V. 28. – P. 79-84.
7. Durrani, T. S. and Bisset, D. Erratum to: The Radon Transform and Its Properties. // Geophys. – 1985. – V. 50. – P. 884-886.
8. Hungerbühler, N. Singular Filters for the Radon Backprojection. // J. Appl. Analysis. – V. 5. – P. 17-33.
9. Kunyansky, L. A. Generalized and Attenuated Radon Transforms: Restorative Approach to the Numerical Inversion // Inverse Problems. – V. 8. – P. 809-819.
10. Zalcman, L. Uniqueness and Nonuniqueness for the Radon Transform // Bull. London Math. Soc. – V. 14. – P. 241-245.

Надійшла – 27.11.2017.