

ISSN 2221-5646 (Print),
ISSN 2523-4641 (Online)



KARAZIN UNIVERSITY
CLASSICS AHEAD OF TIME

VISNYK OF V.N.KARAZIN
KHARKIV NATIONAL UNIVERSITY

**Ser. MATHEMATICS, APPLIED
MATHEMATICS AND MECHANICS**



Том 90 ' 2019

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н.Каразіна
серія

**МАТЕМАТИКА,
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
І МЕХАНІКА**

Volume 90, 2019

ISSN 2221-5646 (Print)
ISSN 2523-4641 (Online)

0

• •

« , »

1965 .

90



Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"

Vol. 90

2019

До Віснику включено статті з математичного аналізу, математичної фізики, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних наук

(Наказ МОН України №1328 від 21.12.2015 р.)

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (протокол №12 від 25 листопада 2019 р.).

Головний редактор—Коробов В.І.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ ім. В.Н. Каразіна, Україна
Члени редакційної колегії:

Кадець В.М.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Пацегон М.Ф.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Фаворов С.Ю.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Борисенко О.А.—д-р ф.-м. наук, проф., чл.-кор. НАН України, ФТІНТ НАН України

Єгорова І.Є.—д-р ф.-м. наук, проф., ФТІНТ НАН України

Пастур Л.А.—д-р ф.-м. наук, проф., акад. НАН України, ФТІНТ НАН України

Хруслов Є.Я.—д-р ф.-м. наук, проф., акад. НАН України, ФТІНТ НАН України

Шепельський Д.Г.—д-р ф.-м. наук, проф., ФТІНТ НАН України та

ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Когут П.І.—д-р ф.-м. наук, проф., Дніпровський національний університет

імені Олеса Гончара, м.Дніпро, Україна

Чуйко С.М.—д-р ф.-м. наук, проф., Інститут прикладної математики і

механіки НАН України, м.Слов'янськ, Україна

Домбровський А.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Щецина, Польща

Карлович Ю.І.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Морелос, Мехіко, Мексика

Корбич Йозеф—д-р ф.-м. наук, проф., чл.-кор. ПАН, Університет Зелона Гора, Польща

Нгуєн Хоа Шон—д-р ф.-м. наук, проф., Академія наук та технології В'єтнама,

Інститут математики, Ханой, В'єтнам

Поляков А.І.—д-р ф.-м. наук, проф., ІНРІА Національний дослідницький інститут

інформатики та автоматики, Ле-Шене, Франція

Скляр Г.М.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Щецина, Польща

Солдатов О.П.—д-р ф.-м. наук, проф., Белгородський університет, Росія

Відповідальний секретар — Резуєнко О.В., канд. ф.-м. наук

ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Editor-in-Chief — V.I. Korobov—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Associate Editors:

S.Yu. Favorov—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

V.M. Kadets—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

N.F. Patsegon—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

A.A. Borisenko—Dr. Sci., Prof., corresponding member of NASU,

B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine

I.E. Egorova—Dr. Sci., Prof., B.Verkin Institute for Low Temperature Physics

and Engineering, Ukraine

E.Ya. Khruslov—Dr. Sci., Prof., academician of NASU,

B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine

L.A. Pastur—Dr. Sci., Prof., academician of NASU,

B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine

D.G. Shepelsky—Dr. Sci., Prof., B.Verkin Institute for Low Temperature Physics

and Engineering, Ukraine

S.M. Chujko—Dr. Sci., Prof., Donbas State Pedagogical University, Ukraine

P.I. Kogut—Dr. Sci., Prof., Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine

Andrzej Dabrowski—Dr. Sci., Prof., University of Szczecin, Poland

Yu. Karlovich—Dr. Sci., Prof., Morelos University, Mexico

Jozef Korbicz—Dr. Sci., Prof., corresponding member of PAS, University of Zielona Gora, Poland

Nguyen Khoa Son—Dr. Sci., Prof., Vietnamese Academy of Science and Technology,

Institute of Mathematics, Hanoi, Vietnam

A.E. Polyakov—Dr. Sci., Prof., INRIA Institut National de Recherche

en Informatique et en Automatique, Le Chesnay, France

G.M. Sklyar—Dr. Sci., Prof., University of Szczecin, Poland

O.P. Soldatov—Dr. Sci., Prof., Belgorod University, Russia

Responsible Editor—A.V. Rezouzenko, Ph.D., Associate Prof.,

V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Адреса редакційної колегії: 61022, Харків, майдан Свободи, 4, ХНУ імені В.Н. Каразіна,

ф-т математики і інформатики, к. 7-27, т. 7075240, 7075135, **e-mail:** vestnik-khnu@ukr.net

Інтернет: <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>; http://periodicals.karazin.ua/mech_math

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21568-11468 Р від 21.08.2015

©Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, оформлення, 2019

ЗМІСТ

Душкін В. Д., Жученко С. В., Костенко О. В. Дискретна математична модель процесу розсіювання хвиль періодичною імпедансною ґраткою	4
Чуйко С. М., Калініченко Я. В., Попов М. В. Крайові задачі для систем невідроджених різницево-алгебраїчних рівнянь	26
Баранець В. О., Кізілова Н. М. Математичне моделювання агрегації та осідання частинок в похилих трубках	42
Чуйко С. М., Несмєлова О. В. Про перетворення нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі до некритичного випадку	60

CONTENTS

V. D. Dushkin, S. V. Zhuchenko, O. V. Kostenko. Discrete mathematical model of the scattering process of E-polarized wave on a periodic impedance grating	4
S. M. Chuiko, Ya. V. Kalinichenko, M. V. Popov. Boundary value problems for systems of non-degenerate difference-algebraic equations	26
V. Baranets, N. Kizilova. Mathematical modeling of particle aggregation and sedimentation in the inclined tubes	42
S. M. Chuiko, O. V. Nesmelova. On the reduction of a nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary-value problem to a noncritical case	60

СОДЕРЖАНИЕ

Душкин В. Д., Жученко С. В., Костенко О. В. Дискретная математическая модель процесса рассеяния волн периодической импедансной решёткой	4
Чуйко С. М., Калиниченко Я. В., Попов М. В. Краевые задачи для систем невырожденных разностно-алгебраических уравнений	26
Баранец В. А., Кизилова Н. Н. Математическое моделирование агрегации и оседания частиц в наклонных трубках	42
Чуйко С. М., Несмелова О. В. О приведении нелинейной нетеровой дифференциально-алгебраической краевой задачи к некритическому случаю	60

Discrete mathematical model of the scattering process of E-polarized wave on a periodic impedance grating

V.D. Dushkin¹, S.V. Zhuchenko², O.V. Kostenko³

¹*National Academy of the National Guard of Ukraine,
Zakhystnykiv Ukrainy Sq. 3, Kharkiv, 61001, Ukraine*

²*V. N. Karazin Kharkiv National University,
Svobody Sq. 4, Kharkiv, 61022, Ukraine*

³*B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering,
Nauky Ave., 47, Kharkiv, 61103, Ukraine*

dushkinvd@gmail.com, stanislavzhuchenko@ukr.net, alexvladkost@gmail.com

It is considered the discrete mathematical models which describe the interaction process of the E-polarized wave and periodic system of impedance tapes. It is shown that the discrete model for various values of the discretization parameter is equivalent to the system of singular integral equations. Calculations were performed for the proposed model and for the model based on the hypersingular equations. The obtaining results showed the closeness of the field characteristics.

Keywords: mathematical model; impedance structures; numerical experiment.

Душкін В.Д., Жученко С.В., Костенко О.В. **Дискретна математична модель процесу розсіювання хвиль періодичною імпедансною ґраткою.** У роботі розглянуто дискретні математичні моделі, які описують процес взаємодії Е-поляризованої хвилі з періодичною системою імпедансних стрічок. Дискретна модель при різних значеннях параметра дискретизації еквівалентна відповідній системі сингулярних інтегральних рівнянь. Обчислення проводилися на базі запропонованої моделі та на основі моделі, що спирається на гіперсингулярні рівняння.

Ключові слова: математична модель; імпедансні структури; чисельний експеримент.

Душкин В.Д., Жученко С.В., Костенко А.В. **Дискретная математическая модель процесса рассеяния волн периодической импедансной решёткой.** В работе рассмотрены дискретные математические модели, описывающие процесс взаимодействия Е-поляризованной волны с периодической системой импедансных лент. Показано, что дискретная модель при различных значениях параметра дискретизации эквивалентна соответствующим системам сингулярных интегральных уравнений. Вычисления проводились на основе предлагаемой модели и модели, основанной на гиперсингулярных уравнениях. Полученные результаты оказались близки.

Ключевые слова: математическая модель; импедансные структуры; численный эксперимент.

2010 Mathematics Subject Classification: 41A55.

1. Origins of research.

Shchukin-Leontovich impedance boundary conditions are widely used to describe the interaction processes of electromagnetic waves and different kind of non-PEC structures [1] – [8]. In this case, the 3D-problem for Maxwell's equations reduces to two 2D-problems. They are boundary value problems for the Helmholtz equation with third boundary conditions. In order to find an approximate solution to these problems, we use the two-stage algorithm of professor Yu. V. Gandel. At the first step, we find systems of integral equations that are equivalent to the original boundary value problem. We are using the method of parametric representations of integral operators [9] – [11] on this step. At the second step, a discrete mathematical model of the mentioned problem is built. The discrete singularities method [12], [13] was used to obtain it. This approach has shown its effectiveness in solving various problems [14] – [36]. In [13], [36], the method of reducing the initial boundary-value problem to a system consisting of singular equations of the first kind and Fredholm integral equations of the second kind is considered. We propose a discrete mathematical model of the problem under study based on the system of integral equations mentioned above. It is shown that a one-to-one correspondence exists between discrete models for various values of the discretization parameter and systems of approximating integral equations of the problem. By solving this system, the approximate values of the main field characteristics are determined. The method of parametric representations of integral operators makes it possible to obtain systems of integral equations of other types [29], [30]. In particular, the original boundary-value problem was reduced to a system consisting of hypersingular integral equations of the second kind and the Fredholm integral equation of the second kind [32], [37]. Therefore, it is a good base of interest for a comparative computer experiment.

2. Formulation of the problem

Let $T = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \bigcup_{q=1}^M T_{n,q}$ be a system of non-PEC tapes

$$T_{n,q} = \{(x', y', z') \in R^3 | x' \in R, y' = (\alpha'_q + 2nl', \beta'_q + 2nl'), z' = 0\}. \quad (1)$$

E-polarized wave

$$\vec{E}^{(initial)} = (E_0, 0, 0), \quad \vec{H}^{(initial)} = \left(0, \frac{1}{i\omega\mu\mu_0} \cdot \frac{\partial E_0}{\partial z'}, -\frac{1}{i\omega\mu\mu_0} \cdot \frac{\partial E_0}{\partial y'}\right), \quad (2)$$

$$E_0(y', z') = \exp(ik(y' \cdot \sin \varphi - z' \cdot \cos \varphi)) \cdot \exp(-i\omega t) \quad (3)$$

is scattered by this tape system. We consider the problem as formulated in [13] and [36]. This problem amounts to finding a function $E(y', z')$ that corresponds to the x-component of the total field, resulting from waves scattering by tapes.

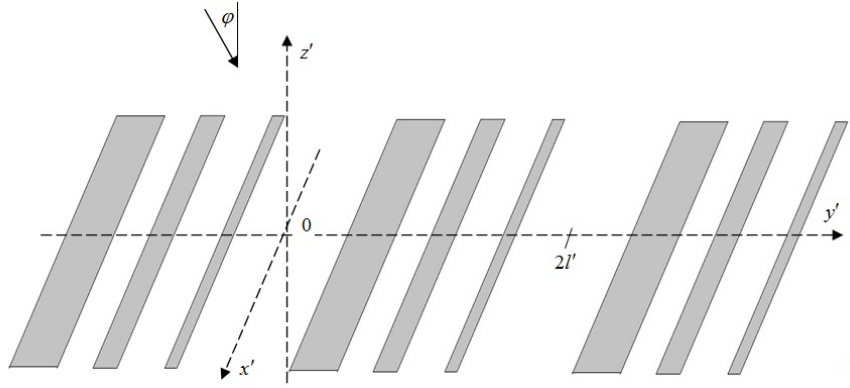


Fig.1 Impedance structure.

It is the solution of the Helmholtz equation:

$$\Delta E + k^2 \cdot E = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (4)$$

in the whole plane without tapes. The total field satisfies

1) Shchukin - Leontovich boundary conditions on tapes:

$$\frac{\partial E}{\partial n'} - h' \cdot E = 0, \quad (y', z') \in T, \quad (5)$$

2) Floquet conditions,

3) Boundedness energy condition in any region of the plane.

Also the difference between total and incident field $E - E_0$ satisfies the Sommerfeld radiation conditions.

2. Systems of integral equations.

Put

$$E(y', z') - E_0(y', z') = \begin{cases} E^+(y', z'), & z' > 0; \\ E^-(y', z'), & z' < 0; \end{cases} \quad (6)$$

where

$$E^+(y', z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^+ \cdot \exp(-\gamma'_n z') \cdot \exp(ip'_n y'), \quad (7)$$

$$E^-(y', z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^- \cdot \exp(\gamma'_n z') \cdot \exp(ip'_n y'), \quad (8)$$

and

$$p'_n = k \cdot \sin \varphi + \frac{\pi n}{l'}, \quad \gamma'_n = \sqrt{(p'_n)^2 - k^2}, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (9)$$

$$\operatorname{Re}(\gamma'_n) \geq 0, \quad \operatorname{Im}(\gamma'_n) \leq 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Hereinafter we use the notation:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{l' \cdot k}{\pi}, \quad y = \frac{\pi}{l'} \cdot y', \quad z = \frac{\pi}{l'} \cdot z', \quad h = \frac{l' \cdot h'}{\pi}; \\ p_n &= \frac{l' \cdot p'_n}{\pi} = \kappa \cdot \sin \varphi + n, \quad \gamma_n = \frac{l' \cdot \gamma'_n}{\pi}, \quad n \in N; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\alpha_q = \frac{\pi}{l'} \cdot \alpha'_q, \quad \beta_q = \frac{\pi}{l'} \cdot \beta'_q, \quad q = 1, \dots, M; \quad (12)$$

$$L = \bigcup_{q=1}^M L_q, \quad L_q = (\alpha_q, \beta_q). \quad (13)$$

From field continuity condition

$$E^+(y, 0) = E^-(y, 0), \quad y \in CL = [0, 2\pi] \setminus L; \quad (14)$$

$$\frac{\partial E^+}{\partial z}(y, 0) = \frac{\partial E^-}{\partial z}(y, 0), \quad y \in CL \quad (15)$$

and the boundary conditions (5) we get:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \cdot (a_n^+ + a_n^-) \cdot \exp(ip_n y) = 0, \quad y \in CL; \quad (16)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\gamma_n + h) \cdot (a_n^+ + a_n^-) \cdot \exp(ip_n y) = -2h \cdot \exp(i\kappa y \sin \varphi), \quad y \in L; \quad (17)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) \cdot \exp(ip_n y) = 0, \quad y \in CL; \quad (18)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\gamma_n + h) \cdot (a_n^+ - a_n^-) \cdot \exp(ip_n y) = -2i\kappa \cos \varphi \cdot \exp(i\kappa y \sin \varphi), \quad y \in L. \quad (19)$$

Acting as in the monograph [13], we define two functions:

$$\begin{aligned} W^+(y) &= \frac{\partial u^-}{\partial z}(y, 0) - \frac{\partial u^+}{\partial z}(y, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n (a_n^+ + a_n^-) \exp(ip_n y), \\ & \quad y \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} W^-(y) &= \frac{\partial u^+}{\partial y}(y, 0) - \frac{\partial u^-}{\partial y}(y, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} ip_n (a_n^+ - a_n^-) \exp(ip_n y), \\ & \quad y \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (21)$$

It implies from (14), (15), that:

$$W^+(y) = 0, W^-(y) = 0, y \in CL; \quad (22)$$

$$\int_{L_q} W^-(t) dt = 0, (q = 1, \dots, M); \quad (23)$$

$$E^+(y, 0) - E^-(y, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) \exp(ip_n y) = \int_{\alpha_q}^y W^-(t) dt. \quad (24)$$

Using the inverse Fourier transform and taking into account (22) – (23) we obtain:

$$\begin{aligned} a_n^+ &= \frac{1}{4\pi\gamma_n} \int_L W^+(t) \cdot \exp(-ip_n t) dt + \\ &+ \frac{1}{4\pi ip_n} \int_L W^-(t) \cdot \exp(-ip_n t) dt, n \in Z; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} a_n^- &= \frac{1}{4\pi\gamma_n} \int_L W^+(t) \cdot \exp(-ip_n t) dt - \\ &- \frac{1}{4\pi ip_n} \int_L W^-(t) \cdot \exp(-ip_n t) dt, n \in Z. \end{aligned} \quad (26)$$

As proposed in [13], we accomplished the conversions to (17) and get the second-kind Fredholm integral equation:

$$\begin{aligned} W^+(y) - \frac{h}{\pi} \int_L \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{y-t}{2} \right| W^+(t) dt + \\ + \frac{h}{\pi} \int_L Q(y, t) W^+(t) dt = -2h \cdot \exp(i\kappa y \sin \varphi), y \in L; \end{aligned} \quad (27)$$

where

$$\begin{aligned} Q(y, t) = \exp(i\kappa \sin \varphi (y-t)) \cdot \left(\frac{1}{2\gamma_0} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\Delta_n^+}{2} \exp(in(y-t)) \right) - \\ - (\exp(i\kappa \sin \varphi (y-t)) - 1) \cdot \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{y-t}{2} \right|; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\Delta_n^+ = \frac{1}{\gamma_n} - \frac{1}{|n|} = O\left(\frac{1}{n^2}\right), n \rightarrow \infty. \quad (29)$$

This equation contains a logarithmic singularity in the kernel. Having applied the method of parametric representations of integral transformations, we obtain a singular integral equation:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2\pi} \int_L \operatorname{ctg} \left(\frac{t-y}{2} \right) W^-(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_L R(y,t) W^-(t) dt + \\
 & + h \cdot \int_{\alpha_1}^y W^-(t) dt = -2i\kappa \cos \varphi \cdot \exp(i\kappa y \sin \varphi), \quad y \in L,
 \end{aligned} \tag{30}$$

with additional conditions:

$$\int_{\alpha_q}^{\beta_q} W^-(t) dt = 0, \quad (q = 1, \dots, M), \tag{31}$$

where

$$\begin{aligned}
 R(y,t) = & \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\Delta_n^-}{2ip_n} \exp(ip_n(y-t)) + \\
 & + \frac{\kappa \cos \varphi}{2} \cdot \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n} - \frac{1}{n} \right) \exp(-ip_n t) - \\
 & - i\kappa \cos \varphi \cdot \frac{\pi-t}{2} \cdot \exp(-i\kappa \sin \varphi \cdot t) - \\
 & - \frac{\exp(i\kappa \sin \varphi (y-t)) - 1}{2} \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{t-y}{2} \right);
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\Delta_n^- = \gamma_n - |n| - \kappa \sin \varphi \cdot \frac{|n|}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty. \tag{33}$$

Making the substitution of y by 0 in (18) and taking into account (25) - (26), we obtain

$$\begin{aligned}
 & a_0^+ - a_0^- = - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \\
 & = -\frac{1}{\pi} \int_L \exp(-i\kappa \sin \varphi \cdot t) \cdot \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p_n} - \frac{1}{n} \right) \exp(-int) \cdot W^-(t) dt + \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\pi-t}{2} \cdot e^{-i\kappa \sin \varphi \cdot t} \cdot W^-(t) dt.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Define the functions:

$$V_q^+(y) = W^+(y) \sqrt{(y - \alpha_q)(\beta_q - y)}, \quad y \in L_q, (1, \dots, M); \quad (35)$$

$$V_q^-(y) = W^-(y) \sqrt{(y - \alpha_q)(\beta_q - y)}, \quad y \in L_q, (1, \dots, M); \quad (36)$$

It implies from the boundedness energy condition that $V_q^+(y) \in C[\alpha_q, \beta_q]$ and $V_q^-(y) \in C[\alpha_q, \beta_q]$, $(q = 1, \dots, M)$.

Define mappings:

$$\begin{aligned} g_q : [-1, 1] &\rightarrow [\alpha_q, \beta_q], \quad g_q(t) = \phi_q \cdot t + \frac{\beta_q + \alpha_q}{2}, \\ \phi_q &= \frac{\beta_q - \alpha_q}{2}, \quad (q = 1, \dots, M), \end{aligned} \quad (37)$$

and notation:

$$\begin{aligned} K_{q,p}^+(\xi, \tau) &= \phi_q \cdot h \left\{ Q(g_q(\xi), g_p(\tau)) - \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{g_p(\tau) - g_q(\xi)}{2} \right| \right. \\ &\quad \left. + \delta_{qp} \cdot \ln |\tau - \xi| \right\}, \quad (q = 1, \dots, M), \quad (p = 1, \dots, M); \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} K_{q,p}^-(\xi, \tau) &= \phi_q \cdot \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{g_p(\tau) - g_q(\xi)}{2} \right) - R(g_q(\xi), g_p(\tau)) \right\} - \frac{\delta_{qp}}{\tau - \xi}, \\ &\quad (q = 1, \dots, M), \quad (p = 1, \dots, M). \end{aligned} \quad (39)$$

$$f_{1,q}(\xi) = -2\phi_q \cdot h \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \exp(i\kappa g_q(\xi) \sin \varphi), \quad (q = 1, \dots, M), \quad (40)$$

$$f_{2,q}(\xi) = 2i\kappa\phi_q \cdot \cos \varphi \cdot \exp(i\kappa g_q(\xi) \sin \varphi), \quad (q = 1, \dots, M). \quad (41)$$

In (38)-(39) symbol δ_{qp} is the Kronecker delta. Taking into account (35), (38) from equation (27) we obtain:

$$\begin{aligned} V_q^+(\xi) &- \frac{h\phi_q}{\pi} \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \int_{-1}^1 \ln |\tau - \xi| \frac{V_q^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{q,p}^+(\xi, \tau) \frac{V_p^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = f_{1,q}(\xi), \\ &\quad |\xi| < 1, \quad (q = 1, \dots, M). \end{aligned} \quad (42)$$

The system of singular integral equations:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\tau - \xi} \frac{V_q^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{q,p}^-(\xi, \tau) \frac{V_p^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} - \\ - h\phi_q \cdot \int_{-1}^{\xi} \frac{V_p^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = f_{2,q}(\xi), \end{aligned} \tag{43}$$

$$|\xi| < 1, (q = 1, \dots, M)$$

with additional conditions:

$$\int_{-1}^1 \frac{V_q^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = 0, (q = 1, \dots, M) \tag{44}$$

is a consequence of the equations (30), (31) and notations (36), (39).

4. The mathematical model of the problem

We denote by $\{t_{1,n,k}\}_{k=1}^n$ the Chebyshev nodes, which are zeros of Chebychev polynomials $T_n(\tau)$ of degree n . Also we consider the collocation points $\{t_{2,n,m}\}_{m=1}^{n-1}$, which are the zeros of Chebychev polynomials of the second kind $U_{n-1}(\tau)$.

As in [38] – [40] we took into consideration the basis (fundamental) polynomials:

$$l_{1,n-1,k}(\tau) = \frac{P_n(\tau)}{P'_n(t_{1,n,k})(\tau - t_{1,n,k})}, \quad k = 1, \dots, n;$$

$$l_{2,n-2,m}(\xi) = \frac{U_{n-1}(\xi)}{U'_{n-1}(t_{2,n,m})(\xi - t_{2,n,m})}, \quad m = 1, \dots, n - 1.$$

We introduce the Lagrange interpolation polynomials of functions and

$$K_{q,p,n}^+(\xi, \tau) = \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n K_{q,p}^+(t_{1,n,m}, t_{1,n,k}) \cdot l_{1,n,m}(\xi) \cdot l_{1,n,k}(\tau), \tag{45}$$

$$q = 1, \dots, M; \quad p = 1, \dots, M;$$

$$K_{q,p,n}^-(\xi, \tau) = \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n K_{q,p}^-(t_{2,n,m}, t_{1,n,k}) \cdot l_{2,n,m}(\xi) \cdot l_{1,n,k}(\tau), \tag{46}$$

$$q = 1, \dots, M; \quad p = 1, \dots, M;$$

$$\begin{aligned}
f_{1,q,n}(\xi) &= \sum_{m=1}^n f_{1,q}(t_{1,n,m}) \cdot l_{1,n,m}(\xi), \\
f_{2,q,n}(\xi) &= \sum_{m=1}^n f_{2,q}(t_{2,n,m}) \cdot l_{2,n,m}(\xi), \\
q &= 1, \dots, M.
\end{aligned} \tag{47}$$

Let us consider the following system of integral equations:

$$\begin{aligned}
V_{q,n}^+(\xi) - \frac{\phi_q \cdot h}{\pi} \cdot \sum_{m=1}^n \sqrt{1 - (t_{2,n,m})^2} \cdot l_{2,n,m}(\xi) \int_{-1}^1 \ln |\tau - t_{2,n,m}| \frac{V_{q,n}^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} \\
+ \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{q,p,n}^+(\xi, \tau) \frac{V_{p,n}^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = f_{1,q,n}(\xi), \\
|\xi| < 1, \quad q = 1, \dots, M;
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\tau - \xi} \cdot \frac{V_{q,n}^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{q,p,n}^-(\xi, \tau) \frac{V_{p,n}^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} - \\
- \phi_q \cdot h \int_{-1}^{\xi} \frac{V_{q,n}^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = f_{2,q,n}(\xi), \\
|\xi| < 1, \quad q = 1, \dots, M;
\end{aligned} \tag{49}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{V_{q,n}^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = 0, \quad q = 1, \dots, M. \tag{50}$$

Designate as $L_{\rho, -1}^2$ the Hilbert spaces of measurable on segment $[-1, 1]$ functions with the inner product

$$(U, V) = \int_{-1}^1 U(\tau) \cdot \bar{V}(\tau) \cdot \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} \tag{51}$$

and norm $\|V\| = \sqrt{(V, V)}$.

From the results of the work [38] – [40] we obtain

Proposition 1 *Let N - sufficient integer number. If $n > N$ the following statement holds true.*

- 1) *The systems of equations (48) and (49)-(50) have a unique solution.*
- 2) *The functions $V_{q,n}^-(\tau)$ and $V_{q,n}^+(\tau)$ are the polynomials of degree $n-1$.*
- 3) *The sequence $\{V_{q,n}^-\}_{n=N+1}^\infty$ of solutions of IE system (48) converged to the exact solution of the problem (42) in the norm of space $L_{\rho, -1}^2$.*
- 4) *The sequence of solutions of singular equation system (49)-(50) converged to the exact solution of the problem (43)-(44) in the norm of space $L_{\rho, -1}^2$.*

It follows from Proposition 1 that, as a result of substituting the functions $V_{q,n}^+(\tau)$ into the left-hand side of equations (48) we obtain a polynomial of degree $n-1$. Also, the result of substituting the polynomial $V_{q,n}^-(\tau)$ into the left-hand side of equation (49) is a polynomial of degree $n-2$. On the right side of equations (48) and (49) are polynomials of the same degrees. From the uniqueness of determining a polynomial of degree n from its values at $n+1$ point, there follows a one-to-one correspondence of problems (48) and (49)-(50) to the system of equations:

$$\begin{aligned}
 V_{q,n}^+(\xi_{1,n,r}) - \frac{\phi_q \cdot h}{\pi} \cdot \sum_{m=1}^n \sqrt{1 - (t_{2,n,m})^2} \cdot l_{2,n,m}(\xi_{1,n,r}) \cdot \int_{-1}^1 \ln |\tau - t_{2,n,m}| \cdot \frac{V_{q,n}^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} \\
 + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{q,p,n}^+(\xi_{1,n,r}, \tau) \frac{V_{p,n}^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = f_{1,q,n}(\xi_{1,n,r}), \quad (52) \\
 r = 1, \dots, n, q = 1, \dots, M;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\tau - \xi_{2,n,s}} \cdot \frac{V_{q,n}^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{q,p,n}^-(\xi_{2,n,s}, \tau) \frac{V_{p,n}^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} - \\
 - \phi_q \cdot h \int_{-1}^{\xi_{2,n,s}} \frac{V_{q,n}^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = f_{2,q,n}(\xi_{2,n,s}), \quad (53) \\
 s = 1, \dots, n - 1, q = 1, \dots, M;
 \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{V_{q,n}^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = 0, \quad q = 1, \dots, M; \quad (54)$$

To discretize equations (52) - (54), Hermite's formulas and quadrature formulas of interpolation type [13] are used:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\tau - t_{2,n,p}} \cdot \frac{V_{p,n}^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{V_{p,n}^-(t_{1,n,k})}{t_{1,n,k} - t_{2,n,p}}, \quad p = 1, \dots, n - 1; \quad (55)$$

$$\int_{-1}^1 \ln |\xi - \tau| \cdot \frac{V_{q,n}^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_{q,n}^+(t_{1,n,k}) \cdot \left[\ln 2 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} T_m(\xi) \frac{T_m(t_{1,n,k})}{m} \right], \quad |\xi| < 1; \quad (56)$$

$$\int_{-1}^{\xi} \frac{V_{q,n}^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_{q,n}^-(t_{1,n,k}) \cdot$$

$$\cdot \left[\arccos \xi - \pi + \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \sum_{m=1}^{n-1} U_{m-1}(\xi) \cdot \frac{T_m(t_{1,n,k})}{m} \right], \quad |\xi| < 1; \quad (57)$$

Note that all formulas (55) - (57) are exact for polynomials of degree $n-1$.

Also, as a result of discretization of the integral equations (52), (53) and (54), we obtain a system of linear algebraic equations with $q \cdot n$ unknowns

$$\vartheta_{q,n,m}^- = V_{q,n}^-(t_{1,n,m}), \quad q = 1, \dots, M, \quad m = 1, \dots, n. \quad (58)$$

$$\vartheta_{q,n,m}^+ = V_{q,n}^+(t_{1,n,m}), \quad q = 1, \dots, M, \quad m = 1, \dots, n. \quad (59)$$

The existence and uniqueness of the solution of linear systems is a consequence of the existence and uniqueness of the solution of problems (52) - (54) and their one-to-one correspondence with the systems of integral equations (48)-(50).

By solving these linear systems, we obtain approximate solutions to the systems of integral equations (42) and (43)-(44) by the formulas:

$$V_{q,n}^-(\tau) = \sum_{m=1}^n \vartheta_{q,n,m}^- \cdot l_{1,n,m}(\tau), \quad (60)$$

$$V_{q,n}^+(\tau) = \sum_{m=1}^n \vartheta_{q,n,m}^+ \cdot l_{1,n,m}(\tau), \quad q = 1, \dots, M. \quad (61)$$

5. Numerical results.

We studied the interaction of the E-polarized wave and the grating. The case of normal wave incidence was considered. The calculations were carried out by two discrete mathematical models. The first model is described in paragraph 4 of this paper. The second model is based on the discretization of hypersingular integral equations of the second kind. In paper [37] the justification algorithm for finding a numerical solution of these equations is given.

Table 1. Absolute values of the Fourier coefficients.

κ	The results obtained using singular equations				The results obtained using hypersingular equations			
	$ a_0^- $	$ a_1^- $	$ a_2^- $	$ a_3^- $	$ a_0^- $	$ a_1^- $	$ a_2^- $	$ a_3^- $
0,1	0,999	0,014	0,030	0,0025	0,999	0,013	0,028	0,0023
0,3	0,99	0,042	0,087	0,0069	0,99	0,041	0,085	0,0066
0,5	0,972	0,073	0,144	0,0096	0,973	0,071	0,142	0,0096
0,7	0,946	0,111	0,202	0,0095	0,946	0,109	0,2	0,0095
0,9	0,901	0,176	0,264	0,0017	0,904	0,172	0,262	0,0006
1,1	0,795	0,261	0,305	0,057	0,797	0,263	0,304	0,056
1,3	0,753	0,227	0,345	0,073	0,755	0,228	0,343	0,073
1,5	0,700	0,209	0,397	0,088	0,703	0,209	0,395	0,087
1,7	0,623	0,194	0,461	0,1	0,627	0,194	0,458	0,1
1,9	0,490	0,179	0,541	0,088	0,494	0,18	0,542	0,11
2,1	0,322	0,124	0,504	0,091	0,318	0,125	0,506	0,092
2,3	0,377	0,099	0,451	0,088	0,374	0,099	0,451	0,088
2,5	0,406	0,083	0,427	0,091	0,403	0,083	0,426	0,09
2,7	0,424	0,07	0,412	0,096	0,422	0,07	0,411	0,095
2,9	0,436	0,056	0,402	0,106	0,434	0,056	0,401	0,105
3,1	0,440	0,037	0,39	0,112	0,438	0,037	0,389	0,111
3,3	0,448	0,041	0,380	0,113	0,446	0,04	0,379	0,109
3,5	0,455	0,045	0,372	0,110	0,454	0,044	0,372	0,111
3,7	0,462	0,05	0,365	0,118	0,461	0,05	0,364	0,117
3,9	0,47	0,058	0,356	0,129	0,468	0,058	0,355	0,128
4,1	0,465	0,076	0,326	0,157	0,464	0,076	0,325	0,157
4,3	0,455	0,081	0,318	0,161	0,454	0,081	0,316	0,161
4,5	0,448	0,085	0,313	0,162	0,447	0,085	0,311	0,163
4,7	0,444	0,088	0,310	0,164	0,442	0,088	0,308	0,164
4,9	0,440	0,093	0,308	0,167	0,439	0,092	0,306	0,167
5,1	0,458	0,094	0,309	0,143	0,456	0,094	0,308	0,144
5,3	0,464	0,091	0,309	0,127	0,463	0,091	0,308	0,127
5,5	0,466	0,089	0,309	0,117	0,464	0,089	0,307	0,117
5,7	0,465	0,087	0,309	0,11	0,463	0,086	0,307	0,11
5,9	0,460	0,084	0,309	0,102	0,458	0,083	0,307	0,102
6,1	0,458	0,074	0,313	0,089	0,456	0,074	0,311	0,088

In calculations we take h' equals:

$$h' = -\frac{1-i}{2K} \cdot \sqrt{k}, \quad (62)$$

where $K = 0.0001$.

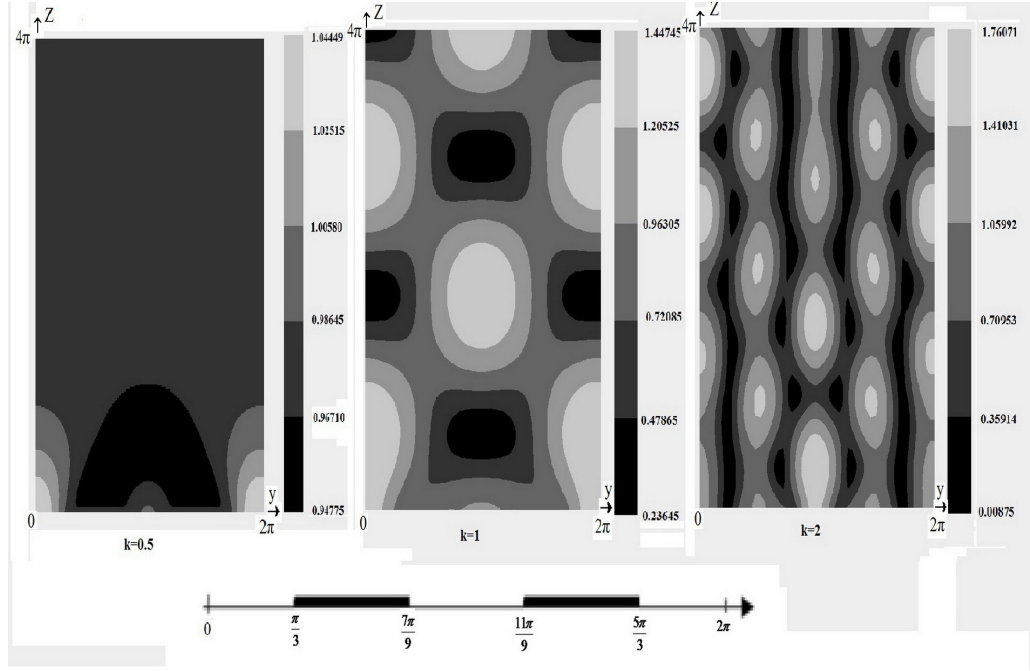


Fig.2 Map of the absolute value of the scattered field in the domain above the two-elements periodic grating.

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \beta_1 = \frac{7\pi}{9}, \quad \alpha_2 = \frac{11\pi}{9}, \quad \beta_2 = \frac{5\pi}{3}.$$

On figure 2 there are the maps of the absolute value of the scattered field $|E^+|$ in the domain above a two-element periodic structure. The table 1 shows some parameter values in this case obtained using singular and hypersingular equations. The number of interpolation nodes in this case is twenty on tape.

We considered next structure. In the middle of the tape, lying in half the period, a slot 2π wide was made. The graphs on figure 3 show the change in the field characteristics depending on the slot width. In the figures you can see the absolute values of the Fourier coefficients and values:

$$\|a^-\|_N = \sqrt{\sum_{n=-N}^N |a_n^-|^2}. \quad (63)$$

We also studied the similarities and differences in the fields created by periodic lattices and lattices consisting of a large finite number of repeating elements. For example, at the top of figure 4 you see a colored map of the field in the domain above periodic structure. In this case one tape lies on half the period. Below there is a map of the scattered field above the central part of the non-periodic structure. This structure consists of fifteen equal tapes. The distance between the tapes and their width are the same and equal to π .

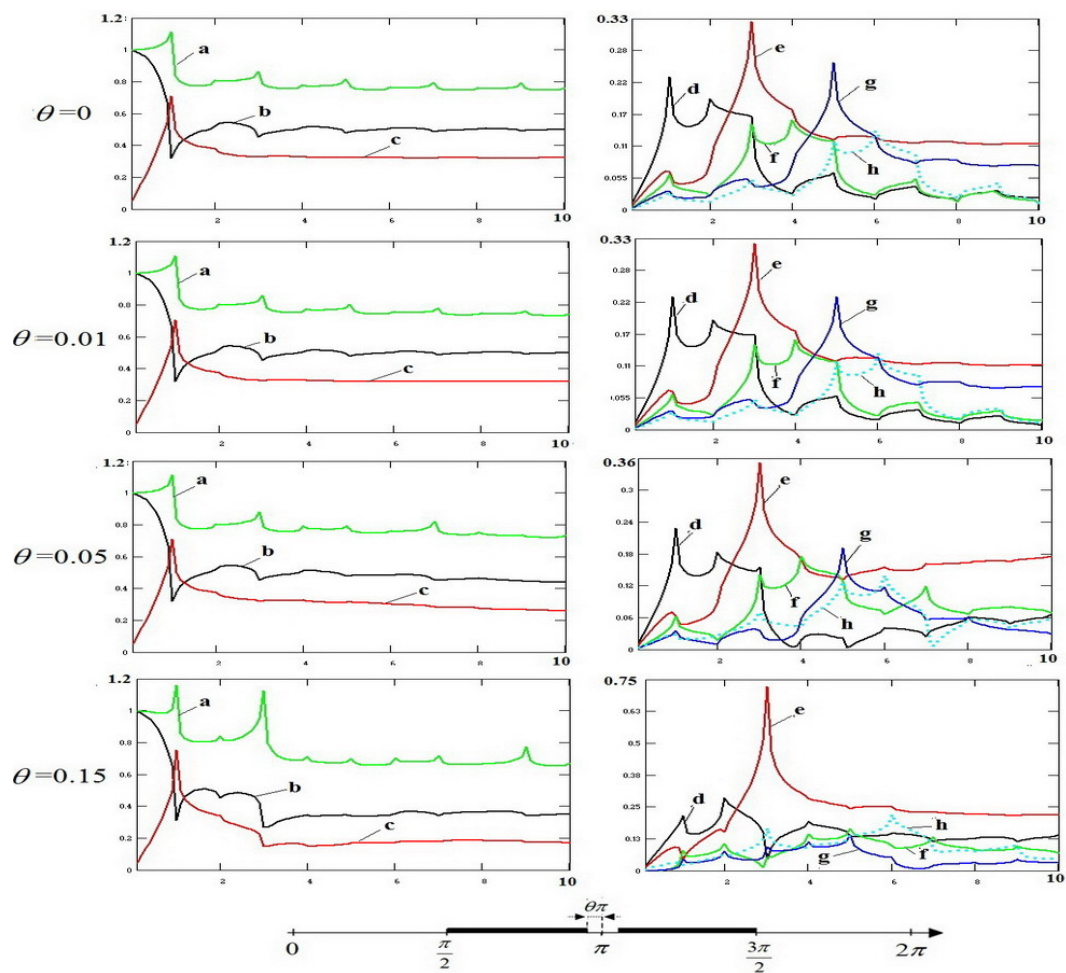


Fig.3 Tape with slot $2\pi\theta$ wide on the period.

a) $\|a^+\|_{10}$, b) $|a_0^+|$, c) $|a_1^+|$, d) $|a_2^+|$, f) $|a_3^+|$, g) $|a_4^+|$, h) $|a_5^+|$.

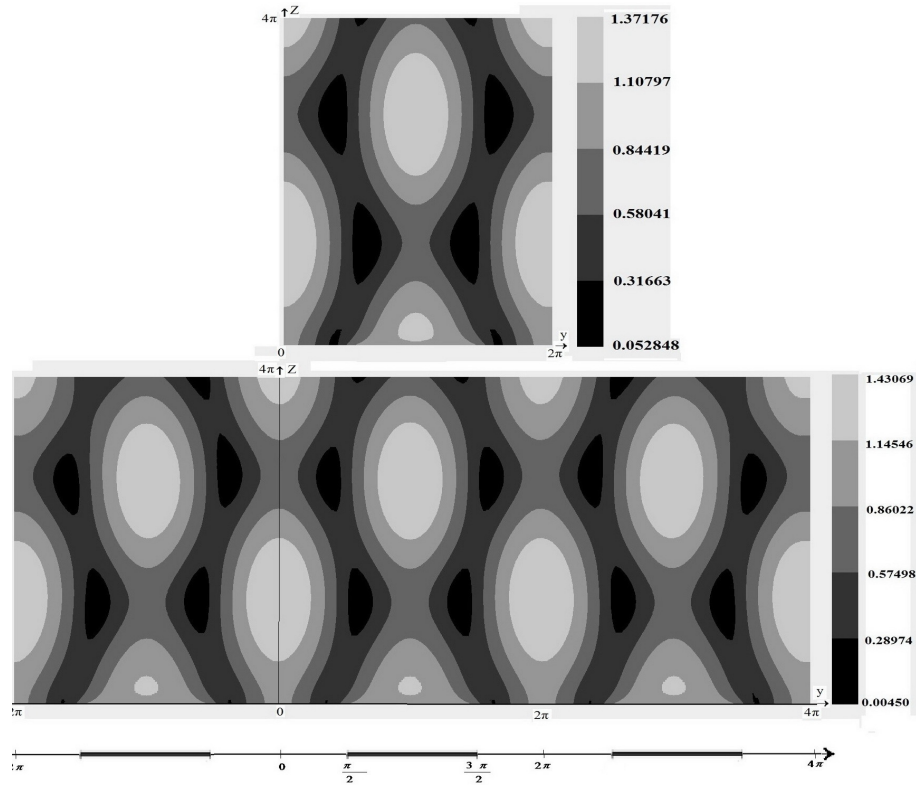


Fig.4 Map of the absolute value of the scattered field in periodic and non-periodic case, $\kappa = 1.1$

On fig. 5-6 we consider a five-element periodic structure. On the period, four tapes have the same length, and the fifth tape has a defect on the right. You can see the field characteristics for some values of theta. Graphs on figure 4 show the field characteristics for some values of theta. On fig. 5 there are colored maps of the scattered field in the domain above this structure.

6. Conclusions and directions for further research.

The results of the performed numerical experiments showed are in a good agreement of the obtained numerical results with the results obtained using hypersingular integral equations. The performed experiment is a basis for the numerical investigation of more complex impedance structures. These studies are related to the work carried out at the Department of Applied Mathematics of the School of Mathematics and Informatics of V. N. Karazin Kharkiv National University for topic (017U004831) "Modeling the dynamics of complex systems in order to identify problem situations". Publication contains some results based on a research provided by grant support of the State Fund for Fundamental Research (project F-83).

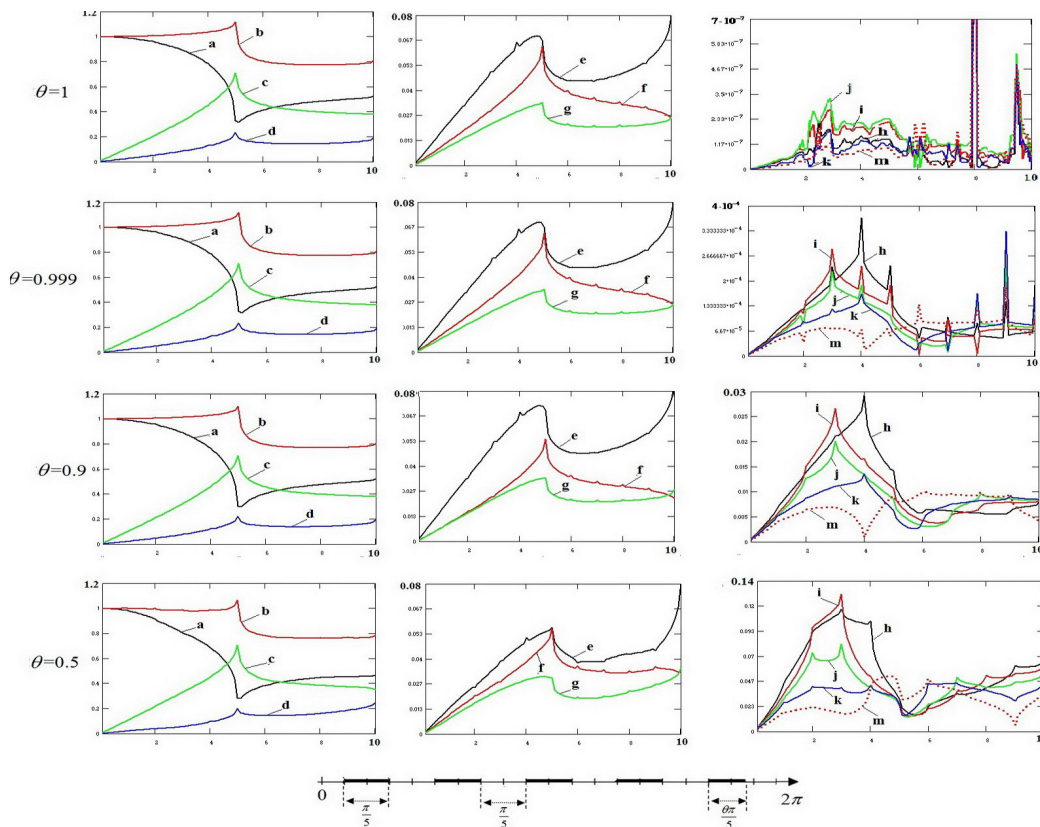


Fig. 5 Amplitude transmission characteristics of five elements gratings

- a) $|a_0^-|$, b) $\|a_{25}^-\|$, c) $|a_5^-|$, d) $|a_{10}^-|$, e) $|a_{15}^-|$, f) $|a_{20}^-|$, g) $|a_{25}^-|$,
 h) $|a_1^-|$, i) $|a_2^-|$, j) $|a_3^-|$, k) $|a_4^-|$, m) $|a_6^-|$.

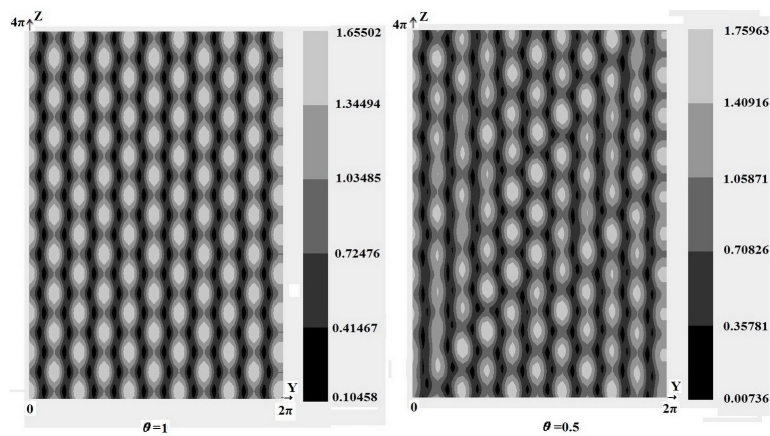



Fig. 6 Map of the absolute value of the scattered field in the domain above the five-elements periodic grating.

ORCID ID

V. D. Dushkin  <https://orcid.org/0000-0002-5143-7945>

S. V. Zhuchenko  <https://orcid.org/0000-0002-1946-7044>

O. V. Kostenko  <https://orcid.org/0000-0002-9471-8894>

REFERENCES

1. A. S. Il'insky, A. Ja. Slepjan, G. Ja. Slepjan, Propagation, diffraction and dissipation of electromagnetic waves. 1993. London (UK): The IEE and Peter Peregrinous Ltd., Electromagnetic Waves, Ser. 36. 275 p.
2. O. O. Bulatsyk, B. Z. Katsenelenbaum, Yu. P. Topolyuk, N. N. Voitovich. Phase Optimization Problems: Applications in Wave Field Theory. 2010. Hoboken, NJ: Wiley-VCH, Weinheim, 321 p.
3. T. L. Zinenko, A. I. Nosich. Wave Scattering and Absorption by Flat Gratings of Impedance Strips, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, - 2006. - V.54. - P. 2088-2095.
4. V. F. Kravchenko. The electrodynamics of superconducting structures. The theory, algorithms and computational methods, 2006. Fizmatlit, Moscow, 280 p.
5. Yu. Penkin, V. Katrych, M. Nesterenko, S. Berdnik. Coupling of Two Rectangular Waveguides Through a Slot With an Impedance Membrane, VII th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Kyiv, Ukraine, - 2018. - P. 140-143.
6. G. I. Koshovy. Mathematical models of acoustic wave scattering by impedance strip, Proceedings of the XXII-nd International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2017), - 2017. - P. 71-74.
7. Yu. V. Gandel', V.F. Kravchenko, V.I. Pustovoi. Scattering of electromagnetic waves by a thin superconducting band, Doklady Math, - 1996. - 54. - no. 3. - P. 959-961.
8. Yu. V. Gandel, V. F. Kravchenko, N. N. Morozova. Electromagnetic wave diffraction on a lattice of thin superconducting band, Electromagnetic Waves and Electronic Systems, - 1997. - 2, no. 1. - P. 4-15.
9. Yu.V. Gandel. Parametric Representations of Integral and Pseudodifferential Operators in diffraction Problems, Proceedings of the X International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Dnipropetrovsk, Ukraine, 2004. - P. 57-62.

10. Yu. V. Gandel. Boundary-Value Problems for the Helmholtz Equation and their Discrete Mathematical Models, Journal of Mathematical Sciences, Springer Science+Business Media, Inc., - 2010. - Vol. 171, no. 1. - P. 74-88.
11. Y.V. Gandel, V.D. Dushkin. The method of parametric representations of integral and pseudo-differential operators in diffraction problems on electrodynamic structures, Proceedings of the International Conference Days on Diffraction DD, St. Petersburg, - 2012. - P. 76-81.
12. I. K. Lifanov. Singular integral equations and discrete vortices. 1996. - Utrecht (the Netherlands): VSP VB, 475 p.
13. Yu.V. Gandel, V.D. Dushkin. Mathematical models of two-dimensional diffraction problems: Singular integral equations and numerical methods of discrete singularities method. 2012. Academy of IT of the MIA of Ukraine, Kharkiv, - 544 p. (in Russian).
14. V.D. Dushkin. Mathematical models of two-dimensional diffraction problems, Proceedings of the VI th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET'96), Lviv, 1996. V. 1, - P. 483-486.
15. V.A. Shcherbina, G.I. Zaginaylov, S.V. Zhuchenko. Numerical theory of excitation of axisymmetric open-ended finite length slow wave structure on the basis of the boundary singular integral equation method, VII th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET'98), Kharkov, Ukraine, - 1998. - V. 1, - P. 263-265.
16. G.I. Zaginaylov, V.D. Dushkin, V. Korostyshevski, P.V. Turbin. Modeling the beam excitation of planar waveguide with rectangular irregularities, Proceedings of the VII th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET'98); Kharkov, Ukraine, - 1998 - V. 1, - P. 409-410.
17. Yu.V. Gandel, G.L. Sidel'nikov. The method of integral equations in the third boundary value problem of diffraction on a bounded grating over a flat screen, - Differential Equations, - 1999.- 35, no. 9. - P. 1169-1175.
18. V.D. Dushkin. Solution of a two-dimensional diffraction problem with boundary conditions of the third kind on the lateral surface of waveguide channels, Reports of the NAS of Ukraine, - 1999.- no. 9 - P. 11-15. (in Russian).
19. Y.V. Gandel, V.D. Dushkin, G.I. Zaginaylov. New numerical-analytical approach in the theory of excitation of super dimensional electro dynamical structures Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika), - 2000.- V. 54, 7. - P. 36-48.

20. V.D. Dushkin. Application of the singular integral transform method to the solution of the two-dimensional problem of diffraction of electromagnetic waves from a superconducting layer with rectangular waveguide channels, *Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika)*, - 2001. - V. 56, Issue **2**. - P. 78-85.
21. A. A. Nosich, Y. V. Gandel. Numerical analysis of quasioptical multi-reflector antennas in 2-D with the method of discrete singularities, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, - 2007. - V. 57, no. **2**. - P. 399-406.
22. Yu.V. Gandel, V.D. Dushkin. Mathematical models based on SIE 2D diffraction problems on reflective multilayer periodic structures, Part I. The case of E-polarization, *Scientific statements. Series: Mathematics. Physics. Belgorod State National Research University*, - 2011.- V. 5 (100), **2**. - P. 5-16. (in Russian).
23. V.S. Bulygin, A.I. Nosich, Y.V. Gandel. Nystrom-type method in three-dimensional electromagnetic diffraction by a finite PEC rotationally symmetric surface, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, - 2012. - **60** (10). - P. 4710-4718.
24. S.V. Zhuchenko. Numerical model diffraction of the plane electromagnetic wave onto axiallysymmetric parabolic reflector, *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, Series "Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems*- 2013.- Issue 22, no. **1063** - P. 63-71. (in Russian).
25. S.V. Zhuchenko. Discrete mathematical model of electromagnetic wave 3D diffraction on axially symmetric reflector, *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, Series "Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems*- 2013. - Issue 23, no. **1089** - P. 50-68. (in Russian).
26. K. V. Nesvit. Scattering and Diffraction of TM Modes on a Grating Consisting of a Finite Number of Pre-Fractal Thin Impedance Strips, *Proceedings of the 43rd European Microwave Conference (EuMC)*. - Nuremberg, Germany, - 6-11 October 2013. - P. 1143-1146.
27. V.D. Dushkin. Mathematical Models of Plane Wave Scattering on Multilayer Impedance Structures, *Visnyk of the Lviv University. Series "Applied Mathematics and Computer Science* - 2013. - **20**. - P. 69-76.
28. Y.V. Gandel, V.D. Dushkin. The boundary integral equations of the third boundary-value problem for the Helmholtz equation in the R_+^2 with plane-parallel slits, *Reports of the NAS of Ukraine*, - 2014. - no. **8** - P. 14-19.

29. K. V. Nesvit. Scattering and Propagation of the TE/TM Waves on Pre-Fractal Impedance Grating in Numerical Results, Proceedings of 8th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP), - Hague, Netherlands, 6-11 April 2014. - P. 3349- 3353.
30. O. V. Kostenko. Mathematical model of wave scattering by an impedance grating, Cybernetics and systems analysis, - 2015. - V. 51, no. 3. - P. 344-360.
31. S.V. Dukhopelnikov. Inhomogeneities in the antenna cavity and the diffractive properties of antennas of a special form Numerical analysis, Part 1, Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, Series "Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems - 2016. - 32. - P. 25-34.
32. O. V. Kostenko. A numerical method for solving a system of hypersingular integral equations of the second kind, Cybernetics and systems analysis, - 2016. -V. 52, no. 3. P. 394-407.
33. Yu. V. Gandel, V. D. Dushkin. Mathematical Model of Scattering of Polarized Waves on Impedance Strips Located on a Screened Dielectric Layer, Journal of Mathematical Sciences, Springer US, - 2016. - P. 156-166.
34. S. V. Dukhopelnykov. Control of backscattering of H-polarized plane wave by a circular dielectric rod with partial graphene cover, Proc. Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2018), Tbilisi, - 2018. - P. 51-54.
35. S. V. Dukhopelnykov, R Sauleau, M Garcia-Vigueras, A.I. Nosich. "Combined plasmon-resonance and photonic-jet effect in the THz wave scattering by dielectric rod decorated with graphene strip, J. Appl. Phys. - 2019. - V. 126, no. 2 - 023104.
36. V.D. Dushkin, S.V. Zhuchenko, O.V. Kostenko. Numerical analysis of wave scattering by periodic systems of impedance tapes, Proc. Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2019), Lviv, - 2019.- p. 112-116.
37. O. V. Kostenko. Numerical method for the solution of a hypersingular integral equation of a second kind, Ukrainian mathematical journal, - 2014. - V. 65, no. 9. - P. 1373-1383.
38. V.D. Dushkin. The Justification of Numerical Solution of Boundary Integral Equations of Wave Scattering Problems on Impedance Lattice, Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University, Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics - 2014. - 69. - P. 20-28.
39. Yu. V. Gandel ,V.D. Dushkin. The Approximate Method for Solving the Boundary Integral Equations of the Problem of Wave Scattering by

Superconducting Lattice, American Journal of Applied Mathematics and Statistics, Science and Education Publishing, - 2014. - **2.6**. - P. 369-375

40. V. D. Dushkin. Approximate solving of the third boundary value problems for Helmholtz equations in the plane with parallel cuts, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom., - 2017. - **13:3**. - P. 254-267.

Душкін В.Д., Жученко С.В., Костенко О.В. **Дискретна математична модель процесу розсіювання хвиль періодичною імпедансною ґраткою.** У статті розглядається спосіб чисельного моделювання процесу розсіювання хвиль періодичною імпедансною ґраткою. У разі гармонійної залежності поля від часу і однорідності структури уздовж деякої осі тривимірна задача зводиться до розгляду двох двовимірних задач для компонент Е-поляризованої і Н-поляризованої хвилі. Шукана єдина ненульова компонента електричного поля, створеного падаючою Е-поляризованою хвилею, є рішенням крайової задачі для рівняння Гельмгольца з граничними умовами Робена. З фізичної постановки задачі випливає, що її рішення повинні задовольняти умові квазіперіодичності Флоке, умовою скінченості енергії в будь-якій обмеженій області площини. Також різниця повного і падаючого поля повинна задовольняти умові випромінювання Зоммерфельда. Слідуючи ідеям робіт Ю.В. Ганделя, за допомогою методу параметричних уявлень інтегральних операторів крайова задача зводиться до двох систем інтегральних рівнянь. Перша система складається з сингулярних рівнянь першого роду з додатковими інтегральними умовами. Друга система складається з граничних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з логарифмічною особливістю в підінтегральній функції. Був проведений чисельний експеримент для випадків різного розташування стрічок. Обчислення проводилися для моделі на основі сингулярних рівнянь і моделі на основі гіперсингулярних рівнянь. Вони показали близькість отриманих результатів у діапазоні досліджуваних параметрів.

Ключові слова: математична модель; імпедансні структури; чисельний експеримент.

V.D. Dushkin, S.V. Zhuchenko, O.V. Kostenko. **Discrete mathematical model of the scattering process of E-polarized wave on a periodic impedance grating.** The method of numerical modeling of wave scattering by periodic impedance grating is considered. In the case of a harmonic dependence of the field on time and the uniformity of the structure along a certain axis, the three-dimensional problem reduces to considering of two 2D problems for the components of the E-polarized and H-polarized waves. The single nonzero component of the electric field created by the incident E-polarized wave is the solution of the boundary value problem for the Helmholtz equation with Robin boundary conditions. It follows from the physical formulation of the problem that its solutions satisfy the Floquet quasiperiodicity condition, the condition of finiteness of energy in any bounded region of the plane. Also, the difference between the total and incident fields satisfies the Sommerfeld radiation condition. Following the ideas of the works of Yu.V. Gandel, using the method of parametric representations of integral operators, the boundary-value problem reduces to two systems of integral equations. The first one is the system of singular equations of the first kind with additional integral conditions. The second system consists of the Fredholm boundary integral equations of the second kind with a logarithmic singularity in the integrand. A discrete model for various values of the discretization parameter is equivalent to systems of singular integral equations. By solving these equations, approximate values of the main field characteristics are determined. The method of parametric representations of integral operators makes it possible to obtain

systems of integral equations of other types. In particular, the initial boundary-value problem reduces to a system consisting of hypersingular integral equations of the second kind and the Fredholm integral equation of the second kind. A numerical experiment was conducted for cases of different location of tapes. Calculations were performed for the proposed model and the model based on hypersingular equations. They showed the closeness of the obtained results in a wide range of parameters studied.

Keywords: mathematical model; impedance structures; numerical experiment.

Article history: Received: 16 April 2019; Final form: 20 November 2019;

Accepted: 22 November 2019.

Boundary value problems for systems of non-degenerate difference-algebraic equations

S.M. Chuiko, Ya.V. Kalinichenko, N.V. Popov

*Donbass State Pedagogical University, Donetsk region,
Slavyansk, st. General Batyuk, 19, 84 116, Ukraine
chujko-slav@ukr.net, kalinichenkoddpu@ukr.net, ax.nikita@gmail.com*

The conditions of existence and the construction of solutions of Cauchy problem for difference-algebraic system are determined. The conditions of existence and the construction of solutions of a linear Noetherian difference-algebraic boundary-value problem are determined. An original classification and a single scheme of construction of the solutions of difference-algebraic equations are proposed.

Keywords: boundary-value problems, difference-algebraic equations, pseudoinverse matrices.

Чуйко С.М., Калініченко Я.В., Попов М.В. **Крайові задачі для систем невідроджених різницево-алгебраїчних рівнянь.** Знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна задачі Коші для різницево-алгебраїчної системи. Знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна для лінійної нетерової різницево-алгебраїчної крайової задачі. Запропоновано оригінальну класифікацію критичних і некритичних випадків для лінійних різницево-алгебраїчних крайових задач.

Ключові слова: крайові задачі, різницево-алгебраїчні рівняння, псевдообернена матриця.

Чуйко С.М., Калиниченко Я.В., Попов Н.В. **Краевые задачи для систем невырожденных разностно-алгебраических уравнений.** Найдены условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина задачи Коши для разностно-алгебраической системы. Найдены условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина для линейной нетеровой разностно-алгебраической краевой задачи. Предложена оригинальная классификация критических и некритических случаев для линейных разностно-алгебраических краевых задач.

Ключевые слова: краевые задачи, разностно-алгебраические уравнения, псевдообратные матрицы.

2010 Mathematics Subject Classification: 15A24, 34B15, 34C25.

Introduction

The relevance of the study of solvability conditions, as well as finding solutions of linear Noetherian difference-algebraic boundary-value problems is associated

with the widespread use of difference-algebraic boundary-value problems obtained by linearization of nonlinear Noetherian boundary-value problems for systems of ordinary differential and difference equations. The relevance of studying Noetherian boundary value problems in critical cases, in turn, is associated with numerous applications in electronics, mechanics, the theory of motion stability, biology and radio engineering, and the theory of nonlinear oscillations.

In part 1 the conditions of existence and the construction of solutions of Cauchy problem for linear nondegenerate difference-algebraic system are determined. In part 2 the conditions of existence and the construction of solutions of a linear Noetherian difference-algebraic boundary-value problem are determined. In part 3 the conditions of reduction of a difference-algebraic boundary value problem to a non-critical case are determined. The proposed conditions of solvability, as well as the scheme of finding solutions of linear Noetherian difference-algebraic boundary value problems are illustrated in detail in the examples.

1. Nondegenerate systems of linear difference-algebraic equations

Consider the problem of finding bounded solutions [1, 1]

$$z(k) \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \Omega := \{0, 1, 2, \dots, \omega\}$$

of the system of linear algebraic difference equations

$$A(k)z(k+1) = B(k)z(k) + f(k); \quad (1)$$

here $A(k)$, $B(k) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ are assumed, generally speaking, rectangular: $m \neq n$ matrices and $f(k)$ is real column vector. The matrix $A(k)$ is assumed rectangular or square but singular.

The problem of finding bounded solutions $z(k)$ of boundary value problem for a linear nondegenerate system of first-order difference equations

$$z(k+1) = A(k)z(k) + f(k), \quad \ell z(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^v$$

was solved by A.A. Boichuk. Thus, the problem of finding bounded solutions $z(k)$ of a difference-algebraic system (1) is a generalization of the problem solved by A.A. Boichuk [1]. Denote $P_{A^*}(k)$ the matrix-orthoprojector [2]:

$$P_{A^*}(k) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(A^*(k)).$$

Provided [3] that the matrices $A^+(k)B(k)$, $A^+(k)f(k)$ are bounded, and also

$$P_{A^*}(k) = 0 \quad (2)$$

the system (1) can be reduced to the traditional system of linear difference equations

$$z(k+1) = A^+(k)B(k)z(k) + \mathfrak{F}_0(k, \nu_0(k)); \quad (3)$$

here

$$\text{rank } A(k) := \sigma_0 = m < n.$$

Besides,

$$\mathfrak{F}_0(k, \nu_0(k)) := A^+(k)f(k) + P_{A_{\rho_0}}(k)\nu_0(k),$$

$A^+(k)$ — is pseudoinverse (by Moore - Penrose), $P_{A_{\rho_0}}(k)$ — $(n \times \rho_0)$ — is a matrix composed of ρ_0 linearly independent columns of $(n \times n)$ — orthoprojection matrix

$$P_A(k) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(A(k)),$$

$\nu_0(k) \in \mathbb{R}^{\rho_0}$ is an arbitrary real vector function. General solution of the Cauchy problem

$$z(0) = c \in \mathbb{R}^n$$

for the homogeneous part of the system of difference equations (3)

$$z(k) = X_0(k) c, \quad c \in \mathbb{R}^n;$$

is defined by the normal fundamental matrix:

$$X_0(k+1) = A^+(k)B(k)X_0(k), \quad X_0(0) = I_n.$$

The normal fundamental matrix can be represented as:

$$X_0(k) = \prod_{j=1}^{k-1} A^+(j)B(j).$$

Under condition (2) the normal fundamental matrix $X_0(k)$ of the homogeneous part of the system of difference equations (3) is, generally speaking, singular:

$$\det X_0(k) = 0,$$

therefore, to construct a general solution of the Cauchy problem $z(0) = c \in \mathbb{R}^n$ for the inhomogeneous degenerate system of difference equations (3) the scheme [1, 5] is not applicable. However, the Green operator of the Cauchy problem for the degenerate system of difference equations (3) can be found as follows:

$$K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](0) := 0, \quad K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](1) := \mathfrak{F}_0(1, \nu_0(1)), \dots,$$

$$\begin{aligned} K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](k+1) &:= A^+(k)B(k)K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](k) + \\ &+ \mathfrak{F}_0(k, \nu_0(k)), \dots \end{aligned}$$

Thus, the following lemma is proved.

Lemma 1. *The problem of finding bounded solutions of a system of linear difference-algebraic equations (1) under the condition (2) has a solution*

$$z(k) = X_0(k) c + K[f(j)](k), \quad c \in \mathbb{R}^n;$$

here $X_0(k)$ — is a normal fundamental matrix,

$$K[f(j)](k) := K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](k)$$

— is the Green operator of the Cauchy problem for the system (1).

By analogy with the classification of differential-algebraic equations [3, 6], as well as with the classification of impulse boundary problems for ordinary differential equations [2, 7, 8] under condition (2)), in the case of boundedness of matrices $A^+(k)B(k)$, $A^+(k)f(k)$, we will say that the system of linear difference-algebraic equations (1) is degenerated. Note that, in contrast to the traditional system of linear difference equations [1], the solution of the system of linear difference-algebraic equations (1) under condition (2) depends on an arbitrary bounded vector function $\nu_0(k) \in \mathbb{R}^{\rho_0}$.

Example 1. *Let's find a solution to the system of first-order difference-algebraic equations*

$$Az(k+1) = Bz(k) + f(k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (4)$$

where

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Since condition (2) is fulfilled and the system (4) has a solution of the form

$$z(k) = X_0(k)c + K[f(j)](k), \quad c \in \mathbb{R}^4;$$

here $X_0(k)$ — is the normal fundamental matrix:

$$X_0(0) = I_4, \quad X_0(1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X_0(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_0(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Besides:

$$K[f(j)](0) := 0, \quad K[f(j)](1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$K[f(j)](2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K[f(j)](3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In this case, the matrix $A(k)$ — is rectangular, while $\rho_0 = 1 \neq 0$, therefore the solution found depends on an arbitrary continuous vector-function; in this case $\nu_0(k) := 0$.

2. Boundary value problems for systems of linear difference-algebraic equations

We investigate the problem of finding bounded solutions [1, 1]

$$z(k) \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \Omega$$

linear Noetherian ($n \neq \nu$) for the linear Noetherian boundary value problem for a system of linear difference-algebraic equations [1, 1]

$$A(k)z(k+1) = B(k)z(k) + f(k), \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^\nu; \quad (5)$$

here $A(k), B(k) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — are real matrices and $f(k)$ are real column vectors,

$$\ell z(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\nu$$

is a linear bounded vector functional defined on a space of bounded functions. The problem of finding bounded solutions $z(k)$ of a boundary value problem for a linear non-degenerate system of first-order difference equations

$$z(k+1) = A(k)z(k) + f(k), \quad \ell z(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^\nu$$

was solved by A.A. Boichuk [1]. Thus, the task (5) is a generalization of the problem solved by A.A. Boichuk [1]. According to Lemma 1, the problem of finding bounded solutions of a non-degenerate system of linear algebraic difference equations (5) subject to (2) has a solution

$$z(k) = X_0(k)c + K[f(j), \nu_0(j)](k), \quad c \in \mathbb{R}^n; \quad (6)$$

here $X_0(k)$ — is a normal fundamental matrix,

$$K[f(j), \nu_0(j)](k) := K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](k)$$

is the Green operator of the Cauchy problem for the system of difference-algebraic equations (5). Note that, unlike the traditional system of linear difference equations [1], the solution of the system of linear difference-algebraic equations (5) subject to condition (2) depends on an arbitrary bounded vector function $\nu_0(k) \in \mathbb{R}^{\rho_0}$; and we set this function to be fixed at the beginning.

Denote the matrix $Q_0 := \ell X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{v \times n}$, and also

$$P_{Q_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(Q_0), \quad P_{Q_0^*} : \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{N}(Q_0^*)$$

are orthoprojection matrices [1]. Substituting the general solution (6) of the Cauchy problem $z(0) = c \in \mathbb{R}^n$ of the inhomogeneous linear difference-algebraic equation (5) into the boundary condition (5), we get the equation

$$Q_0 c = \alpha - \ell K[f(j), \nu_0(j)](\cdot),$$

solvable if and only if

$$P_{Q_0^*} \left\{ \alpha - \ell K[f(j), \nu_0(j)](\cdot) \right\} = 0; \tag{7}$$

in this case, the solution $z(k)$ of the linear Noetherian boundary value problem (5) is determined by the vector

$$c = Q_0^+ \left\{ \alpha - \ell K[f(j), \nu_0(j)](\cdot) \right\} + P_{Q_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Here $Q_0^+ \in \mathbb{R}^{n \times v}$ — is the Moore – Penrose pseudo-inverse matrix [1]; matrix $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ is composed of r linearly independent columns of the orthoprojection matrix $P_{Q_0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Thus, the following lemma is proved.

Lemma 2. *The problem of finding bounded solutions of the system of linear difference-algebraic equations (5) subject to (2) has a solution*

$$z(k) = X_0(k) c + K[f(j), \nu_0(j)](k), \quad c \in \mathbb{R}^n;$$

here $X_0(k)$ — is a normal fundamental matrix,

$$K[f(j)](k) := K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j), \nu_0(j))](k)$$

— is the Green operator of the Cauchy problem for the system of difference-algebraic equations (5). The problem of finding bounded solutions of a linear Noetherian ($n \neq v$) boundary value problem for the system of linear difference-algebraic equations (5) under conditions (2) and (7) has a solution

$$z(k) = X_r(k) c_r + G[f(j), \nu_0(j), \alpha](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^r;$$

here

$$X_r(k) := X_0(k) P_{Q_r}, \quad k \in \Omega := \{0, 1, 2, \dots, \omega\}$$

is a fundamental matrix of solutions of the homogeneous part of the problem (5) and

$$G[f(j), \nu_0(j), \alpha](k) := K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](k) + X_0(k) Q_0^+ \left\{ \alpha - \ell K[f(j), \nu_0(j)](\cdot) \right\}$$

is the generalized Green operator of a linear Noetherian boundary value problem for the system of linear difference-algebraic equations (5).

Example 2. Let's find the solution of the linear boundary problem for the system of first order difference-algebraic equations

$$Az(k+1) = Bz(k) + f(k), \quad z(0) - z(3) = \alpha, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (8)$$

where

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\alpha := (1 \quad -3 \quad 3 \quad -1)^*.$$

Since condition (2) is satisfied, the system (8) has a solution of the form

$$z(k) = X_0(k)c + K[f(j), \nu_0(j)](k), \quad c \in \mathbb{R}^4;$$

here $X_0(k)$ — is the normal fundamental matrix given in Example 1. In this case, the matrix $A(k)$ — is rectangular, and $\rho_0 = 1 \neq 0$, therefore, the solution found depends on an arbitrary bounded function; we set $\nu_0(k) := 0$. Since the matrix

$$Q_0 = X_0(0) - X_0(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

is degenerate, for the boundary value problem (8) the critical case is true: $P_{Q_0^*} \neq 0$, and the solvability condition (7) is fulfilled; here

$$P_{Q_0^*} = P_{Q_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{Q_r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

The solution of the boundary value problem (8)

$$z(k) = X_r(k)c_r + G[f(j), \nu_0(j), \alpha](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^1$$

determines the generalized Green operator of the boundary value problem (8)

$$G[f(j), \nu_0(j), \alpha](k) = K[f(j), \nu_0(j)](k),$$

and also

$$X_r(k) := X_0(k)P_{Q_r} = P_{Q_r}, \quad k \in \Omega := \{0, 1, 2, 3\}$$

is the fundamental matrix of solutions of the homogeneous part of the boundary value problem. (8).

Following the traditional classification of linear Noetherian boundary value problems [1, 7], the case of $P_{Q_0^*} \neq 0$ is called critical; in this case, the existence conditions and the form of the general solution of the problem of finding bounded solutions of the system of linear difference-algebraic equations (5) are determined by the proved Lemma 2. The case $P_{Q_0^*} = 0$ is said to be noncritical; in this case, the existence conditions and the form of the general solution of the problem of finding bounded solutions of the system of linear difference-algebraic equations (5) is determined by the following statement.

Corollary 1. *The problem of finding bounded solutions of the system of linear difference-algebraic equations (5) subject to (2) has a solution*

$$z(k) = X_0(k) c + K[f(j), \nu_0(j)](k), \quad c \in \mathbb{R}^n;$$

here $X_0(k)$ — is a normal fundamental matrix,

$$K[f(j)](k) := K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](k)$$

is the Green operator of the Cauchy problem for the system of difference-algebraic equations (5). The problem of finding bounded solutions of a linear Noetherian ($n \neq v$) boundary value problem for a system of linear difference-algebraic equations (5) in the non-critical $P_{Q_0^*} = 0$ case, under condition (2) has a solution

$$z(k) = X_r(k) c_r + G[f(j), \nu_0(j), \alpha](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^r;$$

here

$$X_r(k) := X_0(k) P_{Q_r}, \quad k \in \Omega$$

is the fundamental matrix of solutions of the homogeneous part of the boundary value problem (5) and

$$G[f(j), \nu_0(j), \alpha](k) := K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](k) + X_0(k) Q^+ \left\{ \alpha - \ell K[f(j), \nu_0(j)](\cdot) \right\}$$

is the generalized Green operator of a linear Noetherian boundary value problem for a system of linear difference-algebraic equations (5).

Example 3. *Let's find the solution of a linear two-point problem for a system of first-order difference-algebraic equations*

$$A z(k + 1) = B z(k) + f(k), \quad \ell z(\cdot) = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (9)$$

where the matrixes A, B and the function $f(k)$ are defined above in example 2. Besides

$$\ell z(\cdot) := M (z(0) + z(3)), \quad M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In this case, the matrix $A(k)$ — is rectangular, with $\rho_0 = 1 \neq 0$, therefore the solution found above in example 2 of the system of difference-algebraic equations (9) depends on an arbitrary continuous function; we set $\nu_0(k) := k$. Since the matrix

$$Q_0 = M(X_0(0) + X_0(3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

is of full rank, the noncritical case holds for the boundary value problem (9): $P_{Q_0^*} \neq 0$. The Green operator of the Cauchy problem for a system of difference-algebraic equations (9) has the form

$$K[f(j)](0) := 0, \quad K[f(j)](1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$K[f(j)](2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad K[f(j)](3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Since for the boundary value problem (9) there is a noncritical case, then, according to the corollary, the boundary value problem (9) is solvable. The decision of a boundary value problem (9)

$$z(k) = X_r(k) c_r + G[f(j), \nu_0(j), \alpha](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^1$$

is defined by the Green operator for the boundary value problem (9)

$$G[f(j), \nu_0(j), \alpha](0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad G[f(j), \nu_0(j), \alpha](1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$G[f(j), \nu_0(j), \alpha](2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad G[f(j), \nu_0(j), \alpha](3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

And also

$$X_r(0) = -X_r(1) = X_r(2) = -X_r(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

is the fundamental matrix of solutions of the homogeneous part of the boundary value problem (9).

3. Reduction of a difference-algebraic boundary value problem to a non-critical case

In the general case, namely, for an arbitrary real vector function

$$\nu_0(k) \in \mathbb{R}^{\rho_0}$$

the solvability of the linear Noetherian boundary value problem for the system of linear difference-algebraic equations (5) essentially depends on the choice of this function. Set

$$\nu_0(k) := \Psi_0(k)\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}^\theta;$$

here

$$\Psi_0(k) \in \mathbb{R}^{\rho_0 \times \theta}$$

is an arbitrary real full rank matrix. The generalized Green operator of the Cauchy problem for a system of linear difference-algebraic equations (5) can be represented as

$$K[f(j), \nu_p(j)](k) = K[A^+(j)f(j)](k) + K[\Psi_0(j)](k)\gamma;$$

here

$$K[\Psi_0(j)](0) := 0, \quad K[\Psi_0(j)](1) := P_{A_{\rho_0}}(0)\Psi_0(0),$$

$$K[\Psi_0(j)](2) := A^+(1)B(1)K[\Psi_0(j)](1) + P_{A_{\rho_0}}(1)\Psi_0(1), \dots,$$

$$K[\Psi_0(j)](k+1) := A^+(k)B(k)K[\Psi_0(j)](k) + P_{A_{\rho_0}}(k)\Psi_0(k).$$

Denote the matrix

$$\mathcal{D}_0 := \left\{ Q_0 ; \ell K[\Psi_0(j)](\cdot) \right\} \in \mathbb{R}^{\nu \times (\rho_0 + \theta)}.$$

Substituting the general solution

$$z(k) = X_0(k)c + K[f(j), \nu_0(j)](k), \quad c \in \mathbb{R}^n$$

of the system of linear algebraic difference equations (5) into the boundary condition (5), we arrive at a linear algebraic equation

$$\mathcal{D}_0 \check{c} = \alpha - \ell K[A^+(j)f(j)](\cdot), \quad \check{c} := \text{col}(c_{\rho_0}, \gamma) \in \mathbb{R}^{\rho_0 + \theta}. \quad (10)$$

Equation (10) is solvable if and only if

$$P_{\mathcal{D}_0^*} \left\{ \alpha - \ell K[A^+(j)f(j)](\cdot) \right\} = 0. \quad (11)$$

Here $P_{\mathcal{D}_0^*}$ is the ortoprojector: $\mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{D}^*)$. Under condition (11) and only with it, the general solution of equation (10)

$$\check{c} = \mathcal{D}^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[A^+(j) f(j) \right] (\cdot) \right\} + P_{\mathcal{D}} \delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^{\rho_0 + \theta}$$

determines the general solution of the boundary value problem (5)

$$\begin{aligned} z(k, \delta) = & \left\{ X_0(k); K \left[\Psi_0(j) \right] (k) \right\} \mathcal{D}_0^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[A^+(j) f(j) \right] (\cdot) \right\} + \\ & + K \left[A^+(j) f(j) \right] (k) + \left\{ X_0(k); K \left[\Psi_0(j) \right] (k) \right\} P_{\mathcal{D}_0} \delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^{\rho_0 + \theta}. \end{aligned}$$

Here $P_{\mathcal{D}_0}$ is the orthoprojection matrix: $\mathbb{R}^{\rho_0 + \theta} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{D}_0)$. So the following theorem has been proved.

Theorem. *The problem of finding bounded solutions of the system of linear difference-algebraic equations (5) subject to (2) has a solution*

$$z(k) = X_0(k) c + K[f(j), \nu_0(j)](k), \quad c \in \mathbb{R}^r.$$

Under condition (11) and only with it, the general solution of the difference-algebraic boundary value problem (5)

$$z(k, c_r) = X_r(k) c_r + G \left[f(j); \Psi_0(j); \alpha \right] (k), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

defines a generalized Green operator for a difference-algebraic boundary value problem (5)

$$\begin{aligned} G \left[f(j); \Psi_0(j); \alpha \right] (k) := & K \left[A^+(j) f(j) \right] (k) + \\ & + \left\{ X_0(k); K \left[\Psi_0(j) \right] (k) \right\} \mathcal{D}_0^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[A^+(j) f(j) \right] (\cdot) \right\}. \end{aligned}$$

The matrix $X_r(k)$ is composed of r linearly independent columns of the matrix

$$\left\{ X_0(k); K \left[\Psi_0(j) \right] (k) \right\} P_{\mathcal{D}_0}.$$

Under condition $P_{\mathcal{D}_0^*} \neq 0$ we say that the difference-algebraic boundary value problem (5) is a critical case, and vice versa: under condition $P_{\mathcal{Q}_0^*} \neq 0, P_{\mathcal{D}_0^*} = 0$ we say that the difference-algebraic boundary value problem (5) is reduced to the non-critical case. The latter definition is a generalization of the critical case ($P_{\mathcal{Q}^*} = 0$) for the Noetherian difference problem for the system obtained from system (5) with $A(k) \equiv I_n$, for the case in which the generalized Green operator of the Cauchy problem for difference-algebraic system (5) is dependent on an arbitrary vector function $\nu_0(k) \in \mathbb{R}^{\rho_0}$.

Corollary 2. Under condition (2) the general solution of the difference-algebraic boundary value problem (5) is the following

$$z(k, c_r) = X_r(k)c_r + G \left[f(j); \Psi_0(j); \alpha \right] (k), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Example 3. Let's find the solution of the periodic boundary value problem for the system of first order difference-algebraic equations

$$Az(k+1) = Bz(k) + f(k), z(0) - z(4) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 4, \quad (12)$$

where

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(k) := \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \frac{\pi k}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Since condition (2) is fulfilled, the system (12) has a solution of the form

$$z(k) = X_0(k)c + K[f(j), \nu_0(j)](k), \quad c \in \mathbb{R}^4;$$

here

$$X_0(k) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi k}{2} + \sin \frac{\pi k}{2} & -\sin \frac{\pi k}{2} & \sin \frac{\pi k}{2} & 0 \\ \cos \frac{\pi k}{2} + 3 \sin \frac{\pi k}{2} - 3^k & \cos \frac{\pi k}{2} - 2 \sin \frac{\pi k}{2} & 2 \sin \frac{\pi k}{2} - \cos \frac{\pi k}{2} + 3^k & 0 \\ \cos \frac{\pi k}{2} + \sin \frac{\pi k}{2} - 3^k & -\sin \frac{\pi k}{2} & \sin \frac{\pi k}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

is a fundamental matrix. Since the matrix

$$Q_0 = X_0(0) - X_0(4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 80 & 0 & -80 & 0 \\ 80 & 0 & -80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

is degenerate, for the boundary value problem (12) the critical case is true:

$$P_{Q_0^*} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

In this case the matrix $A(k)$ — is rectangular and

$$P_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{A_{\rho_0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

therefore, the desired solution depends on an arbitrary bounded function. We assume that

$$\Psi(t) := \begin{pmatrix} 1 & \sin \frac{\pi k}{2} & \cos \frac{\pi k}{2} \end{pmatrix},$$

and also

$$\mathcal{D}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 80 & 0 & -80 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 80 & 0 & -80 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Since condition

$$P_{Q_0^*} \neq 0, \quad P_{\mathcal{D}_0^*} = 0,$$

is satisfied, the algebraic boundary value problem (12) is reduced to the non-critical case, therefore, according to corollary 2, the boundary value problem (12) is solvable. The solution of the boundary value problem

$$z(k, c_r) = X_r(k)c_r + G[f(j); \Psi_0(j); \alpha](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^2$$

is determined by

$$X_r(k) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi k}{2} + 2 \sin \frac{\pi k}{2} & -2 \sin \frac{\pi k}{2} \\ 5 \sin \frac{\pi k}{2} & 2 \cos \frac{\pi k}{2} - 2 \sin \frac{\pi k}{2} \\ \cos \frac{\pi k}{2} + 2 \sin \frac{\pi k}{2} & -2 \sin \frac{\pi k}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

the fundamental matrix of solutions of the homogeneous part of the boundary value problem (12), as well as

$$G[f(j), \Psi_0(j), \alpha](0) = G[f(j), \Psi_0(j), \alpha](1) = G[f(j), \Psi_0(j), \alpha](4) = 0,$$


$$G[f(j), \Psi_0(j), \alpha](2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G[f(j), \Psi_0(j), \alpha](3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$


the Green operator of a boundary value problem (12).


The results obtained, similarly [1, 2, 9, 10, 11, 12] can be used in the theory of nonlinear Noetherian boundary value problems for systems of difference-algebraic equations. In the case of insolvability, the difference-algebraic boundary value problems can be regularized analogically to [13, 14, 15]. In addition, the results obtained similarly to [16] can be used in the theory of stability for systems of difference equations.

Acknowledgement. This work was supported by the Ministry of Education and Science of Ukraine. 0118U003390.

ORCID ID

S. M. Chuiko  <https://orcid.org/0000-0001-7186-0129>

Ya. V. Kalinichenko  <https://orcid.org/0000-0002-8352-1965>

M. V. Popov  <https://orcid.org/0000-0001-9106-2650>

REFERENCES

1. A.A. Boichuk. Boundary-value problems for systems of difference equations, Ukrainian Mathematical Journal. – 1997. – 6. V. **49**. – P. 832-835.
2. S.L. Campbell. Limit behavior of solutions of singular difference equations, Linear algebra and its appl. – 1979. – V. **23**. – P. 167-178.
3. S.M. Chuiko. On a reduction of the order in a differential-algebraic system, Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – 1. – V. **235**. – P. 2-18.
4. A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems; 2-th edition. 2016. Boston, De Gruyter, Berlin, 298 p.
5. V.K. Romanko. Difference equations. 2014. Bean, Moscow, 112 p.
6. S.M. Chuiko. A generalized matrix differential-algebraic equation, Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). – 2015. – 1. V. **210**. – P. 9-21.
7. A.A. Boichuk, V.F. Zhuravlev, A.M. Samoilenko. Normally solvable boundary value problems. 2019. Scientific Opinion, Kiev, 628 p.
8. S.M. Chuiko. A Generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action, Differential Equations. – 2001. – 8. V. **37**. – P. 1189-1193.
9. V.Ya. Gutlyanskii, V.I. Ryazanov, A.S. Yefimushkin. On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane, Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – V. **214**. – P. 200-219.
10. S.M. Chuiko. Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation, Miskolc Mathematical Notes. – 2016. – 1. V. **17**. – P. 139-150.

11. I.I. Skrypnik. Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption, *Israel Journal of Mathematics*, – 2016. – 1. V. **217**. – P. 163-179.
12. S.M. Chuiko. Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem, *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2017. – 2. V. **38**. – P. 236-244.
13. A.N. Tikhonov, V.Ya. Arsenin. *Solution of Ill-Posed Problems*. 1986. Winston, Washington, 288 p.
14. S.M. Chuiko. On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action, *Journal of Mathematical Sciences*. – 2014. – 1. V. **197**. – P. 138-150.
15. S.M. Chuiko, Ya.V. Kalinichenko. On the question of the regularization of the Cauchy problem for a system of linear difference equations, *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"*. – 2018. – V. **28**. – P. 27-34.
16. V.I. Korobov, M.O. Bebiya. Stabilization of one class of nonlinear systems, *Automation and Remote Control*. – 2017. – 1. V. **78**. – P. 20-25.

S.M. Chuiko, Ya.V. Kalinichenko, N.V. Popov. **Boundary-value problem for a system of nonsingular difference-algebraic equations.** The study of differential-algebraic boundary value problems was initiated in the works of K. Weierstrass, N.N. Luzin and F.R. Gantmacher. Systematic study of differential-algebraic boundary value problems is devoted to the work of S. Campbell, Yu.E. Boyarintsev, V.F. Chistyakov, A.M. Samoilenko, M.O. Perestyuk, V.P. Yakovets, O.A. Boichuk, A. Ilchmann and T. Reis. The study of the differential-algebraic boundary value problems is associated with numerous applications of such problems in the theory of nonlinear oscillations, in mechanics, biology, radio engineering, theory of control, theory of motion stability. At the same time, the study of differential algebraic boundary value problems is closely related to the study of boundary value problems for difference equations, initiated in A.A. Markov, S.N. Bernstein, Ya.S. Besikovich, A.O. Gelfond, S.L. Sobolev, V.S. Ryaben'kii, V.B. Demidovich, A. Halanay, G.I. Marchuk, A.A. Samarskii, Yu.A. Mitropolsky, D.I. Martynyuk, G.M. Vayniko, A.M. Samoilenko, O.A. Boichuk and O.M. Stanzhitsky. Study of nonlinear singularly perturbed boundary value problems for difference equations in partial differences is devoted to the work of V.P. Anosov, L.S. Frank, P.E. Sobolevskii, A.L. Skubachevskii and A. Asheraliev. Consequently, the actual problem is the transfer of the results obtained in the articles by S. Campbell, A.M. Samoilenko and O.A. Boichuk on linear boundary value problems for difference-algebraic equations, in particular finding the necessary and sufficient conditions for the existence of the desired solutions, and also the construction of the Green's operator of the Cauchy problem and the generalized Green operator of a linear boundary value problem for a difference-algebraic equation. The solvability conditions are found in the paper, as well as the construction of a generalized Green operator for the Cauchy problem for a difference-algebraic system. The solvability conditions are found, as well as the construction of a generalized Green

operator for a linear Noetherian difference-algebraic boundary value problem. An original classification of critical and noncritical cases for linear difference-algebraic boundary value problems is proposed.

Keywords: boundary-value problems; difference-algebraic equations; pseudoinverse matrices.

Чуйко С. М., Калініченко Я. В., Попов М. В. **Крайові задачі для систем не-вироджених різницево-алгебраїчних рівнянь.** Дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач започатковане у роботах К. Вейерштрасса, М.М. Лузіна та Ф.Р. Гантмахера. Систематичному вивченню диференціально-алгебраїчних крайових задач присвячені роботи С. Кемпбелла, Ю.Є. Бояринцева, В.Ф. Чистякова, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, В.П. Яковця, О.А. Бойчука, А. Ілчманна та Т. Рейса. Вивчення диференціально-алгебраїчних крайових задач пов'язане з численними застосуваннями таких задач у теорії нелінійних коливань, у механіці, біології, радіотехніці, теорії керування, теорії стійкості руху. В той же час дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач тісно пов'язане з дослідженням крайових задач для різницево-алгебраїчних рівнянь, започаткованим у роботах А.А. Маркова, С.Н. Бернштейна, Я.С. Безиковича, О.О. Гольфонда, С.Л. Соболева, В.С. Рябенського, В.Б. Демідовича, А. Халаяна, Г.І. Марчука, О.А. Самарського, Ю.О. Митропольського, Д.І. Мартинюка, Г.М. Вайніко, А.М. Самойленка, О.А. Бойчука та О.М. Станжицького. Дослідженню нелінійних сингулярно збурених крайових задач для різницево-алгебраїчних рівнянь у частинних різницях присвячені роботи В.П. Аносова, Л.С. Франка, П.Є. Соболевського, О.Л. Скубачевського та А. Ашералієва. Отже, актуальною проблемою є перенесення результатів, отриманих у статтях С. Кемпбелла, А.М. Самойленка та О.А. Бойчука на лінійні крайові задачі для різницево-алгебраїчних рівнянь, зокрема, знаходження необхідних та достатніх умов існування шуканих розв'язків, а також, конструкції оператора Гріна задачі Коші та узагальненого оператора Гріна лінійної крайової задачі для різницево-алгебраїчного рівняння. У статті знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна задачі Коші для різницево-алгебраїчної системи. Знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна для лінійної нетерової різницево-алгебраїчної крайової задачі. Запропоновано оригінальну класифікацію критичних і некритичних випадків для лінійних різницево-алгебраїчних крайових задач.

Ключові слова: крайові задачі; різницево-алгебраїчні рівняння; псевдообернена матриця.

Article history: Received: 30 August 2019; Final form: 21 November 2019;
Accepted: 21 November 2019.

Mathematical modeling of particle aggregation and sedimentation in the inclined tubes

V. Baranets, N. Kizilova

*V. N. Karazin Kharkiv National University
Svobody sq., 4, 61022, Kharkiv, Ukraine
cherevko.vita@gmail.com, n.kizilova@gmail.com*

Sedimentation of the aggregating particles of different technical suspensions, blood and nanofluids in the gravity is investigated. The dependence of the sedimentation rate on the angle of inclination is considered. The two phase model of the aggregating particles is generalized to the inclined tubes. In the suggestion of small angles of inclination the equations are averaged over the transverse coordinate and the obtained hyperbolic system of equations is solved by the method of characteristics. Based on the results, a novel method of estimation of the suspension stability is proposed.

Keywords: Boycott effect; suspension; aggregation; sedimentation; medical diagnostics.

Баранець В. О., Кізілова Н. М. **Математичне моделювання агрегації та осідання частинок в похилих трубках.** Досліджується осідання агрегуючих частинок різних технічних суспензій, крові і нанорідин в умовах сили тяжіння. Розглядається залежність швидкості осідання від кута нахилу. Двофазна модель агрегуючих частинок узагальнена для випадку похилих трубок. У припущенні малих кутів нахилу рівняння усереднюються по поперечній координаті, а отримана гіперболічна система рівнянь розв'язується методом характеристик. На основі отриманих результатів запропоновано новий метод оцінки стійкості суспензії.

Ключові слова: ефект Бойкотта; суспензія; агрегація; седиментація; медична діагностика.

Баранец В. А., Кизилова Н. Н. **Математическое моделирование агрегации и оседания частиц в наклонных трубках.** Исследуется оседание агрегирующих частиц различных технических суспензий, крови и наножидкостей в условиях силы тяжести. Рассматривается зависимость скорости оседания от угла наклона. Двухфазная модель агрегирующих частиц обобщена для случая наклонных трубок. При предложении малых углов наклона уравнения усредняются по поперечной координате, а полученная гиперболическая система уравнений решается методом характеристик. На основании полученных результатов предложен новый метод оценки устойчивости суспензии.

Ключевые слова: эффект Бойкотта; суспензия; агрегация; седиментация; медицинская диагностика.

2010 Mathematics Subject Classification: 76T20, 76Zxx, 83C55.

1. Introduction

Influence of inclination of the vessel in which a suspension of particles sediments in the gravity field was first discovered by Arthur Boycotte in 1920 on the red blood cell (RBC) sedimentation in thin long vertical tubes [1], and now it is known as the Boycotte effect. On that time the RBC sedimentation test was recognized as the most powerful medical diagnostic means on general pathology, and many researchers were seeking for more benefit test conditions, including the usage of the inclined tubes. This sedimentation technique is also widely used for the waste water cleaning, drinking water purification, treatment of mixtures in industry and manufacture, and the high reservoirs or deep wells are needed for the successful processing. The settling of particles in the high containers is limited by its width, and tilting of the reservoir or well increases the efficient area of sedimentation, decreases the distance that each particle must travel before impacting a wall, and, therefore, enhances the sedimentation rate in orders of magnitude [2].

The Boycotte effect is used in the oil industry because at certain inclination angles $(40-50)^\circ$ of the tube the clearest separation of the suspension for oil-well cementation is observed [3]. The effect is also used for mixing of the granular matters [4]. It may be responsible for specific sediment distribution along inclined ocean bottom at the water stratification conditions [5], and for the pattern formation at the inclined surfaces of the sand-dunes [2]. All suspensions settle faster in the inclined vessels and exhibit clear separation of the layers of different optical density, but the problem on determination of the optimal angels remains still unsolved.

2. Review of theoretical and experimental data

Experimental studies of the Boycott effect on suspensions containing light and heavy particles with concentrations C_l, C_h in inclined channels revealed a significant influence of the inclination angle on the particle separation along the inclined wall and the lateral fingering phenomena [6]. For each set of the concentrations $\{C_l, C_h\}$ there was an optimal inclination angle ϖ^* when the separation was the clearest and at the bigger angles $\varpi > \varpi^*$ it was blocked. The dependence $\varpi^*(C_l, C_h)$ was found quite complex.

A complex dependence of the RBC sedimentation rate h on the tilt angle ϖ has been demonstrated in numerous experimental studies. The value h is measured as the height of clear serum in the top part of the sedimentation tube (Fig.1a,b). The experiments on the RBC suspensions with concentrations $C = (10 - 50)\%$ and the tilt angles $u = (0 - 80)^\circ$ revealed the approximation of the sedimentation curves in the form $h(t) = a(1 - \exp(-bt))$, where $a(\theta)$ is an increasing function, $b(\theta) = k \sin(\theta)$, $k \approx const$ [7].

Based on the continuum mechanics approach, it was shown [8] that the sedimentation rate in the rectangle tank is determined by the Reynolds number Re

and the parameter Λ which is the ratio of the sedimentation Grashof number to Re :

$$Re = \frac{\rho_f H u_0}{\mu_f}, \quad \Lambda = \frac{(\rho_s - \rho_f) H^2 g C_0}{u_0 \mu_f}, \quad (1)$$

where ρ_s and ρ_f are densities of the solid and fluid materials, μ_f is the fluid viscosity, C_0 is the concentration of the particles, g is the acceleration of gravity, u_0 is the characteristic sedimentation rate of a single particle with diameter a in the fluid, that can be estimated by the Stokes formula [9]

$$u_0 = \frac{2(\rho_s - \rho_f) a^2 g}{9\mu_f}. \quad (2)$$

Using (2), (1) can be rewritten as

$$Re = \frac{2\rho_f(\rho_s - \rho_f) H a^2 g}{9\mu_f^2}, \quad \Lambda = \frac{9C_0}{2} \left(\frac{H}{a}\right)^2. \quad (3)$$

At low Re numbers the values Λ are high, and in the limit $\Lambda \rightarrow \infty$ the rate Q of the clear solvent production (layer I in Fig.1a,b) can be described by the kinematic Ponder-Nakamura-Kuroda (PNK) formula [10, 11]

$$Q = u_0 f(C) B (\cos(\theta) + \tan(\theta) H/B), \quad (4)$$

where the function $f(C)$ depends on the particle size, shape, material, surface charge and other properties.

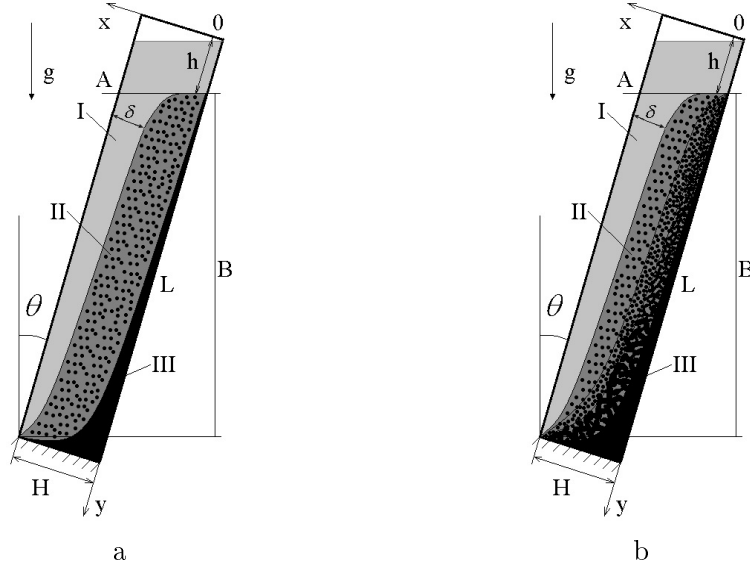


Fig.1. A sketch of the particle sedimentation in the inclined tube for the non-aggregating (a) and aggregating (b) particles.

As one can see from (3), the approach (4) is acceptable when

$$H \gg a\sqrt{\frac{2}{9C_0}}, \quad (5)$$

that gives for the RBC with $a = 5 \cdot 10^{-6}\text{m}$, $C_0 = (35 - 48)\%$ the unrealistic estimations $H \sim (3.5 - 4) \cdot 10^6\text{m}$. Besides, the good correspondence of the PNK formula (4) to the experiments has been proven at low concentrations $C_0 \leq 0.1$ only [2].

The continuum mechanics approach based on the two phase theory was applied to the sedimentation in the inclined vessels in the case of the inviscid [12] and viscous fluid [13]– [15]. Based on these studies, the division into three sedimentation zones (clear fluid (I), suspension (II), and sediment (III), Fig.1a) has been proposed. The boundary layer approach has been used to determine the velocity profiles in the zones I-III [8]. In the case of the non-aggregating hard spheres the mixture theory gave the following formulae [8]:

$$\delta = \left(\frac{2a^2U \tan(\theta y)}{3C_0u_0} \right)^{1/3}, \quad V = \frac{9\delta^2C_0u_0 \cos(\theta)}{2a^2} \left(\frac{x}{\delta} - \frac{x^2}{2\delta^2} \right), \quad (6)$$

where U is the sedimentation rate of the same suspension in the vertical tube.

The experimental studies on the non-aggregating RBC revealed that the layer I begins to be formed after $t=8$ and 1.8 min at the tilt angles $\theta = 10^\circ$ and $\theta = 40^\circ$ accordingly [16]. The width δ_A and the velocity V_A measured at the level of the point A (Fig.1a) demonstrated a good agreement with those computed on (6).

Recently the inclined channel technology has been used in the microfluidic applications for blood separation using the centrifugal and Coriolis forces with Zweifach-Fung effect [17, 18]. In this design the RBC are pushed to the bottom of the curved channel due to the effect of centrifugal and Coriolis forces and then are collected through the bottom channel due to ZP effect, and the blood plasma is collected from the top of the channel.

Therefore, the RBC sedimentation in the inclined vessels is a promising technology for biology, medicine, microfluidic and nanotechnologies, while theoretical description of the system dynamics is confined by non-aggregating suspensions with low concentrations $C_0 < 0.1$, low Reynolds numbers $Re \ll 1$ and unrealistic high vessels. The dynamics of the ensembles of aggregating particles has been recently studied by Lattice Boltzmann simulations [19]. The results of the study confirmed the existence of global convection motion of the particles and their aggregates that tend to enhance the sedimentation process. It was found, that smaller intermittent vortices, formed from the wakes of groups of settling particles, play an important role in the sedimentation process and the resulting distribution of the particles.

In this paper the continual mechanics approach is used for the sedimentation of the concentrated suspensions of the aggregating particles. It will be shown, the

settling dynamics in the incline tubes is more complex and the additional sublayers of the sedimenting single particles (IIa), their aggregates (IIb) and the porous viscoelastic layer (IIc) (Fig.1b) will appear during the sedimentation similar to the vertical tube case [20].

3. Problem formulation.

The steady sedimentation of particles in the narrow channel of the width R and the length L ($R/L \ll 1$), inclined at the angle θ is considered. The channel corresponds to the gap between the walls of the rotation viscosimeter of the cone-cone type or a rectangle vessel with the depth $D \gg R$. The two phase approach to the suspension of the aggregating particles is used [20, 21]. Neglecting the inertia forces as compared with the viscous forces, the equations of the quasi-steady motion can be written in the form

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} N u_x^1 + \frac{\partial}{\partial y} N u_y^1 = \varphi, \quad (7)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} H u_x^1 + \frac{\partial}{\partial y} H u_y^1 = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [H u_x^1 + (1 - H) u_x^2] + \frac{\partial}{\partial y} [H u_y^1 + (1 - H) u_y^2] = 0, \quad (9)$$

$$H \frac{\partial p}{\partial y} = -F (u_y^1 - u_y^2) + H \rho_s G \cos(\theta), \quad (10)$$

$$(1 - H) \frac{\partial p}{\partial y} = F (u_y^1 - u_y^2) + (1 - H) \rho_f G \cos(\theta), \quad (11)$$

$$H \frac{\partial p}{\partial x} = -F (u_x^1 - u_x^2) H \rho_s G \sin(\theta), \quad (12)$$

$$(1 - H) \frac{\partial p}{\partial x} = F (u_x^1 - u_x^2) + (1 - H) \rho_f G \sin(\theta), \quad (13)$$

where (u_x^1, u_y^1) and (u_x^2, u_y^2) are components of the velocity vectors for the particles (phase 1) and fluid (phase 2), $(0xy)$ is the Cartesian coordinate system connected with the ρ_s, ρ_f are densities of the solid and fluid materials, p is the hydrostatic pressure, H and N are the mass and numerical concentrations of the particles, F is the phenomenological coefficient for the viscous drag forces acting on the particle from the viscous fluid, φ the aggregation rate, G is the mass force that can be chosen as $G = ng$, n is the magnification factor when the sedimentation is carried out in a centrifuge [21].

The equation (7) describes the kinetics of the particle aggregation due to the collisions, decompositions or exchange interactions [20]. The mass continuity conditions for the phases (8), (9) and the projections of the momentum equations

for the phases on the axis coordinate (10)-(13) give the system of PDE for the velocities, pressures and numerical concentration of the aggregates. The same model in one-dimensional formulation has been used for the RBC sedimentation modeling in the vertical tubes, in thin gaps between the walls of the rotational viscosimeter of the cylinder-cylinder type [22] and in the centrifugal force field [23]. In the two-dimensional formulation it has been applied to the RBC sedimentation in the circular tubes in the external magnetic field [24]. The system (7)-(13) can be solved by numerical methods, but in order to derive more convenient half-analytical estimations, in this paper a simplified one-dimensional model will be obtained by averaging of the equations (7)-(13) over the transverse coordinate x .

4. One-dimensional approximation for small inclination angles.

Based on the dimension theory, the expressions for F and φ have been found in the form [20], [22] – [24]:

$$F = \mu_f H (1 - H)^{-2,5} w^{-2/3}, \quad \varphi = -k H^2 w^{-2}, \quad (14)$$

where $w = H/N$ is the average volume of the aggregates, k is the empirical constant that determines the aggregate formation.

By excluding pressure in (10)-(13) and using the impermeability condition at the bottom of the tube $x = L$, one can obtain

$$\begin{aligned} u_x^1 &= -\Theta(H) \sin(\theta), & u_y^1 &= \Theta(H) \cos(\theta), \\ u_x^2 &= \frac{H\Theta(H)ng\delta\rho \sin(\theta)}{(1-H)F}, & u_y^2 &= -\frac{H\Theta(H)ng\delta\rho \cos(\theta)}{(1-H)F}, \end{aligned} \quad (15)$$

where $\Theta(H) = H(1 - H)^2 \delta \rho G / F(H)$, $\delta \rho = \rho_s - \rho_f$.

When $\theta = 0$ (15) coincide with the corresponding expressions for the non-uniform centrifugal force field $ng(x) = ax + b$ acting on the blood cells in vertical tubes [23]. When $\theta = 0$ and $n = 1$ (15) coincides with the expressions for the gravitational blood sedimentation computed in [21, 22].

Let us assume, the aggregation at the expense of the lateral motion of the particles is essential if during the time T of the particle sedimentation along the distance L their radial displacement δ will be of the order of magnitude of R . Since $\delta \approx |u_x^1| T$, $T \approx L / |u_y^1|$, this condition accounting for (15) can be written as

$$\frac{\delta}{R} \approx \frac{L |u_x^1|}{R |u_y^1|} = \frac{L}{R} \tan(\theta). \quad (16)$$

Let us consider δ/R as a non-dimensional parameter characterizing the aggregation due to the lateral motion towards the inclined lower wall of the vessel. Since it will result in the faster approaching and aggregation of the particles, this

parameter must be accounted for in the expression for the aggregation rate (14) in the form [24]

$$\varphi = -kN^2w^{-2} (1 + O(\delta/R)). \quad (17)$$

For instance, in [23] the following estimation has been used:

$$\varphi = -\frac{kN^2}{w^2} \left(1 - 2\frac{\delta}{R} + \frac{\delta^2}{R^2}\right)^{-1}. \quad (18)$$

As it is follows from (16), the second order term in (18) can be neglected for sufficiently small inclination angles. For instance, in for the laboratory viscosimeters for blood testing the values $L/R \sim (1.7 - 2.5)$ so at the angles $\theta < 10^\circ$ the simplifying approach $\delta/R \ll 1$ is valid and $\varphi = -kN^2(1 + 2\delta)/w^{-2}$ can be accepted.

For the averaging purposes let us introduce the following designations: $x \in [0; x_s]$, where x_s is the coordinate of the interface between the layers I and IIa (Fig.1b)

$$\begin{aligned} N(t, x, y) &= \begin{cases} N(t, y), & x \leq x_s \\ 0, & x_s < x \leq s \end{cases}, \\ H(t, x, y) &= \begin{cases} H(t, y), & x \leq x_s \\ 0, & x_s < x \leq s \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

where s is the width or the area occupied by the particles and aggregates (Fig.1b).

According to (15) the interface $x = x_s$ between the zones I and IIa moves with the speed

$$U_x = u_x^1 \Big|_{x=x_s} = H(1-H)^2 g\delta\rho \sin\alpha F^{-1}. \quad (20)$$

The averaged values will be introduced in the form

$$\langle f \rangle = \frac{1}{x_s} \int_0^{x_s} f dx. \quad (21)$$

Then the system (7)-(13) can be written as

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle N \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle N \rangle \langle u_y^1 \rangle + k \langle N \rangle^2 \Delta(x_s, y) &= \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial t} (N(t, x_s, y) - \langle N \rangle) + \\ + \left\{ \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y} (N(t, x_s, y) u_y^1(t, x_s, y) - \langle N \rangle \langle u_y^1 \rangle) \right\} - \\ - \frac{1}{x_s} N(t, x_s, y) u_x^1(t, x_s, y), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \langle H \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle H \rangle \langle u_y^1 \rangle = \\ & = \left\{ \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y} (H(t, x_s, y) u_y^1(t, x_s, y) - \langle H \rangle \langle u_y^1 \rangle) \right\} - \\ & - \frac{1}{x_s} H(t, x_s, y) u_x^1(t, x_s, y) - \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial t} (\langle H \rangle - H(t, x_s, y)), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\langle H \rangle \langle u_y^1 \rangle + (1 - \langle H \rangle) \langle u_y^2 \rangle] = \\ & = \left\{ \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y} (H(t, x_s, y) u_y^1(t, x_s, y) - \langle H \rangle \langle u_y^1 \rangle) \right\} + \\ & + (1 - H(t, x_s, y)) u_y^2 - (1 - \langle H \rangle) \langle u_y^2 \rangle - \\ & - \frac{1}{x_s} [H(t, x_s, y) u_x^1(t, x_s, y) + (1 - H(t, x_s, y)) u_x^2(t, x_s, y)], \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \langle H \rangle \frac{\partial}{\partial y} \langle p \rangle + F(\langle H \rangle, \langle N \rangle) (\langle u_y^1 \rangle - \langle u_v^2 \rangle) + \rho_s g \cos(\theta) \langle H \rangle = \\ & = \left\{ \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y} (H(t, x_s, y) p(t, x_s, y) - \langle H \rangle \langle p \rangle) \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & (1 - \langle H \rangle) \frac{\partial}{\partial y} \langle p \rangle - F(\langle H \rangle, \langle N \rangle) (\langle u_y^1 - u_y^2 \rangle) + \rho_f g \cos(\theta) (1 - \langle H \rangle) = \\ & = \left\{ \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y} ((1 - \langle H \rangle) \langle p \rangle - (1 - H(t, x_s, y)) p(t, x_s, y)) \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

where $\Delta(x_s, y) = \frac{1}{x_s} \int_0^{x_s} \left(1 + O\left(\frac{\delta}{R}\right)\right) x dx$.

The system could be significantly simplified when $\partial x_s / \partial y = 0$. Since in the general case $\partial x_s / \partial y \neq 0$, let us estimate the terms in the right hand sides of (22)-(26). In the zones I and II we have the following expressions:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = [H(t, x_s, y) \rho_s + (1 - H(t, x_s, y) \rho_f)] g \sin(\theta) \quad (0 \leq x \leq x_s) \quad (27)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_f g \sin(\theta) \quad (x_s < x \leq R).$$

$$|\langle p \rangle - p(t, x_s, y)| = (H(t, x_s, y) \rho_s + (1 - H(t, x_s, y)) \rho_f) g \sin \alpha x. \quad (28)$$

Then at the conditions $R/L \ll 1$, $H_0 < 1$ we can obtain from (15), (26), (27) the following estimations:

$$\frac{|\langle p \rangle - p(t, x_s, y)|}{\rho_s g |\cos \alpha| \langle H \rangle} \ll 1; \quad \frac{|\langle u_y^1 \rangle - u_y^1(t, x_s, y)|}{u_y^1} \ll 1. \quad (29)$$

In this case the terms in the curly brackets in (22)-(26) can be neglected and the governing equations for the averaged variables $N(t, x_s, y) = \langle N \rangle$, $H(t, x_s, y) = \langle H \rangle$ can be written in the form (the averaging signs are omitted):

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} N u_y^1 &= -k N^2 \Delta - \frac{NH(1-H)^2 \delta \rho n g \sin(\theta)}{F x_s}, \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} H u_y^1 &= -\frac{H^2(1-H)^2 \delta \rho n g \sin(\theta)}{F x_s}, \\ \frac{\partial}{\partial y} [H u_y^1 + (1-H) u_y^2] &= 0, \\ H \frac{\partial p}{\partial y} + F(u_y^1 - u_y^2) + \rho_s n g H \cos(\theta) &= 0, \\ (1-H) \frac{\partial p}{\partial y} - F(u_y^1 - u_y^2) + \rho_f n g (1-H) \cos(\theta) &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

When $\theta = 0$ the system (30) coincides with the corresponding systems in [20, 21]. The second term in the right hand side of the first equation in (30) is responsible for additional aggregation of the particles due to the transversal displacements. In [24] the additional term responsible for the additional aggregation induced by the applied magnetic field was computed as $2M\delta\chi NH(1-H)^2 F^{-1} x_s$, where $\delta\chi$ is the difference of the magnetic susceptibilities of the particles and fluid, M is the non-dimensional intensity of the ponderomotive force.

With the non-dimensional variables

$$Y = \frac{y}{L}, \quad T = \frac{t}{T^*}, \quad T^* = \frac{L}{u_0}, \quad u_0 = \frac{ng\delta\rho w_0^{2/3}}{\mu_f}, \quad W = \frac{w}{w_0}, \quad U_y^1 = \frac{u_y^1}{u_0}, \quad K = \frac{kL}{u_0 w_0}$$

where T^* is the characteristic time, w_0 is the volume of a single particle, the equations for the concentration and volume of the aggregates are the following

$$\frac{\partial W}{\partial T} + U_y^1 \frac{\partial W}{\partial Y} = KH\Delta,$$

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial Y} H U_y^1 = -\frac{H(1-H)^{4,5} W^{2/3} \sin(\theta)}{Lx_s}, \quad (31)$$

$$U_y^1(H, W, Y) = -(1-H)^{4,5} W^{2/3} \cos(\theta).$$

The boundary conditions for the variables are

$$C(0, Y) = C_0, \quad W(0, Y) = 1, \quad U^1(T, L) = 0. \quad (32)$$

The system (31) is hyperbolic [20, 21] and can be written in the matrix form

$$\mathfrak{S} \frac{\partial}{\partial T} \begin{pmatrix} W \\ H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_y^1 & 0 \\ H \frac{\partial U_y^1}{\partial W} & U_y^1 \left(1 + \frac{H}{U_y^1} \frac{\partial U_y^1}{\partial H}\right) \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial Y} \begin{pmatrix} W \\ H \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} KH\Delta \\ -H \frac{\partial U_y^1}{\partial Y} - \frac{H(1-H)^{4,5} W^{2/3} \sin(\theta)}{Lx_s} \end{pmatrix},$$

where \mathfrak{S} is the unit matrix

Its characteristic values are

$$\lambda_1 = U_y^1, \quad \lambda_2 = U_y^1 \left(1 + \frac{H}{U_y^1} \frac{\partial U_y^1}{\partial H}\right).$$

The characteristic equations are

$$(I) \quad \frac{dY}{dT} = -(1-H)^{4,5} W^{2/3} \cos(\theta), \quad (33)$$

$$(II) \quad \frac{dY}{dT} = A(1-5.5H) \cos(\theta). \quad (34)$$

where $A = (1-H)^{3,5} W^{2/3}$.

The conditions at the characteristics are

$$(I) \quad \frac{dW}{dT} = -KH\Delta, \quad (35)$$

$$(II) \quad \frac{dW}{dT} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2H-1)A \cos \alpha}\right) \frac{dH}{dT} + \frac{H(1-H)A \sin(\theta)}{Lx_s} - 1. \quad (36)$$

The characteristics of the family (I) have a positive slope, while the family (II) in the physiological range have negative slope. Solution of the one-dimensional problem (31)-(32) can be obtained on (33)-(36) by the method of characteristics.

5. Two-dimensional formulation for arbitrary inclination angles.

In the case of arbitrary finite inclination angle the hyperbolic system of two-dimensional equations for and can be obtained from (7)-(8). Supposing the continuity of $\partial p/\partial x$ and $\partial p/\partial y$, the system can be written in the form

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u_x^1 \frac{\partial w}{\partial x} + u_y^1 \frac{\partial w}{\partial y} = kH, \quad (37)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u_x^1 \frac{\partial H}{\partial x} + (u_y^1 + 2H\Theta' \sin(\theta)) \frac{\partial H}{\partial y} = 0. \quad (38)$$

This hyperbolic system can be solved by the two-dimensional analogy of the method of characteristics. All the expressions for the bicharacteristics and conditions on them can be obtained on the formulae in [24] by substitution of $\sin(\theta)$ and $\cos(\theta)$ instead of the magnetic field components ψ_r and ψ_x . Then the pressure can be determined from the expressions obtained from (10)-(13)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = (H\rho_s + (1 - H)\rho_f)G \sin(\theta), \quad (39)$$

with the boundary conditions

$$\frac{\partial p}{\partial y} = (H\rho_s + (1 - H)\rho_f)G \cos(\theta). \quad (40)$$

where p_{atm} is the atmospheric pressure. Solution of the two-dimensional aggregating particle sedimentation problem (7)-(13) can also be found by the particle dynamics method [25].

6. Numerical results and discussion.

Like in the case of the vertical tube [20, 21], the families of characteristics (I) and (II) have positive and negative slopes accordingly. The family (I) corresponds to the interface between the zones II and III, while the family (II) describes the movement of the interface between the zones I and II moving with the corresponding velocity (20). Numerical computations on (33)-(36) have been carried out using the typical parameters for human blood [20, 21]

$$H_0 = 0.35 \div 0.5 \mu_f = (1.1 \div 1.7) \cdot 10^{-3} Pa \cdot s, \quad G = g, \quad \rho_f = 1030 \div 1080 kg/m^3,$$

$$\rho_s = 1050 \div 1150 kg/m^3, \quad L = 5 cm, \quad R = 2 mm, \quad k = 10^{-5} \div 10^{-2} m^3 s^{-1}.$$

The numerical procedure is described in details in [20, 21]. The example of the interface of the software is given in Fig.2. The region confined by the characteristics of different families started at the ends of the tube $Y = 0$ and $Y = 1$ corresponds to the zone II (Fig.1a). Note the longitudinal coordinate axis in Fig.2

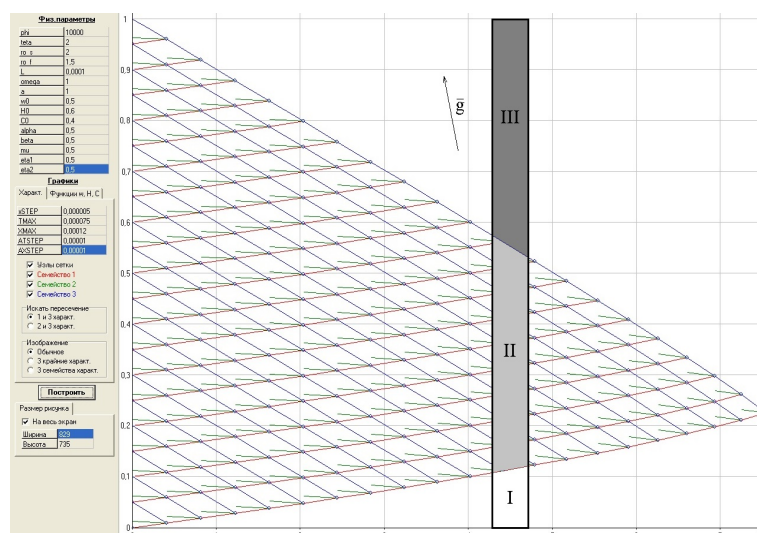


Fig.2. An example of the interface of the software and the zone distribution in the inclined tube: I is the clear fluid zone, II is the zone of sedimenting aggregates, III is the compact zone.

is located in the inverse direction comparatively to the axis in Fig.1. The results of numerical computations are presented in Fig.3-4.

When the applied force increases ($n=1,2,3,\dots$), the particles settle faster (Fig.3a). Similar dependence is observed for the suspensions with increasing initial concentration (Fig.3b), aggregation rate (Fig.3c) and small increase in the inclination angle (Fig.3d). The increased external force uniformly accelerates particle sedimentation along the tube and the locations of the interfaces between I and II, II and III changes in a similar way (Fig.3a). When the initial concentration increases, the changes are more noticeable for the I-II interface (Fig.3b). It may be caused by lower viscosities of the suspension at the upper part of the tube that produces lower Stokes forces acting on the surface of the more freely sedimenting aggregates. In the lower part of the zone II the aggregates of the same volume are surrounded by more concentrated suspension with higher viscosity that produced higher Stokes forces hampering the settling of the aggregates towards the zone of the sediment III. When particle aggregation rate increases, the changes are more noticeable at the II-III interface (Fig.3c) because in the region with higher concentration the compact zone formation will be very fast. Small increase in the inclination angle significantly accelerates the zone I formation (Fig.3d) because of the decrease of the length the particles move before reaching the lower wall of the inclined tube. When the inclination angle becomes bigger than some critical angle θ^* , the sedimentation decelerates. In the case of material parameters used in the computation results presented in Fig.3d $\theta^* \sim 8^\circ$. The behavior of the particles in the case is similar to those for the granular materials on the inclined surfaces. The inclination shortens the distance each particle must move to reach the lower

inclined wall that accelerates the sedimentation. When a particle approach the interface II-III and can not longer sediment, it can slide over the interface due to the force $\sim ng \cos(\theta)$ that decreases with increasing the angle. The ability of the settled particle to slide is also confined by the interaction between the neighboring particles that can lead to their aggregation and by higher shear drag for sliding in the concentrated suspension that those in the clear fluid. The increase in the fluid viscosity decelerates the sedimentation but the properties of the particle dynamics remain similar to those presented in Fig.3a-d that confirms physical relevance of the computed results. When $n = 1$, $\theta = 0^\circ$ the computed curves correspond to those obtained in [21].

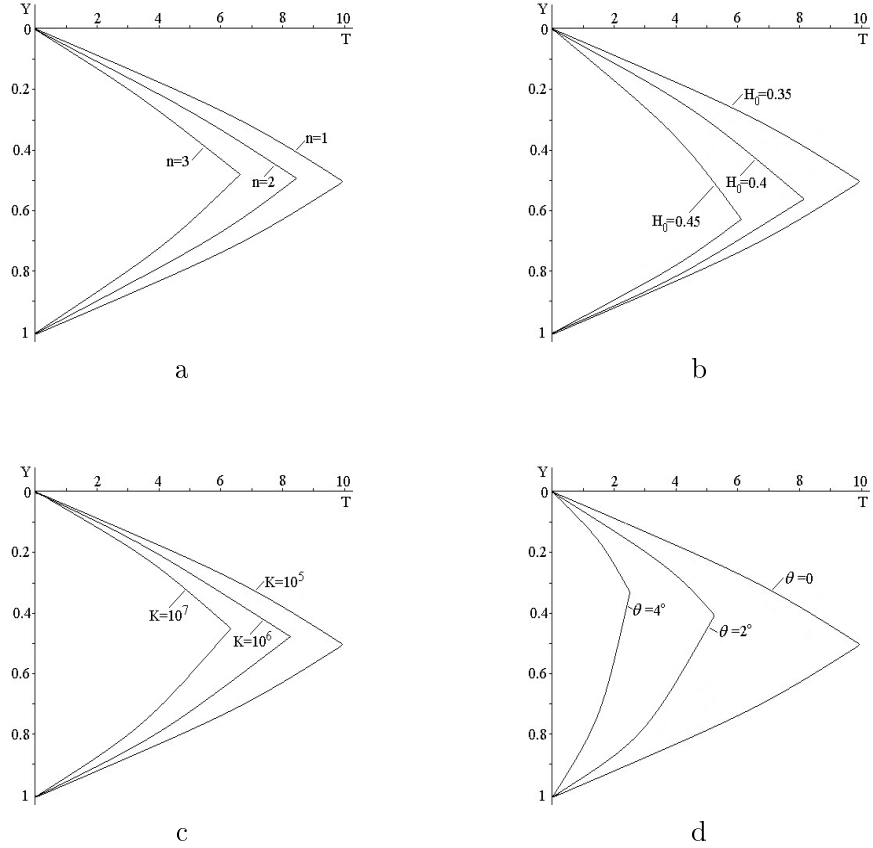


Fig.3. Locations of the characteristics at different external force (a), initial concentrations of the particles (b), aggregation rate (c), and inclination angle (d).

$$T_{max} = \frac{1}{KH_0} \left[\left(\frac{5KH_0}{3[1 - \gamma(H_0)](1 - H_0)^{3.5}} + 1 \right)^{0.6} - 1 \right], \quad (41)$$

$$\text{where } \gamma(H) = \frac{1 - 3H}{1 + 2H} + \frac{2.5H}{1 - H}.$$

Since the drag coefficient $F(H, W)$ and aggregation rate $K(H, W, \Delta)$ in the inclined tube could be more complex functions than in the expression (14) which was validated for the vertical tubes [22], (41) can be rewritten in the form

$$T_{max} = \frac{1}{KH_0} \left[\left(\frac{5KH_0f(H_0)}{3[1 - \gamma(H_0)](1 - H_0)^{3.5}} + 1 \right)^{0.6} - 1 \right], \quad (42)$$


where $f(H_0)$ is the unknown correcting function that is specific for the studied suspension.

When $\theta = 0^\circ$ (42) must coincide with (41). Based on (42), a novel method for testing the suspension stability of any technical suspension, blood or nanofluid can be proposed. The measurements must be carried out at different inclination angles $\theta = 0^\circ - 10^\circ$. In the case of $\theta = 0^\circ$ (42) allows computation of the basic aggregation rate k by the measured value T_{max} . Then a series of experiments with gradually increasing slope, to say, $\theta = 2^\circ; 4^\circ; 6^\circ; 8^\circ; 10^\circ$ will give the dependence $f(H_0)$ that can be used for corrections of the expressions in (14) for the inclined tube case. Before decision making upon the nanofluid ageing or blood aggregatability the test must be conducted for the same nanofluid in its basic state before being used for a long time or for the healthy native blood samples. The proposed approach will be tested experimentally in future works.

7. Conclusions.

The Boycotte effect which is used in testing of some industrial suspensions is very attractive for usage in the medical diagnostics instead of conventional blood sedimentation test, for investigation of ageing of micro and nanofluids. The developed theory allows easy determination of the sedimentation curves as the moving interfaces I-II and II-III by the method of characteristics. When the inclination angle $\theta = 0^\circ$ the obtained numerical results and analytical expressions are transformed to the corresponding expressions obtained before for the gravitational sedimentation in the vertical tubes with and without external magnetic field and in the non-uniform centrifugal force field. It was shown, the sedimentation rate increased with increasing the particle concentration, their aggregation rate and external force, but with distinct regularities for the I-II and II-III interfaces. The corresponding dependence on the angle is more complex. Sedimentation is accelerated by small angles but at the angles exceeded some critical value the settling is decelerated and hampered. That can be explained by the initial faster settling followed by deceleration of sliding of the particles along the inclined wall by the shear drag. Based on the obtained results, a novel method of determination not only the aggregation ability of the particles but also the particle-specific and angle-dependent shear stress factor is proposed. The experimental validation of the proposed approach will be tested in our future experimental studies on blood and different types of nanofluids used in the microfluidic flow systems.

ORCID ID

V. Baranets  <https://orcid.org/0000-0001-6386-3207>

N. Kizilova  <https://orcid.org/0000-0001-9981-7616>

REFERENCES

1. A. E. Boycott. Sedimentation of blood corpuscles, *Nature*, — 1920. — V. **104**, 532 p.
2. S. A. P. Moys. Sedimentation of polydisperse particles at low Reynolds numbers in inclined geometries, PhD Thesis. Santiago de Chile, 2016. — 78 p.
3. P. Hanson, T. Trigg, G. Rachal, M. Zamora. Investigation of Barite Sag in Weighted Drilling Fluids in High Deviated Wells, SPE paper 20423 presented at the SPE Annual Conference and Exhibition, New Orleans, 1990. — Sept. — P. 23-26.
4. J. Duran, T. Mazozi. Granular boycott effect: how to mix granulates, *Phys Rev E Stat Phys Plasmas Fluids Relat Interdiscip Topics*, 1999. — Nov. — 60 (5 Pt B):6199 — 201 p.
5. T. Peacock, F. Blanchette, J. W. M. Bush. The stratified Boycott effect, *J. Fluid Mech*, 2005. — 529. — P. 33-49.
6. R. S. MacTaggart, D. H-S. Law, J. H. Masliyah, K. Nandakumar. Gravity separation of concentrated bidisperse suspensions in inclined plate settlers, *Intern. J. Multiphase Flow*, 1988. — 14(4):519. — 532 p.
7. E. Fukada, T. Azuma. Erythrocyte sedimentation rate II. Effects of tilt angle in saline solution, *Biorheology*, 1988. — 1-2. V. **25**. — P. 157-164.
8. A. Acrivos, E. Herbolzheimer. Enhanced sedimentation in settling tanks with inclined walls, *J. Fluid Mech.*, 1979. — 3. V. **92**. — P. 435-457.
9. H. Lamb. *Hydrodynamics*, 1932. Cambridge University Press.
10. Eric Ponder. On Sedimentation and rouleaux formation, *Experimental Physiology*, 1926. — 2. V. **16**. — P. 173-194.
11. N. Nakamura, K. Kuroda. La cause de l'accélération de la vitesse de sédimentation des suspensions dans les récipients inclinés, *Keijo J. Med.*, 1937. — V. **8**. — P. 256-296.
12. W. D. Hill, R. R. Rothfus, K. Li. Boundary-enhanced sedimentation due to settling convection, *Int. J. Multiphase Flow*, 1977. — V. **3**. — P. 561-583.
13. R. F. Probst, R. E. Hicks. Lamella settlers: a new operating mode for high performance, *Ind. Water Eng.*, 1978. — V. **15**. — P. 6-8.

14. I. Rubinstein. A steady laminar flow of a suspension in a channel, *International Journal of Multiphase Flow*, 1980. — 5. V. **6**. — P. 473–490.
15. W. F. Leung, R. F. Probstein. Lamella and tube settlers. 1. Model and operation, *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development*, 1983. — 1. V. **22**. — P. 58–67.
16. Y. Toyama, T. Dobashi, A. Sakanishi, S. Oka. Enhanced erythrocyte sedimentation rate and upflow layer in inclined rectangular vessel, *Jap. J. Appl. Phys.*, 1990. — 2. V. **29**. — P. 453-454.
17. J. Zhang, Q. Guo, M. Liu, J. Yang. A lab-on-CD prototype for high-speed blood separation, *J. Micromech. Microeng.*, 2008. — 12. V. **18:125025**.
18. S. Chakraborty. *Microfluidics and Microscale Transport Processes*, 2012. CRC Press., — 366 p.
19. Z.-J. Xu, E.E. Michaelides. A Numerical Simulation of the Boycott Effect, *Chemical Engineering Communic.*, 2005. — 4. V. **192**. — P. 532-549.
20. N. Kizilova, L. Batyuk, V. Cherevko. Human Red Blood Cell Properties and Sedimentation Rate: a Biomechanical Study, *Biomechanics in Medicine and Biology: Proceedings of the International Conference of the Polish Society of Biomechanics*, Zielona Gora, 2018. — September 5-7. — Poland. K. Arkusz, R. Bedzinski, T. Klekiel, S. Piszczatowski, eds. Springer Series “Advances in Intelligent Systems and Computing.” — V. **831**, — 2019. — P. 3-22.
21. N. N. Kizilova, V. A. Cherevko. Gravitational sedimentation of erythrocytes: experiments and theoretical model, *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, 2009. — V. **875**. — P. 80-94.
22. Y. S. Losev. Some problems of hydromechanics of suspensions with varying densities: application to the blood. PhD Thesis, 1984. — Moscow University. — 135 p.
23. O. M. Datsok, Ye. N. Zholonsky, N. N. Kizilova. Two-phase model of the erythrocytes sedimentation in a non-uniform force field, *Visnyk Kharkov Polytechnic University*, 2002. — V. **135**. — P. 61-66.
24. N. N. Kizilova. Effect of radial motion of erythrocytes on their sedimentation in a tube in an external magnetic field, *Fluid Dynamics*, 1991. — 5. V. **26**. — P. 737-744.
25. V. A. Baranets, N. N. Kizilova. Discrete modeling of aggregation and sedimentation of nanoparticles in suspensions, *Visnyk of V.N. Karazin Kharkov National University. Ser. “Mathematical modeling. Information technologies. Automated control systems”*, 2018. — V. **38**.

V. Baranets, N. Kizilova. **Mathematical modeling of particle aggregation and sedimentation in the inclined tubes.** Sedimentation of the aggregating particles in the gravity field is widely used as an easy and cheap test of the suspension stability of different technical suspensions, blood and nanofluids. It was established the tube inclination makes the test much faster that is known as the Boycott effect. It is especially important for the very slow aggregating and sedimenting blood samples in medical diagnostics or checking the ageing of the nanofluids. The dependence of the sedimentation rate on the angle of inclination is complex and poorly understood yet. In this paper the two phase model of the aggregating particles is generalized to the inclined tubes. The problem is formulated in the two-dimensional case that corresponds to the narrow rectangle vessels or gaps of the viscosimeters of the cone-cone type. In the suggestion of small angles of inclination the equations are averaged over the transverse coordinate and the obtained hyperbolic system of equations for is solved by the method of characteristics. During the sedimentation the upper region (I) of the fluid free of particles, the bottom region (III) of the compactly located aggregates without fluid, and the intermediate region of the sedimenting aggregates (II) appear. The interface between I and II can be registered by any optic sensor and its trajectory is the sedimentation curve. Numerical computations revealed the increase in the initial concentration of the particles, their aggregation rate, external uniform force and inclination angle accelerate the sedimentation while any increase in the fluid viscosity decelerates it that is physically relevant. Anyway, the behaviors of the acceleration are different. For the elevated force the interfaces I-II and II-III shifts uniformly, while for the elevated concentration or aggregation rate the interface I-II or II-III moves faster. Small increase of the inclination angle accelerates the sedimentation while at some critical angles is starts to decelerate due to higher shear drag in the very viscous mass of the compactly located aggregates. Based on the results, a novel method of estimation of the suspension stability is proposed.

Keywords: Boycott effect; suspension; aggregation; sedimentation; medical diagnostics.

Баранець В. О., Кізілова Н. М. **Математичне моделювання агрегації та осідання частинок в похилих трубках.** Осідання агрегуючих частинок у гравітаційному полі широко використовується як простий і дешевий тест на стабільність суспензії різних технічних сумішей, крові та нанорідин. Встановлено, що нахил трубки робить тест набагато швидшим, що відомо як ефект Бойкотта. Це особливо важливо для дуже повільного агрегуючих та осідаючих зразків крові в медичній діагностиці або перевірки старіння нанорідин. Залежність швидкості осідання від кута нахилу є складною і мало вивченою задачею. У цій роботі узагальнено двофазну модель агрегуючих частинок у похилих трубках. Задача сформульована в двовимірному випадку, що відповідає вузьким прямокутним ємностям або зазорам віскозиметрів конусоподібного типу. У припущенні малих кутів нахилу рівняння усереднюються по поперечній координаті, а отримана гіперболічна система рівнянь розв'язується методом характеристик. Під час осідання з'являється верхня область рідини, вільної від частинок (I), нижня область компактно розташованих агрегатів без рідини (III) і проміжна область осідаючих агрегатів (II). Границя поділу між I та II областями може бути зареєстрована будь-яким оптичним датчиком, а його траєкторія є кривою осідання. Чисельні розрахунки виявили, що збільшення початкової концентрації частинок, їх швидкості агрегації, зовнішньої рівномірної сили і кута нахилу прискорюють осідання, а будь-яке зростання в'язкості рідини сповільнює його, що є фізично доречним. Так чи інакше, поведінка прискорення різна. При зростанні сили границі поділу між зонами I-II і II-III пересуваються рівномірно, тоді як при збільшенні концентрації або швидкості агрегації — рухаються швидше. При невеликому

збільшенні кута нахилу осідання прискорюється, а при деяких критичних кутах починає сповільнюватися внаслідок більш високого зсувного опору в дуже в'язкій масі компактно розташованих агрегатів. На основі отриманих результатів запропоновано новий метод оцінки стійкості суспензії.

Ключові слова: ефект Бойкотта; суспензія; агрегація; седиментація; медична діагностика.

Article history: Received: 14 April 2019; Final form: 22 April 2019;

Accepted: 1 November 2019.

Про перетворення нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі до некритичного випадку

С.М. Чуйко¹, О.В. Несмелова^{1,2}

¹Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ,
Донецька область, вул. Г. Батюка, 19, 84116, Україна

²Інститут прикладної математики і механіки НАН України
Слов'янськ, Донецька область, вул. Г. Батюка, 19, 84116, Україна
chujko-slav@ukr.net, star-o@ukr.net

Знайдено умови існування та побудовано ітераційну схему для знаходження розв'язків слабконелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі.

Ключові слова: крайові задачі; диференціально-алгебраїчна система; некритичний випадок; псевдообернена матриця.

Чуйко С.М., Несмелова О.В. **О приведении нелинейной нетеровой дифференциально-алгебраической краевой задачи к некритическому случаю.** Найдены условия существования и построена итерационная схема для нахождения решений слабонелинейной нетеровой дифференциально-алгебраической краевой задачи.

Ключевые слова: краевые задачи; дифференциально-алгебраическая система; некритический случай; псевдообратные матрицы.

S.M. Chuiko, O.V. Nesmelova. **On the reduction of a nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary-value problem to a noncritical case.** We construct necessary and sufficient conditions for the existence of solution and iterative scheme for the approximate solutions of nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary value problem in critical case.

Keywords: boundary-value problems; differential-algebraic equations; noncritical case; pseudoinverse matrices.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B15.

1. Лінійні крайові задачі для невідроджених диференціально-алгебраїчних систем

Досліджуємо задачу про побудову розв'язків $z(t) \in C^1[a, b]$ лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі [1, 2, 3]

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k; \quad (1)$$

© С.М. Чуйко, О.В. Несмелова, 2019

тут

$$A(t), B(t) \in \mathbb{C}_{m \times n}[a, b] := \mathbb{C}[a, b] \otimes \mathbb{R}^{m \times n}$$

— неперервні матриці, $f(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ — неперервний вектор-стовпець; $\ell z(\cdot)$ — лінійний обмежений матричний функціонал: $\ell z(\cdot) : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$. Матрицю $A(t)$ припускаємо, взагалі кажучи, прямокутною: $m \neq n$, або квадратною, але виродженою. За умови [3]

$$P_{A^*(t)} = 0, \quad A^+(t)B(t) \in \mathbb{C}_{n \times n}[a, b], \quad A^+(t)f(t) \in \mathbb{C}[a, b] \quad (2)$$

система (1) розв'язна відносно похідної

$$z' = A^+(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)), \quad \text{rank } A(t) := \sigma_0 = m \leq n; \quad (3)$$

тут

$$\mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)) := A^+(t)f(t) + P_{A_{\rho_0}}(t)\nu_0(t),$$

$A^+(t)$ — псевдообернена (за Муром–Пенроузом) матриця, $P_{A^*}(t)$ — матриця-ортопроектор: $P_{A^*}(t) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(A^*(t))$, $P_{A_{\rho_0}}(t)$ — $(n \times \rho_0)$ –матриця, складена з ρ_0 лінійно незалежних стовпців $(n \times n)$ –матриці-ортопроектора

$$P_A(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(A(t)).$$

Таким чином, за умови $\rho_0 \neq 0$, система (3), розв'язна відносно похідної, залежить від довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$. Позначимо $X_0(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$X_0'(t) = A^+(t)B(t)X_0(t), \quad X_0(a) = I_n$$

отриманої традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь (3). Відмітимо, що нормальна фундаментальна матриця $X_0(t)$ не вироджена. За умови (2) система (3), а отже і система (1), має розв'язки вигляду

$$z(t, c) = X_0(t)c + K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t) := X_0(t) \int_a^t X_0^{-1}(s) \mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s)) ds$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1). Оскільки за умови (2) система (1) розв'язна для довільної неоднорідності $f(t)$, то випадок (2) будемо називати не виродженим [3, 4, 5]. Підставляючи загальний розв'язок задачі Коші $z(a) = c$ для диференціально-алгебраїчного рівняння (1) в крайову умову (1), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння, розв'язного тоді і тільки тоді, коли [4, 5]

$$P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (\cdot) \right\} = 0. \quad (4)$$

Тут P_{Q^*} — ортопроектор: $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{N}(Q^*)$; матриця $P_{Q_d^*}$ складена з d лінійно незалежних рядків ортопроектора P_{Q^*} , крім того $Q := \ell X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{k \times n}$. Отже, тільки за умови (4) загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1)

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \nu_0(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1)

$$G \left[f(s); \nu_0(s); \alpha \right] (t) := X_0(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (\cdot) \right\} + K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t).$$

Тут P_Q — матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(Q)$; матриця $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ складена з r лінійно незалежних стовпців ортопроектора P_Q . За умови $P_{Q^*} = 0$, крайова задача (1) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α . За аналогією з теорією нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь [2] за умови $P_{Q^*} \neq 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (1) представляє критичний випадок, і навпаки: за умови $P_{Q^*} = 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (1) представляє некритичний випадок.

2. Про приведення лінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі до некритичного випадку

Для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}[a, b]$ розв'язність диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) істотно залежить від вибору цієї функції. Покладемо $\nu_0(t) := \Psi(t)\gamma$, $\Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0 \times w}[a, b]$, $\gamma \in \mathbb{R}^w$; тут $\Psi(t)$ — довільна неперервна матриця повного рангу. Узагальнений оператор Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (1) представимо у виді

$$K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t) = K \left[A^+(s)f(s) \right] (t) + K \left[P_{A_{\rho_0}}(s)\nu_0(s) \right] (t).$$

Позначимо матрицю

$$\mathcal{D} := \left[Q ; \ell K \left[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s) \right] (\cdot) \right] \in \mathbb{R}^{k \times (\rho_0 + w)}.$$

Підставляючи загальний розв'язок

$$z(t, c_{\rho_0}) = X_0(t)c_{\rho_0} + K \left[A^+(s)f(s) \right] (t) + K \left[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s)\gamma \right] (t), \quad c_{\rho_0} \in \mathbb{R}^{\rho_0}$$

задачі Коші для диференціально-алгебраїчного рівняння (1) в крайову умову (1), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{D} \check{c} = \alpha - \ell K \left[A^+(s)f(s) \right] (\cdot), \quad \check{c} := \text{col}(c_{\rho_0}, \gamma) \in \mathbb{R}^{\rho_0 + w}. \quad (5)$$

Рівняння (5) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{\mathcal{D}^*} \left\{ \alpha - \ell K \left[A^+(s) f(s) \right] (\cdot) \right\} = 0. \quad (6)$$

Тут $P_{\mathcal{D}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{D}^*)$; матриця $P_{\mathcal{D}^*}$ складена з d лінійно незалежних рядків ортопроектора $P_{\mathcal{D}^*}$, крім того $Q := \ell X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{k \times \rho_0}$. Отже, за умови (6) загальний розв'язок рівняння (5)

$$\check{c} = \mathcal{D}^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[A^+(s) f(s) \right] (\cdot) \right\} + P_{\mathcal{D}} \delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^{\rho_0+w}$$

визначає загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної задачі (1)

$$z(t, \delta) = K \left[A^+(s) f(s) \right] (t) + \left\{ X_0(t); K \left[P_{A_{\rho_0}} \Psi(s) \right] (t) \right\} \mathcal{D}^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[A^+(s) f(s) \right] (\cdot) \right\} + \left\{ X_0(t); K \left[P_{A_{\rho_0}}(s) \Psi(s) \right] (t) \right\} P_{\mathcal{D}} \delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^{\rho_0+w}.$$

Тут $P_{\mathcal{D}}$ — матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^{\rho_0+w} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{D})$. Таким чином, доведена наступна лема.

Лема. *За умови (2) і (6) загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1)*

$$z(t, c_r) = X_r(t) c_r + G \left[f(s); \psi(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1)

$$G \left[f(s); \psi(s); \alpha \right] (t) := K \left[A^+(s) f(s) \right] (t) + \left\{ X_0(t); K \left[P_{A_{\rho_0}} \Psi(s) \right] (t) \right\} \mathcal{D}^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[A^+(s) f(s) \right] (\cdot) \right\}.$$

Матриця $X_r(t)$ складена з r лінійно незалежних стовпців матриці

$$\left\{ X_0(t); K \left[P_{A_{\rho_0}}(s) \Psi(s) \right] (t) \right\} P_{\mathcal{D}}.$$

Приклад 1. *Вимогам лема задовольняє двоточкова диференціально-алгебраїчна крайова задача*

$$A(t) z'(t) = B(t) z(t) + f(t), \quad f(t) := \begin{pmatrix} 0 & e^t \end{pmatrix}^*, \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \quad (7)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix},$$

крім того

$$\ell z(\cdot) := z(0) - z(2\pi), \quad \alpha := \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 - e^{2\pi} \\ 1 - e^{2\pi} \\ -4 - e^{2\pi} \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок однорідної задачі (7) визначає вироджена матриця $Q = 0$. Покладемо $\Psi(t) := \begin{pmatrix} 1 & \sin t \end{pmatrix}$, при цьому

$$\mathcal{D} = -2\pi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{D}^*} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{\mathcal{D}^*} \neq 0$, то задача (7) представляє критичний випадок, при цьому виконано умову (6) її розв'язності. Таким чином, знаходимо загальний розв'язок неоднорідної задачі (7):

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \psi(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^3;$$

тут $X_r(t) = X_0(t)$, а також

$$G \left[f(s); \psi(s); \alpha \right] (t) = \frac{1}{10\pi} \begin{pmatrix} -5t - 2\pi \cos t + 2e^t\pi \cos t - \pi \sin t - e^t\pi \sin t \\ 2\pi (-\cos t + e^t \cos t + 2 \sin t + 2 e^t \sin t) \\ 5t - 2\pi \cos t + 2 e^t\pi \cos t - \pi \sin t - e^t\pi \sin t \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна крайової задачі (7).

За умови $P_{Q^*} \neq 0$, $P_{\mathcal{D}^*} = 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (1) приведена до некритичного випадку. Останнє означення є узагальненням критичного випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) для нетерової крайової задачі для диференціальної системи, отриманої з системи (1) при $A(t) \equiv I_n$, на випадок залежності узагальненого оператора Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (1) від довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$.

Наслідок. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (1) задовольняє умовам лєми. За умови $P_{\mathcal{D}^*} = 0$, диференціально-алгебраїчна крайова задача (1) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α , а також початкової функції $\varphi(t)$. Загальний розв'язок диференціально алгебраїчної крайової задачі (1)*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \psi(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G \left[f(s); \psi(s); \alpha \right] (t) := K \left[A^+(s) f(s) \right] (t) + \left\{ X_0(t); K \left[P_{A_{\rho_0}} \Psi(s) \right] (t) \right\} \mathcal{D}^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[A^+(s) f(s) \right] (\cdot) \right\}$$

диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1).

Приклад 2. Вимогам наслідку задовольняє двоточкова диференціально-алгебраїчна крайова задача

$$A(t) z'(t) = B(t) z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (z(0) - z(2\pi)) = 0, \quad (8)$$

де матриці $A(t)$ і $B(t)$, а також функція $f(t)$ наведена в прикладі 1.

У випадку однорідної задачі (8) матриця $Q = 0$, отже, відповідно до традиційної класифікації нетерових крайових задач, для задачі (8) має місце критичний випадок. Покладемо $\Psi(t) := \begin{pmatrix} 1 & \sin t \end{pmatrix}$, при цьому

$$\mathcal{D} = -2\pi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{D}^*} = 0.$$

Оскільки $P_{\mathcal{D}^*} = 0$, то задача (8) представляє некритичний випадок, і, відповідно, диференціально-алгебраїчна крайова задача (8) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α . Таким чином, знаходимо загальний розв'язок неоднорідної задачі (8):

$$z(t, c_r) = X_r(t) c_r + G \left[f(s); \psi(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^3;$$

тут $X_r(t) = X_0(t)$, а також

$$G \left[f(s); \psi(s) \right] (t) = \frac{1}{10\pi} \begin{pmatrix} t - e^{2\pi t} - 2\pi \cos t + 2e^t \pi \cos t - \pi \sin t - e^t \pi \sin t \\ 2\pi (-\cos t + e^t \cos t + 2 \sin t + 2 e^t \sin t) \\ e^{2\pi t} - t - 2\pi \cos t + 2 e^t \pi \cos t - \pi \sin t - e^t \pi \sin t \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна крайової задачі (8).

3. Нелінійні крайові задачі для невивроджених диференціально-алгебраїчних систем

Дослідимо задачу про побудову розв'язків

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі

$$A(t) z'(t, \varepsilon) = B(t) z(t, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha. \quad (9)$$

Розв'язки нетерової ($n \neq k$) крайової задачі (9) шукаємо в малому околі розв'язку $z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ породжуючої задачі

$$A(t)z'_0(t) = B(t)z_0(t) + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha. \quad (10)$$

Тут $A(t)$, $B(t) \in \mathbb{C}_{m \times n}[a, b]$ — неперервні матриці, $f(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ — неперервний вектор; $Z(z, t, \varepsilon)$ — нелінійна функція, неперервно диференційовна по незалежній $z(t)$ у малому околі розв'язку породжуючої задачі, неперервна по $t \in [a, b]$ і неперервна по малому параметру $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ — лінійний векторний функціонал: $\ell z(\cdot, \varepsilon) : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$. Нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача (9) узагальнює багаточисленні постановки нелінійних нетерових крайових задач [2]. У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) невироджена породжуюча задача (10) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконано умову (4) і для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ має r лінійно незалежних розв'язків

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \nu_0(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

У критичному випадку в малому околі розв'язку породжуючої задачі крайова задача (9) розв'язна тоді і тільки тоді, коли [4]

$$P_{Q_d^*} \ell K \left[Z(z(s, \varepsilon), s, \varepsilon), \nu_0(s) \right] (\cdot) = 0. \quad (11)$$

Для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ розв'язність нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (9) істотно залежить від вибору цієї функції. Покладемо $\nu_0(t) := \Psi(t)\gamma$, $\Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0 \times w}[a, b]$, $\gamma \in \mathbb{R}^w$; тут $\Psi(t)$ — довільна неперервна матриця повного рангу. Припустимо, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (1) приведена до некритичного випадку: $P_{Q^*} \neq 0$, $P_{\mathcal{D}^*} = 0$.

У статті [4] знайдено умови існування, а також ітераційна схема для знаходження розв'язків невиродженої слабконелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі (9) в критичному випадку, а саме: за умови $P_{Q^*} \neq 0$. Умови існування, а також ітераційна схема для знаходження розв'язків невиродженої слабконелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі (9) в некритичному випадку, а саме: за умови $P_{Q^*} = 0$, знайдені в статті [5]. Метою даної статті є знаходження умов звідності нелінійної невиродженої нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі (9) в критичному випадку до некритичного випадку аналогічно [5, 6]. Припустимо, що крайова задача (9) невироджена; в цьому випадку система (9) розв'язна відносно похідної. Розв'язки невиродженої крайової задачі (9) в такому разі визначає система

$$z' = A^+(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)) + \varepsilon A^+(t)Z(z, t, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha. \quad (12)$$

Розв'язки крайової задачі (12) шукаємо в малому околі розв'язку породжуючої задачі: $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon)$. Фіксуємо одну з констант $c_r \in \mathbb{R}^r$, для знаходження вектора

$$x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad x(t, \cdot) \in \mathbb{C}^1[0, \varepsilon_0], \quad x(t, 0) \equiv 0$$

аналогічно [2], приходимо до задачі

$$x' = A^+(t)B(t)x + \varepsilon A^+(t)Z(z_0 + x, t, \varepsilon), \quad \ell x(\cdot, \varepsilon) = 0. \quad (13)$$

У випадку $P_{\mathcal{D}^*} = 0$ задача (13) розв'язна для довільної нелінійності. Загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (13) для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ має вигляд

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + \varepsilon G \left[A^+(s)Z(z_0 + x, s, \varepsilon); \psi(s); 0 \right] (t).$$

Розв'язки крайової задачі (9) при цьому визначає операторна система [2]

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), \quad x(t, \varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left[A^+(s)Z(z_0 + x, s, \varepsilon); \psi(s); 0 \right] (t).$$

Для побудови розв'язків цієї операторної системи використовуємо [2, 7] метод простих ітерацій; таким чином отримуємо ітераційну схему

$$z_{k+1}(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x_{k+1}(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon), \quad (14)$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left[A^+(s)Z(z_0 + x_k, s, \varepsilon); \psi(s); 0 \right] (t).$$

Отже, доведено наступну теорему.

Теорема. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (10) не вироджене. У випадку $P_{\mathcal{D}^*} = 0$ породжуюча задача (10) розв'язна при довільних неоднорідностях диференціально-алгебраїчної системи і крайової умови (10) і має r лінійно незалежних розв'язків*

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \psi(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

При додатковій умові

$$A^+(\cdot)Z(z, \cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}[a, b], \quad A^+(t)Z(\cdot, t, \varepsilon) \in \mathbb{C}[\|z - z_0\| < q] \quad (15)$$

для побудови розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (9) використовуємо збіжну при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ ітераційну схему (14).

Для визначення величини ε_* може бути використано метод мажоруючих рівнянь Ляпунова [2, 8, 9]; крім того, конструктивна оцінка величини ε_* знайдена у статті [7].

Приклад 3. *Вимогам теореми задовольняє нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача*

$$A(t) z'(t, \varepsilon) = B(t)z(t, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon Z(z, \varepsilon), \quad lz(\cdot, \varepsilon) = 0, \quad (16)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix},$$

крім того

$$z(t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a(t, \varepsilon) \\ z_b(t, \varepsilon) \\ z_c(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \Upsilon := (1 \ 0 \ 0),$$

$$Z(z, \varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 \\ z_b^2(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad lz(\cdot, \varepsilon) := \Upsilon(z(0, \varepsilon) - z(2\pi, \varepsilon)).$$

Для однорідної частини породжуючої задачі матриця $Q = 0$, отже, відповідно до традиційної класифікації нетерових крайових задач для диференціальних систем для задачі (16) має місце критичний випадок. У випадку рівняння (16) породжуючий розв'язок залежить від довільної неперервної функції. Покладемо

$$\Psi(t) := (1 \ \sin t),$$

при цьому

$$\mathcal{D} = -2\pi (1 \ 0), \quad P_{\mathcal{D}^*} = 0.$$

Оскільки $P_{\mathcal{D}^*} = 0$, то у випадку рівняння (16) породжуюча задача представляє умовно некритичний випадок, і, відповідно, породжуюча диференціально-алгебраїчна крайова задача для рівняння (16) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α . Фіксуємо константу

$$c_r := \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

знаходимо

$$z_0(t, c_r) = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 5 \sin 2t - 7 \sin t \\ -2(7 \cos t + 5 \cos 2t - 15) \\ 5 \sin 2t - 7 \sin t \end{pmatrix}.$$

Для побудови розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (16) використовуємо ітераційну схему (14), при цьому, покладаючи $c(\varepsilon) := 0$, маємо:

$$x_1(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x_{1a}(t, \varepsilon) \\ x_{1b}(t, \varepsilon) \\ x_{1c}(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad x_{1c}(t, \varepsilon) = x_{1a}(t, \varepsilon),$$

де

$$x_{1a}(t, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{86\,400} \left(-4\,200 + 7\,125 \cos t - 2\,240 \cos 2t - \right. \\ \left. -903 \cos 3t + 168 \cos 4t + 50 \cos 5t - 3\,012 t \sin t \right), \\ x_{1b}(t, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{43\,200} \left(-3\,012 t \cos t + 5\,451 \sin t - \right. \\ \left. -560 \sin 2t - 603 \sin 3t + 168 \sin 4t + 50 \sin 5t \right).$$

Для оцінки точності знайдених наближень до розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (16) визначимо нев'язки $\Delta_k(\varepsilon)$ нульового і першого наближень до розв'язку крайової задачі (16). Поклавши $\varepsilon := 0, 1$ та $k = 0, 1$, маємо

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0,0500\,556, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 0,00\,281\,729.$$


Відмітимо також, що перше наближення до розв'язку крайової задачі (16) в точності задовольняє крайовій умові.

Запропонована в статті схема дослідження нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач аналогічно [2, 10] може бути перенесена на нелінійні матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі. З іншої сторони, запропонована в статті схема дослідження слабконелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі (9) в критичному випадку може бути перенесена на автономні слабконелінійні диференціально-алгебраїчні крайові задачі [2, 11, 12].

Подяка. Дослідження виконано за фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України, р.н. 0118U003390.

ORCID ID

S. M. Chuiko  <https://orcid.org/0000-0001-7186-0129>

O. V. Nesmelova  <https://orcid.org/0000-0003-2542-5980>

REFERENCES

1. S.L. Campbell. Singular Systems of differential equations. — San Francisco – London – Melbourne. — Pitman Advanced Publishing Program, 1980. — 178 p.
2. A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems; 2-th edition. 2016. De Gruyter, Berlin; Boston, 298 p.
3. S.M. Chuiko. On a Reduction of the Order in a Differential-Algebraic System, Journal of Mathematical Sciences., — 2018. — 235. V. **1**. — P. 2-14.
4. O.V. Nesmelova. Nonlinear boundary value problems for nondegenerate differential-algebraic system, Proceedings of Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine, — 2018. — V. **32**. — P. 78-91.
5. O.V. Nesmelova. Seminonlinear boundary value problems for nondegenerate differential-algebraic system, Vysnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”, — 2019. — V. **89**. — P. 10-20.
6. S.M. Chuiko, E.V. Chuiko, I.A. Boichuk. On the reduction of a Noetherian boundary-value problem to a first-order critical case, Journal of Mathematical Sciences (N.Y.), — 2015.— 208. V. **5**, — P. 607-619.
7. A.S. Chuiko. The convergence region of an iterative procedure for a weakly nonlinear boundary value problem, Nonlinear oscillation, — 2005. — 8. V. **2**. — P. 278-288.
8. D.K. Lika, Yu.A. Ryabov. Iteration methods and majorizing Lyapunov equations in the theory of nonlinear oscillations. 1974. Chisinau: Shtynica, 292 p.
9. O.B. Lykova, A.A. Boichuk. Construction of periodic solutions of nonlinear systems in critical cases, Ukrainian Mathematical Journal, — 1988. — 40. V.1. — P. 62-69.
10. S. Chuiko. Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation, Miskolc Mathematical Notes, — 2016. — 17. V. **1**. — P. 139-150.
11. I.G. Malkin. Some problems of the theory of nonlinear oscillations. 1956. Gostekhizdat, Moscow, 491 p.

12. A. Boichuk, S. Chuiko. Autonomous Weakly Nonlinear Boundary Value Problems in Critical Cases, *Differential Equations*, — 1992. — V. 10. — P. 1353-1358.

Чуйко С.М., Несмелова О.В. **Про перетворення нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі до некритичного випадку.** Дослідження диференційно-алгебраїчних крайові задачі засновані в роботах К. Вейерштрасса, М.М. Лузін і Ф.Р. Гантмахер. Систематичне вивчення диференційно-алгебраїчний крайові задачі присвячені роботи С. Кемпбелл, Ю.Є. Бояринцев, В.Ф. Чистякова, А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк, В.П. Яковця, А.А. Бойчука, А. Ілчманна і Т. рейсу. У той же час дослідження диференційно-алгебраїчних крайових задач тісно пов'язане з дослідженням нелінійних краєві задачі для звичайно різних диференціальних завдань, початкових в роботі А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова, Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова, І.Г. Малкіна, А.Д. Мышкіса, Є.А. Гребеников, Ю.Ю. Мітропольського, І.Т. Кігурадзе, А.М. Самойленко, Н.А. Перестюка і А.А. Бойчука.

Вивчення нелінійної диференційно-алгебраїчна крайова завдання пов'язане з численними додатками відповідна математичними моделей в теорії нелінійних коливань, механіка, біологія, радіотехніка, теорія стійкості рух. Такому чином, актуальна проблема є перенесення результати, отримані в статтях і монографії С. Кемпбелла, А.Й. Самойленко і А.А. Бойчука на нелінійні крайові задачі для диференціально-алгебраїчних рівнянь, зокрема, знаходження необхідних і достатніх умов існування позовом х рішень нелінійних диференційно-алгебраїчних крайових задач.

У статті знайдені умови існування і побудовано ітераційну схему для знаходження рішень слабонелінійної нетерових диференційно-алгебраїчних крайової задачі. Запропонована в статті схема дослідження нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач може бути перенесена на нелінійні матричні диференційно-алгебраїчних крайові задачі. З іншого боку, запропонована в статті схема дослідження нелінійних нетерових диференційно-алгебраїчних крайових задач у критичному випадку може бути перенесена на автономні слабонелінійні диференціально-алгебраїчні краєві задачі.

Ключові слова: крайові задачі; диференціально-алгебраїчна система; некритичний випадок; псевдообернена матриця.

S.M. Chuiko, O.V. Nesmelova. **About the reduction of the nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary value problem to the noncritical case.** The study of the differential-algebraic boundary value problems was established in the papers of K. Weierstrass, M.M. Lusin and F.R. Gantmacher. Works of S. Campbell, Yu.E. Boyarintsev, V.F. Chistyakov, A.M. Samoilenko, M.O. Perestyuk, V.P. Yakovets, O.A. Boichuk, A. Ilchmann and T. Reis are devoted to the systematic study of differential-algebraic boundary value problems. At the same time, the study of differential-algebraic boundary-value problems is closely related to the study of nonlinear boundary-value problems for ordinary differential equations, initiated in the works of A. Poincare, A.M. Lyapunov, M.M. Krylov, N.N. Bogolyubov, I.G. Malkin, A.D. Myshkis, E.A. Grebenikov, Yu.A. Ryabov, Yu.A. Mitropolsky, I.T. Kiguradze, A.M. Samoilenko, M.O. Perestyuk and O.A. Boichuk.

The study of the nonlinear differential-algebraic boundary value problems is connected with numerous applications of corresponding mathematical models in the theory of nonlinear oscillations, mechanics, biology, radio engineering, the theory of the motion stability. Thus, the actual problem is the transfer of the results obtained in the articles and monographs of S. Campbell, A.M. Samoilenko and O.A. Boichuk on the

nonlinear boundary value problems for the differential algebraic equations, in particular, finding the necessary and sufficient conditions of the existence of the desired solutions of the nonlinear differential algebraic boundary value problems.

In this article we found the conditions of the existence and constructed the iterative scheme for finding the solutions of the weakly nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary value problem. The proposed scheme of the research of the nonlinear differential-algebraic boundary value problems in the article can be transferred to the nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problems. On the other hand, the proposed scheme of the research of the nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary value problems in the critical case in this article can be transferred to the autonomous seminonlinear differential-algebraic boundary value problems.

Keywords: the nonlinear differential-algebraic equations; the nonlinear boundary value problems; the generalized Green's operator; Moore-Penrose pseudo-inverse matrix.

Article history: Received: 30 August 2019; Final form: 21 November 2019;

Accepted: 21 November 2019.

Правила для авторів
«Вісника Харківського національного університету
імені В.Н.Каразіна»,
Серія «Математика, прикладна математика і механіка»

Редакція просить авторів при направленні статей керуватися наступними правилами.

1. В журналі публікуються статті, що мають результати математичних досліджень (англійською, українською або російською мовами).

2. Поданням статті вважається отримання редакцією файлів статті оформлених у редакторі LATEX (версія 2e), анотацій, відомостей про авторів та архіва, що включає LATEX файли статті та файли малюнків. Файл-зразок оформлення статті можна знайти в редакції журналу та на веб-сторінці (<http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>).

3. Стаття повинна починатися з анотацій, в яких повинні бути чітко сформульовані мета та результати роботи. Анотації повинні бути трьома мовами (англійською, українською та російською): першою повинна стояти анотація тією мовою, якою є основний текст статті. В анотації повинні бути прізвища, ініціали авторів, назва роботи, ключові слова та номер за міжнародною математичною класифікацією (Mathematics Subject Classification 2010). Анотація не повинна мати посилань на літературу чи малюнки. На першій сторінці вказується номер УДК класифікації. В кінці статті треба додати розширені (обсягом не менш як 1800 знаків кожна) анотації англійською та українською мовами.

4. Список літератури повинен бути оформлений латинським шрифтом. Приклади оформлення списку літератури:

1. А.М. Lyapunov. A new case of integrability of differential equations of motion of a solid body in liquid, Rep. Kharkov Math. Soc., – 1893. – 2. V.4. – P. 81-85.

2. А.М. Lyapunov. The general problem of the stability of motion. 1892. Kharkov Mathematical Society, Kharkov, 251 p.

5. Кожний малюнок повинен бути пронумерований та представлений окремим файлом в одному з форматів: EPS, BMP, JPG. В файлі статті малюнок повинен бути вставлений автором. Під малюнком повинен бути підпис. Назви файлів малюнків повинні починатись з прізвища першого автора.

6. Відомості про авторів повинні містити: прізвища, імена, по батькові, службові адреси та номери телефонів, адреси електронних пошт та інформацію про наукові профайли авторів (orcid.org, www.researcherid.com, www.scopus.com) з відповідними посиланнями. Прохання також повідомити прізвище автора, з яким треба вести листування.

7. Рекомендуємо використовувати в якості зразка оформлення останні випуски журналу (vestnik-math.univer.kharkov.ua/currentv.htm).

8. У випадку порушення правил оформлення редакція не буде розглядати статтю.

Електронна скринька: vestnik-khnu@ukr.net

Електронна адреса в Інтернеті: <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна,
Серія “Математика, прикладна математика і механіка”, Том 90

Збірник наукових праць

Англійською, українською, російською мовами

Підписано до друку 28.12.2019 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.

Ум. друк. арк. 5,2

Обл.– вид. арк. 6,1

Наклад 100 пр. Зам. №

Безкоштовно.

61022, м.Харків, майдан Свободи, 4, Харківський національний університет
імені В.Н.Каразіна. Видавництво.

Надруковано: ХНУ імені В.Н.Каразіна

61022, м.Харків, майдан Свободи, 4, тел. 705-24-32

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09