

ISSN 2221-5646 (Print),
ISSN 2523-4641 (Online)



KARAZIN UNIVERSITY
CLASSICS AHEAD OF TIME

VISNYK OF V.N.KARAZIN
KHARKIV NATIONAL UNIVERSITY

**Ser. MATHEMATICS, APPLIED
MATHEMATICS AND MECHANICS**



Том 89 ' 2019

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н.Каразіна
серія

**МАТЕМАТИКА,
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
І МЕХАНІКА**

Volume 89, 2019

ISSN 2221-5646 (Print)
ISSN 2523-4641 (Online)

Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна

Серія

«Математика, прикладна математика і механіка»

Серія започаткована 1965 р.

Том 89



Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"

Vol. 89

Харків
2019

До Вісника включено статті з математичного аналізу, математичної фізики, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних наук

(Наказ МОН України №1328 від 21.12.2015 р.)

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (протокол №7 від 24 червня 2019р.).

Головний редактор—Коробов В.І.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ ім. В.Н. Каразіна, Україна

Члени редакційної колегії:

Кадець В.М.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Пацегон М.Ф.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Фаворов С.Ю.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Борисенко О.А.—д-р ф.-м. наук, проф., чл.-кор. НАН України, ФТІНТ НАН України

Єгорова І.Є.—д-р ф.-м. наук, проф., ФТІНТ НАН України

Пастур Л.А.—д-р ф.-м. наук, проф., акад. НАН України, ФТІНТ НАН України

Хруслов Є.Я.—д-р ф.-м. наук, проф., акад. НАН України, ФТІНТ НАН України

Шепельський Д.Г.—д-р ф.-м. наук, проф., ФТІНТ НАН України та

ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Когут П.І.—д-р ф.-м. наук, проф., Дніпровський національний університет

імені Олеса Гончара, м.Дніпро, Україна

Чуйко С.М.—д-р ф.-м. наук, проф., Інститут прикладної математики і

механіки НАН України, м.Слов'янськ, Україна

Домбровський А.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Щецина, Польща

Карлович Ю.І.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Морелос, Мехіко, Мексика

Корбич Йозеф—д-р ф.-м. наук, проф., чл.-кор. ПАН, Університет Зелона Гора, Польща

Нгуєн Хоа Шон—д-р ф.-м. наук, проф., Академія наук та технології В'єтнама,

Інститут математики, Ханой, В'єтнам

Поляков А.І.—д-р ф.-м. наук, проф., ІНРІА Національний дослідницький інститут

інформатики та автоматки, Ле-Шене, Франція

Скляр Г.М.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Щецина, Польща

Солдатов О.П.—д-р ф.-м. наук, проф., Белгородський університет, Росія

Відповідальний секретар — Резуєнко О.В., канд. ф.-м. наук

ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Editor-in-Chief — V.I. Korobov—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Associate Editors:

S.Yu. Favorov—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

V.M. Kadets—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

N.F. Patsegon—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

A.A. Borisenko—Dr. Sci., Prof., corresponding member of NASU,

B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine

I.E. Egorova—Dr. Sci., Prof., B.Verkin Institute for Low Temperature Physics

and Engineering, Ukraine

E.Ya. Khruslov—Dr. Sci., Prof., academician of NASU,

B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine

L.A. Pastur—Dr. Sci., Prof., academician of NASU,

B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine

D.G. Shepelsky—Dr. Sci., Prof., B.Verkin Institute for Low Temperature Physics

and Engineering, Ukraine

S.M. Chujko—Dr. Sci., Prof., Donbas State Pedagogical University, Ukraine

P.I. Kogut—Dr. Sci., Prof., Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine

Andrzej Dabrowski—Dr. Sci., Prof., University of Szczecin, Poland

Yu. Karlovich—Dr. Sci., Prof., Morelos University, Mexico

Jozef Korbicz—Dr. Sci., Prof., corresponding member of PAS, University of Zielona Gora, Poland

Nguyen Khoa Son—Dr. Sci., Prof., Vietnamese Academy of Science and Technology,

Institute of Mathematics, Hanoi, Vietnam

A.E. Polyakov—Dr. Sci., Prof., INRIA Institut National de Recherche

en Informatique et en Automatique, Le Chesnay, France

G.M. Sklyar—Dr. Sci., Prof., University of Szczecin, Poland

O.P. Soldatov—Dr. Sci., Prof., Belgorod University, Russia

Responsible Editor—A.V. Rezounenko, Ph.D., Associate Prof.,

V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Адреса редакційної колегії: 61022, Харків, майдан Свободи, 4, ХНУ імені В.Н. Каразіна,

ф-т математики і інформатики, к. 7-27, т. 7075240, 7075135, **e-mail:** vestnik-khnu@ukr.net

Інтернет: <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>; http://periodicals.karazin.ua/mech_math

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21568-11468 Р від 21.08.2015

©Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, оформлення, 2019

ЗМІСТ

Вишневецький О. Л. Збіжність випадкових блукань на двічі транзитивній групі, породжених її підстановлювальним характером.	4
Несмєлова О. В. Слабконелінійні крайові задачі для неvierоджених диференціально-алгебраїчних систем.	10
Макаров О. А., Ніколенко І. Г. Часткова параболічність крайової задачі для псевдодиференціальних рівнянь у шарі.	21
Філіпковська М. С. Блокова форма сингулярного жмутка операторів і метод її отримання.	33
Лук'янов П. В. Чисельне моделювання BVI-шуму дволопатевого ротора гелікоптера сінусоїдальної форми.	59
Ігнатович С.Ю., Сухініна Ю.В. Задача швидкодії з двома кінцевими точками для кінематичної моделі БПЛА.	76
Коробов В.І., Дерев'янку А.І. Керованість лінійними динамічними системами перемикування спеціального типу.	93

CONTENTS

A. L. Vyshnevetskiy. Convergence of random walks on double transitive group generated by its permutational character.	4
O. V. Nesmelova. Seminonlinear boundary value problems for nondegenerate differential-algebraic system.	10
A. A. Makarov, I. G. Nikolenko. Partial parabolicity of the boundary-value problem for pseudodifferential equations in a layer.	21
M. S. Filipkovska. A block form of a singular pencil of operators and a method of obtaining it.	33
P. V. Lukianov. BVI-noise simulation of two-blade helicopter's rotor sin-shape.	59
S. Yu. Ignatovich, Yu. V. Sukhinina. Time-optimal control problem with two final points for a kinematic model of an UAV.	76
V. I. Korobov, A. I. Derevianko. Controllability of the linear switched dynamical systems of the special type.	93

СОДЕРЖАНИЕ

Вишневецький А. Л. Сходимость случайных блужданий на дважды транзитивной группе, порожденных ее подстановочным характером.	4
Несмелова О. В. Слабонелинейные краевые задачи для невырожденных дифференциально-алгебраических систем.	10
Макаров А. А., Николенко И. Г. Частичная параболитичность краевой задачи для псевдодифференциальных уравнений в слое.	21
Филипковская М. С. Блочная форма сингулярного пучка операторов и метод ее получения.	33
Лукьянов П. В. Численное моделирование BVI-шума двухлопастного ротора вертолёта синусоидальной формы.	59
Игнатович С.Ю., Сухинина Ю.В. Задача быстрогодействия с двумя конечными точками для кинематической модели БПЛА.	76
Коробов В.И., Деревянку А.И. Управляемость линейными динамическими системами переключения специального типа.	93

Convergence of random walks on double transitive group generated by its permutational character

A. L. Vyshnevetskiy

*Kharkiv National Automobile and Highway University
25 Yaroslava Mudrogo st., Kharkiv, 61002, Ukraine
alexwish50@gmail.com*

Let P be a probability on a finite group G , $U(g) = \frac{1}{|G|}$ the uniform probability on G , $P^{(n)}$ an n -fold convolution of P . Under well-known mild conditions, $P^{(n)} \rightarrow U$ if $n \rightarrow \infty$. A lot of estimates of the rate of the convergence are found in different norms. We consider the groups that have a double transitive presentation, and the probability P that naturally arises in this presentation. An exact formula for rate of convergence for these groups for the norm $\|F\| = \sum_{g \in G} |F(g)|$, where $F(g)$ is a function on group G , is given.

Keywords: probability; finite group; convergence; convolution.

Вишневецький О. Л., **Збіжність випадкових блукань на двічі транзитивній групі, породжених її підстановлювальним характером.** Нехай P — ймовірність на скінченній групі G , $U(g) = \frac{1}{|G|}$ — рівномірна ймовірність на G , $P^{(n)}$ — n -кратна згортка функції P . Добре відомі умови, при яких $P^{(n)} \rightarrow U$ при $n \rightarrow \infty$. Оцінці швидкості цієї збіжності для різних норм присвячено багато робіт. Ми розглядаємо скінченні групи, які мають двічі транзитивне зображення підстановками, і ймовірність P , що природно виникає в цьому зображенні. В роботі дана точна формула швидкості збіжності для таких груп відносно норми $\|F\| = \sum_{g \in G} |F(g)|$, де $F(g)$ — функція на групі G .

Ключові слова: ймовірність; скінченна група; збіжність; згортка.

Вишневецкий А. Л., **Сходимость случайных блужданий на дважды транзитивной группе, порожденных ее подстановочным характером.** Пусть P — вероятность на конечной группе G , $U(g) = \frac{1}{|G|}$ — равномерная вероятность на G , $P^{(n)}$ — n -кратная свертка функции P . Хорошо известны условия, при которых $P^{(n)} \rightarrow U$ при $n \rightarrow \infty$. Оценка скорости этой сходимости для разных норм посвящено много работ. Мы рассматриваем конечные группы, имеющие дважды транзитивное представление подстановками, и вероятность P , которая естественно возникает в этом изображении. В работе дана точная формула скорости сходимости для таких групп относительно нормы $\|F\| = \sum_{g \in G} |F(g)|$, где

$F(g)$ — функция на группе G .

Ключевые слова: вероятность; конечная группа; сходимость; свертка.

2010 Mathematics Subject Classification: 20D99; 60B15; 60B10.

Let P be a probability on a finite group G , $U(g) = \frac{1}{|G|}$ the uniform probability on G , $P^{(n)}$ — an n -fold convolution of P . Under well-known mild conditions, $P^{(n)} \rightarrow U$ if $n \rightarrow \infty$ (see [1]). A lot of estimates of the rate of the convergence are found in different norms ([2]). We consider the groups that have a double transitive presentation (by permutations), and the probability P that naturally arises in this presentation.

A group G of permutations has its natural character which values equal to the number of points fixed by permutation. If G is transitive, then (see [1] – [3])

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = 1,$$

so the function $P(g) = \frac{1}{|G|} \chi(g)$ is a probability on group G . The probability $P(g)$ naturally arises for any transitive permutation group G .

The function $P(g)$ is a class (or central) one, i.e. it has the same value on each class of conjugate elements of group G . There is a scalar product in a linear space $L(G)$ of class functions: for $F_1, F_2 \in L(G)$

$$(F_1, F_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} F_1(g) \overline{F_2(g)}, \tag{1}$$

where \overline{F} is complex conjugate to a complex number F . Let $Irr(G) = \{\mathbf{1}_G, \chi_1, \dots, \chi_k\}$ be the set of irreducible characters of group G , where $\mathbf{1}_G$ is a principal (or trivial) character. The set $Irr(G)$ form an orthonormal basis of $L(G)$ with respect to the scalar product (1). So any class probability P has decomposition in this basis

$$P = \frac{1}{|G|} \mathbf{1}_G + m_1 \chi_1 + \dots + m_k \chi_k, \tag{2}$$

for some complex numbers m_1, \dots, m_k . Let $d_j = \deg \chi_j$ be the degree of the character χ_j and

$$b_j = \frac{|G| m_j}{d_j} \quad (j = 1, \dots, k). \tag{3}$$

Lemma 1 *For any natural number n*

$$P^{(n)} - U = \sum_{j=1}^k \frac{d_j b_j^n}{|G|} \chi_j. \tag{4}$$

It was established in ([4], proof of theorem 3).

Let G be a double transitive finite group, χ the abovementioned character of G , $d = \deg \chi$ its degree. As a character, χ is a class function. A permutation without fixed points is called regular. By definition, $\chi(g) = 0$ if and only if permutation $g \in G$ is regular.

Theorem 1 $\|P^{(n)} - U\| = \frac{2|A|}{(d-1)^{n-1}|G|}$, where A is the set of regular permutations in G .

Proof. By Birside theorem ([3] – [5]) $\chi = \mathbf{1}_G + \varphi$, φ an irreducible character of G , $\deg \varphi = d - 1$. Then (2) actually is

$$P = \frac{1}{|G|}\mathbf{1}_G + \frac{1}{|G|}\varphi,$$

i.e. in (2) $m_1 = \frac{1}{|G|}$, $m_2 = \dots = m_k = 0$, so in (3) $b_1 = (d-1)^{-1}$, $b_2 = \dots = b_k = 0$. By the lemma above $P^{(n)} - U = M^{-1}\varphi$, where $M = (d-1)^{n-1}|G|$. As $\varphi = \chi - \mathbf{1}_G$ and $\chi(g)$ is a non-negative integer, then $\varphi(g) \geq 0$ for $g \in G \setminus A$, where $A = \{g \in G | \varphi(g) = -1\}$. As character φ is irreducible, then $\sum_{g \in G} \varphi(g) = 0$. For the considered norm

$$\begin{aligned} \|P^{(n)} - U\| &= \frac{1}{M} \sum_{g \in G} |\varphi(g)| = \frac{1}{M} \left(\sum_{g \in A} 1 + \sum_{g \in G \setminus A} \varphi(g) \right) = \\ &= \frac{1}{M} \left(2 \sum_{g \in A} 1 + \sum_{g \in G} \varphi(g) \right) = \frac{2|A|}{M} = \frac{2|A|}{(d-1)^{n-1}|G|}. \end{aligned}$$

Since $\varphi(g) = -1$ if and only if $\chi(g) = 0$, then A is the set of regular permutations in G .

Let us find the number of regular permutations of the following double transitive finite groups: the symmetric group S_d of degree d , the alternating group A_d , the Zassenhaus groups and the Frobenius group of order $p(p-1)$ with Frobenius kernel of prime order p .

Definition ([3] p. 255). A group is said to be sharply k -transitive if it is k -transitive and the stabilizer of any k points is trivial. In case $k = 2$ the group is called a Zassenhaus group ([5], p. 85). All sharply 2- and 3-transitive groups are known [3]. Let

$$E_d = \sum_{r=0}^d \frac{(-1)^r}{r!}.$$

Lemma 2 Let G be a permutation group of degree d . The number N_0 of regular permutations in G equals to:

- a) $d!E_d$, if $G = S_d$;
- b) $\frac{d!}{2}E_{d-2} + (-1)^{d-1}(d-1)$, if $G = A_d$;
- c) $\frac{1}{2}(|G| - (d-1)(d-2))$, if G is a Zassenhaus group;
- d) $p-1$, if G is a Frobenius group of order $p(p-1)$.

Proof.

a) It is well-known problem about the number of derangements [7].

b) Since the group A_d is sharply $(d - 2)$ -transitive, the number $N(i_1, \dots, i_r)$ of its elements leaving definite r points i_1, \dots, i_r fixed equals to

$$N(i_1, \dots, i_r) = \begin{cases} \frac{|A_d|(d-r)!}{d!} = \frac{(d-r)!}{2}, & 1 \leq r \leq d-2 \\ 1, & d-1 \leq r \leq d \end{cases}$$

Therefore, the number of elements that leave arbitrary r points fixed equals to

$$C_d^r N(i_1, \dots, i_r) = \begin{cases} \frac{(d-r)!}{2} \cdot \frac{d!}{r!(d-r)!} = \frac{d!}{2r!}, & 1 \leq r \leq d-2 \\ d, & r = d-1 \\ 1, & r = d \end{cases}$$

If $r = 0$, then $\frac{d!}{2r!} = \frac{d!}{2} = |A_d|$. By the principle of inclusion–exclusion

$$N_0 = \frac{d!}{2} \sum_{r=0}^{d-2} \frac{(-1)^r}{r!} + (-1)^{d-1}d + (-1)^d = \frac{d!}{2}E_{d-2} + (-1)^{d-1}(d-1).$$

c) For Zassenhaus group

$$N(i_1, \dots, i_r) = \begin{cases} \frac{|G|(d-r)!}{d!}, & r = 1, 2 \\ 1, & r \geq 3 \end{cases}$$

As above, multiplying by C_d^r and applying the principle of inclusion–exclusion, we get

$$\begin{aligned} N_0 &= |G| - |G| + \frac{|G|}{2} - C_d^8 + C_d^4 - \dots + (-1)^d C_d^r = \\ &= \frac{|G|}{2} - 1 + C_d^1 - C_d^2 + (-1)^d + (1-1)^d = \frac{1}{2} (|G| - (d-1)(d-2)). \end{aligned}$$

d) As well known, a Frobenius group of order $p(p-1)$, with Frobenius kernel of prime order p , is a double transitive group. A stabilizer of any two points is trivial, so the group is sharply 2-transitive. All the regular permutations in G are $(p-1)$ non-identity elements of its kernel. So $N_0 = p-1$.

Corollary 1 *The norm $\|P^{(n)} - U\|$ equals to:*


- 1) $\frac{2E_d}{(d-1)^{n-1}}$, if $G = S_d$;
- 2) $\frac{2 \left(E_{d-2} + \frac{2}{d!} (-1)^{d-1} (d-1) \right)}{(d-1)^{n-1}}$, if $G = A_d$;

$$3) \frac{|G| - (d-1)(d-2)}{(d-1)^{n-1}|G|}, \text{ if } G \text{ is a Zassenhaus group;}$$

$$4) \frac{2}{(p-1)^{n-1}p}, \text{ if } G \text{ is a Frobenius group of order } p(p-1), \text{ with Frobenius}$$

kernel of prime order p .

ORCID ID

A. L. Vyshnevetskiy  <https://orcid.org/0000-0003-1757-0416>

REFERENCES

1. P. Diaconis, Group Representations in Probability and Statistics. Institute of Mathematical Statistics, 1988. — 198 p.
2. L. Saloff-Coste, Random walks on finite groups. In Probability on Discrete Structures. H. Kesten (editor), Springer. — 2004. — P. 263–340.
3. D. S. Passman, Permutation groups, Benjamin, 1968. — 310 p.
4. M. Isaacs, Character theory of finite groups, AMS Chelsea. — 1976. — 303 p.
5. Ya. G. Berkovich, E. M. Zhmud, Characters of Finite Groups, part 2, Fields Institute Communications (v. 181), 1999. — 332 p.
6. A. L. Vyshnevetskiy. Random walks on finite groups with conjugate class probability: algebraic approach, Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University, Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”, Vol. **86**, 2017. — P. 4–9. (in Russian)
7. H. Ryser, Combinatorial mathematics, N. Y. — 1963. — 154 p.

Вишневецький О. Л., **Збіжність випадкових блукань на двічі транзитивній групі, породжених її підстановлювальним характером.** Нехай P — ймовірність на скінченній групі G , $U(g) = \frac{1}{|G|}$ — рівномірна (або тривіальна) ймовірність на групі G , $P^{(n)} = P * \dots * P$ — n -кратна згортка функції P . Добре відомі умови, при яких $P^{(n)} \rightarrow U$ при $n \rightarrow \infty$. Оцінці швидкості цієї збіжності для різних норм присвячено багато робіт. Ми розглядаємо скінченні групи, які мають двічі транзитивне зображення підстановками, і ймовірність, яка природно виникає в цьому зображенні. Ця ймовірність на кожному елементі групи G пропорційна числу нерухомих (або стаціонарних) точок цього елемента, який розглядається як підстановка. Інакше кажучи, ця ймовірність є характером зображення групи G підстановками. Ймовірність називають класовою, якщо вона приймає однакові значення на кожному класі спряжених елементів групи, тобто є функцією класу. Розглядувана ймовірність є класовою, бо будь-який характер групи приймає однакові значення на спряжених елементах. Будь-якій ймовірності (і, взагалі, функції із значеннями у довільному кільці K) на групі G можна зіставити елемент групової алгебри KG цієї групи над цим кільцем K . Класовій ймовірності відповідає елемент центра цієї групової алгебри, тому класову ймовірність також називають центральною. На абелевій групі будь-яка ймовірність є класовою (центральною).

В роботі розглянута збіжність відносно норми $\|F\| = \sum_{g \in G} |F(g)|$, де $F(g)$ — функція на групі G . Для цієї норми дана точна формула (а не просто оцінка, як у переважній більшості робіт) швидкості збіжності згортки $P^{(n)}$ до тривіальної ймовірності $U(g)$ на групі G . Виявляється, що норма різниці $\|P^{(n)} - U\|$ визначається порядком групи G , її степенем, як групи підстановок, та числом регулярних підстановок у групі G . Регулярною називається підстановка, яка не має нерухомих точок. Розглянуто застосування вказаної формули у випадках, коли група G є симетричною, знакозмінною групою, групою Цассенхауза і групою Фробеніуса порядку $p(p-1)$ з ядром Фробеніуса порядку p і доповненням порядку $p-1$ (p — просте число). Групою Цассенхауза називається двічі транзитивна група підстановок скінченної множини, в якій лише одинична підстановка залишає на місці більше двох елементів цієї множини.

Ключові слова: ймовірність; скінченна група; збіжність; згортка.

A. L. Vyshnevetskiy, **Convergence of random walks on double transitive group generated by its permutational character.** Let P be a probability on a finite group G , $U(g) = \frac{1}{|G|}$ the uniform (trivial) probability on the group G , $P^{(n)} = P * \dots * P$ an n -fold convolution of P . A lot of estimates of the rate of the convergence $P^{(n)} \rightarrow U$ are found in different norms. It is well known conditions under which $P^{(n)} \rightarrow U$ if $n \rightarrow \infty$. Many papers are devoted to estimating the rate of this convergence for different norms. We consider finite groups that have a double transitive representation by substitutions and the probability that naturally arises in this image. This probability on each element of the group is proportional to the number of fixed (or stationary) points of this element, which is considered as a substitution. In other words, this probability is a character of the substitution representation of the group. A probability is called class if it takes the same values on each class of conjugate elements of a group, that is, it is a function of the class. The considered probability is class because any character of a group takes on the same values on conjugate elements. Any probability (and, in general, functions with values in an arbitrary ring) on a group can be associated with an element of the group algebra of this group over this ring. The class probability corresponds to an element of the center of this group algebra; that is why the class probability is also called central. On an abelian group, any probability is class (central).

In the paper convergence with respect to the norm $\|F\| = \sum_{g \in G} |F(g)|$, where $F(g)$ is a function on group G , is considered. For the norm an exact formula not estimate only, as usual for rate of convergence of convolution $P^{(n)} \rightarrow U$ is given. It turns out that the norm of the difference $\|P^{(n)} - U\|$ is determined by the order of the group, degree the group as a substitution group, and the number of regular substitutions in the group. A substitution is called regular if it has no fixed points. Special cases are considered the symmetric group, the alternating group, the Zassenhaus group, and the Frobenius group of order $p(p-1)$ with the Frobenius core of order p (p is a prime number). A Zassenhaus group is a double transitive substitution group of a finite set in which only a trivial substitution leaves more than two elements of this set fixed.

Keywords: probability; finite group; convergency; convolution.

Article history: Received: 11 March 2019;

Accepted: 03 April 2019.

Слабонелинейные краевые задачи для невырожденных дифференциально-алгебраических систем

О.В. Несмелова

*Институт прикладной математики и механики НАН Украины
Славянск, Донецкая область, ул. Г. Батюка, 19, 84116 Украина
star-o@ukr.net*

Получены достаточные условия существования решения нелинейной нетеровой краевой задачи для системы дифференциально-алгебраических уравнений. Исследован случай невырожденной системы дифференциально-алгебраических уравнений, а именно: дифференциально-алгебраической системы, приводимой к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с произвольной непрерывной функцией.

Ключевые слова: нелинейные нетеровы краевые задачи; дифференциально-алгебраические уравнения; псевдообратные матрицы.

Несмелова О.В. **Слабонелінійні крайові задачі для невідроджених диференціально-алгебраїчних систем.** Отримано достатні умови існування розв'язку нелінійної нетерової крайової задачі для системи диференціально-алгебраїчних рівнянь. Досліджено випадок невідродженої системи диференціально-алгебраїчних рівнянь, а саме: диференціально-алгебраїчної системи, що приводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь з довільною неперервною функцією.

Ключові слова: нелінійні нетерові крайові задачі; диференціально-алгебраїчні рівняння; псевдообернена матриця.

O.V. Nesmelova. **Seminonlinear boundary value problems for nondegenerate differential-algebraic system.** We obtained sufficient conditions of the existence of the nonlinear Noetherian boundary value problem solution for the system of differential-algebraic equations. We studied the case of the nondegenerate system of differential-algebraic equations, namely: the differential-algebraic system reduced to the system of ordinary differential equations with the arbitrary continuous function.

Keywords: nonlinear Noetherian boundary value problems; differential-algebraic equations; pseudoinverse matrices.

2010 Mathematics Subject Classification 34B15.

1. Лине́йные краевые задачи для невырожденных дифференциально-алгебраических систем

Исследуем задачу о построении решений $z(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ линейной дифференциально-алгебраической краевой задачи

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad lz(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k; \quad (1)$$

здесь

$$A(t), B(t) \in \mathbb{C}_{m \times n}[a, b] := \mathbb{C}[a, b] \otimes \mathbb{R}^{m \times n}$$

— непрерывные матрицы, $f(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ — непрерывный вектор-столбец; $\ell z(\cdot)$ — линейный ограниченный функционал: $\ell z(\cdot) : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$. Матрицу $A(t)$ предполагаем, вообще говоря, прямоугольной: $m \neq n$, либо квадратной, но вырожденной.

Исследованию дифференциально-алгебраических уравнений при помощи центральной канонической формы и совершенных пар и троек матриц посвящены монографии [1, 2, 3, 4]. В статьях [5, 6] предложена серия достаточных условий разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина задачи Коши для линейной дифференциально-алгебраической системы (1) без использования центральной канонической формы и совершенных пар и троек матриц. В статье [7] предложены условия разрешимости, а также конструкции обобщенного оператора Грина краевой задачи линейной дифференциально-алгебраической системы (1). При условии [5, 6, 7]

$$P_{A^*}(t) = 0, \quad A^+(t)B(t) \in \mathbb{C}_{n \times n}[a, b], \quad A^+(t)f(t) \in \mathbb{C}[a, b] \quad (2)$$

система (1) разрешима относительно производной

$$z' = A^+(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)); \quad (3)$$

здесь $\text{rank } A(t) := \sigma_0 = m \leq n$. Кроме того,

$$\mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)) := A^+(t)f(t) + P_{A_{\rho_0}}(t)\nu_0(t),$$

$A^+(t)$ — псевдообратная (по Муру – Пенроузу), $P_{A^*}(t)$ — матрица-ортопроектор [12]: $P_{A^*}(t) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(A^*(t))$, $P_{A_{\rho_0}}(t)$ — $(n \times \rho_0)$ - матрица, составленная из ρ_0 линейно-независимых столбцов $(n \times n)$ - матрицы-ортопроектора

$$P_A(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(A(t)).$$

Таким образом, при условии $\rho_0 \neq 0$ система (3), разрешенная относительно производной, зависит от произвольной непрерывной вектор-функции $\nu_0(t)$. Обозначим $X_0(t)$ нормальную фундаментальную матрицу

$$X_0'(t) = A^+(t)B(t)X_0(t), \quad X_0(a) = I_n$$

полученной традиционной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3). Заметим, что нормальная фундаментальная матрица $X_0(t)$ невырождена. При условии (2) система (3), а следовательно и система (1), имеет решение вида

$$z(t, c) = X_0(t)c + X_0(t) \int_a^t X_0^{-1}(s) \mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s)) ds, \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, доказана следующая лемма [7].

Лемма 1 При условии (2) система (1) имеет решение вида

$$z(t, c) = X_0(t)c + K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t) := X_0(t) \int_a^t X_0^{-1}(s) \mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s)) ds$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши $z(a) = 0$ для дифференциально-алгебраической системы (1).

Поскольку при условии (2) система (1) разрешима для любой неоднородности $f(t)$, постольку, по аналогии с классификацией импульсных краевых задач [9, 10] случай (2) будем называть невырожденным. С другой стороны, в отличие от классификации импульсных краевых задач речь идет о разрешимости дифференциально-алгебраической системы (1), а не соответствующей краевой задачи. Предположим, что уравнение (1) удовлетворяет требованиям леммы 1. Подставляя общее решение

$$z(t, c) = X_0(t)c + K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad c \in \mathbb{R}^n$$

задачи Коши $z(a) = c$ для дифференциально-алгебраического уравнения (1) в краевое условие (1), приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$Qc = \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (\cdot). \quad (4)$$

Уравнение (4) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (\cdot) \right\} = 0. \quad (5)$$

Здесь P_{Q^*} — ортопроектор: $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{N}(Q^*)$; матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк ортопроектора P_{Q^*} , кроме того $Q := \ell X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{k \times n}$. При условии (5) и только при нем общее решение уравнения (4)

$$c = Q^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (\cdot) \right\} + P_{Q_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет общее решение краевой задачи (1)

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + X_0(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (\cdot) \right\} + K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t).$$

Здесь P_Q — матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(Q)$; матрица $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора P_Q . Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1 *Предположим, что дифференциально-алгебраическое уравнение (1) удовлетворяет требованиям леммы 1. При условии (5) и только при нем для фиксированной непрерывной вектор-функции $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ общее решение дифференциально-алгебраической краевой задачи (1)*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \nu_0(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет обобщенный оператор Грина дифференциально-алгебраической краевой задачи (1)

$$G \left[f(s); \nu_0(s); \alpha \right] (t) := X_0(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (\cdot) \right\} + K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t).$$

Следствие 1 *Предположим, что дифференциально-алгебраическое уравнение (1) удовлетворяет требованиям леммы 1. При условии $P_{Q^*} = 0$, краевая задача (1) разрешима для любых неоднородностей $f(t)$ и α . Общее решение краевой задачи (1)*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \nu_0(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет обобщенный оператор Грина $G[f(s); \nu_0(s); \alpha](t)$ дифференциально-алгебраической краевой задачи (1).

Пример 1. Требованиям следствия 1 удовлетворяет дифференциально-алгебраическая краевая задача

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) := \Upsilon(z(0) + z(\pi)) = 0, \quad (6)$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

кроме того

$$f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 3t \end{pmatrix}, \quad \Upsilon := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку условие (2) выполнено, постольку система (6) невырождена и имеет решение вида

$$z(t, c) = X_0(t)c + K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

где

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 1 - \cos t \\ -\sin t & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \cos t - \cos 3t \\ \sin 3t - \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В данном случае матрица $A(t)$ прямоугольная, при этом

$$\rho_0 = 1 \neq 0, \quad P_A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{A\rho_0}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

поэтому найденное решение зависит от произвольной непрерывной скалярной функции; в данном случае $\nu_0(t) := 0$. Общее решение однородной задачи (6) определяет матрица полного ранга

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{Q^*} = 0.$$

Таким образом, находим общее решение неоднородной задачи (6)

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\left[f(s); \nu_0(s); \alpha\right](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^1;$$

здесь

$$X_r(t) = (1 - \cos t \quad \sin t \quad 1)^*, \quad G\left[f(s); \nu_0(s); \alpha\right](t) = K\left[f(s), \nu_0(s)\right](t)$$

— обобщенный оператор Грина дифференциально-алгебраической краевой задачи (6).

2. Нелинейные краевые задачи для невырожденных дифференциально-алгебраических систем

Исследуем задачу о построении решений

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}^1[0, \varepsilon_0]$$

нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи

$$A(t)z'(t, \varepsilon) = B(t)z(t, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \quad (7)$$

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha. \quad (8)$$

Решения нетеровой ($n \neq k$) краевой задачи (7), (8) ищем в малой окрестности решения $z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ порождающей задачи

$$A(t)z'_0(t) = B(t)z_0(t) + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha. \quad (9)$$

Здесь $Z(z, t, \varepsilon)$ — нелинейная функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной $z(t)$ в малой окрестности решения порождающей задачи, непрерывная по $t \in [a, b]$ и непрерывная по малому параметру. Нелинейная дифференциально-алгебраическая краевая задача (7) обобщает многочисленные постановки нелинейных нетеровых краевых задач [11, 12]. Предположим, что

порождающая краевая задача (9) удовлетворяет требованиям следствия 1; при этом система (7) разрешима относительно производной

$$z' = A^+(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)) + \varepsilon A^+(t)Z(z, t, \varepsilon). \quad (10)$$

Предположим, что порождающая краевая задача (9) невырождена и не критична ($P_{Q^*} = 0$), то есть, удовлетворяет требованиям следствия 1, при этом порождающая задача (9) разрешима для любых неоднородностей $f(t)$ и α . Общее решение порождающей дифференциально-алгебраической краевой задачи (9) для фиксированной непрерывной вектор-функции $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ имеет вид

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \nu_0(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Решения краевой задачи (8), (10) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи: $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon)$. Фиксируя одну из констант $c_r \in \mathbb{R}^r$, для нахождения вектора

$$x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad x(t, \cdot) \in \mathbb{C}^1[0, \varepsilon_0], \quad x(t, 0) \equiv 0$$

аналогично [12], приходим к задаче

$$x' = A^+(t)B(t)x + \varepsilon A^+(t)Z(z_0 + x, t, \varepsilon), \quad \ell x(\cdot, \varepsilon) = 0. \quad (11)$$

В некритическом случае задача (11) разрешима для любой нелинейности. Общее решение дифференциально-алгебраической краевой задачи (11) для фиксированной непрерывной вектор-функции $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ имеет вид

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + G \left[A^+(s)Z(z_0 + x, s, \varepsilon); \nu_0(s); 0 \right] (t).$$

Решения краевой задачи (7), (8) при этом определяет операторная система [12, 13]

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), \quad x(t, \varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = G \left[A^+(s)Z(z_0 + x, s, \varepsilon); \nu_0(s); 0 \right] (t).$$

Для построения решений этой операторной системы применим метод простых итераций; таким образом получаем итерационную схему [12, 13]

$$z_{k+1}(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x_{k+1}(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon), \quad (12)$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) = G \left[A^+(s)Z(z_0 + x_k, s, \varepsilon); \nu_0(s) \right] (t).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2 *Предположим, что дифференциально-алгебраическое уравнение (9) удовлетворяет требованиям следствия 1. В некритическом случае ($P_{Q^*} = 0$) порождающая задача (9) разрешима при любых неоднородностях дифференциально-алгебраической системы и краевого условия (9) и имеет r - линейно-независимых решений*

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \nu_0(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

При дополнительном условии

$$A^+(\cdot)Z(z, \cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}[a; b], \quad A^+(t)Z(\cdot, t, \varepsilon) \in \mathbb{C}[\|z - z_0\| < q] \quad (13)$$

для построения решений дифференциально-алгебраической краевой задачи (7), (8) применима сходящаяся при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ итерационная схема (12).

Для определения величины ε_* может быть использован метод мажорирующих уравнений Ляпунова [11, 12]; кроме того, аналогичная оценка величины ε_* найдена в статье [13].

Пример 2. Требованиям теоремы 2 удовлетворяет нелинейная дифференциально-алгебраическая краевая задача

$$A(t) z'(t, \varepsilon) = B(t)z(t, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon Z(z, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = 0, \quad (14)$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

кроме того

$$z(t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a(t, \varepsilon) \\ z_b(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 3t \end{pmatrix}, \quad \Upsilon := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z(z, \varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 \\ z_a^3(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) := \Upsilon(z(0, \varepsilon) + z(\pi, \varepsilon)).$$

В примере 2 было показано, что порождающая система для уравнения (14) невырождена, а также найдены матрица $X_0(t)$ и оператор $K[f(s), \nu_0(s)](t)$. В случае уравнения (14) порождающее решение зависит от произвольной непрерывной функции; положим, как и в примере 2: $\nu_0(t) := 0$. Фиксируя константу $c_r := 10^{-1}$, находим

$$z_0(t, c_r) = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 4 + \cos t - 5 \cos 3t \\ 15 \sin 3t - \sin t \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Для построения решений нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи (14) применима итерационная схема (12), при этом, полагая $c(\varepsilon) := 0$, имеем:

$$x_1(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x_{1a}(t, \varepsilon) \\ x_{1b}(t, \varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$x_{1a}(t, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{28\,672\,000} \left(-98\,560 + 125\,312 \cos t - 8\,064 \cos 2t - \right. \\ \left. -19\,096 \cos 3t - 1\,792 \cos 4t + 280 \cos 5t + 1\,920 \cos 6t + 175 \cos 7t - \right. \\ \left. -175 \cos 9t + 18\,480 \pi \sin t - 18\,480 t \sin t \right),$$

$$x_{1b}(t, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{28\,672\,000} \left(18\,480 (\pi - t) \cos t - 143\,792 \sin t + \right. \\ \left. +16\,128 \sin 2t + 57\,288 \sin 3t + 7\,168 \sin 4t - 1\,400 \sin 5t - \right. \\ \left. -11\,520 \sin 6t - 1\,225 \sin 7t + 1\,575 \sin 9t \right).$$

Для оценки точности найденных приближений к решению нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи (14) определим невязки

$$\Delta_k(\varepsilon) := \left\| \left\| A(t) z'_k(t, \varepsilon) - B(t) z_k(t, \varepsilon) - f(t) - \varepsilon Z(z, \varepsilon) \right\| \right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}$$


нулевого и первого приближения к решению краевой задачи (14). Положив $\varepsilon = 0, 1$, $k = 0, 1$, имеем

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0,00\,134\,314, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 8,94\,744 \cdot 10^{-6}.$$

Отметим также, что первое приближение к решению краевой задачи (14) в точности удовлетворяет краевому условию.

Доказанная теорема 2 обобщает соответствующие утверждения [12] на случай нелинейной невырожденной дифференциально-алгебраической краевой задачи (7), (8) в некритическом случае. Результаты теоремы 2 легко могут быть перенесены на матричные краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем [14]. Для построения решений нелинейной невырожденной дифференциально-алгебраической краевой задачи (7), (8) применим метод наименьших квадратов [15].

ORCID ID

O. V. Nesmelova  <https://orcid.org/0000-0003-2542-5980>

ЛИТЕРАТУРА

1. Yu.E. Boyarintsev, V.F. Chistyakov. *Algebro-differentsialnyye sistemy. Metody resheniya i issledovaniya*. 1998. Nauka, Novosibirsk, 224 p.
2. A.M. Samoilenko, M.I. Shkil, V.P. Yakovets. *Linijni systemy dyferentsialnykh rivnian z vyrodzhenniam*. 2000. Vyshcha shkola, Kyiv, 296 p.
3. S.L. Campbell. *Singular Systems of differential equations*. 1980. Pitman Advanced Publishing Program, San Francisco – London – Melbourne, 178 p.
4. E. Khayrer, G. Vanner. *Resheniye obyknovennykh differentsialnykh uravneniy. Zhestkiye i differentsialno-algebraicheskiye zadachi*. 1999. Myr, M., 686 p.
5. S.M. Chuiko. *Lineynyye neterovy krayevyye zadachi dlya differentsialno-algebraicheskikh sistem, Komp. issledov. i modelirovaniye*. — 2013. — 5. V. **5**. — P. 769-783.
6. S.M. Chuiko. *A generalized matrix differential-algebraic equation*, *Journal of Mathematical Sciences (N.Y.)*. — 2015. — 210. V. **1**. — P. 9-21.
7. S.M. Chuiko. *On a Reduction of the Order in a Differential-Algebraic System*, *Journal of Mathematical Sciences*. — 2018. — 235, V. **1**. — P. 2-14.
8. A.A. Boichuk, A.A. Pokutnyi, V.F. Chistyakov. *Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations*, *Computational Mathematics and Mathematical Physics.*, — 2013. — 53, V. **6**. — P. 958-969.
9. A.M. Samoilenko, N.A. Perestyuk. *Differentsialnyye uravneniya s impulsnym vozdeystviyem*. 1987. Vishcha shkola, Kyiv, — 287 p.
10. S.M. Chuiko. *A Generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action*, *Differential Equations.*, — 2001. — 37, V. **8**. — P. 1189-1193.
11. E.A. Grebenikov, Yu.A. Ryabov, *Konstruktivnyye metody analiza nelineynykh sistem*. 1979. Nauka, M., 432 p.
12. A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems; 2-th edition*. 2016. Berlin; Boston, De Gruyter, 298 p.
13. A.S. Chuiko. *Domain of Convergence of an Iteration Procedure for a Weakly Nonlinear Boundary-Value Problem*, *Nonlinear oscillation.*, — 2005. — 8, V. **2**. — P. 277-287.
14. S.M. Chuiko. *Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation*, *Russian Mathematics.*, — 2016. — 60, V. **8**. — P. 64-73.

15. S.M. Chuiko, O.V. Starkova. About an approximate solution of autonomous boundary-value problem with a least-squares methods, *Nonlinear oscillation.*, — 2009. — 12, V. 4. — P. 556-573.

Несмелова О. В. **Слабконелінійні крайові задачі для невідроджених диференціально-алгебраїчних систем.** У статті отримано достатні умови існування розв'язку нелінійної нетерової крайової задачі для системи диференціально-алгебраїчних рівнянь, широко використовуваних в механіці, економіці, електротехніці та теорії управління. Досліджено випадок невідродженої системи диференціально-алгебраїчних рівнянь, а саме: диференціально-алгебраїчної системи, розв'язної відносно похідної. В цьому випадку нелінійна система диференціально-алгебраїчних рівнянь зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь з довільною неперервною функцією. Досліджена в статті нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача узагальнює численні постановки нелінійних нетерових крайових задач, що розглядалися в монографіях А.М. Самойленка, Е.О. Гребенікова, Ю.О. Рябова, О.А. Бойчука і С.М. Чуйка, а отримані результати можуть бути перенесені на матричні крайові задачі для диференціально-алгебраїчних систем.

Отримані в статті результати дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач, на відміну від робіт С. Кемпбелла, В.Ф. Бояринцева, В.Ф. Чистякова, А.М. Самойленка і О.А. Бойчука, не передбачають використання центральної канонічної форми, а також досконалих пар і трійок матриць. Для побудови розв'язків даної крайової задачі запропонована ітераційна схема з використанням методу простих ітерацій.

Запропоновані умови розв'язності, а також схема знаходження розв'язків нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі проілюстровані на прикладі. Для оцінки точності знайдених наближень до розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі знайдені нев'язки отриманих наближень у початковому рівнянні. Відзначимо також, то знайдені наближення до розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі в точності відповідають крайовій умові.

Ключові слова: нелінійні нетерові крайові задачі; диференціально-алгебраїчні рівняння; псевдообернена матриця.

O. V. Nesmelova. **Seminonlinear boundary value problems for nondegenerate differential-algebraic system.** In the article we obtained sufficient conditions of the existence of the nonlinear Noetherian boundary value problem solution for the system of differential-algebraic equations which are widely used in mechanics, economics, electrical engineering, and control theory. We studied the case of the nondegenerate system of differential algebraic equations, namely: the differential algebraic system that is solvable relatively to the derivative. In this case, the nonlinear system of differential algebraic equations is reduced to the system of ordinary differential equations with an arbitrary continuous function. The studied nonlinear differential-algebraic boundary-value problem in the article generalizes the numerous statements of the non-linear non-Gath boundary value problems considered in the monographs of A.M. Samoilenko, E.A. Grebenikov, Yu.A. Ryabov, A.A. Boichuk and S.M. Chuiko, and the obtained results can be carried over matrix boundary value problems for differential-algebraic systems.

The obtained results in the article of the study of differential-algebraic boundary value problems, in contrast to the works of S. Kempbell, V.F. Boyarintsev, V.F. Chistyakov, A.M. Samoilenko and A.A. Boychuk, do not involve the use of the central canonical form,

as well as perfect pairs and triples of matrices. To construct solutions of the considered boundary value problem, we proposed the iterative scheme using the method of simple iterations.

The proposed solvability conditions and the scheme for finding solutions of the nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary value problem, were illustrated with an example. To assess the accuracy of the found approximations to the solution of the nonlinear differential-algebraic boundary value problem, we found the residuals of the obtained approximations in the original equation. We also note that obtained approximations to the solution of the nonlinear differential-algebraic boundary value problem exactly satisfy the boundary condition.

Keywords: nonlinear Noetherian boundary value problems; differential-algebraic equations; pseudoinverse matrices.

Article history: Received: 1 October 2018; Final form: 20 February 2019;
Accepted: 22 February 2019.

Частичная параболичность краевой задачи для псевдодифференциальных уравнений в слое

Макаров А. А., Николенко И. Г.

*Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
natvasmak@ukr.net, nig@ukr.net*

В работе рассматривается нелокальная краевая задача для эволюционных псевдодифференциальных уравнений в бесконечном слое. Вводится понятие частично параболической краевой задачи, когда разрешающая функция экспоненциально убывает лишь по части пространственных переменных. Получены необходимые и достаточные условия на символ псевдодифференциального оператора, при которых существуют частично параболические краевые задачи. Исследовано также возмущенное псевдодифференциальное уравнение с символом, зависящим от пространственных и временных переменных.

Ключевые слова: краевая задача; псевдодифференциальные уравнения; преобразование Фурье; параболичность; гипоеллиптичность.

Макаров О. А., Ніколенко І. Г. **Часткова параболічність крайової задачі для псевдодиференціальних рівнянь у шарі.** У роботі розглядається нелокальна крайова задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь у нескінченному шарі. Вводиться поняття частково параболічної крайової задачі, коли розв'язувальна функція експоненціально убуває лише по частині просторових змінних. Отримані необхідні та достатні умови на символ псевдодиференціального оператора, при яких існують частково параболічні крайові задачі. Досліджено також збурене псевдодиференціальне рівняння з символом, що залежить від просторових і часових змінних.

Ключові слова: крайова задача; псевдодиференціальні рівняння; перетворення Фур'є; параболічність; гіпоеліптичність.

A. A. Makarov, I. G. Nikolenko. **Partial parabolicity of the boundary-value problem for pseudodifferential equations in a layer.** A nonlocal boundary-value problem for evolutionary pseudodifferential equations in an infinite layer is considered in this paper. The notion of the partially parabolic boundary-value problem is introduced when a solving function decreases exponentially only by the part of space variables. Necessary and sufficient conditions for the pseudodifferential operator symbol are obtained in which partially parabolic boundary-value problems exist. The disturbed (excitated) pseudodifferential equation with a symbol which depends on space and temporal variables is also investigated.

Key words: boundary-value problem; pseudodifferential equations; Fourier transform; parabolicity; hypoellipticity.

2010 Mathematics Subject Classification 35S15.

1. Введение

Ранее в работе [1] автором была исследована параболическая краевая задача для псевдодифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = A \left(\frac{\partial}{i\partial x} \right) u(x, t) \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T], \quad (1)$$

$$B \left(\frac{\partial}{i\partial x} \right) u(x, 0) + C \left(\frac{\partial}{i\partial x} \right) u(x, T) = \varphi(x). \quad (2)$$

Здесь $A \left(\frac{\partial}{i\partial x} \right), B \left(\frac{\partial}{i\partial x} \right), C \left(\frac{\partial}{i\partial x} \right)$ — псевдодифференциальные операторы с символами $A(\sigma), B(\sigma)$ и $C(\sigma)$, принадлежащими пространству $C_{-\infty}^{\infty} = \bigcap_s \bigcup_p C_p^s$.

Условие параболичности означает, что разрешающая функция

$$Q(\sigma, t) = \exp\{t \cdot A(\sigma)\} (B(\sigma) + C(\sigma) \exp\{T \cdot A(\sigma)\})^{-1}$$

удовлетворяет оценке $|Q(\sigma, t)| \leq c(1 + |\sigma|)^p \exp\{-\rho(t) b |\sigma|^h\}$ с некоторыми положительными b и h , где $\rho(t) = \min\{t, T - t\}$.

Было выяснено, что параболическая краевая задача указанного вида всегда существует для псевдодифференциальных уравнений, символ которых удовлетворяет оценке $|\operatorname{Re} A(\sigma)| \geq b |\sigma|^h - b_0$ с $b, h > 0$, а решения параболической краевой задачи будут бесконечно дифференцируемыми при $\varphi(x) \in L^2$, причем свойство повышения гладкости характеризует параболические краевые задачи.

Оказалось также, что параболическую краевую задачу можно возмущать подчиненными псевдодифференциальными операторами с достаточно малыми коэффициентами, и полученная краевая задача будет корректной, причем это свойство также характерно для параболических задач.

Целью данной работы является исследование аналогичных вопросов для *частично параболических* задач, то есть когда разрешающая функция убывает лишь по некоторым переменным. Оказалось, что решения будут гладкими по соответствующим переменным, а сами уравнения можно возмущать подчиненными псевдодифференциальными операторами, содержащими дифференцирование лишь по соответствующим переменным.

Приведены также примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

2. Частично параболические краевые задачи

Приведем некоторые факты, относящиеся к сверткам основных и обобщенных функций. Пусть Φ — пространство основных функций, инвариантное относительно сдвига и оператора отражения, являющееся пространством Фреше, а Φ' — пространство обобщенных функций.

Сверткой основной и обобщенной функций называется функция

$$(f * \varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f, \varphi(x - y)) \quad \forall f \in \Phi', \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

Если $\forall \varphi \in \Phi$ свертка $f * \varphi \in \Phi$, то f называется *свертывателем* в пространстве Φ . Соответствующий оператор свертки можно представить как псевдодифференциальный оператор с символом $\tilde{f}(\sigma)$, являющимся преобразованием Фурье обобщенной функции f . Если в качестве Φ взять пространство Л. Шварца S быстро убывающих функций, то преобразование Фурье свертки будут принадлежать (см. [2]) пространству бесконечно дифференцируемых функций $C_{-\infty}^{\infty}$, удовлетворяющих оценкам

$$|D^k \psi(\sigma)| \leq c_k (1 + |\sigma|)^{p_k} \quad \forall k = (k_1, \dots, k_n).$$

Если в качестве Φ взять пространство $H^{\infty} = \bigcap_s H^s$, где H^s — пространства Соболева, то символы операторов свертки принадлежат пространству $H_{-\infty}^0$, состоящему из локально интегрируемых функций, растущих не быстрее некоторой степени (см. [2]).

Обозначим $A(\sigma) = FA_1$ — преобразование Фурье от обобщенной функции A_1 , а $A\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)\varphi = A_1 * \varphi$.

Определение 1 *Задача (1) – (2) называется корректно разрешимой из пространства Φ в пространство $C^1([0, T], \Phi)$, если $\forall \varphi \in \Phi \exists! u \in C^1([0, T], \Phi)$ и если последовательность $\varphi_\nu \rightarrow 0$ в пространстве Φ , то и последовательность $u_\nu \rightarrow 0$ в топологии соответствующего пространства.*

Критерий корректной разрешимости в указанных выше пространствах, полученный в [3], формулируется следующим образом.

Теорема А. *Пусть $A(\sigma)$, $B(\sigma)$ и $C(\sigma)$ принадлежат пространству $C_{-\infty}^{\infty}$. Задача (1)–(2) корректно разрешима из пространства S (или пространства H^{∞}) в пространство $C^1([0, T], S)$ (или в пространство $C^1([0, T], H^{\infty})$) тогда и только тогда, когда $Q(\cdot, t) \in C_{-\infty}^{\infty}$ ($Q(\cdot, t) \in H_{-\infty}^0$) для всех $t \in [0, T]$.*

Замечание. Условия данной теоремы обеспечивают также корректную разрешимость в пространствах конечно-гладких функций H_l^s , C_l^s или H^s .

Определение 2 *Задача (1)–(2) называется частично параболической по переменным x_1, \dots, x_j ($1 \leq j \leq n$), если разрешающая функция $Q(\sigma, t)$ удовлетворяет оценке*

$$|Q(\sigma, t)| \leq c(1 + |\sigma|)^p \exp\{-\rho(t) \sum_{i=1}^j b_i |\sigma_i|^{h_i}\} \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T]$$

с некоторыми положительными c, b_i, h_i и действительным p .
Здесь $\rho(t) = \min(t, T - t)$.

Теорема 1 *Если краевая задача (1)–(2) частично параболическа по переменным x_1, \dots, x_j ($1 \leq j \leq n$), то данная задача корректно разрешима из пространства функций, принадлежащих пространству $L^2(\mathbb{R}^j)$ по переменным x_1, \dots, x_j и принадлежащих пространству $H^{\infty}(\mathbb{R}^{n-j})$ по переменным x_{j+1}, \dots, x_n , в пространство $C^1([0, T], H^{\infty}(\mathbb{R}^n))$.*

Доказательство. Рассмотрим двойственную по Фурье задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}(\sigma, t)}{\partial t} = A(\sigma) \tilde{u}(\sigma, t), \\ B(\sigma) \tilde{u}(\sigma, 0) + C(\sigma) \tilde{u}(\sigma, T) = \tilde{\varphi}(\sigma). \end{cases}$$

Тогда решение имеет вид $\tilde{u}(\sigma, t) = \exp\{t A(\sigma)\} \cdot K(\sigma)$ с некоторым $K(\sigma)$. Используя краевые условия, получим

$$K(\sigma) = \frac{\tilde{\varphi}(\sigma)}{B(\sigma) + C(\sigma) \exp\{T A(\sigma)\}}.$$

Откуда $\tilde{u}(\sigma, t) = Q(\sigma, t) \cdot \tilde{\varphi}(\sigma)$. Теперь нужно проверить, что полученное решение принадлежит пространству $FH^\infty = \bigcap_s H_s$. Но последнее следует из того, что для любых положительных s_i

$$\left| \prod_{i=1}^j (1 + |\sigma_i|^2)^{\frac{s_i}{2}} Q(\sigma, t) \cdot \tilde{\varphi}(\sigma) \right| \leq c_\nu (1 + |\sigma|)^{-\nu}, \quad \forall \nu \geq 0 \quad \exists c_\nu > 0, \quad \forall \sigma_i \in \mathbb{R}$$

в силу оценки на $Q(\sigma, t)$.

Теорема доказана.

Выясним для каких уравнений существуют частично параболические краевые задачи.

Теорема 2 Если $A(\sigma) \in C_\infty^\infty$ и $|\operatorname{Re} A(\sigma)| \geq \sum_{i=1}^j b_i |\sigma_i|^{h_i} - b_0$ с положительными b_i и h_i , то существует частично параболическая краевая задача с условиями (2).

Доказательство. Возьмем $B(\sigma) = 1$, а $C(\sigma) = \exp\{-iT \operatorname{Im} A(\sigma)\} \in C_\infty^\infty$.

Тогда $Q(\sigma, t) = \frac{\exp\{t A(\sigma)\}}{1 + \exp\{T \operatorname{Re} A(\sigma)\}}$ и удовлетворяет оценке

$$|Q(\sigma, t)| \leq \exp\{-\rho(t) |\operatorname{Re} A(\sigma)|\} \leq \exp\left\{-\rho(t) \sum_{i=1}^j b_i |\sigma_i|^{h_i}\right\},$$

то есть краевая задача является частично параболической.

Теорема доказана.

Замечание. Приведенная при доказательстве этой теоремы краевая задача называется *модельной* и будет использована в дальнейшем.

Приведем примеры частично параболических краевых задач.

Пример 1.

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_2}, \\ u(x, 0) + u(x_1, x_2 - T, T) = \varphi(x). \end{cases}$$

Здесь $A(\sigma) = \sigma_1^2 + i\sigma_2$; $B(\sigma) = 1$; $C(\sigma) = \exp\{-iT\sigma_2\}$.

Разрешающая функция $Q(\sigma, t) = \frac{\exp\{t(\sigma_1^2 + i\sigma_2)\}}{1 + \exp\{T\sigma_1^2\}}$ удовлетворяет оценке $|Q(\sigma, t)| \leq \exp\{-\rho(t)\sigma_1^2\}$, то есть задача является частично параболической по x_1 .

Пример 2.

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_3}, \\ u(x, 0) + u(x_1, x_2, x_3 + T, T) = \varphi(x). \end{cases}$$

Здесь $A(\sigma) = -\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2 - i\sigma_3$; $B(\sigma) = 1$; $C(\sigma) = \exp\{-iT\sigma_3\}$.

Разрешающая функция $Q(\sigma, t) = \frac{\exp\{t(-\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2 - i\sigma_3)\}}{1 + \exp\{T(-\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)\}}$ допускает оценку $|Q(\sigma, t)| \leq \exp\left\{-\frac{1}{2}\rho(t)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\right\}$, то есть задача является частично параболической по x_1, x_2 .

Покажем, что любая корректная краевая задача с условием (2) для уравнения (1), удовлетворяющего теореме 2, является параболической.

Теорема 3 Если задача (1)–(2) корректно разрешима из пространства $S(\mathbb{R}^n)$ в пространство $C^1([0, T], S(\mathbb{R}^n))$, а $A(\sigma)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то такая задача является частично параболической.

Доказательство. Разрешающая функция задачи (1)–(2) имеет вид

$$Q(\sigma, t) = \frac{\exp\{tA(\sigma)\}}{B(\sigma) + C(\sigma)\exp\{TA(\sigma)\}}.$$

Ее можно представить через разрешающую функцию

$$Q_0(\sigma, t) = \frac{\exp\{tA(\sigma)\}}{1 + \exp\{T \operatorname{Re} A(\sigma)\}}$$

модельной краевой задачи из теоремы 2 следующим образом

$$\begin{aligned} Q(\sigma, t) &= Q_0(\sigma, t) \frac{1 + \exp\{T \operatorname{Re} A(\sigma)\}}{B(\sigma) + C(\sigma)\exp\{TA(\sigma)\}} = \\ &= Q_0(\sigma, t)(Q(\sigma, 0) + Q(\sigma, T)). \end{aligned}$$

Так как $Q(\sigma, 0)$ и $Q(\sigma, T)$ в силу теоремы A удовлетворяют степенной оценке, то $Q(\sigma, t)$ удовлетворяет оценке $|Q(\sigma, t)| \leq c(1 + |\sigma|)^p \exp\{-\rho(t) \sum_{i=1}^j b_i |\sigma_i|^{h_i}\}$, то есть краевая задача является частично параболической.

Теорема доказана.

Покажем, что условие на $A(\sigma)$ является не только достаточным, но и необходимым для частичной параболичности.

Теорема 4 Если краевая задача (1)–(2) является частично параболической по x_i ($i \leq j$), то $A(\sigma)$ удовлетворяет оценке

$$|\operatorname{Re} A(\sigma)| \geq \sum_{i=1}^j b_i |\sigma_i|^{h_i} - b_0$$

с некоторыми положительными b_i и h_i .

Доказательство. По предыдущей теореме

$$\begin{aligned} Q_0(\sigma, t) &= Q(\sigma, t) \cdot \frac{B(\sigma) + C(\sigma) \exp(TA(\sigma))}{1 + \exp(T \operatorname{Re} A(\sigma))} = \\ &= Q(\sigma, t)(B(\sigma) + C(\sigma)Q_0(\sigma, T)). \end{aligned}$$

Откуда следует $\frac{\exp\{t \operatorname{Re} A(\sigma)\}}{1 + \exp\{T \operatorname{Re} A(\sigma)\}} \leq c(1 + |\sigma|)^p \exp\left\{-\rho(t) \sum_{i=1}^j b_i |\sigma_i|^{h_i}\right\}$.

Но если $\operatorname{Re} A(\sigma) \geq 0$, то $Q_0(\sigma, t)$ эквивалентна $\exp\{(t - T) \operatorname{Re} A(\sigma)\}$, а если $\operatorname{Re} A(\sigma) < 0$, то $Q_0(\sigma, t)$ эквивалентна $\exp\{t \operatorname{Re} A(\sigma)\}$.

Таким образом

$$-\rho(t) |\operatorname{Re} A(\sigma)| \leq -\rho(t) \left(\sum_{i=1}^j b_i |\sigma_i|^{h_i} - b_0 \right) \text{ или } |\operatorname{Re} A(\sigma)| \geq \sum_{i=1}^j b_i |\sigma_i|^{h_i} - b_0.$$

Теорема доказана.

3. Возмущения частично параболических краевых задач

В данном разделе мы будем рассматривать неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = A \left(\frac{\partial}{i \partial x} \right) u(x, t) + f(x, t), \quad (3)$$

а также возмущенное уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = A \left(\frac{\partial}{i \partial x} \right) u(x, t) + \varepsilon R \left(t, x, \frac{\partial}{i \partial x} \right) u(x, t) + f(x, t), \quad (4)$$

где псевдодифференциальный оператор $R \left(t, x, \frac{\partial}{i \partial x} \right)$ с символом $R(t, x, \sigma) \in C_{-\infty}^{\infty}$ действует по формуле

$$R \left(t, x, \frac{\partial}{i \partial x} \right) u(x, t) = F^{-1} R(t, x, \sigma) \tilde{u}(\sigma, t) \quad \forall u(x, t) \in S \quad (\forall t \in [0, T]).$$

Будем рассматривать нулевое краевое условие

$$B \left(\frac{\partial}{i \partial x} \right) u(x, 0) + C \left(\frac{\partial}{i \partial x} \right) u(x, T) = 0. \quad (5)$$

Определение 3 Краевая задача (3)–(5) называется корректно разрешимой из пространства $C^0([0, T], H^{s_1})$ в пространство $C^1([0, T], H^{s_2})$, если $\forall f \in C^0([0, T], H^{s_1}) \exists! u \in C^1([0, T], H^{s_2})$ и $\|u\| \leq c\|f\|$ с некоторой положительной c .

В работе [4] было показано, что из корректности задачи (1)–(2) следует корректность задачи (3)–(5) и наоборот при условии, что

$$c_1(1 + |\sigma|)^{p_1} \leq |B(\sigma)| + |C(\sigma)| \leq c_2(1 + |\sigma|)^{p_2}.$$

Если определить частичную параболичность задачи (3)–(5) по переменным x_i $i \leq j$ выполнением следующего условия на функцию Грина двойственной по Фурье задачи

$$|G(\sigma, t, \tau)| \leq c(1 + |\sigma|)^p \exp \left\{ -\rho(|t - \tau|) \sum_{i=1}^j b_i |\sigma_i|^{h_i} \right\}$$

с некоторыми положительными c , b_i , h_i и действительным p , то в силу равенства

$$G(\sigma, t, \tau) = \begin{cases} -Q(\sigma, t)C(\sigma) \exp\{(T - \tau)A(\sigma)\}, & t \leq \tau \\ Q(\sigma, t)B(\sigma) \exp\{(-\tau)A(\sigma)\}, & t > \tau \end{cases}$$

из частичной параболичности задачи (1)–(2) следует частичная параболичность задачи (3)–(5) и наоборот.

Воспользуемся следующим результатом [5].

Теорема В. Пусть функция Грина задачи (3)–(5) удовлетворяет условию

$$\int_0^T \sup_{\sigma} \{ |R(t, x, \sigma)| \cdot |G(\sigma, t, \tau)| \} d\tau \leq c.$$

Тогда задача (3)–(2) корректно разрешима из пространства $C^0([0, T], H^s)$ в пространство $C^1([0, T], H^{s-q})$ при некотором $q \geq 0$, при любом s и достаточно малых ε .

Теорема 5 Если задача (3)–(5) частично параболична, причем

$$|G(\sigma, t, \tau)| \leq c \prod_{i=1}^j (1 + |\sigma_i|)^{p_i} \cdot \exp \left\{ -\rho(|t - \tau|) \sum_{i=1}^j b_i |\sigma_i|^{h_i} \right\}$$

с некоторыми положительными c , b_i , h_i и действительными p_i , то при достаточно малых по абсолютной величине ε и при

$$|R(t, x, \sigma)| \leq c_1 \prod_{i=1}^j (1 + |\sigma_i|)^{m_i}, \text{ где } \sum_{i=1}^j \frac{m_i + p_i}{h_i} < 1, \quad c_1 > 0,$$

возмущенная задача (4)–(5) будет корректно разрешима из пространства $C^0([0, T], H^s)$ в пространство $C^1([0, T], H^{s-q})$ при некотором $q \geq 0$.

Доказательство. Применим теорему В.

$$\sup_{\sigma} \{ |R(t, x, \sigma)| \cdot |G(\sigma, t, \tau)| \} \leq \sup_{\sigma} c_1 \cdot \prod_{i \leq j} (1 + |\sigma_i|)^{p_i + m_i} \cdot \exp \left\{ -\rho(|t - \tau|) \sum_{i \leq j} b_i |\sigma_i|^{h_i} \right\}$$

Вычислим $\sup_{\sigma} |\sigma|^{\beta} \exp\{-\alpha|\sigma|^h\}$. Для этого найдем стационарные точки функции

$$\begin{aligned} f(|\sigma|) &= |\sigma|^{\beta} \exp\{-\alpha|\sigma|^h\}, \\ f'(|\sigma|) &= \beta|\sigma|^{\beta-1} \exp\{-\alpha|\sigma|^h\} + |\sigma|^{\beta} \exp\{-\alpha|\sigma|^h\}(-\alpha h)|\sigma|^{h-1} = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} |\sigma| &= \left(\frac{\beta}{\alpha h} \right)^{1/h}, \\ \sup_{\sigma} |\sigma|^{\beta} \exp\{-\alpha|\sigma|^h\} &= \left(\frac{\beta}{\alpha h} \right)^{\frac{\beta}{h}} \cdot e^{\frac{\beta}{h}} = \frac{c}{\alpha^{\frac{\beta}{h}}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\sup_{\sigma} \{ |R(t, x, \sigma)| \cdot |G(\sigma, t, \tau)| \} \leq K \prod_{i \leq j} \rho(|t - \tau|)^{-\frac{m_i + p_i}{h_i}} = K \rho(|t - \tau|)^{-\sum_{i \leq j} \frac{m_i + p_i}{h_i}}.$$

В силу условия теоремы $\sum_{i=1}^j \frac{m_i + p_i}{h_i} < 1$, тогда получим

$$\int_0^T \sup_{\sigma} \{ |R(t, x, \sigma)| \cdot |G(\sigma, t, \tau)| \} d\tau < \infty,$$

и, следовательно, возмущенная задача корректна.

Теорема доказана.

Пример 3.

$$P(\sigma) = \sigma_1^2 + \sigma_2^4 + \sigma_3^3.$$

Если рассмотреть модельную краевую задачу с краевыми условиями как в теореме 2, то $G(\sigma, t, \tau)$ ведет себя как $\exp\{-\rho(|t - \tau|) (\sigma_1^2 + \sigma_2^4)\}$.

Взяв $R(t, x, \sigma) = \sigma_1^{m_1} \cdot \sigma_2^{m_2}$, получим условие $\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{4} < 1$, то есть возможны целочисленные значения $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ или $m_1 = 0$, $m_2 = 3$. По переменной x_3 возмущать нельзя, так как данная задача частично параболична только по переменным x_1 и x_2 .

4. Частичная параболичность и частичная гипоеллиптичность

Поскольку решения параболической краевой задачи будут бесконечно дифференцируемыми при $\varphi(x) \in L^2$, попытаемся сравнить понятие параболичности с понятием гипоеллиптичности.

Определение 4 (см. [6], с.75) Оператор $P\left(\frac{\partial}{idx}\right)$ называется *гипоэллиптическим*, если все решения уравнения $P\left(\frac{\partial}{idx}\right)u(x,t) = 0$ являются бесконечно дифференцируемыми. Полином $P(\sigma)$ в этом случае также называется *гипоэллиптическим*.

Критерии гипоэллиптичности, приведенные в ([6], с.75), формулируются следующим образом.

Теорема С. Уравнение $P\left(\frac{\partial}{idx}\right)u(x,t) = 0$ является *гипоэллиптическим*

тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий

(1) из $P(\sigma + i\tau) = 0$, $|\sigma| \rightarrow \infty$ следует $|\tau| \rightarrow \infty$ (критерий гипоэллиптичности по корням многочлена),

(2) если $d(\xi)$ – расстояние от точки $\xi \in R^n$ до поверхности $\{\zeta, \zeta \in C^n : P(\zeta) = 0\}$, то $d(\xi) \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \infty$,

(3) если $\alpha \neq 0$, то $\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ в R^n .

Рассмотрим вопрос о связи частичной параболичности с частичной гипоэллиптичностью.

Введем некоторые обозначения. Координаты $x = (x_1, \dots, x_n)$ разобьем на группы $x' = (x_1, \dots, x_j)$ и $x'' = (x_{j+1}, \dots, x_n)$. Аналогично разобьем на части мультииндекс $\alpha = (\alpha', \alpha'')$.

Определение 5 Дифференциальный оператор $P(D)$ называется *частично гипоэллиптическим* относительно подпространства $x'' = 0$, если выполнено одно из следующих (равносильных) условий:

(1*). если $d(\xi)$ – расстояние от точки $\xi \in R^n$ до поверхности $\{\zeta, \zeta \in C^n : P(\zeta) = 0\}$, то $d(\xi) \rightarrow \infty$ при $\xi'' \rightarrow \infty$, а ξ' остается ограниченным;

(2*). если $\alpha \neq 0$, то $\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} \rightarrow 0$ при $\xi'' \rightarrow \infty$, а ξ' – ограничена;

(3*). $P(\xi) = \sum_{\alpha''=0} P_{\alpha}(\xi'') \xi'^{\alpha}$, где $P_0(\xi'')$ – гипоэллиптический, а $\frac{P_{\alpha}(\xi'')}{P_0(\xi'')} \rightarrow 0$ при $\xi'' \rightarrow \infty$.

В работе ([6], с. 87) приведен критерий гипоэллиптичности относительно одной переменной.

Теорема Д. Дифференциальный оператор $P(D)$ *частично гипоэллиптичен* относительно гиперплоскости $x_n = 0$ тогда и только тогда, когда часть полинома $P(\xi)$, имеющая наивысший порядок по ξ_n , не зависит от других переменных.

Для выяснения связи между понятиями частичной параболичности и частичной гипоэллиптичности рассмотрим ряд примеров.

Пример 4.

$$P\left(\frac{\partial}{idx}\right)u(x,t) = 0, \quad \text{где } P(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^2 + i\sigma_2.$$

Тогда $P_1(\lambda, \sigma_1, \sigma_2) = i\lambda - \sigma_1^2 - i\sigma_2$.

Для $P(\sigma_1, \sigma_2)$ существует задача, частично параболическая по x_1 (см. Пример 1), при этом полином $P_1(\lambda, \sigma_1, \sigma_2)$ является частично гипоеллиптическим по σ_1 , так как выполнены условия теоремы D .

Пример 5.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = i \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1^2} + i \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_2^2}.$$

Здесь $P_1(\lambda, \sigma_1, \sigma_2) = i\lambda - i\sigma_1^2 - i\sigma_2^2$. Многочлен, очевидно, частично гипоеллиптичен по каждой пространственной переменной, но $\operatorname{Re} P(\sigma_1, \sigma_2) = 0$, следовательно, для данного уравнения нельзя поставить частично параболическую краевую задачу.

Пример 6.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_2^2}.$$

В данном случае $P_1(\lambda, \sigma_1, \sigma_2) = i\lambda - \sigma_1^2 - \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_2^2$.

Для данного полинома по переменным σ_1 и σ_2 условия теоремы D не выполнены, следовательно, он не является частично гипоеллиптическим. Но

$$|\operatorname{Re} P(\sigma_1, \sigma_2)| = \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 + \sigma_2^2 \geq \sigma_1^2 + \sigma_2^2,$$

а значит, по теореме 2, существует задача, частично параболическая по σ_1 и σ_2 , более того, даже параболическая.


Приведенные выше примеры показывают, что из частичной гиперболичности уравнения не следует существование частично параболической краевой задачи. И наоборот — приведен пример частично параболической краевой задачи для дифференциального уравнения, не являющегося частично гипоеллиптическим.

5. Заключение

В работе исследованы частично параболические краевые задачи для одного уравнения, в которых улучшается гладкость решения по части переменных. Описаны классы псевдодифференциальных уравнений, для которых существуют частично параболические краевые задачи, выяснено какими псевдодифференциальными операторами можно возмущать такие задачи, чтобы сохранилась корректность.

Выяснено также, что операторы, допускающие постановку частично параболических краевых задач, не обязаны быть частично гипоеллиптическими. И наоборот — не для всякого частично гипоеллиптического уравнения можно поставить частично параболическую краевую задачу.

ORCID ID

A. A. Makarov  <https://orcid.org/0000-0002-9050-4987>

I. G. Nikolenko  <https://orcid.org/0000-0002-2904-6761>

REFERENCES

1. A. A. Makarov. Parabolic boundary value problems for systems of pseudodifferential equations in an infinite layer, *Differential Equations*, 1996. — Vol. **32**, No. 5. — P. 636–642.
2. L. R. Volevich. The Cauchy problem and related problems for convolution type equations, *Advances in Mathematical Sciences*, — 1972. — Vol. **27**, — Issue 4 (166). — p. 65–143.
3. A. A. Makarov. A criterion for the correct solvability of a boundary value problem in a layer for a system of linear equations in convolutions in topological spaces, *Theoretical and applied questions of differential equations and algebra*, Sb. scientific works. — Kiev: Naukova Dumka, 1978. — P. 178–180.
4. A. A. Makarov. The existence of a correct two-point boundary value problem in a layer for systems of pseudo-differential equations, *Differential Equations*, 1994. — Vol. **30**, No. 1. — P. 144–150.
5. A. A. Makarov. General boundary value problem in the infinite layer for systems of pseudo-differential equations with bounded symbols, *Theory of functions, functional analysis and their applications*, 1986. — Vol. **46**, — p. 72–77.
6. L. Hörmander. *The Analysis of linear partial differential operators. II, Differential operators with constant coefficients.* — Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1983. — 455 p.

Макаров О. А., Ніколенко І. Г. **Часткова параболічність крайової задачі для псевдодиференціальних рівнянь у шарі.** У роботі розглядається нелокальна крайова задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь у нескінченному шарі. Вводиться поняття частково параболічної крайової задачі, коли розв'язувальна функція експоненціально убуває лише по частині просторових змінних. Це поняття узагальнює поняття параболічної крайової задачі, яке було раніше досліджено одним з авторів даної роботи (Макаровим О.А.) Отримані необхідні та достатні умови на символ псевдодиференціального оператора, при яких існують частково параболічні крайові задачі. Виявилось, що реальна частина символу псевдодиференціальних операторів повинна необмежено зростати степеневим чином за частиною просторових змінних. При цьому вказується конкретний вид крайових умов, які залежать від псевдодиференціального рівняння і також є псевдодиференціальними операторами. Показано, що у розв'язків частково параболічних крайових задач підвищується гладкість розв'язку за частиною просторових змінних. Досліджено також збурене псевдодиференціальне рівняння з символом, що залежить від просторових і часових змінних. Для частково параболічних крайових задач з'ясовано якими псевдодиференціальними операторами можна обурювати вихідне рівняння, щоб дана крайова задача залишалася коректною в просторах Соболева–Слободецького. Показано також, що хоча властивість підвищення гладкості розв'язків по частині змінних для частково параболічних крайових задач аналогічна властивості розв'язків частково гіпоеліптичних рівнянь, введених Л. Хермандером, але наведені приклади показують, що з часткової гіпоелліптичності рівняння не слідує існування частково параболічної крайової задачі; і навпаки — наведено приклад частково параболічної

крайової задачі для диференціального рівняння, що не є частково гіпоеліптичним.
Ключові слова: крайова задача; псевдодиференціальні рівняння; перетворення Фур'є; параболічність; гіпоеліптичність.

A. A. Makarov, I. G. Nikolenko. **Partial parabolicity of the boundary-value problem for pseudodifferential equations in a layer.** A nonlocal boundary-value problem for evolutionary pseudodifferential equations in an infinite layer is considered in this paper. The notion of the partially parabolic boundary-value problem is introduced when a solving function decreases exponentially only by the part of space variables. This concept generalizes the concept of a parabolic boundary value problem, which was previously studied by one of the authors of this paper (A. A. Makarov). Necessary and sufficient conditions for the pseudodifferential operator symbol are obtained in which partially parabolic boundary-value problems exist. It turned out that the real part of the symbol of a pseudodifferential operator should increase unboundedly powerfully in some of the spatial variables. In this case, a specific type of boundary conditions is indicated, which depend on a pseudodifferential equation and are also pseudodifferential operators. It is shown that for solutions of partially parabolic boundary-value problems, smoothness in some of the spatial variables increases. The disturbed (excited) pseudodifferential equation with a symbol which depends on space and temporal variables is also investigated. It has been found for partially parabolic boundary-value problems what pseudodifferential operators are possible to be disturbed in the way that the input equation of this boundary-value problem would remain correct in Sobolev-Slobodetsky spaces.

It is also shown that although the properties of increasing the smoothness of solutions in part of the variables for partially parabolic boundary value problems are similar to the property of solutions of partially hypoelliptic equations introduced by L. Hörmander, these examples show that the partial parabolic boundary value problem does not follow from partial hypoellipticity; and vice versa — an example of a partially parabolic boundary value problem for a differential equation that is not partially hypoelliptic is given.

Key words: boundary-value problem; pseudodifferential equations; Fourier transform; parabolicity; hypoellipticity.

Article history: Received: 17 February 2019; Final form: 12 May 2019;

Accepted: 13 May 2019.

Блочная форма сингулярного пучка операторов и метод ее получения

М.С. Филипповская

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
Харьков, пл. Свободы 4, 61022, Украина
Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина
НАН Украины, Харьков, пр. Науки 47, 61103, Украина
filipkovskaya@ilt.kharkov.ua*

Описана блочная форма сингулярного пучка операторов, состоящая из сингулярного и регулярного блоков, где выделены нулевые и обратимые блоки. Показаны метод получения блочной формы сингулярного пучка и соответствующих прямых разложений пространств, а также способы построения проекторов на подпространства из прямых разложений. Проекторы позволяют найти вид блоков. Даны примеры блочных представлений сингулярных пучков для различных случаев.

Ключевые слова: пучок операторов; пучок матриц; сингулярный; регулярный блок; блочная форма; структура.

Філіпповська М.С. **Блокова форма сингулярного жмутка операторів і метод її отримання.** Описано блокову форму сингулярного жмутка операторів, що складається з сингулярного і регулярного блоків, де виділено оборотні та нульові блоки. Показано метод отримання блокової форми сингулярного жмутка та відповідних прямих розкладань просторів, а також способи побудови проекторів на підпростори з прямих розкладань. Проектори дозволяють знайти вигляд блоків. Надано приклади блокових зображень сингулярних жмутків для різних випадків.

Ключові слова: жмуток операторів; жмуток матриць; сингулярний; регулярний блок; блокова форма; структура.

M.S. Filipkovska. **A block form of a singular pencil of operators and a method of obtaining it.** A block form of a singular operator pencil, which consists of singular and regular blocks, where invertible blocks and zero blocks are separated out, is described. A method of obtaining the block form of a singular pencil and the corresponding direct decompositions of spaces, and also methods for the construction of projectors onto subspaces from the direct decompositions, are shown. The projectors enable one to obtain the form of the blocks. Examples of the block representations of singular pencils are given for various cases.

Keywords: operator pencil; matrix pencil; singular; regular block; block form; structure.

2010 Mathematics Subject Classification 47A05, 15A22, 47N20.

1. Введение

Рассмотрим пару линейных операторов A, B , образующих пучок $\lambda A + B$. Пучок операторов может быть регулярным или сингулярным (см. определения ниже). Сингулярный пучок может содержать блок (компоненту), являющийся регулярным пучком. При решении различных задач возникает необходимость привести пучок операторов, т.е. одновременно привести два оператора, к некоторой специальной форме. В [1] описано приведение сингулярного пучка вещественных матриц к каноническому квазидиагональному виду, который обычно называют канонической формой Вейерштрасса-Кронекера. В разделе 3 статьи описано приведение сингулярного пучка операторов к блочной форме, состоящей из сингулярного и регулярного блоков, где выделены нулевые блоки, а также блоки, которые являются обратимыми операторами. В разделе 4 даны примеры блочных представлений для сингулярных пучков различных типов.

Основная трудность при получении блочной формы заключается в том, чтобы найти прямые разложения пространств, относительно которых сингулярный пучок будет иметь требуемый вид, и построить проекторы, которые позволят найти вид блоков этой формы. Заметим, что прямые разложения пространств, приводящие пучок к требуемой блочной форме, порождают соответствующие проекторы, и обратное утверждение также верно. В разделе 3 подробно описаны методы построения этих разложений пространств и проекторов. Представленная в статье блочная форма (блочная структура) сингулярного пучка была кратко описана в [2] (для вещественных операторов) и использовалась в качестве вспомогательного результата. В отличие от работы [2], в настоящей работе особое внимание уделено методу нахождения блочной структуры, а также способам построения проекторов. Подробно рассмотрены случаи $rk(\lambda A + B) = n < m$ и общий случай $rk(\lambda A + B) < n, m$ (см. раздел 3), приведены необходимые пояснения и обоснования. Доказана теорема 1 и приведены примеры нахождения блочных структур операторов для сингулярных пучков различных типов. Блочная структура пучка и проекторы, позволяющие выделить требуемый блок, применяются в [2] для сведения сингулярного полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения (дифференциально-операторного уравнения) к эквивалентной системе из чисто дифференциальных и чисто алгебраических уравнений (см. раздел 5). Это нужно, чтобы доказать теоремы об устойчивости и неустойчивости по Лагранжу сингулярного полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения [2].

В [9] приводилось разложение сингулярного пучка на регулярную и чисто сингулярную компоненты, аналогичное (2), в комплексных банаховых пространствах. Однако было замечено, что это разложение, названное RS-расщеплением пучка, может не иметь места в бесконечномерных пространствах. Также в [9] были рассмотрены блочные представления сингулярной компоненты пучка для двух частных случаев, которые в терминах

настоящей работы соответствуют случаям, когда $rk(\lambda A + B) = m < n$ и $rk(\lambda A + B) = n < m$, и блочным представлениям (9) и (15) для них. Существование этих блочных представлений в бесконечномерных пространствах также являлось предположением. Поскольку блочные представления (соответствующие разложению пучка на регулярную и сингулярную компоненты и разложениям сингулярной компоненты в двух указанных случаях) аналогичны, в настоящей статье используются обозначения, введенные в [9] для подпространств из прямых разложений и проекторов, соответствующих этим блочным представлениям.

В статье будут использоваться следующие обозначения: E_X — единичный (тождественный) оператор в пространстве X ; A^{-1} — обратный оператор к A (см. определение, например, в [3, с. 20]); $A^{(-1)}$ — полуобратный оператор к A (см. определение в [6, с. 331]); $rk(A)$ — ранг оператора (матрицы) A ; $Ker(A)$ — ядро (нуль-пространство) оператора A ; $\mathcal{R}(A)$ — область значений (образ) оператора A ; $L(X, Y)$ — пространство непрерывных линейных операторов, действующих из X в Y ; $L(X, X) = L(X)$; δ_{ij} — символ Кронекера; X' — пространство, сопряженное к X ; A^T — транспонированный оператор (матрица), т.е. сопряженный оператор, которому соответствует транспонированная матрица; A^* — эрмитово-сопряженный оператор (матрица), т.е. сопряженный оператор, которому соответствует эрмитово-сопряженная матрица.

В статье будут использоваться следующие классические определения. Пространство X распадается в прямую сумму $X = X_1 \dot{+} X_2$ подпространств $X_1 \subseteq X$, $X_2 \subseteq X$, если $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ и $X_1 + X_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\} = X$. Это определение эквивалентно следующему: $X = X_1 \dot{+} X_2$, если каждый вектор $x \in X$ единственным образом представим в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

2. Предварительные сведения

Пусть A, B — линейные операторы, отображающие \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^m или \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^m . Рассмотрим пучок операторов $\lambda A + B$, где λ — комплексный параметр.

Рангом пучка матриц $\lambda A + B$ называется наибольший из порядков миноров пучка, не равных тождественно нулю (см. [1, с. 321] или [1, с. 137]), т.е. если ранг пучка равен r , то матрица $\lambda A + B$ имеет минор порядка r , который при некотором λ_0 не равен нулю, а миноры порядка большего, чем r , либо тождественно равны нулю, либо не существуют. Очевидно, ранг пучка матриц $\lambda A + B$ равен максимальному количеству линейно независимых столбцов (или строк) пучка, т.е. максимальному количеству столбцов (или строк) пучка, которые при некотором λ_0 являются линейно независимым набором векторов. Ясно, что *ранг пучка операторов $\lambda A + B$* и ранг соответствующего пучка матриц совпадают.

Определение 1 *Пучок $\lambda A + B$ называется регулярным, если $n = m = rk(\lambda A + B)$ (или $n = m$ и $\det(\lambda A + B) \not\equiv 0$ [1, с. 319]), в остальных случаях, т.е. при $n \neq m$ или $n = m$ и $rk(\lambda A + B) < n$, пучок называется сингулярным или нерегулярным.*

Это определение эквивалентно следующему. Пучок операторов $\lambda A + B: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ является *регулярным*, если множество его регулярных точек $\rho(A, B) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda A + B)^{-1} \in L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)\}$ не пусто, и *сингулярным*, если $\rho(A, B) = \emptyset$.

Если $\lambda A + B$ — пучок операторов, действующих из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^m , то в случае необходимости вещественные операторы A, B заменяются на их комплексные расширения \hat{A}, \hat{B} , действующие из \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^m . Здесь комплексное пространство \mathbb{C}^k , состоящее из всех пар (x, y) , $x, y \in \mathbb{R}^k$, записываемых в виде $(x, y) = x + iy$, является комплексификацией вещественного пространства \mathbb{R}^k ($k = n, m$). Матрицы операторов A, B относительно некоторых базисов в $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ совпадают с матрицами их комплексных расширений \hat{A}, \hat{B} относительно тех же базисов в $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m$ и $\hat{A}(x + iy) = A(x + iy)$, $\hat{B}(x + iy) = B(x + iy)$. Очевидно, ранги пучка $\lambda A + B$ и его комплексного расширения $\lambda \hat{A} + \hat{B}$ также совпадают.

Для вещественных операторов определение 1 эквивалентно следующему. Пучок $\lambda A + B$ операторов $A, B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ является *регулярным*, если множество регулярных точек $\rho(\hat{A}, \hat{B})$ его комплексного расширения $\lambda \hat{A} + \hat{B} \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ не пусто, и *сингулярным*, если $\rho(\hat{A}, \hat{B}) = \emptyset$. Ясно, что для регулярных точек λ существует резольвента $(\lambda A + B)^{-1}$. Эти точки называются регулярными точками пучка $\lambda A + B$.

3. Нахождение блочной структуры сингулярного пучка операторов и построение соответствующих прямых разложений пространств и проекторов

В этом разделе рассматриваются линейные операторы $A, B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Однако вместо вещественных операторов можно рассматривать комплексные, т.е. $A, B: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$. Тогда при получении блочной структуры пучка операторов нужно учесть замечание 1.

Всегда можно выбрать базисы в \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m так, чтобы сингулярный пучок операторов ($m \times n$ -матриц) имел квазидиагональный вид, состоящий из сингулярного и регулярного блоков [1]. Следовательно, существуют разложения пространств $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ в прямые суммы подпространств

$$\mathbb{R}^n = X_s \dot{+} X_r, \quad \mathbb{R}^m = Y_s \dot{+} Y_r, \quad (1)$$

относительно которых сингулярный пучок $\lambda A + B$ операторов $A, B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ принимает блочный вид

$$\lambda A + B = \begin{pmatrix} \lambda A_s + B_s & 0 \\ 0 & \lambda A_r + B_r \end{pmatrix}, \quad A_s, B_s: X_s \rightarrow Y_s, \quad A_r, B_r: X_r \rightarrow Y_r, \quad (2)$$

где сингулярный блок $\lambda A_s + B_s$ является чисто сингулярным пучком (т.е. в нем нельзя выделить регулярный блок), регулярный блок $\lambda A_r + B_r$ является регулярным пучком, $A, B: X_s \rightarrow Y_s$ и $A, B: X_r \rightarrow Y_r$. Прямые разложения пространств (т.е. разложения пространств в прямые суммы подпространств)

(1) порождають дві пари взаємно доповнительних проекторів (см. определение в [3, с. 22])

$$S: \mathbb{R}^n \rightarrow X_s, P: \mathbb{R}^n \rightarrow X_r, \quad F: \mathbb{R}^m \rightarrow Y_s, Q: \mathbb{R}^m \rightarrow Y_r, \quad (3)$$

т.е. $S^2 = S, P^2 = P, F^2 = F, Q^2 = Q, E_{\mathbb{R}^n} = S+P, E_{\mathbb{R}^m} = F+Q, SP = PS = 0, FQ = QF = 0$, причём проекторы таковы, что

$$FA = AS, \quad FB = BS, \quad QA = AP, \quad QB = BP, \quad (4)$$

т.е. пара сингулярных подпространств X_s, Y_s и пара регулярных подпространств X_r, Y_r *инвариантны* относительно операторов A, B ($A, B: X_s \rightarrow Y_s$ и $A, B: X_r \rightarrow Y_r$). Таким образом, операторы A и B *приводятся* (разлагаются) *парами* $(X_s, X_r), (Y_s, Y_r)$ (по аналогии с понятием приводимости из [4, п. 40]) *или прямыми разложениями* (1) (по аналогии с [5, п. 3]) и являются прямыми суммами операторов A_s, A_r и B_s, B_r :

$$A = \begin{pmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_r \end{pmatrix}: X_s \dot{+} X_r \rightarrow Y_s \dot{+} Y_r, \quad B = \begin{pmatrix} B_s & 0 \\ 0 & B_r \end{pmatrix}: X_s \dot{+} X_r \rightarrow Y_s \dot{+} Y_r. \quad (5)$$

Заметим, что верно и обратное утверждение: две пары взаимно доповнительных проекторів (3) (удовлетворяющих (4)) порождают прямые разложения пространств (1) (такие, что операторы A, B приводятся парами $(X_s, X_r), (Y_s, Y_r)$). Операторы из блочных представлений (5) имеют вид $A_s = A|_{X_s}, A_r = A|_{X_r}, B_s = B|_{X_s}, B_r = B|_{X_r}$. Введем их расширения (продолжения) на \mathbb{R}^n следующим образом:

$$A_s = FA, \quad A_r = QA, \quad B_s = FB, \quad B_r = QB. \quad (6)$$

Тогда

$$A_s = A_s|_{X_s}, \quad A_r = A_r|_{X_r}, \quad B_s = B_s|_{X_s}, \quad B_r = B_r|_{X_r} \quad (7)$$

и операторы (6) $A_s, B_s, A_r, B_r \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ действуют так, что $A_s, B_s: X_s \rightarrow Y_s, A_r, B_r: X_r \rightarrow Y_r$ и $X_r \subset Ker(A_s), X_r \subset Ker(B_s), X_s \subset Ker(A_r), X_s \subset Ker(B_r)$. Способы построения подпространств из разложений (1) и соответствующих проекторів описаны ниже.

Рассмотрим ядро (нуль-пространство) $Ker(\lambda A + B) = \{x(\lambda) \mid (\lambda A + B)x(\lambda) \equiv 0\}$ и область значений (образ) $\mathcal{R}(\lambda A + B) = \{y(\lambda) \mid \exists x: (\lambda A + B)x = y(\lambda)\}$ пучка $\lambda A + B$. Размерности ядра и области значений пучка $\lambda A + B$ равны соответственно размерностям ядра и области значений комплексного расширения $\lambda \hat{A} + \hat{B}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — некоторое фиксированное число. Поскольку $\dim Ker(\lambda \hat{A} + \hat{B}) = \dim \mathbb{C}^n - \dim \mathcal{R}(\lambda \hat{A} + \hat{B}) = n - rk(\lambda \hat{A} + \hat{B})$, то $\dim Ker(\lambda A + B) = n - rk(\lambda A + B)$. Ранг $rk(\lambda A + B)$ по определению есть постоянное число, следовательно, $\dim Ker(\lambda A + B) = n - rk(\lambda A + B)$ — также постоянное число.

В случае, когда $rk(\lambda A + B) = m < n$, существует разложение сингулярного пространства

$$X_s = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \quad (8)$$

в прямую сумму подпространств таких, что

$$A_s = (A_{gen} \ 0) : X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \rightarrow Y_s, \quad B_s = (B_{gen} \ B_{und}) : X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \rightarrow Y_s, \quad (9)$$

где оператор $A_{gen} : X_{s_1} \rightarrow Y_s$ имеет обратный $A_{gen}^{-1} \in L(Y_s, X_{s_1})$ (если $X_{s_1} \neq 0$), и $B_{gen} : X_{s_1} \rightarrow Y_s$, $B_{und} : X_{s_2} \rightarrow Y_s$. Прямое разложение (8) пространства $X_s = S\mathbb{R}^n$ порождает пару взаимно дополнительных проекторов (мы расширяем эти проекторы на \mathbb{R}^n) $S_i : \mathbb{R}^n \rightarrow X_{s_i}$, $i = 1, 2$, $S_1 + S_2 = S$, $S_i S_j = \delta_{ij} S_i$, таких, что $AS_2 = 0$. Введем операторы

$$\mathcal{A}_{gen} = AS_1, \quad \mathcal{B}_{gen} = BS_1, \quad \mathcal{B}_{und} = BS_2, \quad (10)$$

$\mathcal{A}_{gen}, \mathcal{B}_{gen}, \mathcal{B}_{und} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (заметим, что $AS_1 = FA$). Тогда

$$\mathcal{A}_{gen} = \mathcal{A}_{gen}|_{X_{s_1}}, \quad \mathcal{B}_{gen} = \mathcal{B}_{gen}|_{X_{s_1}}, \quad \mathcal{B}_{und} = \mathcal{B}_{und}|_{X_{s_2}} \quad (11)$$

и операторы (10) действуют так, что $\mathcal{A}_{gen} : X_{s_1} \rightarrow Y_s$ и $X_{s_2} \dot{+} X_r = Ker(\mathcal{A}_{gen})$ (т.е. $\mathcal{A}_{gen}\mathbb{R}^n = \mathcal{A}_{gen}X_{s_1} = Y_s$), $\mathcal{B}_{gen} : X_{s_1} \rightarrow Y_s$ и $X_{s_2} \dot{+} X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{gen})$, $\mathcal{B}_{und} : X_{s_2} \rightarrow Y_s$ и $X_{s_1} \dot{+} X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{und})$. Для построения сингулярных подпространств $X_s, Y_s, X_{s_1}, X_{s_2}$ найдем максимальное количество линейно независимых решений $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_N(\lambda)$ уравнения

$$(\lambda A + B)x = 0. \quad (12)$$

Достаточно рассмотреть решения, являющиеся многочленами от λ :

$$x_j(\lambda) = \sum_{i=0}^{k_j} (-1)^i \lambda^i x_{ji}, \quad j = \overline{1, N}, \quad x_{ji} \neq 0, \quad i = \overline{0, k_j}, \quad (13)$$

где $k_j \geq 0$ — степень $x_j(\lambda)$. Ясно, что столбцы $x_1(\lambda), \dots, x_N(\lambda)$ являются линейно независимыми, если ранг матрицы, составленной из этих столбцов, равен N . Поскольку набор столбцов $\{x_1(\lambda), \dots, x_N(\lambda)\}$ образует базис $Ker(\lambda A + B)$, то $N = \dim Ker(\lambda A + B) = n - rk(\lambda A + B)$. Подставляя $x_j(\lambda)$ в (12) и приравнивая коэффициенты при λ к нулю, получаем набор равенств [1, с. 322]

$$Bx_{j0} = 0, \quad Bx_{j1} = Ax_{j0}, \dots, \quad Bx_{jk_j} = Ax_{jk_j-1}, \quad Ax_{jk_j} = 0.$$

Очевидно, если $k_j = 0$, т.е. $x_j(\lambda) \equiv x_{j0}$ — постоянное решение, то $Bx_{j0} = 0$ и $Ax_{j0} = Ax_{jk_j} = 0$. Среди всех решений уравнения (12) можно выбрать набор линейно независимых решений $\{\hat{x}_j(\lambda)\}_{j=1}^N$ с наименьшими возможными степенями k_1, k_2, \dots, k_N (этот набор не определяется однозначно, но любые два таких набора решений имеют одинаковые наборы степеней с точностью до перестановок; очевидно, что $\sum_{j=1}^N k_j \leq m$, $\sum_{j=1}^N k_j + N \leq n$, и можно выбрать набор так, чтобы $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_N$). Тогда системы векторов $\{\hat{x}_{ji}\}_{j=1, i=0}^{N, k_j}$,

$\{B\hat{x}_{ji}\}_{j=1,i=1}^{N,k_j} = \{A\hat{x}_{ji}\}_{j=1,i=0}^{N,k_j-1}$ линейно независимы и являются базисами пространств $X_s = \text{Lin}\{\hat{x}_{ji}\}_{j=1,i=0}^{N,k_j}$, $Y_s = \text{Lin}\{B\hat{x}_{ji}\}_{j=1,i=1}^{N,k_j} = \text{Lin}\{A\hat{x}_{ji}\}_{j=1,i=0}^{N,k_j-1}$. Если все $k_j = 0$ ($j = 1, N$), то $Y_s = \{0\}$, $X_{s_2} = X_s$, $X_{s_1} = \{0\}$ и $A_s = 0$, $B_s = 0$, а блочная структура пучка имеет вид $\lambda A + B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda A_r + B_r \end{pmatrix}$ (столбцы сингулярного пучка матриц, приведенного к каноническому квазидиагональному виду [1, с. 327–328], также состоят из нулей, если соответствующие новые базисные векторы совпадают с постоянными решениями уравнения (12)). Заметим, что если взять произвольный максимальный набор линейно независимых решений $\{x_j(\lambda)\}_{j=1}^N$ уравнения (12), то линейные оболочки систем $\{x_{ji}\}_{j=1,i=0}^{N,k_j}$, $\{Bx_{ji}\}_{j=1,i=1}^{N,k_j}$ также образуют пространства X_s, Y_s соответственно, однако эти системы могут содержать линейно зависимые векторы (т.е. из систем $\{x_{ji}\}_{j=1,i=0}^{N,k_j}$, $\{Bx_{ji}\}_{j=1,i=1}^{N,k_j}$ всегда можно выбрать подсистемы, которые являются базисами X_s, Y_s соответственно). Далее, можно выбрать базисы для подпространств X_{s_1}, X_{s_2} и, соответственно, для X_s, Y_s (возможно, нужно будет изменить базисы в X_s, Y_s) так, чтобы относительно прямого разложения (8) операторы A_s, B_s имели блочную структуру (9). Ясно, что $X_{s_2} = \text{Ker}(A_s)$ и X_{s_1} является прямым дополнением к X_{s_2} ($\dim X_{s_1} = \text{rk}(A_s) = \text{rk}(B_s)$). Для набора линейно независимых решений $\{\hat{x}_j(\lambda)\}_{j=1}^N$ (с наименьшими возможными степенями) эти подпространства имеют вид $X_{s_2} = \text{Lin}\{\hat{x}_{jk_j}\}_{j=1}^N$, $X_{s_1} = \text{Lin}\{\hat{x}_{ji}\}_{j=1,i=0}^{N,k_j-1}$ (следовательно, $\dim X_{s_2} = N$, $\dim X_{s_1} = \sum_{j=1}^N k_j$). Также, используя вид полученных пространств X_s, Y_s , можно построить регулярные пространства X_r, Y_r из прямых разложений (1). Вид полученных пространств $X_s, Y_s, X_r, Y_r, X_{s_1}, X_{s_2}$ используется для построения соответствующих проекторов с указанными выше свойствами.

В случае, если $\text{rk}(\lambda A + B) = n < m$, существует разложение сингулярного пространства

$$Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} \tag{14}$$

в прямую сумму подпространств таких, что

$$A_s = \begin{pmatrix} A_{gen} \\ 0 \end{pmatrix} : X_s \rightarrow Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}, \quad B_s = \begin{pmatrix} B_{gen} \\ B_{ov} \end{pmatrix} : X_s \rightarrow Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}, \tag{15}$$

где оператор $A_{gen} : X_s \rightarrow Y_{s_1}$ имеет обратный $A_{gen}^{-1} \in L(Y_{s_1}, X_s)$ (если $X_s \neq \{0\}$), $B_{gen} : X_s \rightarrow Y_{s_1}$, $B_{ov} : X_s \rightarrow Y_{s_2}$. Прямое разложение (14) пространства $Y_s = F \mathbb{R}^m$ порождает пару взаимно дополнительных проекторов (которые мы расширяем на \mathbb{R}^m) $F_i : \mathbb{R}^m \rightarrow Y_{s_i}$, $i = 1, 2$, $F_1 + F_2 = F$, $F_i F_j = \delta_{ij} F_i$, таких, что $F_2 A = 0$. Введем операторы

$$A_{gen} = F_1 A, \quad \mathcal{B}_{gen} = F_1 B, \quad \mathcal{B}_{ov} = F_2 B, \tag{16}$$

$A_{gen}, \mathcal{B}_{gen}, \mathcal{B}_{ov} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (заметим, что $F_1 A = F A$). Тогда

$$A_{gen} = A_{gen}|_{X_s}, \quad \mathcal{B}_{gen} = \mathcal{B}_{gen}|_{X_s}, \quad \mathcal{B}_{ov} = \mathcal{B}_{ov}|_{X_s} \tag{17}$$

и операторы (16) действуют так, что $\mathcal{A}_{gen}: X_s \rightarrow Y_{s_1}$ и $X_r = Ker(\mathcal{A}_{gen})$ (т.е. $\mathcal{A}_{gen}\mathbb{R}^n = \mathcal{A}_{gen}X_s = Y_{s_1}$), $\mathcal{B}_{gen}: X_s \rightarrow Y_{s_1}$ и $X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{gen})$, $\mathcal{B}_{ov}: X_s \rightarrow Y_{s_2}$ и $X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{ov})$. Для построения сингулярных подпространств $X_s, Y_s, Y_{s_1}, Y_{s_2}$ найдем линейно независимые решения $y_1(\lambda), \dots, y_M(\lambda)$ уравнения

$$(\lambda A^T + B^T)y = 0, \quad (18)$$

где $\lambda A^T + B^T$ — транспонированный пучок и $M = \dim Ker(\lambda A^T + B^T) = m - rk(\lambda A + B)$ (поскольку $rk(\lambda A + B) = rk(\lambda A^T + B^T)$). Как и выше, достаточно рассмотреть решения вида $y_j(\lambda) = \sum_{l=0}^{m_j} (-1)^l \lambda^l y_{jl}$, $j = \overline{1, M}$, $y_{jl} \neq 0$,

$l = \overline{0, m_j}$, где $m_j \geq 0$ — степень $y_j(\lambda)$. Подставляя $y_j(\lambda)$ в (18) и приравнявая коэффициенты при λ к нулю, получаем набор равенств $B^T y_{j0} = 0$, $B^T y_{j1} = A^T y_{j0}, \dots$, $B^T y_{jm_j} = A^T y_{jm_j-1}$, $A^T y_{jm_j} = 0$. Если $m_j = 0$, то $B^T y_{j0} = A^T y_{j0} = A^T y_{jm_j} = 0$. Далее, строим сингулярные подпространства $\hat{X}_s = \hat{X}_{s_1} \dot{+} \hat{X}_{s_2}$, \hat{Y}_s , $\hat{X}_{s_2} = Ker(A_s^T)$, \hat{X}_{s_1} для пучка $\lambda A^T + B^T$ так, как это делалось в предыдущем случае для пучка $\lambda A + B$. Если все $m_j = 0$, то $\hat{Y}_s = \{0\}$, $\hat{X}_{s_2} = \hat{X}_s$ и сингулярные блоки A_s, B_s (15) таковы, что $A_s^T = 0$, $B_s^T = 0$. Поскольку $A^T, B^T: (\mathbb{R}^m)' \rightarrow (\mathbb{R}^n)'$, то сингулярные подпространства, построенные для $\lambda A^T + B^T$, совпадают с сопряженными подпространствами $Y'_{s_i} = \hat{X}_{s_i}$, $i = 1, 2$, $Y'_s = \hat{X}_s$, $X'_s = \hat{Y}_s$, где X_s, Y_s, Y_{s_i} из разложений (1), (14). Ясно, что сопряженное пространство $(\mathbb{R}^k)'$ можно заменить на \mathbb{R}^k , однако их базисы могут не совпадать, и поэтому мы оставляем обозначение $(\mathbb{R}^k)'$ в этом разделе. Если $\hat{Y}_s = \{0\}$, $\hat{X}_{s_2} = \hat{X}_s$, то блочная структура пучка принимает вид $\lambda A + B = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda A_r + B_r \end{pmatrix}$ и $X_s = \{0\}$, $Y_{s_2} = Y_s$, $Y_{s_1} = \{0\}$.

Используя вид сингулярных подпространств, можно построить регулярные подпространства \hat{Y}_r, \hat{X}_r для прямых разложений $(\mathbb{R}^m)' = \hat{X}_s \dot{+} \hat{X}_r = Y'_s \dot{+} Y'_r$, $(\mathbb{R}^n)' = \hat{Y}_s \dot{+} \hat{Y}_r = X'_s \dot{+} X'_r$ ($X'_r = \hat{Y}_r$, $Y'_r = \hat{X}_r$) и три пары взаимно дополнительных проекторов $\hat{S}_i: (\mathbb{R}^m)' \rightarrow \hat{X}_{s_i}$, $i = 1, 2$, $\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2: (\mathbb{R}^m)' \rightarrow \hat{X}_s$, $\hat{P}: (\mathbb{R}^m)' \rightarrow \hat{X}_r$, $\hat{F}: (\mathbb{R}^n)' \rightarrow \hat{Y}_s$, $\hat{Q}: (\mathbb{R}^n)' \rightarrow \hat{Y}_r$ таких, что $A^T \hat{S}_2 = 0$, $\hat{S}^T A = A \hat{F}^T$, $\hat{S}^T B = B \hat{F}^T$, $\hat{P}^T A = A \hat{Q}^T$, $\hat{P}^T B = B \hat{Q}^T$. Из свойств \hat{S}_i следует, что транспонированные (сопряженные) проекторы $F_i = \hat{S}_i^T: \mathbb{R}^m \rightarrow Y_{s_i}$, $i = 1, 2$, ($Y_{s_2} = (Ker(A_s^T))'$, $F_1 + F_2 = F$) являются взаимно дополнительными проекторами такими, что $F_2 A = 0$, и порождают прямое разложение (14), относительно которого A_s, B_s имеют блочную структуру (15). Из свойств \hat{S} , \hat{P} и \hat{F} , \hat{Q} следует, что транспонированные (сопряженные) проекторы $S = \hat{F}^T$, $P = \hat{Q}^T$ и $F = \hat{S}^T$, $Q = \hat{P}^T$ являются двумя парами взаимно дополнительных проекторов (3) таких, что (4), и порождают разложения пространств (1) в прямые суммы подпространств таких, что операторы A и B приводятся парами (X_s, X_r) , (Y_s, Y_r) (пучок $\lambda A + B$ имеет блочный вид (2)). Используя вид проекторов (или сопряженных подпространств), можно восстановить подпространства из разложений (1), (14).

В общем случае, если $rk(\lambda A + B) < n$ и $rk(\lambda A + B) < m$, существуют разложения сингулярных пространств

$$X_s = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2}, \quad Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} \quad (19)$$

в прямые суммы подпространств таких, что

$$\begin{aligned} A_s &= \begin{pmatrix} A_{gen} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \rightarrow Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}, \\ B_s &= \begin{pmatrix} B_{gen} & B_{und} \\ B_{ov} & 0 \end{pmatrix} : X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \rightarrow Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}, \end{aligned} \quad (20)$$

где оператор $A_{gen} : X_{s_1} \rightarrow Y_{s_1}$ имеет обратный $A_{gen}^{-1} \in L(Y_{s_1}, X_{s_1})$ (если $X_{s_1} \neq \{0\}$), $B_{gen} : X_{s_1} \rightarrow Y_{s_1}$, $B_{und} : X_{s_2} \rightarrow Y_{s_1}$, $B_{ov} : X_{s_1} \rightarrow Y_{s_2}$. Прямые разложения сингулярных пространств порождают две пары взаимно дополнительных проекторов

$$S_i : \mathbb{R}^n \rightarrow X_{s_i}, \quad F_i : \mathbb{R}^m \rightarrow Y_{s_i}, \quad i = 1, 2, \quad (21)$$

$S_1 + S_2 = S$, $F_1 + F_2 = F$, $S_i S_j = \delta_{ij} S_i$, $F_i F_j = \delta_{ij} F_i$, таких, что

$$AS_2 = 0, \quad F_2 A = 0, \quad F_2 B S_2 = 0. \quad (22)$$

Введем операторы

$$\mathcal{A}_{gen} = F_1 A, \quad \mathcal{B}_{gen} = F_1 B S_1, \quad \mathcal{B}_{und} = F_1 B S_2, \quad \mathcal{B}_{ov} = F_2 B S_1, \quad (23)$$

$\mathcal{A}_{gen}, \mathcal{B}_{gen}, \mathcal{B}_{und}, \mathcal{B}_{ov} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (заметим, что $F_1 A = AS_1 = FA$). Тогда

$$\mathcal{A}_{gen} = \mathcal{A}_{gen}|_{X_{s_1}}, \quad \mathcal{B}_{gen} = \mathcal{B}_{gen}|_{X_{s_1}}, \quad \mathcal{B}_{und} = \mathcal{B}_{und}|_{X_{s_2}}, \quad \mathcal{B}_{ov} = \mathcal{B}_{ov}|_{X_{s_1}} \quad (24)$$

и операторы (23) действуют так, что $\mathcal{A}_{gen} : X_{s_1} \rightarrow Y_{s_1}$ и $X_{s_2} \dot{+} X_r = Ker(\mathcal{A}_{gen})$ (т.е. $\mathcal{A}_{gen} \mathbb{R}^n = \mathcal{A}_{gen} X_{s_1} = Y_{s_1}$), $\mathcal{B}_{gen} : X_{s_1} \rightarrow Y_{s_1}$ и $X_{s_2} \dot{+} X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{gen})$, $\mathcal{B}_{und} : X_{s_2} \rightarrow Y_{s_1}$ и $X_{s_1} \dot{+} X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{und})$, $\mathcal{B}_{ov} : X_{s_1} \rightarrow Y_{s_2}$ и $X_{s_2} \dot{+} X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{ov})$. Заметим, что поскольку проекторы S_1 и F_1 являются единичными операторами в X_{s_1} и Y_{s_1} соответственно, то оператор $\mathcal{A}_{gen}^{-1} : Y_{s_1} \rightarrow X_{s_1}$ будет обратным по отношению к $\mathcal{A}_{gen} : X_{s_1} \rightarrow Y_{s_1}$, если $\mathcal{A}_{gen}^{-1} \mathcal{A}_{gen} = S_1|_{X_{s_1}}$ и $\mathcal{A}_{gen} \mathcal{A}_{gen}^{-1} = F_1|_{Y_{s_1}}$. Тогда расширение (продолжение) $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ оператора \mathcal{A}_{gen}^{-1} на \mathbb{R}^m , удовлетворяющее свойствам

$$\mathcal{A}_{gen}^{(-1)} \mathcal{A}_{gen} = S_1, \quad \mathcal{A}_{gen} \mathcal{A}_{gen}^{(-1)} = F_1, \quad \mathcal{A}_{gen}^{(-1)} = S_1 \mathcal{A}_{gen}^{(-1)}, \quad (25)$$

является полуобратным оператором для \mathcal{A}_{gen} , т.е. $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)} : Y_{s_1} \rightarrow X_{s_1}$, $Y_{s_2} \dot{+} Y_r = Ker(\mathcal{A}_{gen}^{(-1)})$ ($\mathcal{A}_{gen}^{(-1)} \mathbb{R}^m = \mathcal{A}_{gen}^{(-1)} Y_{s_1} = X_{s_1}$) и $\mathcal{A}_{gen}^{-1} = \mathcal{A}_{gen}^{(-1)}|_{Y_{s_1}}$ (см. определение в [6, с. 331]). Ясно, что $S_1 \mathcal{A}_{gen}^{(-1)} = \mathcal{A}_{gen}^{(-1)} F_1$. Оператор \mathcal{A}_{gen} является

полуобратным для $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)}$. Заметим, что $\mathcal{A}_s = \mathcal{A}_{gen}$, т.к. $\mathcal{A}_s = FA = F_1A$, и $\mathcal{A}_{gen} = \mathcal{A}_s|_{X_{s_1}}$, поэтому можно аналогичным образом определить полуобратный оператор $\mathcal{A}_s^{(-1)} = \mathcal{A}_{gen}^{(-1)}$ для \mathcal{A}_s . В общем случае, для построения сингулярных пространств и соответствующих проекторов необходимо найти $N = n - rk(\lambda A + B)$ линейно независимых решений уравнения (12) и $M = m - rk(\lambda A + B)$ линейно независимых решений уравнения (18). Далее, используя вид сингулярных пространств, полученных при анализе решений уравнений (12), (18), строим сингулярные пространства $X_s, Y_s, X_{s_1}, X_{s_2}, Y_{s_1}, Y_{s_2}$ и соответствующие проекторы с учетом их свойств, позволяющих получить блочную структуру (20). Очевидно, базис $X_{s_2} = Ker(A_s)$ состоит из векторов, полученных при анализе решений (12), и строится так же, как базис X_{s_2} в случае $rk(\lambda A + B) = m < n$, а базис $Y_{s_2} = (Ker(A_s^T))'$ состоит из векторов, полученных при анализе решений (18), и строится так же, как базис Y_{s_2} в случае $rk(\lambda A + B) = n < m$. Базис X_{s_1} состоит из векторов, которые находятся так же, как базисные векторы X_{s_1} в случае $rk(\lambda A + B) = m < n$, и векторов, которые находятся так же, как базисные векторы X_s в случае $rk(\lambda A + B) = n < m$. Базис Y_{s_1} состоит из векторов, которые находятся так же, как базис Y_{s_1} при $rk(\lambda A + B) = n < m$, и векторов, которые находятся так же, как базис Y_s при $rk(\lambda A + B) = m < n$. Базисы пространств X_s, Y_s , являющихся прямыми суммами (19), состоят из объединения базисов их слагаемых. Исходя из вида сингулярных пространств X_s, Y_s строятся регулярные пространства X_r, Y_r из прямых разложений (1).

Общее максимальное количество $d(\lambda A + B) = n + m - 2rk(\lambda A + B) = \dim Ker(\lambda A + B) + \dim Ker(\lambda A^T + B^T)$ линейно независимых решений уравнения (12) и линейно независимых решений уравнения (18) назовем *общим дефектом пучка* $\lambda A + B$ (в [2] оно было названо просто дефектом). Максимальное количество линейно независимых решений уравнения (12), т.е. размерность ядра пучка $\dim Ker(\lambda A + B)$, назовем *дефектом пучка* $\lambda A + B$. Для пучка ранга $rk(\lambda A + B) = m < n$ общий дефект равен $d(\lambda A + B) = \dim Ker(\lambda A + B) = n - rk(\lambda A + B)$. Если пучок имеет ранг $rk(\lambda A + B) = n < m$, его общий дефект равен $d(\lambda A + B) = \dim Ker(\lambda A^T + B^T) = m - rk(\lambda A + B)$. Общие дефекты исходного и транспонированного пучков совпадают, а если $n = m$, то их дефекты также совпадают. Дефект и общий дефект регулярного пучка равны нулю.

Доказана следующая теорема.

Теорема 1 *Для операторов $A, B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, образующих сингулярный пучок $\lambda A + B$, существуют (и всегда могут быть построены) прямые разложения пространств*

$$\mathbb{R}^n = X_s \dot{+} X_r = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \dot{+} X_r, \quad \mathbb{R}^m = Y_s \dot{+} Y_r = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} \dot{+} Y_r, \quad (26)$$

относительно которых A, B имеют блочную структуру (5) и их сингулярные блоки A_s, B_s имеют структуру (20), где оператор \mathcal{A}_{gen} обратим (если

$X_{s_1} \neq \{0\}$), при этом если $rk(\lambda A + B) = m < n$, то структура сингулярных блоков принимает вид (9) и в разложениях (26) $Y_{s_1} = Y_s$, $Y_{s_2} = \{0\}$, а если $rk(\lambda A + B) = n < m$, то структура сингулярных блоков принимает вид (15) и в разложениях (26) $X_{s_1} = X_s$, $X_{s_2} = \{0\}$. Прямые разложения пространств (26) порождают пары взаимно дополнительных проекторов (3), (21) (со свойствами (4), (22)), где $F_1 = F$, $F_2 = 0$, если $rk(\lambda A + B) = m < n$, и $S_1 = S$, $S_2 = 0$, если $rk(\lambda A + B) = n < m$. Операторы из блочных представлений (5), (20), (9) и (15) имеют вид (7), (24), (11) и (17) соответственно. Расширение A_{gen} оператора A_{gen} , введенное в (23), (10) и (16), имеет полубратный оператор $A_{gen}^{(-1)}$, удовлетворяющий свойствам (25), где $F_1 = F$, если $rk(\lambda A + B) = m < n$, и $S_1 = S$, если $rk(\lambda A + B) = n < m$.

Метод построения подпространств из разложений (26) и соответствующих проекторов (3), (21) описан выше.

Замечание 1 Для операторов $A, B: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ теорема 1 останется верна, а при построении прямых разложений вида (26) для комплексных пространств \mathbb{C}^n , \mathbb{C}^m и соответствующих проекторов нужно везде заменить транспонирование на эрмитово сопряжение.

Замечание 2 В теореме 1 обратное утверждение относительно проекторов также верно, а именно: существуют пары взаимно дополнительных проекторов (3), (21) (со свойствами (4), (22)), которые порождают прямые разложения пространств (26).

Заметим, что если $X_r = \{0\}$, $Y_r = \{0\}$, то $\lambda A + B = \lambda A_s + B_s$ является чисто сингулярным пучком и регулярный блок $\lambda A_r + B_r$ отсутствует.

Рассмотрим регулярный пучок $\lambda A_r + B_r$ операторов $A_r, B_r: X_r \rightarrow Y_r$ ($\dim X_r = \dim Y_r$), действующих в конечномерных пространствах. Предположим, что существуют константы $C_1, C_2 > 0$ такие, что

$$\|(\lambda A_r + B_r)^{-1}\| \leq C_1, \quad |\lambda| \geq C_2. \quad (27)$$

Условие (27) [7] означает, что либо точка $\mu = 0$ является простым полюсом резольвенты $(A_r + \mu B_r)^{-1}$ (это эквивалентно тому, что $\lambda = \infty$ является устранимой особой точкой резольвенты $(\lambda A_r + B_r)^{-1}$), либо $\mu = 0$ является регулярной точкой пучка $A_r + \mu B_r$ (т. е. в точке $\mu = 0$ существует резольвента $(A_r + \mu B_r)^{-1}$ и, следовательно, оператор A_r обратим). Если A_r вырожден и точка $\mu = 0$ является простым полюсом резольвенты $(A_r + \mu B_r)^{-1}$, т. е. выполнено (27), то будем говорить, что $\lambda A_r + B_r$ является регулярным пучком *индекса 1*. Заметим, что если $A_r = 0$ и существует B_r^{-1} , то $\lambda A_r + B_r \equiv B_r$ можно считать регулярным пучком *индекса 1*. Если A_r невырожден, т. е. $\mu = 0$ является регулярной точкой пучка $A_r + \mu B_r$, то будем говорить, что $\lambda A_r + B_r$ является регулярным пучком *индекса 0*. Таким образом, если $\lambda A_r + B_r$ — регулярный пучок и выполнено (27), то $\lambda A_r + B_r$ имеет индекс 0 или 1 и мы будем говорить, что $\lambda A_r + B_r$ — регулярный пучок *индекса не выше 1*.

В общем случае, индексом регулярного пучка $\lambda A_r + B_r$ называется наибольшая длина цепочки из собственного и присоединенных векторов пучка $A_r + \mu B_r$ в точке $\mu = 0$ [8, Пункт 6.2] или порядок полюса резольвенты $(A_r + \mu B_r)^{-1}$ в точке $\mu = 0$ (эквивалентность этих определений следует из [8, Пункт 2.3]).

Для регулярного пучка $\lambda A_r + B_r$, удовлетворяющего (27), существуют две пары взаимно дополнительных проекторов $\tilde{P}_j: X_r \rightarrow X_j$ и $\tilde{Q}_j: Y_r \rightarrow Y_j$, $j = 1, 2$ (см. [5], [9]), $\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2 = E_{X_r}$, $\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2 = E_{Y_r}$, $\tilde{P}_i \tilde{P}_j = \delta_{ij} \tilde{P}_i$, $\tilde{Q}_i \tilde{Q}_j = \delta_{ij} \tilde{Q}_i$, которые могут быть конструктивно определены по формулам аналогичным (5), (6) из [7] или

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1 &= \operatorname{Res}_{\mu=0} \left(\frac{(A_r + \mu B_r)^{-1} A_r}{\mu} \right), \quad \tilde{P}_2 = E_{X_r} - \tilde{P}_1, \\ \tilde{Q}_1 &= \operatorname{Res}_{\mu=0} \left(\frac{A_r (A_r + \mu B_r)^{-1}}{\mu} \right), \quad \tilde{Q}_2 = E_{Y_r} - \tilde{Q}_1. \end{aligned} \quad (28)$$

Эти проекторы порождают прямые разложения

$$X_r = X_1 \dot{+} X_2, \quad Y_r = Y_1 \dot{+} Y_2 \quad (29)$$

такие, что $A_r, B_r: X_j \rightarrow Y_j$, $j = 1, 2$ (пары подпространств X_1, Y_1 и X_2, Y_2 инвариантны относительно A_r, B_r), т.е.

$$\tilde{Q}_j A_r = A_r \tilde{P}_j, \quad \tilde{Q}_j B_r = B_r \tilde{P}_j, \quad (30)$$

и операторы $A_j = A_r|_{X_j}: X_j \rightarrow Y_j$, $B_j = B_r|_{X_j}: X_j \rightarrow Y_j$, $j = 1, 2$, таковы, что $A_2 = 0$ ($\tilde{Q}_2 A_r = 0$) и существуют $A_1^{-1} \in L(Y_1, X_1)$ (если $X_1 \neq \{0\}$) и $B_2^{-1} \in L(Y_2, X_2)$ (если $X_2 \neq \{0\}$) [7, Разделы 2, 6]. Следовательно, относительно прямых разложений (29) операторы A_r, B_r имеют блочную структуру

$$A_r = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: X_1 \dot{+} X_2 \rightarrow Y_1 \dot{+} Y_2, \quad B_r = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}: X_1 \dot{+} X_2 \rightarrow Y_1 \dot{+} Y_2, \quad (31)$$

где A_1 и B_2 обратимы (если $X_1 \neq \{0\}$ и $X_2 \neq \{0\}$ соответственно).

Замечание 3 Для регулярного пучка $\lambda A_r + B_r$ операторов $A_r, B_r: X_r \rightarrow Y_r$, действующих в конечномерных пространствах, всегда можно получить две пары взаимно дополнительных проекторов вида [7, (5), (6)], которые порождают прямые разложения (29) такие, что суженные операторы $A_1 = A_r|_{X_1}: X_1 \rightarrow Y_1$ и $B_2 = B_r|_{X_2}: X_2 \rightarrow Y_2$ имеют обратные $A_1^{-1} \in L(Y_1, X_1)$ (если $X_1 \neq \{0\}$) и $B_2^{-1} \in L(Y_2, X_2)$ (если $X_2 \neq \{0\}$) (см. [8], [5]). Однако, если индекс пучка выше 1, то $\operatorname{Ker}(A_r) \subsetneq X_2$ и, соответственно, $A_2 = A_r|_{X_2} \neq 0$. В случае если регулярный пучок $\lambda A_r + B_r$ имеет индекс 1, ядро и область значений оператора A_r совпадают с пространствами $X_2 = \operatorname{Ker}(A_r)$ и $Y_1 = \mathcal{R}(A_r)$. В этом случае можно получить проекторы на подпространства из разложений (29) без использования формул [7, (5), (6)] или (28).

Построим прямые дополнения X_1 и Y_2 пространств соответственно X_2 и Y_1 так, чтобы пары X_1, Y_1 и X_2, Y_2 были инвариантны относительно оператора B_r (очевидно, что эти пары являются инвариантными относительно A_r), тогда операторы A_r, B_r имеют блочную структуру (31) и их блоки A_1, B_2 имеют обратные $A_1^{-1} \in L(Y_1, X_1), B_2^{-1} \in L(Y_2, X_2)$. Прямые суммы (29) пространств X_j, Y_j порождают две пары взаимно дополнительных проекторов $\tilde{P}_j: X_r \rightarrow X_j, \tilde{Q}_j: Y_r \rightarrow Y_j$ со свойствами (30) и $\tilde{Q}_2 A_r = 0$. Можно также получить эти проекторы, построив операторы $\tilde{P}_j, \tilde{Q}_j, j = 1, 2$, удовлетворяющие следующим свойствам: $\tilde{P}_2^2 = \tilde{P}_2, \tilde{P}_1 = E_{X_r} - \tilde{P}_2$ (заметим, что если некоторый оператор \tilde{P}_2 является проектором, то $\tilde{P}_1 = E_{X_r} - \tilde{P}_2$ — также проектор и проекторы \tilde{P}_1, \tilde{P}_2 взаимно дополнительные), $\tilde{Q}_1^2 = \tilde{Q}_1$ (или $\tilde{Q}_2^2 = \tilde{Q}_2$), $\tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_1 = E_{Y_r}, A_r \tilde{P}_2 = 0$ и выполнены равенства (30).

Таким образом, если регулярный блок $\lambda A_r + B_r$ из (2) является регулярным пучком индекса не выше 1, то существуют прямые разложения регулярных пространств (29), относительно которых A_r, B_r имеют блочную структуру (31). Проекторы \tilde{P}_j, \tilde{Q}_j на подпространства из разложений (29) могут быть получены методом, описанным в замечании 3, или по формулам (28) (либо [7, (5), (6)]).

Введем расширения P_j, Q_j проекторов \tilde{P}_j, \tilde{Q}_j соответственно на $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ так, что $X_j = P_j \mathbb{R}^n, Y_j = Q_j \mathbb{R}^m, j = 1, 2$ (X_j, Y_j — подпространства из разложений (29)). Тогда расширенные проекторы

$$P_j: \mathbb{R}^n \rightarrow X_j, \quad Q_j: \mathbb{R}^m \rightarrow Y_j, \quad j = 1, 2, \quad (32)$$

обладают свойствами исходных: $P_i P_j = \delta_{ij} P_i, Q_i Q_j = \delta_{ij} Q_i, P_1 + P_2 = P, Q_1 + Q_2 = Q$,

$$Q_j A = A P_j, \quad Q_j B = B P_j, \quad Q_2 A = 0 \quad (Q_1 A = Q A).$$

Свойства операторов $A_j = A|_{X_j}: X_j \rightarrow Y_j, B_j = B|_{X_j}: X_j \rightarrow Y_j, j = 1, 2$, также сохраняются. Введем их расширения на \mathbb{R}^n следующим образом:

$$A_j = Q_j A, \quad B_j = Q_j B, \quad j = 1, 2. \quad (33)$$

Тогда

$$A_j = \mathcal{A}_j|_{X_j}, \quad B_j = \mathcal{B}_j|_{X_j}, \quad j = 1, 2, \quad (34)$$

и операторы (33) $A_j, B_j \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ действуют так, что $\mathcal{A}_j: X_j \rightarrow Y_j, \mathcal{B}_j: X_j \rightarrow Y_j$ и $\mathcal{A}_2 = 0, X_2 \dot{+} X_s = Ker(\mathcal{A}_1)$ ($\mathcal{A}_1 \mathbb{R}^n = \mathcal{A}_1 X_1 = Y_1$), $X_2 \dot{+} X_s \subset Ker(\mathcal{B}_1), X_1 \dot{+} X_s = Ker(\mathcal{B}_2)$ ($\mathcal{B}_2 \mathbb{R}^n = \mathcal{B}_2 X_2 = Y_2$). Поскольку P_1, Q_1 являются единичными операторами в X_1, Y_1 соответственно, то оператор $A_1^{-1}: Y_1 \rightarrow X_1$ будет обратным по отношению к $A_1: X_1 \rightarrow Y_1$, если $A_1^{-1} A_1 = P_1|_{X_1}, A_1 A_1^{-1} = Q_1|_{Y_1}$. Тогда расширение $A_1^{(-1)} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ оператора A_1^{-1} на \mathbb{R}^m , удовлетворяющее свойствам

$$A_1^{(-1)} A_1 = P_1, \quad A_1 A_1^{(-1)} = Q_1, \quad A_1^{(-1)} = P_1 A_1^{(-1)}, \quad (35)$$

является полуобратным оператором для \mathcal{A}_1 , т.е. $\mathcal{A}_1^{(-1)}: Y_1 \rightarrow X_1$, $Y_2 \dot{+} Y_s = Ker(\mathcal{A}_1^{(-1)})$ ($\mathcal{A}_1^{(-1)}\mathbb{R}^m = \mathcal{A}_1^{(-1)}Y_1 = X_1$) и $A_1^{-1} = \mathcal{A}_1^{(-1)}\Big|_{Y_1}$. Ясно, что $P_1\mathcal{A}_1^{(-1)} = \mathcal{A}_1^{(-1)}Q_1$. Указанные свойства позволяют найти вид $\mathcal{A}_1^{(-1)}$ (или A_1^{-1}), используя вид проекторов. Полуобратный оператор $\mathcal{B}_2^{(-1)} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ для \mathcal{B}_2 , т.е. $\mathcal{B}_2^{(-1)}: Y_2 \rightarrow X_2$, $Y_1 \dot{+} Y_s = Ker(\mathcal{B}_2^{(-1)})$ ($\mathcal{B}_2^{(-1)}\mathbb{R}^m = \mathcal{B}_2^{(-1)}Y_2 = X_2$) и $B_2^{-1} = \mathcal{B}_2^{(-1)}\Big|_{Y_2}$, можно вычислить аналогичным способом:

$$\mathcal{B}_2^{(-1)}\mathcal{B}_2 = P_2, \quad \mathcal{B}_2\mathcal{B}_2^{(-1)} = Q_2, \quad \mathcal{B}_2^{(-1)} = P_2\mathcal{B}_2^{(-1)} \quad (P_2\mathcal{B}_2^{(-1)} = \mathcal{B}_2^{(-1)}Q_2).$$

4. Примеры блочных представлений для сингулярных пучков, прямых разложений пространств и проекторов

4.1. Пример для случая $rk(\lambda A + B) = m < n$

Рассмотрим сингулярный пучок $\lambda A + B$ операторов $A, B: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, которым относительно стандартных базисов пространств $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3$ (i -й координатой базисного вектора e_j является символ Кронекера δ_{ij}) соответствуют матрицы [2]

$$A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} r_2 & -1 & -r_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (36)$$

где L, C, r_1, r_2 — вещественные параметры, не равные нулю. Легко проверить, что ранг пучка равен $rk(\lambda A + B) = 3$. Общий дефект пучка (также как и дефект пучка) равен $d(\lambda A + B) = 1$.

Поскольку $N = d(\lambda A + B) = 1$, то уравнение (12) имеет одно ненулевое решение $x_1(\lambda) = (1, \lambda L + r_1 + r_2, -1, \lambda^2 CL + \lambda C(r_1 + r_2) + 1)^T$, которое определяется с точностью до скалярного множителя. Записав решение $x_1(\lambda)$ в виде (13), получим системы векторов $\{x_{1i}\}_{i=0}^2, \{Bx_{1i}\}_{i=1}^2$, где

$$x_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 + r_2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \\ -C(r_1 + r_2) \end{pmatrix}, \quad x_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ CL \end{pmatrix},$$

$$Bx_{11} = \begin{pmatrix} L \\ C(r_1 + r_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Bx_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ CL \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подпространства $X_s = Lin\{x_{1i}\}_{i=0}^2, Y_s = Lin\{Bx_{1i}\}_{i=1}^2$ из разложений (1) можно представить в виде $X_s = Lin\{s_i\}_{i=1}^3, Y_s = Lin\{g_i\}_{i=1}^2$, где

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда $X_r = Lin\{p\}$, $Y_r = Lin\{q\}$ ($q = Bp$, $B: X_r \rightarrow Y_r$), где

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -r_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Выберем $X_{s_1} = Lin\{s_i\}_{i=1}^2$, $X_{s_2} = Lin\{s_3\}$ ($As_3 = 0$), тогда относительно прямого разложение (8) операторы A_s , B_s имеют блочную структуру (9). Полученные прямые разложения пространств (1) и (8) порождают проекторы $S: \mathbb{R}^4 \rightarrow X_s$, $P: \mathbb{R}^4 \rightarrow X_r$ ($S + P = E_{\mathbb{R}^4}$), $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow Y_s$, $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow Y_r$ ($F + Q = E_{\mathbb{R}^3}$) и $S_1: \mathbb{R}^4 \rightarrow X_{s_1}$, $S_2: \mathbb{R}^4 \rightarrow X_{s_2}$ ($S_1 + S_2 = S$), которым относительно стандартных базисов в \mathbb{R}^4 и \mathbb{R}^3 соответствуют проекционные матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $QA = 0$, то $A_r = QA|_{X_r} = 0$. Легко проверить, что если $x_r \in X_r$, то $QBx_r = y_r \in Y_r$, причем $QBx_r = 0$ только при $x_r = 0$. Значит оператор $B_r = QB|_{X_r} \in L(X_r, Y_r)$ обратим. Следовательно, регулярный блок $\lambda A_r + B_r$ из (2) является регулярным пучком индекса 1. Подпространства из прямых разложений (29) и соответствующие проекторы имеют вид $X_1 = \{0\}$, $X_2 = X_r$, $Y_1 = \{0\}$, $Y_2 = Y_r$ и $P_1 = 0$, $P_2 = P$, $Q_1 = 0$, $Q_2 = Q$, и, очевидно, $A_r = A_2$, $B_r = B_2$.

Оператору $A_{gen} = FA: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_s$ ($X_{s_2} \dot{+} X_r = Ker(A_{gen})$, $A_{gen} = A_{gen}|_{X_{s_1}} \in L(X_{s_1}, Y_s)$), введенному в (10), относительно стандартных базисов в \mathbb{R}^4 , \mathbb{R}^3 (дополняем базис Y_s до стандартного в \mathbb{R}^3) соответствует матрица $A_{gen} = A$ (т.к. $FA = A$). Полуобратному оператору $A_{gen}^{(-1)}: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_{s_1}$ ($Y_r = Ker(A_{gen}^{(-1)})$), $A_{gen}^{-1} = A_{gen}^{(-1)}|_{Y_s} \in L(Y_s, X_{s_1})$ относительно стандартных базисов в \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^4 соответствует матрица (удовлетворяющая свойствам (25), где $F_1 = F$)

$$A_{gen}^{(-1)} = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 & r_1 L^{-1} \\ 0 & C^{-1} & 0 \\ -L^{-1} & 0 & -r_1 L^{-1} \\ L^{-1} & 0 & r_1 L^{-1} \end{pmatrix}.$$

Операторам $\mathcal{B}_{gen}, \mathcal{B}_{und}: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_s$ ($X_{s_2} \dot{+} X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{gen}), X_{s_1} \dot{+} X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{und}), B_{gen} = \mathcal{B}_{gen}|_{X_{s_1}} \in L(X_{s_1}, Y_s), B_{und} = \mathcal{B}_{und}|_{X_{s_2}} \in L(X_{s_2}, Y_s)$), введенным в (10), относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3$ соответствуют матрицы

$$\mathcal{B}_{gen} = \begin{pmatrix} r_2 + r_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{und} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2. Пример 2 для случая $rk(\lambda A + B) = m < n$

Рассмотрим сингулярный пучок $\lambda A + B$ операторов $A, B: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$, котрым относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^3$ соответствуют матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & -1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

где $a, b \neq a$ — вещественные параметры, не равные нулю. Этот пучок имеет тот же тип, что и предыдущий, поскольку $rk(\lambda A + B) = \dim \mathbb{R}^3 < \dim \mathbb{R}^5$, но его общий дефект $d(\lambda A + B) = 2$ и, следовательно, уравнение (12) имеет два линейно независимых решения (максимальный набор).

Найдем два произвольных линейно независимых решения $x_1(\lambda) = (1, \lambda + a - b, -1, \lambda^2 + \lambda(a - b) + 1, 0)^T$, $x_2(\lambda) = (0, -b, -1, -\lambda b + 1, 1)^T$. Тогда мы получим системы векторов $\{x_{1i}\}_{i=0}^2$ и $\{x_{2i}\}_{i=0}^1$, где

$$x_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ a - b \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ b - a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Система, состоящая из этих векторов, линейно зависима, но ее подсистема $\{x_{10}, x_{11}, x_{20}, x_{21}\}$ (или $\{x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{20}\}$) является линейно независимой и образует базис X_s . Можно найти решение меньшей степени, чем $x_1(\lambda)$, например, $\tilde{x}_1(\lambda) = (b, 0, -\lambda - a, \lambda + a, \lambda + a - b)^T$. Тогда мы получим векторы

$$\tilde{x}_{10} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -a \\ a \\ a - b \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\{\tilde{x}_1(\lambda), x_2(\lambda)\}$ — набор линейно независимых решений с наименьшими возможными степенями (оба решения имеют степень 1). Следовательно, $X_{s_2} = Lin\{\tilde{x}_{11}, x_{21}\}$, $X_{s_1} = Lin\{\tilde{x}_{10}, x_{20}\}$, $X_s = Lin\{\tilde{x}_{10}, x_{20}, \tilde{x}_{11}, x_{21}\}$

и $Y_s = \text{Lin}\{A\tilde{x}_{10}, Ax_{20}\}$, где $A\tilde{x}_{10} = (b, 0, 0)^T$, $Ax_{20} = (0, -b, 0)^T$. С другой стороны, можно преобразовать систему $\{x_{10}, x_{11}, x_{20}, x_{21}\}$ так, чтобы можно было выбрать базисы для X_{s_1} , X_{s_2} , а именно, $X_s = \text{Lin}\{x_{10}, x_{11}, x_{20}, x_{21}\} = \text{Lin}\{s_i\}_{i=1}^4$, где

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $Y_s = \text{Lin}\{Ax_{10}, Ax_{11}\} = \text{Lin}\{Ax_{10}, Ax_{20}\} = \text{Lin}\{As_1, As_2\}$, где $As_1 = (1, 0, 0)^T$, $As_2 = (0, 1, 0)^T$ ($Ax_{10} = (1, a - b, 0)^T$, $Ax_{11} = (0, -1, 0)^T$), и $X_{s_1} = \text{Lin}\{s_1, s_2\}$, $X_{s_2} = \text{Lin}\{s_3, s_4\}$. Далее находим $X_r = \text{Lin}\{p\}$, $Y_r = \text{Lin}\{q\}$, где $p = (0, 0, 1, 0, 0)^T$, $q = Bp = (b, -1, 1)^T$. Полученные прямые разложения пространств (1), (8) порождают проекторы, которым относительно стандартных базисов в \mathbb{R}^5 и \mathbb{R}^3 соответствуют проекционные матрицы $S = S_1 + S_2$,

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $QA = 0$ и B_r обратим, то регулярный блок $\lambda A_r + B_r$ является регулярным пучком индекса 1 и $P_1 = 0$, $P_2 = P$, $Q_1 = 0$, $Q_2 = Q$, $X_1 = \{0\}$, $X_2 = X_r$, $Y_1 = \{0\}$, $Y_2 = Y_r$, $A_2 = A_r$, $B_2 = B_r$. Используя вид полученных проекционных матриц, легко найти вид матриц, соответствующих операторам (10):

$$\mathcal{A}_{gen} = A, \quad \mathcal{B}_{gen} = \begin{pmatrix} a - b & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{und} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и вид матрицы, соответствующей оператору \mathcal{B}_r из (6):

$$\mathcal{B}_r = \begin{pmatrix} b & 0 & b & 0 & b \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что $\mathcal{B}_{gen} + \mathcal{B}_{und} + \mathcal{B}_r = B$ (это выполнено, поскольку $S_1 + S_2 + P = E_{\mathbb{R}^5}$ и $QB = BP$).

4.3. Пример для случая $rk(\lambda A + B) = n < m$

Рассмотрим сингулярный пучок $\lambda A + B$ операторов $A, B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, которым относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ соответствуют матрицы [2]

$$A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} r_2 + r_3 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ -r_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

где L, C, g, r_2, r_3 — вещественные параметры, не равные нулю. Очевидно, ранг пучка равен $rk(\lambda A + B) = 3$ и общий дефект пучка равен $d(\lambda A + B) = 1$ (дефект пучка $\lambda A + B$ равен 0, а дефект транспонированного пучка $\lambda A^T + B^T$ равен 1).

Поскольку $M = d(\lambda A + B) = d(\lambda A^T + B^T) = 1$, то уравнение (18) имеет одно ненулевое решение $y_1(\lambda)$, которое определяется с точностью до скалярного множителя:

1. $y_1(\lambda) = (-r_2(\lambda C + g), \lambda L + r_2 + r_3, -(\lambda C + g)(\lambda L + r_2 + r_3), 0)^T$ при $L \neq C(r_2 + r_3)/g$;
2. $y_1(\lambda) = (-r_2g/(r_2 + r_3), 1, -(\lambda C + g), 0)^T$ при $L = C(r_2 + r_3)/g$.

Сначала рассмотрим случай 1, когда $L \neq C(r_2 + r_3)/g$.

Так же, как это делалось в предыдущем примере для пучка $\lambda A + B$, строим пространства $\hat{X}_s = \hat{X}_{s_1} + \hat{X}_{s_2} = Lin\{\hat{s}_i\}_{i=1}^3$, $\hat{X}_{s_1} = Lin\{\hat{s}_i\}_{i=1}^2$, $\hat{X}_{s_2} = Lin\{\hat{s}_3\}$, $\hat{Y}_s = Lin\{\hat{l}_i\}_{i=1}^2$, $\hat{X}_r = Lin\{\hat{p}\}$, $\hat{Y}_r = Lin\{\hat{q}\}$, где

$$\hat{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{l}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

для транспонированного пучка $\lambda A^T + B^T$ и проекторы $\hat{S}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \hat{X}_s$, $\hat{S}_i: \mathbb{R}^4 \rightarrow \hat{X}_{s_i}$, $i = 1, 2$, $\hat{P}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \hat{X}_r$, $\hat{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \hat{Y}_s$, $\hat{Q}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \hat{Y}_r$, которым относительно стандартных базисов в \mathbb{R}^4 и \mathbb{R}^3 соответствуют проекционные матрицы

$$\hat{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2, \quad \hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда проекторы $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_s$, $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_r$, $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_s$, $Q: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_r$, $F_i: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_{s_i}$, $i = 1, 2$ ($F = F_1 + F_2$), которым соответствуют проекционные матрицы $S = \hat{F}^T$, $P = \hat{Q}^T$, $F = \hat{S}^T$, $Q = \hat{P}^T$, $F_i = \hat{S}_i^T$, $i = 1, 2$, порождают прямые разложения пространств (1), (14), где $X_s = Lin\{s_i\}_{i=1}^2$, $X_r = Lin\{p\}$, $Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} = Lin\{\hat{s}_i\}_{i=1}^3$, $Y_r = Lin\{\hat{p}\}$, $Y_{s_1} = Lin\{\hat{s}_i\}_{i=1}^2$, $Y_{s_2} = Lin\{\hat{s}_3\}$, $s_1 = (1, 0, -1)^T$, $s_2 = \hat{l}_2$, $p = (0, 0, 1)^T$.

Как и в предыдущем примере, легко проверить, что то $A_r = QA|_{X_r} = 0$ и $B_r = QB|_{X_r}$ обратим. Следовательно, $\lambda A_r + B_r$ — регулярный пучок индекса 1, и $X_1 = \{0\}$, $X_2 = X_r$, $Y_1 = \{0\}$, $Y_2 = Y_r$, $P_1 = 0$, $P_2 = P$, $Q_2 = Q$, $Q_1 = 0$ ($P_k: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_k$, $Q_k: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_k$, $k = 1, 2$).

Оператору $\mathcal{A}_{gen} = FA: \mathbb{R}^3 \rightarrow Y_{s_1}$ ($X_r = Ker(\mathcal{A}_{gen})$, $\mathcal{A}_{gen} = \mathcal{A}_{gen}|_{X_s} \in L(X_s, Y_{s_1})$), введенному в (16), относительно стандартных базисов в \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^4 соответствует матрица $\mathcal{A}_{gen} = A$. Полуобратному оператору $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)}: \mathbb{R}^4 \rightarrow X_{s_1}$ ($Y_{s_2} \dot{+} Y_r = Ker(\mathcal{A}_{gen}^{(-1)})$, $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)} = \mathcal{A}_{gen}^{(-1)}|_{Y_{s_1}} \in L(Y_{s_1}, X_s)$) относительно стандартных базисов в \mathbb{R}^4 , \mathbb{R}^3 соответствует матрица (удовлетворяющая свойствам (25), где $S_1 = S$)

$$\mathcal{A}_{gen}^{(-1)} = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{-1} & 0 & 0 \\ -L^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторам $\mathcal{B}_{gen}: \mathbb{R}^3 \rightarrow Y_{s_1}$, $\mathcal{B}_{ov}: \mathbb{R}^3 \rightarrow Y_{s_2}$ ($X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{gen})$, $Ker(\mathcal{B}_{ov})$, $\mathcal{B}_{gen} = \mathcal{B}_{gen}|_{X_s} \in L(X_s, Y_{s_1})$, $\mathcal{B}_{ov} = \mathcal{B}_{ov}|_{X_s} \in L(X_s, Y_{s_2})$), введенным в (16), относительно стандартных базисов в \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^4 соответствуют матрицы

$$\mathcal{B}_{gen} = \begin{pmatrix} r_2 + r_3 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{ov} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -r_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим случай 2, когда $L = C(r_2 + r_3)/g$.

В этом случае получаем пространства $X_s = Lin\{s\}$, $X_r = Lin\{p_i\}_{i=1}^2$, $Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} = Lin\{l_i\}_{i=1}^2$, $Y_{s_1} = Lin\{l_1\}$, $Y_{s_2} = Lin\{l_2\}$, $Y_r = Lin\{w_i\}_{i=1}^2$, где

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad l_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{r_2 g}{r_2 + r_3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проекторам $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_s, P: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_r, F: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_s, F = F_1 + F_2, F_i: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_{s_i}, i = 1, 2, Q: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_r$ относительно стандартных базисов в \mathbb{R}^3 и \mathbb{R}^4 соответствуют проекционные матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -r_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{r_2 g}{r_2 + r_3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r_2 g}{r_2 + r_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $\lambda A_r + B_r$ — регулярный пучок, оператор A_r вырожден и выполнено (27). Следовательно, $\lambda A_r + B_r$ — регулярный пучок индекса 1. Подпространства из прямых разложений (29) и соответствующие проекторы имеют вид $X_1 = \text{Lin}\{p_1\}, X_2 = \text{Lin}\{p_2\}, Y_1 = \text{Lin}\{w_1\}, Y_2 = \text{Lin}\{w_2\}, P_k: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_k, Q_k: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_k, k = 1, 2, (P = P_1 + P_2, Q = Q_1 + Q_2)$, где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r_2 g}{r_2 + r_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы, соответствующие операторам $\mathcal{A}_{gen}, \mathcal{A}_1$ ($\mathcal{A}_{gen} = \mathcal{A}_{gen}|_{X_s}, \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1|_{X_1}$), введенным в (16), (33), и полуобратным операторам $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)}, \mathcal{A}_1^{(-1)}$ ($\mathcal{A}_{gen}^{(-1)} = \mathcal{A}_{gen}^{(-1)}|_{Y_{s_1}}, \mathcal{A}_1^{(-1)} = \mathcal{A}_1^{(-1)}|_{Y_1}$, $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)}$ удовлетворяет (25), где $S_1 = S$, и $\mathcal{A}_1^{(-1)}$ удовлетворяет (35)) относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ имеют вид

$$\mathcal{A}_{gen} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -r_2 C & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_{gen}^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_2 L^{-1} & C^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ r_2 C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_1^{(-1)} = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ r_2 L^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -L^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторам $\mathcal{B}_{gen}, \mathcal{B}_{ov}$ ($\mathcal{B}_{gen} = \mathcal{B}_{gen}|_{X_s}, \mathcal{B}_{ov} = \mathcal{B}_{ov}|_{X_s}$), введенным в (16),

относительно стандартных базисов в \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^4 соответствуют матрицы

$$\mathcal{B}_{gen} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -r_2g & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{ov} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -r_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.4. Пример для случая $rk(\lambda A + B) < n$, $rk(\lambda A + B) < m$

Рассмотрим сингулярный пучок $\lambda A + B$ операторов $A, B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, которым относительно стандартных базисов в \mathbb{R}^3 соответствуют матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Ранг пучка равен $rk(\lambda A + B) = 2$ и общий дефект пучка равен $d(\lambda A + B) = 2$, при этом $N = 1$ и $M = 1$ (дефекты $\lambda A + B$ и $\lambda A^T + B^T$ равны 1).

Решение уравнения (12) имеет вид (с точностью до скалярного множителя) $x_1(\lambda) \equiv x_{10} = (1, 0, 1)^T$. Значит x_{10} является базисным вектором подпространства X_s из (1), и в том числе X_{s_2} из (19).

Решение уравнения (18) имеет вид (с точностью до скалярного множителя) $y_1(\lambda) = (1, -(\lambda+1), (\lambda+2)/2)^T$. Как и в примере из пункта 4.3, для транспонированного пучка $\lambda A^T + B^T$ строим подпространства $\hat{X}_s = \hat{X}_{s_1} \dot{+} \hat{X}_{s_2} = Lin\{\hat{s}_i\}_{i=1}^2$, $\hat{X}_{s_1} = Lin\{\hat{s}_1\}$, $\hat{X}_{s_2} = Lin\{\hat{s}_2\}$, $\hat{Y}_s = Lin\{\hat{l}\}$, где

$$\hat{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \hat{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

и проекционные матрицы

$$\hat{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2, \quad \hat{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя проекционные матрицы \hat{S}^T , \hat{S}_1^T , \hat{S}_2^T , \hat{F}^T и вектор x_{10} , получаем подпространства из разложений (1), (19): $X_s = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} = Lin\{s_i\}_{i=1}^2$, $X_{s_1} = Lin\{s_1\}$, $X_{s_2} = Lin\{s_2\}$, $X_r = Lin\{p\}$, $Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} = Lin\{l_i\}_{i=1}^2$, $Y_{s_1} = Lin\{l_1\}$, $Y_{s_2} = Lin\{l_2\}$, $Y_r = Lin\{q\}$, где

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда проекционные матрицы, соответствующие проекторам $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_s$, $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow Y_s$, $S_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_{s_i}$, $F_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow Y_{s_i}$, $i = 1, 2$, $S = S_1 + S_2$, $F = F_1 + F_2$, $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_r$, $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow Y_r$, имеют вид

$$S_1 = \hat{F}^T, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_1 = \hat{S}_1^T, F_2 = \hat{S}_2^T, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $A_r = QA|_{X_r} = 0$ и $B_r = QB|_{X_r}$ обратим. Следовательно, $\lambda A_r + B_r$ — регулярный пучок индекса 1 и подпространства из разложений (29) имеют вид: $X_1 = \{0\}$, $X_2 = X_r$, $Y_1 = \{0\}$, $Y_2 = Y_r$, а проекторы $P_k: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_k$, $Q_k: \mathbb{R}^3 \rightarrow Y_k$, $k = 1, 2$, таковы: $P_1 = 0$, $P_2 = P$, $Q_1 = 0$, $Q_2 = Q$.

Операторам \mathcal{A}_{gen} , \mathcal{B}_{gen} , \mathcal{B}_{und} , \mathcal{B}_{ov} ($\mathcal{A}_{gen} = \mathcal{A}_{gen}|_{X_{s_1}} \in L(X_{s_1}, Y_{s_1})$, $\mathcal{B}_{gen} = \mathcal{B}_{gen}|_{X_{s_1}} \in L(X_{s_1}, Y_{s_1})$, $\mathcal{B}_{und} = \mathcal{B}_{und}|_{X_{s_2}} \in L(X_{s_2}, Y_{s_1})$, $\mathcal{B}_{ov} = \mathcal{B}_{ov}|_{X_{s_1}} \in L(X_{s_1}, Y_{s_2})$), введенным в (23), и полуобратному оператору $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)}$ ($\mathcal{A}_{gen}^{(-1)} = \mathcal{A}_{gen}^{(-1)}|_{Y_{s_1}} \in L(Y_{s_1}, X_{s_1})$, $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)}$ удовлетворяет (25)) относительно стандартных базисов в \mathbb{R}^3 соответствуют матрицы $\mathcal{A}_{gen} = A$, $\mathcal{B}_{und} = 0$,

$$\mathcal{B}_{gen} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{ov} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{gen}^{(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Приведение дифференциально-операторного уравнения с сингулярным пучком операторов

Рассмотрим дифференциально-операторное уравнение вида

$$\frac{d}{dt}[Ax] + Bx = f(t, x), \quad (40)$$

где $A, B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $f(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Влияние линейной части $\frac{d}{dt}[Ax] + Bx$ уравнения (40) определяется свойствами характеристического пучка $\lambda A + B$. В общем, пучок $\lambda A + B$ является сингулярным.

Уравнения типа (40) также называют *полулинейными дифференциально-алгебраическими уравнениями* (ДАУ). Полулинейное ДАУ с сингулярным пучком называется *сингулярным* или *нерегулярным*.

Предположим, что сингулярный пучок имеет регулярный блок $\lambda A_r + B_r$ (см. (2)) индекса не выше 1.

Применяя к уравнению (40) проекторы $F_i, Q_i, i = 1, 2$, (см. (21), (32)) и используя их свойства, получаем эквивалентную систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(F_1AS_1x) + F_1BSx &= F_1f(t, x), \\ \frac{d}{dt}(Q_1AP_1x) + Q_1BP_1x &= Q_1f(t, x), \\ Q_2BP_2x &= Q_2f(t, x), \\ F_2BS_1x &= F_2f(t, x). \end{aligned} \quad (41)$$

Относительно разложений (26), (29) любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представим в виде

$$x = x_s + x_r = x_{s_1} + x_{s_2} + x_{p_1} + x_{p_2}, \quad (42)$$

где $x_s = Sx \in X_s, x_r = Px \in X_r, x_{s_i} = S_i x \in X_{s_i}, x_{p_i} = P_i x \in X_i, i = 1, 2$.

Используя представление (42) и учитывая блочную структуру сингулярного пучка, а именно вид операторов (23) и (33), получаем систему, эквивалентную (41):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathcal{A}_{gen}x_{s_1}) + \mathcal{B}_{gen}x_{s_1} + \mathcal{B}_{und}x_{s_2} &= F_1f(t, x), \\ \frac{d}{dt}(\mathcal{A}_1x_{p_1}) + \mathcal{B}_1x_{p_1} &= Q_1f(t, x), \\ \mathcal{B}_2x_{p_2} &= Q_2f(t, x), \\ \mathcal{B}_{ov}x_{s_1} &= F_2f(t, x). \end{aligned} \quad (43)$$

Заметим, что можно сузить операторы в уравнениях системы (41) и использовать в (43) вместо (23), (33) суженные операторы (24), (34).

Умножая уравнения системы (43) соответственно на $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)}, \mathcal{A}_1^{(-1)}, \mathcal{B}_2^{(-1)}$, получаем эквивалентную систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_{s_1} &= \mathcal{A}_{gen}^{(-1)}[F_1f(t, x) - \mathcal{B}_{gen}x_{s_1} - \mathcal{B}_{und}x_{s_2}], \\ \frac{d}{dt}x_{p_1} &= \mathcal{A}_1^{(-1)}[Q_1f(t, x) - \mathcal{B}_1x_{p_1}], \\ x_{p_2} &= \mathcal{B}_2^{(-1)}Q_2f(t, x), \\ \mathcal{B}_{ov}x_{s_1} &= F_2f(t, x). \end{aligned} \quad (44)$$

Если в (43) используются суженные операторы (24), (34), то уравнения системы (43) умножаются на суженные операторы $A_{gen}^{-1} = \mathcal{A}_{gen}^{(-1)}|_{Y_{s_1}}, A_1^{-1} = \mathcal{A}_1^{(-1)}|_{Y_1}, B_2^{-1} = \mathcal{B}_2^{(-1)}|_{Y_2}$.

Таким образом, мы свели сингулярное полулинейное ДАУ (40) к эквивалентной системе (44) из чисто дифференциальных и чисто алгебраических уравнений.

Эти результаты используются при доказательстве теорем об устойчивости и неустойчивости по Лагранжу сингулярного полулинейного ДАУ (40) [2, Теоремы 1, 2].

6. Выводы

Описана блочная структура сингулярного пучка операторов, состоящая из сингулярного и регулярного блоков, в которых выделены нулевые и обратимые блоки. Подробно описан метод нахождения блочной структуры пучка и соответствующих прямых разложений пространств. Показаны способы построения проекторов, позволяющих выделить требуемые блоки.

Благодарность. Исследование выполнено при частичной грантовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований (проект Ф83/82-2018).

ORCID ID

M. S. Filipkovska (Filipkovskaya)  <https://orcid.org/0000-0002-2266-1243>

REFERENCES

1. F.R. Gantmacher. The theory of matrices. 2010. FIZMATLIT, Moscow, 560 p.
2. M.S. Filipkovskaya, Lagrange stability and instability of irregular semilinear differential-algebraic equations and applications, Ukrainian Math. J. — 2018. — 6. V.70 — P. 947–979.
3. Ju.L. Daleckii, M.G. Krein. Stability of solutions of differential equations in a Banach space. 1970. Nauka, Moscow, 536 p.
4. P.R. Halmos. Finite-dimensional vector spaces. 1958. Van Nostrand, Princeton, 200 p.
5. A.G. Rutkas. Cauchy problem for the equation $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$, Differ. Uravn. — 1975. — 11. V.11 — P. 1996–2010.
6. D.K. Faddeev, Lectures on algebra. 1984. Nauka, Moscow, 416 p.
7. A.G. Rutkas, L.A. Vlasenko. Existence, uniqueness and continuous dependence for implicit semilinear functional differential equations, Nonlinear Anal. — 2003. — 1–2. V.55. — P. 125–139.
8. L.A. Vlasenko. Evolution models with implicit and degenerate differential equations. 2006. Sistemnye Tekhnologii, Dnepropetrovsk, 273 p.
9. A.G. Rutkas. Solvability of semilinear differential equations with singularity, Ukrainian Math. J. — 2008. — 2. V.60. — P. 262–276.

Філіпковська М. С. Блокова форма сингулярного жмутка операторів і метод її отримання. Описано блокову форму сингулярного жмутка операторів $\lambda A + B$, де λ — комплексний параметр, а лінійні оператори A, B діють у скінченновимірних просторах. Жмуток операторів $\lambda A + B$ називається регулярним, якщо $n = m = rk(\lambda A + B)$, де $rk(\lambda A + B)$ — ранг жмутка та m, n — розмірності просторів (оператори відображають n -мірний простір у m -мірний). В інших випадках, тобто якщо $n \neq m$ або $n = m$ та $rk(\lambda A + B) < n$, жмуток називається сингулярним (нерегулярним). Блокова форма (структура) складається з сингулярного блоку, який є суто сингулярним жмутком (тобто від нього неможливо відокремити регулярний блок) і регулярного блоку. У цих блоках виділено нульові блоки та блоки, які є оборотними операторами. Детально описано метод отримання блокової форми сингулярного жмутка операторів у двох спеціальних випадках, коли $rk(\lambda A + B) = m < n$ та $rk(\lambda A + B) = n < m$, і в загальному випадку, коли $rk(\lambda A + B) < n, m$. Надано способи побудови проекторів на підпростори з прямих розкладань, відносно яких жмуток має потрібний блоковий вигляд. За допомогою цих проекторів можна знайти вигляд блоків і, відповідно, блокову форму жмутка. Наведено приклади знаходження блокової форми для різних типів сингулярних жмутків. Для отримання блокової форми, зокрема, використовувалися результати, що стосуються зведення сингулярного жмутка матриць до канонічного квазидіагонального вигляду, який називають канонічною формою Вейерштрасса-Кронекера. Також використовуються методи лінійної алгебри.

Отримана блокова форма жмутка та відповідні проектори можуть бути використані при розв'язанні різноманітних задач. Зокрема, вони можуть бути застосовані для зведення сингулярного напівлінійного диференціально-операторного рівняння до еквівалентної системи із суто диференціальних і суто алгебраїчних рівнянь. Це значно полегшує аналіз та розв'язання диференціально-операторних рівнянь.

Ключові слова: жмуток операторів; жмуток матриць; сингулярний; регулярний блок; блокова форма; структура.

M. S. Filipkovska (Filipkovskaya). **A block form of a singular pencil of operators and a method of obtaining it.** A block form of a singular operator pencil $\lambda A + B$, where λ is a complex parameter, and the linear operators A, B act in finite-dimensional spaces, is described. An operator pencil $\lambda A + B$ is called regular if $n = m = rk(\lambda A + B)$, where $rk(\lambda A + B)$ is the rank of the pencil and m, n are the dimensions of spaces (the operators map an n -dimensional space into an m -dimensional one); otherwise, if $n \neq m$ or $n = m$ and $rk(\lambda A + B) < n$, the pencil is called singular (irregular). The block form (structure) consists of a singular block, which is a purely singular pencil, i.e., it is impossible to separate out a regular block in this pencil, and a regular block. In these blocks, zero blocks and blocks, which are invertible operators, are separated out. A method of obtaining the block form of a singular operator pencil is described in detail for two special cases, when $rk(\lambda A + B) = m < n$ and $rk(\lambda A + B) = n < m$, and for the general case, when $rk(\lambda A + B) < n, m$. Methods for the construction of projectors onto subspaces from the direct decompositions, relative to which the pencil has the required block form, are given. Using these projectors, we can find the form of the blocks and, accordingly, the block form of the pencil. Examples of finding the block form for the various types of singular pencils are presented. To obtain the block form, in particular, the results regarding the reduction of a singular pencil of matrices to the canonical quasidiagonal form, which is called the Weierstrass-Kronecker canonical form, are used. Also, methods of linear algebra are used.

The obtained block form of the pencil and the corresponding projectors can be used

to solve various problems. In particular, it can be used to reduce a singular semilinear differential-operator equation to the equivalent system of purely differential and purely algebraic equations. This greatly simplifies the analysis and solution of differential-operator equations.

Keywords: operator pencil; matrix pencil; singular; regular block; block form; structure.

Article history: Received: 8 February 2019; Final form: 10 May 2019;

Accepted: 15 May 2019.

Численное моделирование BVI-шума двухлопастного ротора вертолѐта синусоидальной формы

Лукьянов П. В.¹

¹*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев, Желябова 8/4,
03680, Украина
petr_lukianov@bigmir.net*

В работе поставлена и решена задача генерации BVI-шума двухлопастным ротором вертолѐта синусоидальной формы вдоль по размаху лопасти. Выполнен расчёт характеристик ближнего и дальнего звуковых полей. Проведен сравнительный анализ полученных данных с данными для двухлопастного ротора с лопастями прямоугольной формы. Для ротора синусоидальной формы в большинстве расчётных случаев шум на 3-5 Дб ниже, чем у ротора с лопастями прямоугольной формы. При этом наблюдается существенное перераспределение энергии звукообразования из продольных в поперечные волны. Интерференционная картина говорит о сложном нелинейном характере генерируемого шума. В спектре его активизируются более высокие частоты. Вариация формы лопасти вдоль по размаху позволяет влиять на характер и уровень BVI-шума.

Ключевые слова: генерация звука; вертолѐт; BVI-шум.

Лук'янов П.В. **Чисельне моделювання BVI-шуму дволопатевого ротора гелікоптера синусоїдальної форми** В роботі поставлено та чисельно розв'язано задачу генерації BVI-шуму дволопаттевим ротором гелікоптера синусоїдальної форми вздовж за розмахом лопаті. Виконано розрахунок характеристик ближнього та дальнього звукових полів. Проведено порівняльний аналіз отриманих даних з даними для дволопатевого ротора з лопатями прямокутної форми. Для ротора синусоїдальної форми у більшості розрахункових випадків шум на 3-5 Дб нижче, а ніж у ротора з лопатями прямокутної форми. При цьому спостерігається істотний перерозподіл енергії звукоутворення з повздовжних у поперечні хвилі. Інтерференційна картина говорить про складний нелінійний характер шуму, що генерується. У спектрі його активуються більш високі частоти. Варіація форми лопаті вздовж за розмахом дозволяє вплинути на характер та рівень BVI-шуму.

Ключові слова: генерація звуку; гелікоптер; BVI-шум.

P.V. Lukianov. **BVI-noise simulation of two-blade helicopter's rotor sin-shape** In this paper a problem of BVI-noise generation by two-blade rotor sin-shape is set and solved. A sound density and a pressure level for far and near-field have been calculated. A comparative analysis of the data with ones fortwo-blade rotor with rectangular blades has been carried out. Sin-shape rotor noise for most case of calculations has 3-5 Db less then the noise of rotor with rectangular blade. Here essential reapportionment of energy of longitudinal

sound waves to s-waves is observed. Interference figure says about complex non-linear character of generated sound. Its specter activates more high frequencies. Blade shape variation along the blade sweep allows controlling character and level of BVI-noise.

Keywords: sound generation; helicopter; BVI-noise.

2010 Mathematics Subject Classification 76Q05, 76G25.

1. Введение

Уровень генерируемого шума взаимодействия лопасти и вихрей (BVI-шум) существенным образом зависит от продольной геометрии лопасти. В начале развития вертолетостроения лопасти ротора вертолѐта конструктивно имели прямоугольную форму. В последствии им стали придавать различную форму на концах, чтобы снизить влияние концевых вихрей на генерацию шума аэродинамического происхождения. И только на протяжении последних полутора десятка лет ведѐтся интенсивный поиск новых продольных форм лопастей вдоль по размаху.

Как известно в живой природе все формы совершенствовались на протяжении тысячелетий. Поэтому разнообразным машинам, летательным аппаратам, созданным человеком, стараются придать форму тех или иных живых организмов. Так в последнее время при проектировании лопасть ротора вертолѐта настолько видоизменилась, что приблизилась по своей форме к птичьему крылу (wing-blade).

В настоящее время наблюдается тенденция к поиску новых математических моделей, позволяющих изучить течение вокруг лопасти видоизменѐнной формы с целью снижения BVI-шума. Так в работе [1] изучается BVI-шум лопасти вертолѐта под действием нестационарной нагрузки. Моделирование скорости вокруг лопасти выполняется на основе закона Био-Савара, в то время как течение в целом считается потенциальным, удовлетворяющим уравнению Лапласа. Это, конечно же, довольно таки противоречивый подход, поскольку закон Био-Савара подразумевает существование завихренности вокруг лопасти, а уравнение Лапласа справедливо лишь для идеальной несжимаемой жидкости, потенциального течения. Акустическая формулировка задачи используется в виде известного представления Форсайта (форма A1) [2], полученного с использованием формулы Фуокс - Уильямса - Хоукинса. В качестве расчетных данных в работе, в том числе, представлены азимутальные распределения пульсаций акустического давления, которые близки к кривым, полученным в работе [3]. В работе [4] для акустического поля также используется представление Форсайта, в то время как компоненты скорости и ускорения, действующих на лопасть, моделируются на основе упрощѐнных моделей теоретической механики, не решая уравнений аэродинамики. Авторами данной работы представлены диаграммы распределения звукового давления и уровня шума для трёх режимов полѐта: левый поворот, полѐт на заданном уровне, правый поворот. Результаты расчѐтов показали, что шум при пово-

ротах (маневрах) выше шума при прямом полёте на 6 Дб (110 Дб-116 Дб). И этот аспект ещё раз нам даёт понять, почему стоит обратить внимание на природные формы крыльев птиц - чтобы снизить шум при манёврах.

В работе [5] для моделирования поля скорости используется метод вихрей в ячейке (vortex lattice method - VLM), а расчёт акустического поля также выполнен на основе формулы Форсайта. Полученные данные акустического уровня давления колеблются в пределах до 119 Дб. Кроме того, некоторые авторы [6] для моделирования поля скоростей используют Лагранжевы координаты, а для оценки шума аэродинамического происхождения также используют формулу Форсайта. В работе [8] используется модель изотропной турбулентности Кармана, а для акустического поля - асимптотические формулы Амиета.

Однако расчёт поля скорости по упрощённым [1], [4]-[8] моделям позволяет лишь приближённо оценить генерируемый BVI-шум. Если же речь идёт о проектировании малошумных лопастей, то здесь необходимы более точные данные о поле скорости, давления вокруг лопасти. Для этой цели необходимо решать уравнение Эйлера (или Навье-Стокса) совместно с уравнением неразрывности. Такой подход предложен в работе [9], акустическая часть задачи также решается на основе модели Форсайта. В работе [10] [8] экспериментально проверены модели, описывающие BVI-шум. Так оказалось, что двумерные нестационарные модели достаточно хорошо подходят для изучения шума при прямолинейном обтекании лопасти потоком. При постановке лопасти под углом к потоку (косая обдувка), они уже не удовлетворительны: необходима трёхмерная модель течения. В связи с тем, что в последнее время основной акцент при моделировании малошумных лопастей делается на варьирование формы лопасти вдоль по её размаху, очевидным становится использование трёхмерных моделей течения вокруг лопасти. Некоторые учёные пытаются, не используя этого, предпринять всякого рода ухищрения [11], например, сделать переднюю кромку лопасти зубчатой. Это позволяет при определённых соотношениях параметров течения снизить шум на 3 Дб. Однако вполне очевидно, что зубчатость сама по себе привносит дополнительные возмущения в поток: одни частоты она может гасить, в то время как другие лишь возбуждать при определённом снижении уровня шума в целом. В работах [12], [2] также приводится как численное, так и экспериментальное подтверждение необходимости решения полной трёхмерной задачи по нахождению компонент поля скорости, давления.

Следует отметить, что подход Форсайта [2], как уже акцентировалось в работе [13], достаточно неоднозначен: использование теории обобщённых функций приводит к кардинальному преобразованию всех решаемых уравнений, появлению "новых источников" звука, которых то на самом деле нет. Для избежания такой неоднозначности автором данной работы ранее была предложена замкнутая система уравнений аэроакустики, а для дальнего поля получено интегральное представление на основании второй формулы Грина. С использованием этой модели были решены ряд задач по изучению BVI-шума

для лопастей видоизмененной формы вдоль по размаху [14], [15]. В представляемой ниже работе решается задача генерации шума двухлопастного ротора синусоидальной формы. Выполнен сравнительный анализ полученных расчётных данных с расчётными данными для двухлопастного ротора прямоугольной формы [16]. В частности замечено, что модификация формы лопасти способствует снижению BVI-шума.

2. Постановка задачи. Метод решения задачи

Пусть есть лопасть (рис.1), форма которой в плоскости её размаха имеет форму синусоиды, то есть функции $f = \sin z$. При этом максимальная амплитуда изгиба, множитель при $\sin z$, составляет 0.1; 0.15. Таким образом, изгиб лопасти выбирается не более 15%. Лопасть в произвольный момент времени повёрнута в плоскости вращения на некоторый угол α и расположена под углом атаки γ к набегающему на неё с бесконечности (U_∞, ρ_∞) потоку. На конце лопасти индуцируются вихри Скулли:

$$V_\theta = 1.2 \cdot U_\infty \frac{\bar{r}_c}{1 + \bar{r}_c^2}, \bar{r} = \frac{r}{r_c}, \quad (1)$$

а вдоль её размаха - задано распределение вихрей Тейлора:

$$V_\theta = V_{\theta max} \frac{r}{r_c} \exp^{1-(r/r_c)^2}. \quad (2)$$

В уравнениях (1)-(2) r , θ , r_c - радиальная координата, азимутальная координата и радиус вихревого ядра соответственно.

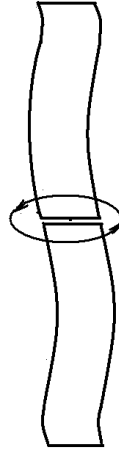


Рис. 1: Двухлопастный синусообразный ротор.

Считаем, что течение вокруг лопасти идеальное сжимаемое, а тепловые изменения не влияют на формирование течения и генерируемого им звука.

Необходимо найти характеристики генерируемого звукового поля, выполнить сравнение их с данными расчёта для двухлопастного ротора с лопастями прямоугольной формы [16]. Математически задача состоит из аэродинамической и акустической частей. Течение вокруг лопасти, аэродинамическая задача, описывается системой уравнений

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \nabla p, \operatorname{div}(\rho \bar{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

Первое из уравнений (3) - уравнение движения в форме Эйлера. Второе уравнение - уравнение неразрывности. На поверхности Γ жёсткой лопасти задаётся условие непротекания течения:

$$\bar{v}_n|_{\Gamma} = 0. \quad (4)$$

Уравнения (1)-(4) представляют собой аэродинамическую задачу. Акустическая задача состоит из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 \rho' = \operatorname{div}[\rho(\nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \\ \times \nabla \varphi + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi) + \rho'(\nabla \frac{v^2}{2} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v})] \\ + \operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot \operatorname{div}(\rho \nabla \varphi + \rho' \mathbf{v})) - \operatorname{div}(\rho' \mathbf{F}) + \\ + \operatorname{div}(\nabla \varphi \cdot \operatorname{div} \rho \mathbf{v}) + \nabla a^2 \cdot \nabla \rho' \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \rho + \rho' \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho' = 0, \quad (6)$$

В уравнениях (5)-(6) ρ' , φ - малые возмущения плотности и звуковой потенциал. В начальный момент времени $\rho'_{t=0}, \varphi_{t=0} = 0$. Граничное условие (по скоростям) для звуковой волны включено в (2).

Как задача (1)-(4), так и задача (5)-(6) решалась с помощью численно-аналитического подхода [16]. При этом в обоих случаях расчётная система состояла из 15 уравнений для определения соответствующих неизвестных функции, её производных. Сетка выбиралась такой же, как и для ранее решённых задач, единственное отличие составляло большее количество узлов по поперечному сечению лопасти: вместо 80 точек здесь задавались 82-85 точек для устойчивого счёта.

3. Ближнее звуковое поле

При расчёте задачи использовался профиль NASA-0012 параболической формы. BVI- шум играет важную роль играет при манёврах вертолёта. Поэтому числа Маха набегающего на лопасть потока выбирались сравнительно

небольшие: $M = 0.3, 0.4$. Угол постановки лопасти к потоку были равными $\alpha = 30^\circ - 45^\circ$, а угол атаки $\gamma = 5^\circ, 10^\circ$. Ещё один из параметров, который варьировался в данной задаче, это степень изгиба лопасти: $\delta = 0.1, 0.15$ отношение максимальной амплитуды отклонения синусоиды от центральной линии лопасти к длине самой лопасти.

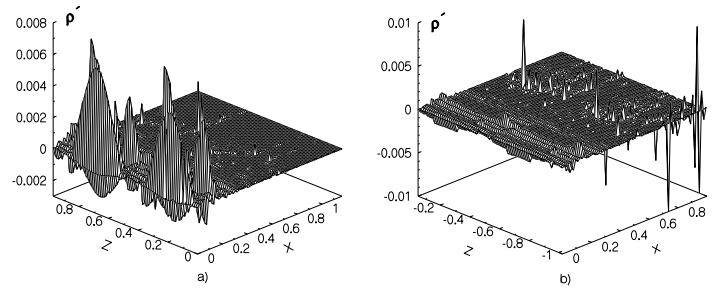


Рис. 2: Безразмерная акустическая плотность, $M = 0.4$, $\gamma = 10^\circ$, $\delta = 0.1$, $\alpha = 45^\circ$: а) наступающая лопасть, б) отступающая лопасть

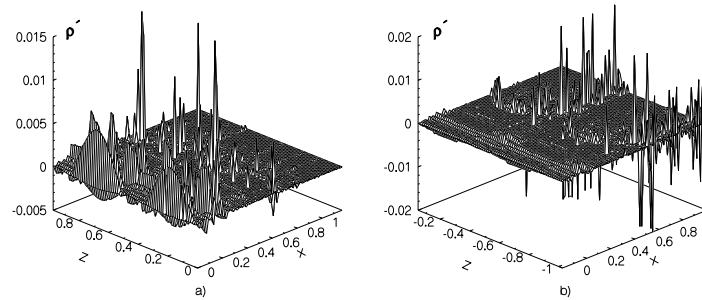


Рис. 3: Безразмерная акустическая плотность, $M = 0.4$, $\gamma = 10^\circ$, $\delta = 0.1$, $\alpha = 30^\circ$: а) наступающая лопасть, б) отступающая лопасть

Численный счёт был выполнен для различных значений указанных выше параметров. Однако качественно не все из расчётных ситуаций отличаются друг от друга: наблюдаются лишь количественные отличия. Поэтому ниже представим анализ полученных данных для характерных расчётных ситуаций.

Так в случае $M = 0.4$, $\delta = 0.1$, $\gamma = 10^\circ$, $\alpha = 45^\circ$ (рис. 2а) у наступающей лопасти чётко выражен искривлённый волновой фронт, обусловленные формой лопасти вдоль по размаху. Вслед за ним наблюдается вторичная волновая серия. Амплитуда её в несколько раз меньше амплитуды первой серии. Далее, двигаясь поперёк лопасти, звуковая волна распадается на слабо выраженные, по сравнению с первой серией, волновые фронты. У отступающей лопасти (рис. 2б) передний волновой фронт более равномерно распределён на

протяжении всей длины лопасти. Однако у отступающей лопасти наблюдается существенная активизация пиков по центру лопасти по всему её размаху. Это говорит о том, что происходит перераспределение энергии генерируемого звука у отступающей лопасти по поверхности лопасти. Если у наступающей лопасти максимальные уровни плотности $\hat{\rho}'$ наблюдаются в области передней кромки, то у отступающей лопасти они располагаются в центре лопасти.

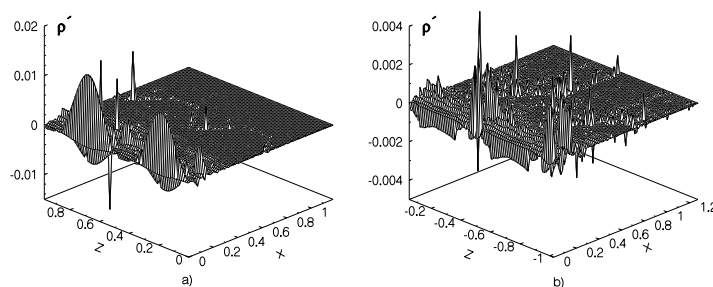


Рис. 4: Безразмерная акустическая плотность, $M = 0.4$, $\gamma = 10^\circ$, $\delta = 0.15$, $\alpha = 30^\circ$: а) наступающая лопасть, б) отступающая лопасть

Вариация угла постановки лопасти к набегающему потоку $\alpha = 30^\circ$ (рис. 3) приводит к снижению амплитуд первой серий волновых фронтов (рис. 3а), в то же время наблюдается резкое повышение амплитуд последующих серий, ближе к центру лопасти. Это указывает на существенное влияние расположения лопасти в набегающем потоке на характер звукообразования. У отступающей лопасти (рис. 3б) наблюдается активное звукообразование не только по центру лопасти, но здесь также формируются два резко выраженных поперечных волновых фронта. Данная картина говорит о том, что отступающая лопасть интенсивно генерирует звук по всей поверхности лопасти.

Если увеличить степень изогнутости лопасти $\delta = 0.15$ (рис. 4), то становится более заметной зависимость формы лопасти в первичной серии пиков (рис. 4а), которые имеют большую амплитуду, чем в случае прямоугольной лопасти, при существенном снижении уровней вторичных волновых фронтов. У отступающей лопасти также активизируется звукообразование вблизи передней кромки лопасти и заметна большая активизация, по сравнению со случаем $\delta = 0.1$, поперечного фронта в центральной части лопасти.

Уменьшение угла атаки лопасти $\gamma = 5^\circ$ (рис. 5, 6), а также уменьшение числа Маха набегающего потока $M = 0.3$ (рис. 7, 8) делает чётко выраженными, практически синусоидальной формы, передние пики у наступающей лопасти, при заметном снижении активности (уровня) звукообразования последующих волновых фронтов. При этом у отступающей лопасти отчётливо видно формирование ряда серий поперечных волновых фронтов. Это говорит нам о том, что не зависимо от вариации параметров задачи, отступающая лопасть трансформирует продольные возмущения набегающего потока в серию

поперечных звуковых волн.

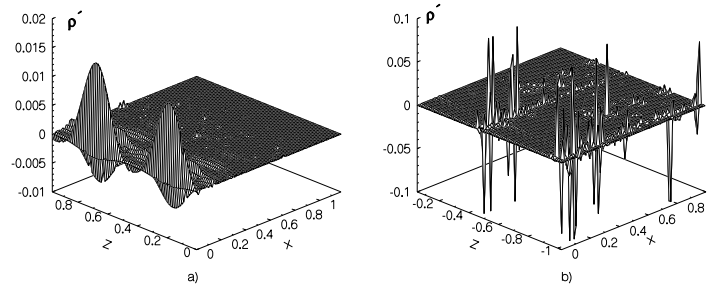


Рис. 5: Безразмерная акустическая плотность, $M = 0.4$, $\gamma = 5^\circ$, $\delta = 0.15$, $\alpha = 45^\circ$: *a)* наступающая лопасть, *b)* отступающая лопасть

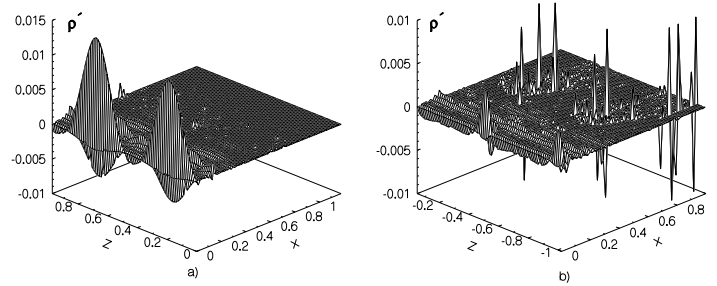


Рис. 6: Безразмерная акустическая плотность, $M = 0.4$, $\gamma = 5^\circ$, $\delta = 0.15$, $\alpha = 30^\circ$: *a)* наступающая лопасть, *b)* отступающая лопасть

Сравнение данных расчёта ближнего поля с подобной задачей, где лопасть ротора имела прямоугольную форму [16], показало следующие различия. У наступающей лопасти все продольные волновые фронты, начиная от передней кромки, имеют закруглённую огибающую. Она определяется синусоидальной формой лопасти вдоль по размаху. Для прямоугольной лопасти продольные волновые фронты имеют ряд максимумов, но остальная часть их отражает прямолинейность лопасти - уровень ρ' вдоль волнового фронта на ряде отдельных участков постоянен, то есть распределён в виде прямой линии. Что же касается отступающей лопасти, то здесь, как указывалось выше, поперечные волновые фронты играют основную роль в обоих случаях. Но для лопасти синусоидальной формы, в отличие от лопасти прямоугольной формы, количество всплесков ρ' в поперечной серии значительно больше. Таким образом, вариация формы лопасти позволяет распределить энергию звукообразования более равномерно по лопасти.

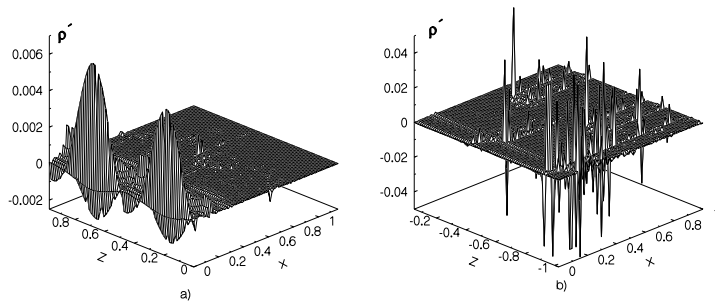


Рис. 7: Безразмерная акустическая плотность, $M = 0.3$, $\gamma = 10^\circ$, $\delta = 0.1$, $\alpha = 30^\circ$: *a)* наступающая лопасть, *b)* отступающая лопасть

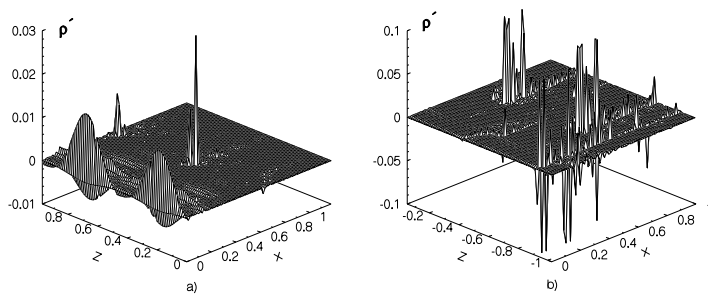


Рис. 8: Безразмерная акустическая плотность, $M = 0.3$, $\gamma = 10^\circ$, $\delta = 0.15$, $\alpha = 30^\circ$: *a)* наступающая лопасть, *b)* отступающая лопасть

4. Дальнее звуковое поле

Данные численных расчётов ближнего поля позволяют выполнить расчёт уровня звукового давления в дальнем поле. Представление дальнего поля имеет следующий вид [15]:

$$\int_S \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial n} + \frac{1}{Ra_\infty} \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \phi' \frac{\partial(1/R)}{\partial n} \right]_{t^*} dS - M_1^2 \int_S \left[\frac{F}{R} \right]_{t^*} dS = 4\pi \phi'(x, t_1), \quad (7)$$

где

$$F = \rho [(\nabla \phi \cdot \nabla) \bar{v} + (\bar{v} \cdot \nabla) \cdot \nabla \phi] + \rho' (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} + \bar{v} \cdot \text{div}(\rho \nabla \phi + \rho' \bar{v}) + \nabla \phi \text{div}(\rho \bar{v}). \quad (8)$$

Формулы (7)-(8) были получены на основе известного подхода Кирхгофа. Это представление удобно тем, что, имея расчётные данные ближнего поля,

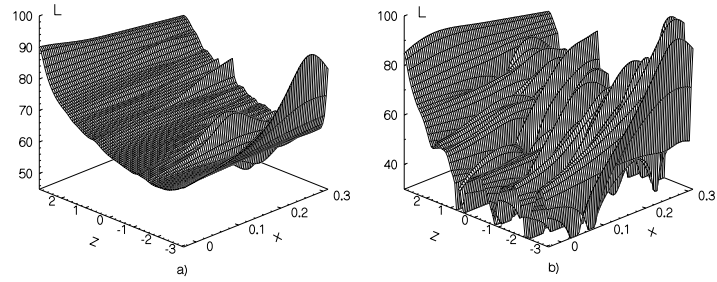


Рис. 9: Уровень нормированного давления для закруглённой лопасти (Дб), $M = 0.4$, $\gamma = 10^\circ$, $\delta = 0.1$: a) $\alpha = 45^\circ$, b) $\alpha = 30^\circ$

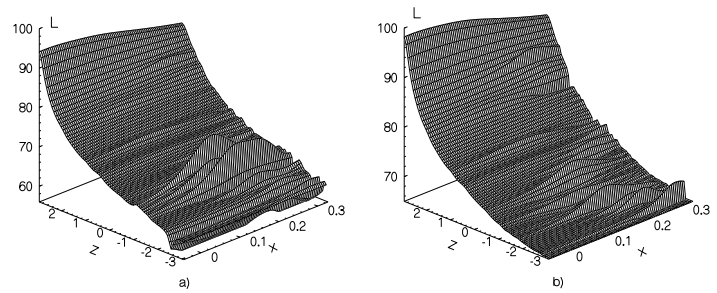


Рис. 10: Уровень нормированного давления (Дб), $M = 0.4$, $\gamma = 10^\circ$, $\delta = 0.15$: a) $\alpha = 45^\circ$, b) $\alpha = 30^\circ$

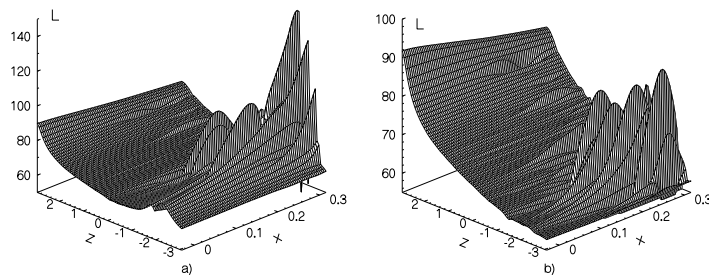


Рис. 11: Уровень нормированного давления (Дб), $M = 0.4$, $\gamma = 5^\circ$, $\delta = 0.1$:
a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\alpha = 30^\circ$

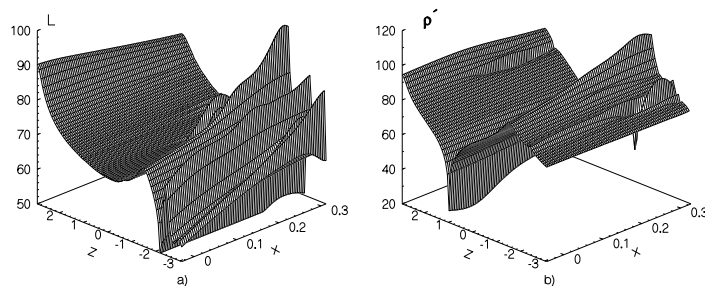


Рис. 12: Уровень нормированного давления (в Дб), $M = 0.3$, $\gamma = 10^\circ$, $\alpha = 30^\circ$:
a) $\delta = 0.1$, b) $\delta = 0.15$

можно сразу же получить значение потенциала (и давления) в звуковой волне в нужной точке расчётной области.

Анализируя полученные расчётные данные уровня звукового давления, следует отметить как качественное, так и количественное их различие в зависимости от конкретных расчётных параметров. Так рис. 9 показывает, что изменение угла расположения лопасти в плоскости вращения существенным образом влияет на картину звукообразования. Для угла $\alpha = 45^\circ$ (рис. 9а) волновой фронт плавный с отдельными локальными всплесками, характеризующими нелинейный характер генерируемой звуковой волны. Максимальное значение уровня давления наблюдается на краях лопасти. Но, изменяя угол $\alpha = 30^\circ$ (рис. 9б), картина заметно меняется: наблюдается целая гряда волновых фронтов меняющихся амплитуд, что свидетельствует о выраженной нестационарности и нелинейности процесса звукообразования.

Увеличение степени изгиба лопасти не только вызвало резко выраженную концентрацию энергии в первой волновой серии в ближнем поле, но и способствовало кардинальному изменению процесса звукообразования: основной максимум в звуковой волне наблюдается на внешнем конце наступающей

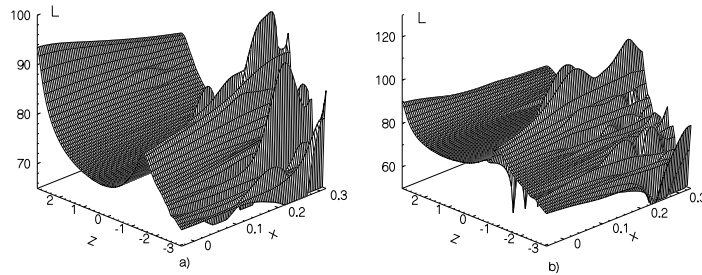


Рис. 13: Уровень нормированного давления (в Дб), $M = 0.3$, $\gamma = 5^\circ$, $\alpha = 30^\circ$:
 а) $\delta = 0.1$, б) $\delta = 0.15$

лопасти (рис. 10), в то время как генерируемый шум отступающей лопасти значительно ниже по уровню. Уменьшение угла атаки до $\gamma = 5^\circ$ (рис. 11) привело к резкому увеличению уровня звукового давления отступающей лопасти, превышая даже уровень звука наступающей лопасти.

Если уменьшить число Маха набегающего потока $M = 0.3$ (рис. 12, 13), то относительная скорость вращения отступающей лопасти уменьшится и, поэтому, вихревая составляющая течения уже играет существенную роль в характере звукообразования. Максимум волнового фронта расположен на дальнем конце этой лопасти и даже превышает по уровню шум наступающей лопасти. Концевой шум, образующийся при срыве потока с обтекаемого тела, связан с вихревой составляющей течения. В данном случае мы видим, насколько сложным является интерференционная картина в звуковой волне: чередующиеся нелинейные волновые фронты различных амплитуд образуют волновой каскад, указывающий на зону интенсивной генерации звука. Он реализуется по той причине, что в ближнем поле присутствуют нескольких серий поперечных фронтов.

Если сравнить результаты расчёта уровня давления с результатами для ротора с прямоугольными лопастями, то сразу можно заметить следующие различия. В ряде случаев шум ротора с лопастями синусоидальной формы на 3-5Дб ниже шума лопастей прямоугольной формы. Однако, в отдельных расчётных ситуациях различия по максимальному уровню шума практически нет. Тем не менее, у отступающей лопасти синусоидальной формы волновая картина более сложная, чем у лопасти прямоугольной формы.

Частотный спектр шума (рис. 14-17) отображает вклад в уровень шума отдельных гармоник, которые присутствуют в нём. Наибольшие амплитуды в спектре генерируемого шума наблюдаются в низкочастотной области: первые 5 гармоник вносят основной количественный вклад в спектр. Отличие для ротора с лопастями синусоидальной формы, по сравнению с ротором с прямоугольными лопастями, следующее. Огибающая в спектре более изрезанная и в ряде расчётных ситуаций заметна активизация в спектре в районе частоты

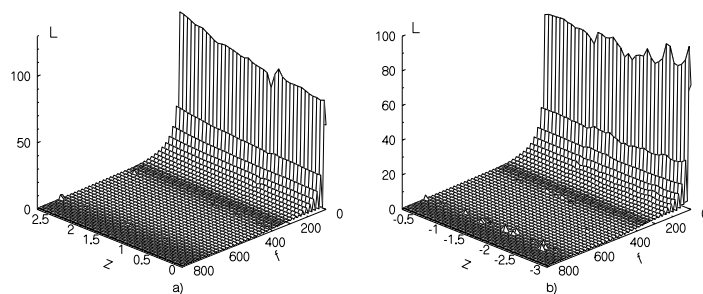


Рис. 14: Спектральные уровни давления (в Дб), $M = 0.4$, $\gamma = 10^\circ$, $\delta = 0.1$, $\alpha = 45^\circ$: *a)* наступающая лопасть, *b)* отступающая лопасть

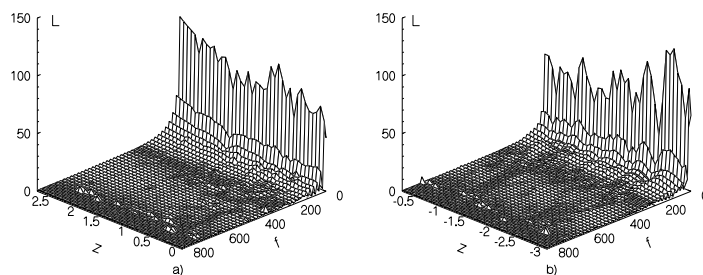


Рис. 15: Спектральные уровни давления (в Дб), $M = 0.4$, $\gamma = 10^\circ$, $\delta = 0.1$, $\alpha = 30^\circ$: *a)* наступающая лопасть, *b)* отступающая лопасть

вдоль всей лопасти. Для лопасти прямоугольной формы наблюдались лишь отдельные локальные всплески в этом частотном диапазоне. Таким образом, можно сделать вывод о том, что вариация формы лопасти вдоль по её размаху позволяет часть энергии из низкочастотного диапазона перераспределить в более высокочастотную область.

5. Выводы

Поставлена и численно решена задача генерации VVI-шума двухлопастным ротором вертолёта синусоидальной формы. Получены количественные характеристики как ближнего, так и дальнего звуковых полей.

Расчётные данные для различных параметров задачи показали, что ротор с лопастями синусоидальной формы в большинстве расчётных ситуаций менее шумный, чем ротор с лопастями прямоугольной формы. Это происходит по той причине, что изогнутость передней кромки лопасти способствует перераспределению энергии звукообразования набегающего потока более равномерно по всей лопасти: появляются новые поперечные волновые фронты. За счёт этого активизируются более высокие частоты в спектре шума, а генерируемый шум в большинстве расчётных случаев удаётся снизить на 3-5 Дб.

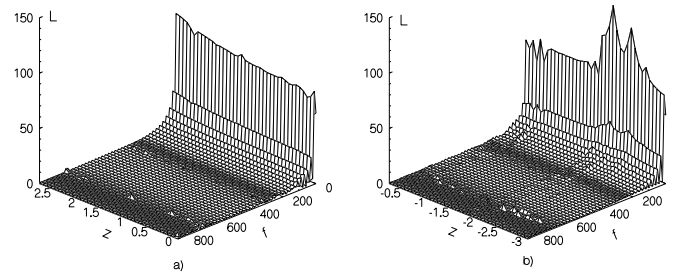


Рис. 16: Спектральные уровни давления (в Дб), $M = 0.4$, $\gamma = 5^\circ$, $\delta = 0.1$, $\alpha = 60^\circ$: *a*) наступающая лопасть, *b*) отступающая лопасть

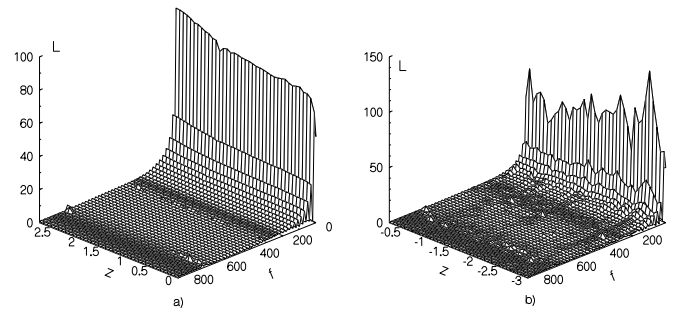



Рис. 17: Спектральные уровни давления (в Дб), $M = 0.4$, $\gamma = 5^\circ$, $\delta = 0.15$, $\alpha = 30^\circ$: *a*) наступающая лопасть, *b*) отступающая лопасть

Расчётные данные говорят о том, что основными факторами, влияющими на характер процесса звукообразования, являются форма лопасти вдоль по её размаху и степень её изогнутости.

Анализ представленной выше задачи показал, что вариацией формы лопасти вдоль по размаху можно снизить уровень генерируемого шума. Это означает, что продольная модификация лопасти позволяет сделать лопасть малозумной.

ORCID ID

P. V. Lukianov  <https://orcid.org/0000-0002-7584-1491>

REFERENCES

1. К.Н. Chung, С. Hwang, Y. Park, W. Jeon, D.J. Lee, Numerical predictions of rotorcraft unsteady air-loadings and BVI-noise by using a time-marching free-wake and acoustic analogy, 31-th European Rotorcraft Forum Firenze, Italy, 2005, p.33.1-33.8.
2. F. Farassat and M.K. Myers, Extension of Kirchhoff's Formula to Radiation

- from Moving Surfaces, Journal of Sound and Vibration.–1988.–**123**, **N.3**.–
p. 451–461.
3. P.V. Lukianov, Unsteady propagation of small disturbances from a thin wing: the near and far field, Acoustic bulletin.–2009.–**12**, **3**.–P. 41–55.
 4. Kenneth Brener, S. Jones, E. Henry, Noise Predictions for Maneuvering Rotorcraft, 6-th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Lahaina, Hawaii, 2000. p. 1–12.
 5. Seungmin Lee, Eunkuk Son, Soogab Lee, Effect of Rotor Blade Deflections on Blade-Vortex Interaction Noise Prediction, Inter-noise, Osaka, Japan, September 2011, p. 4–11.
 6. Alessandro Anobile, Alleviation of Rotorcraft BVI Noise and Vibrations through Control Algorithms Based on Efficient Aeroelastic/Aeroacoustic Formulations, PhD. Thesis. Rome, June, 2015. p. 126.
 7. Renato F. Miotto, and William Wolf, R. Santana, D. Leonardo, Leading-Edge Noise Prediction of General Airfoil Profiles with Spanwise-Varying Inflow Conditions, AIAA Journal.–2018.–**56**, **5**.–P. 1711–1716.
 8. Sugiura Masahiko, Tanabe Yasutada, Sugawara Hideaki, Development of a Hybrid Method of CFD and Prescribed Wake Model for Helicopter BVI Noise Prediction, AHS 69-th Annual Forum, Phoenix, Arizona, May 21–23.–2013.–
 9. Van der. Wall, G. Berend, Christoph Kessler, Yves Delreu, Philippe Beumer, Marc Gervais, Jean-Francois Hirsch, Kurt Pensel, Pascal Crozier, From Aeroacoustics Basic Research to a Modern Low-Noise Rotor Blade, AHS Journal.–2017.–**62**, **4**.–P. 1–16.
 10. Joel Feineman, Sudarshan Koushik, Friedrich Schmitz, Effect of Leading-Edge Serrations on Helicopter Blade-Vortex Interaction Noise, AHS Journal.–2017.–**62**, **3**.–P. 1–11.
 11. Sudarshan Koushik, Friedrich H. Schmitz, An Experimental and Theoretical Study of Blade-Vortex Interaction Noise, AHS Journal.–2013.–**58**, **3**.–P. 1–11.
 12. P. Zehnerk, F. Falissard, X. Gloerfelt, Aeroacoustic Study of the interaction of a Rotating Blade with a Batchelor Vortex, AIAA Journal.–2018.–**56**, **2**.–P. 629–647.
 13. P.V. Lukianov, Sound generation by Taylor and Scully Vortexes and the the Blade of the Varying Cross Section, "Naukovy Visty Research Bulletin of National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnical Institute".–2014.–**96**, **4**.–P. 139–145.

14. P.V.Lukianov, The effect of blade tip truncation type on the BVI-noise level, Acoustic bulletin.–2015.–**17**, **2**.–P. 23–37.
15. P.V.Lukianov, Modeling the BVI-nise of two-blade helicopter rotor, Acoustic bulletin.–2015.–**17**, **1**.–P. 48–60.
16. P.V.Lukianov, On one numerical-analytical approach of a problem on sound generation by a thin wing. Part II. A sachmentic of application to non-stationary problems, Acoustic bulletin.–2012.–**15**, **3**.–P. 45–52.

Лук'янов П.В. **Чисельне моделювання BVI-шуму дволопатевого ротора гелікоптера синусоїдальної форми.** Як відомо, у природному середовищі усі форми живих істот вдосконалювались на протязі тисячоліть. Тому машинам, повітряним суднам намагаються надати таку форму, що наближує їх до живих істот. За останній час лопаті гелікоптера моделюють наближено до форми пташиного крила. В даній роботі поставлено та чисельно розв'язано модельну задачу генерації BVI-шуму дволопатеvim ротором гелікоптера синусоїдальної форми вздовж за розмахом лопаті. Загальна задача складається з аеродинамічної та акустичної частин. Спочатку розв'язується задача аеродинаміки: взаємодія лопаті з завихреним потоком, що набігає на неї з нескінченості. Цей потік крім перерозподілу аеродинамічних змінних (тиску та швидкості) спричиняє генерацію звуку (акустична задача) аеродинамічного походження. У роботі використано раніше запропоновану автором, та перевірену модель виділення звуку із нестационарного неоднорідного потоку. Виконано розрахунок характеристик ближнього та дальнього звукових полів. Проведено порівняльний аналіз отриманих даних для дволопатевого ротора з лопатями прямокутної форми, та ротора синусоїдальної форми. Для ротора синусоїдальної форми у більшості розрахункових випадків шум на 3-5 Дб нижче, ніж у ротора з лопатями прямокутної форми. Розрахункові дані вказують на те, що ротор з лопатями синусоїдальної форми у більшості розрахункових ситуацій менш шумний, ніж ротор з лопатями прямокутної форми. Це відбувається тому, що зігнутість лопаті сприяє більш рівномірному перерозподілу енергії звукоутворення потоку, що набігає, вздовж усієї лопаті. З'являються нові поперечні хвильові фронти. Дані розрахунку також кажуть про те, що основними чинниками, які впливають на процес звукоутворення, є форма лопаті вздовж розмаху та ступень її зігнутості. Інтерференційна картина вказує на складний нелінійний характер шуму, що генерується. У спектрі його активуються більш високі частоти. Варіація форми лопаті вздовж за розмахом дозволяє вплинути на характер та рівень BVI-шуму.

Ключові слова: генерація звуку потоком; гелікоптер; BVI-шум.

Lukianov P.V. **BVI-noise simulation of two-blade helicopter's rotor sin-shape.** It is known that in alive nature every kind of animals improved their appearance for ages. That is why cars and air vehicles try to get a shape, which approximately like animals. For a last time helicopters blades are modeled like bird wing. In this paper a problem of BVI-noise generation by two-blade rotor sin-shape has been set and numerically solved. First aerodynamical problem is solved: blade is interacts with incoming from infinity flow. This flow, in addition to redistribution of velocity and pressure, causes sound generation of aerodynamical by nature. In the paper it was used earlier offered model of author. This model allows extract sound out of unsteady anisotropic flow. A sound density and a pressure level for far and near-field have been calculated. A comparative analysis of

the data with ones for two-blade rotor with rectangular blades has been carried out. Sin-shape rotor noise for most case of calculations has 3-5 Db less then the noise of rotor with rectangular blade. The numerical data show that rotor with blades of sinusoidal shape is less noisy then rotor with rectangular blades. This takes place because sinusoidal shape of the blade favors more homogeneous redistribute of sound energy of the incoming flow along the blade. New s-waves fronts appear. Here essential reapportionment of energy of longitudinal sound waves to s-waves is observed. Main factors which influence at sound generation process are not only blade shape but value of blade bending as well. Interference that is seen at the presented figures says about complex non-liner character of generated sound. Its specter activates more high frequencies. Blade shape variation along the blade sweep allows controlling character and level of BVI-noise.

Keywords: sound generation by flux; helicopter; BVI-noise.

Article history: Received: 25 February 2019; Final form: 10 May 2019;

Accepted: 15 May 2019.

Time-optimal control problem with two final points for a kinematic model of an UAV

S.Yu. Ignatovich, Yu.V. Sukhinina

V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 4 Svobody sqr., 61022, Ukraine
ignatovich@ukr.net, julitvs@gmail.com

We study the time-optimal control problem for an unmanned aerial vehicle (drone) moving in the plane of a constant altitude; a kinematic model is considered where the angular velocity is a control. The drone must reach a given unit circle in the minimal possible time and stay on this circle rotating clockwise or counterclockwise. We obtain a complete solution of this time-optimal control problem and give a solution of the optimal synthesis problem.

Keywords: a kinematic model; time-optimal control problem; optimal synthesis

Ігнатівич С.Ю., Сухініна Ю.В. **Задача швидкодії з двома кінцевими точками для кінематичної моделі БПЛА.** Ми досліджуємо задачу швидкодії для безпілотного літального апарату (дрону), що рухається у площині на сталій висоті; розглядається кінематична модель, в якій керуванням є кутова швидкість. Дрон має досягти заданого одиничного кола за найменший можливий час і залишитись на цьому колі, обертаючись за або проти годинникової стрілки. Ми отримуємо повний розв'язок цієї задачі швидкодії і даємо розв'язок задачі оптимального синтезу.

Ключові слова: кінематична модель; задача швидкодії; оптимальний синтез

Игнатович С.Ю., Сухинина Ю.В. **Задача быстрогодействия с двумя конечными точками для кинематической модели БПЛА.** Мы исследуем задачу быстрогодействия для беспилотного летательного аппарата (дрона), который движется в плоскости на постоянной высоте; рассматривается кинематическая модель, в которой управлением является угловая скорость. Дрон должен достичь заданной единичной окружности за наименьшее возможное время и остаться на ней, вращаясь по или против часовой стрелки. Мы получаем полное решение этой задачи быстрогодействия и даем решение задачи оптимального синтеза.

Ключевые слова: кинематическая модель; задача быстрогодействия; оптимальный синтез

2010 Mathematics Subject Classification 49N35; 93C10.

Introduction

In the papers [1], [2], a kinematic model of an unmanned aerial vehicle (drone) moving at a constant altitude was considered. In particular, for this model, the time-optimal control problem was studied, where the angular velocity is a control parameter.

Though the drone moves in the space, under the condition of a constant altitude its motion can be considered in a plane. Let $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ be its coordinates in the plane and let θ be the angle between the direction of the drone motion and the x -axis. We assume that the drone speed is equal to 1 and that the drone can rotate right and left with the angular velocity $|u(t)| \leq 1$. From the kinematic point of view, such a flying is determined by the Markov-Dubins equations [3], [4]. Taking into account the speed constraints and accepting the time optimality requirements, we obtain the following optimal control problem:

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos \theta, \\ \dot{y} = \sin \theta, \\ \dot{\theta} = u, \end{cases} \quad (1)$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \theta \in \mathbb{S}^1, u = u(t) \in [-1, 1], 0 \leq t \leq T,$$

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, \theta(0) = \theta_0, x(T) = x_T, y(T) = y_T, \theta(T) = \theta_T,$$

$$T \rightarrow \min.$$

In the papers [1], [2], instead of fixing the final point $(x(T), y(T), \theta(T))$, similar problems were considered under the following final conditions: a drone steers to the circle of radius 1 centered at the origin and then moves along this circle counterclockwise (the final time T is the moment of hitting the circle). As shown in [1], these final conditions allow reducing the problem (1); below we recall this simplification.

Let us choose new variables (\tilde{x}, \tilde{y}) of the form

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2)$$

Then

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \cos^2 \theta - x \cdot u \cdot \sin \theta + \sin^2 \theta + y \cdot u \cdot \cos \theta = 1 + u \cdot \tilde{y}, \\ \dot{\tilde{y}} &= -\cos \theta \cdot \sin \theta - x \cdot u \cdot \cos \theta + \cos \theta \cdot \sin \theta - y \cdot u \cdot \sin \theta = -u \cdot \tilde{x}, \end{aligned}$$

hence, the initial system becomes bilinear:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = +u \cdot \tilde{y} + 1, \\ \dot{\tilde{y}} = -u \cdot \tilde{x}, \\ \dot{\theta} = u. \end{cases} \quad (3)$$

Now, let us analyze the final conditions. For $t = T$, the drone is on the unit circle, hence,

$$\begin{cases} x(T) = \cos \tau, \\ y(T) = \sin \tau \end{cases} \quad (4)$$

for some $\tau \in [0, 2\pi)$. At this moment its velocity $(\dot{x}(T), \dot{y}(T)) = (\cos \theta(T), \sin \theta(T))$ is tangent to the unit circle and it moves counterclockwise, hence, $\theta(T) = \tau + \frac{\pi}{2}$.

Substituting this expression to (4) we get

$$\begin{cases} x(T) = \cos(\theta(T) - \frac{\pi}{2}) = \sin \theta(T), \\ y(T) = \sin(\theta(T) - \frac{\pi}{2}) = -\cos \theta(T). \end{cases} \quad (5)$$

Now, taking into account (2) we obtain

$$\begin{cases} \tilde{x}(T) = \sin \theta(T) \cdot \cos \theta(T) - \cos \theta(T) \cdot \sin \theta(T) = 0, \\ \tilde{y}(T) = -\sin \theta(T) \cdot \sin \theta(T) - \cos \theta(T) \cdot \cos \theta(T) = -1. \end{cases} \quad (6)$$

Hence, the final condition $(\tilde{x}(T), \tilde{y}(T)) = (0, -1)$ does not include $\theta(T)$.

Thus, one simplifies the problem and obtains the two-dimensional time-optimal control problem in the variables $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$. Below we omit the tilde symbol; then the obtained problem is

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cdot y + 1, \\ \dot{y} = -u \cdot x, \end{cases} \quad (7)$$

$u = u(t) \in [-1, 1], 0 \leq t \leq T, x(0) = x_0, y(0) = y_0, T \rightarrow \min,$

with the final conditions

$$x(T) = 0, \quad y(T) = -1. \quad (8)$$

The existence of a solution follows from the Filippov Theorem [5].

The symmetric time-optimal control problem can be considered, when a drone moves along the unit circle clockwise; in this case the final conditions are

$$x(T) = 0, \quad y(T) = 1. \quad (9)$$

Such problems were thoroughly studied in [1], [2].

In the present paper we consider a natural variation of the problem. We suppose that *both directions of motion along the final circle are allowed*. This corresponds to the time-optimal control problem (7) with *two endpoints* $(0, -1)$ or $(0, 1)$:

$$x(T) = 0, \quad y(T) = \pm 1; \quad (10)$$

the final point is chosen for reasons of minimizing the time of movement.

1. Optimal trajectories

Below we distinguish trajectories that are optimal in the sense of the problem with two final points (7), (10) (we call them “optimal”) and trajectories that are optimal in the sense of the problem with one final point (7), (8) or (7), (9) (we call them “ $(0, -1)$ -optimal” or “ $(0, 1)$ -optimal” respectively).

Obviously, any optimal trajectory ending at $(0, 1)$ is $(0, 1)$ -optimal and any optimal trajectory ending at $(0, -1)$ is $(0, -1)$ -optimal, however, in general, the converse is not true.

First, we study properties of $(0, 1)$ -optimal and $(0, -1)$ -optimal trajectories. In essence, these results are obtained in [1], [2]; we discuss them for the sake of completeness.

Let us make use of the Pontryagin Maximum Principle [6]. In our case the Hamilton-Pontryagin function has the form

$$H = \psi_1 \cdot (u \cdot y + 1) + \psi_2 \cdot (-u \cdot x) = u \cdot (\psi_1 \cdot y - \psi_2 \cdot x) + \psi_1. \quad (11)$$

Let us consider a $(0, 1)$ -optimal or a $(0, -1)$ -optimal control $\widehat{u}(t)$; let T be the optimal time. Denote by $(\widehat{x}(t), \widehat{y}(t))$ the corresponding optimal trajectory. Due to the Pontryagin Maximum Principle, there exists a number $\lambda \geq 0$ and a nontrivial solution of the dual system

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \widehat{u}(t) \cdot \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\widehat{u}(t) \cdot \psi_1 \end{cases} \quad (12)$$

such that

$$\widehat{u}(t) = \text{sign}(\phi(t)) \text{ for } t \in [0, T] \text{ such that } \phi(t) \neq 0, \quad (13)$$

$$|\phi(t)| + \psi_1(t) - \lambda = 0, \quad t \in [0, T], \quad (14)$$

where $\phi(t)$ is a switching function,

$$\phi(t) = \psi_1(t) \cdot \widehat{y}(t) - \psi_2(t) \cdot \widehat{x}(t). \quad (15)$$

In particular, (14) implies

$$\psi_1(t) \leq \lambda, \quad t \in [0, T]. \quad (16)$$

Let us note that

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \dot{\psi}_1 \cdot \widehat{y} + \psi_1 \cdot \dot{\widehat{y}} - \dot{\psi}_2 \cdot \widehat{x} - \psi_2 \cdot \dot{\widehat{x}} = \\ &= u \cdot \psi_2 \cdot \widehat{y} - \psi_1 \cdot u \cdot \widehat{x} + u \cdot \psi_1 \cdot \widehat{x} - \psi_2 \cdot u \cdot \widehat{y} - \psi_2 = -\psi_2, \end{aligned}$$

that is,

$$\dot{\phi}(t) = -\psi_2(t). \quad (17)$$

Concerning the dual system (12), we notice that it includes the optimal control $\widehat{u}(t)$, so, it cannot be solved without knowing $\widehat{u}(t)$. However, let us consider, how the variables ψ_1 and ψ_2 depend on each other. We easily get $\frac{d}{dt}(\psi_1^2 + \psi_2^2) = 0$, hence, $\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)$ is a (nonzero) constant. Without loss of generality we assume

$$\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t) \equiv 1, \quad (18)$$

that is, a point $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ moves along the unit circle.

2. Singular and nonsingular optimal trajectories

First, we assume that $\lambda > 0$.

If $\phi(t) \neq 0$, then the optimal control $\hat{u}(t)$ takes the values 1 or -1 . If $\hat{u}(t) = 1$, then the trajectory $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ goes clockwise along a circle centered at $(0, -1)$, while if $\hat{u}(t) = -1$, then the trajectory $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ goes counterclockwise along a circle centered at $(0, 1)$ (Fig. 1). In particular, if the final point is $(0, 1)$, then $\hat{u}(t) = 1$ on the last piece of the trajectory and if the final point is $(0, -1)$, then $\hat{u}(t) = -1$ on the last piece of the trajectory.

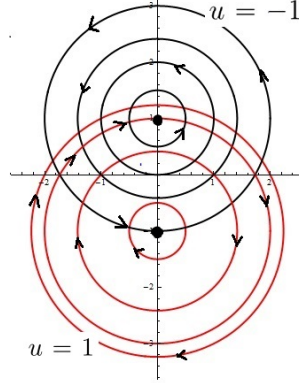


Fig. 1. Nonsingular trajectories

Let us consider the time moment t_0 when the control switches from $u = 1$ to $u = -1$ or vice versa (“switching point”). Then $\phi(t_0) = 0$, therefore, (14) gives $\psi_1(t_0) = \lambda \geq 0$. If the optimal trajectory contains several switching points, ψ_1 takes the same value at any of them. On the other hand, if $|\hat{u}(t)| = 1$, then the point $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ goes along the unit circle with the unit speed in the positive direction if $\hat{u}(t) = -1$ and in the negative direction if $\hat{u}(t) = 1$. Hence, the time intervals between switchings are of the same duration. Moreover, it follows from (16) that the point $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ moves within the longer arc between the switching points $(\lambda, \sqrt{1 - \lambda^2})$ and $(\lambda, -\sqrt{1 - \lambda^2})$, hence, the duration between switching moments is greater than π (Fig. 2). Hence, any optimal trajectory contains a finite number of switchings.

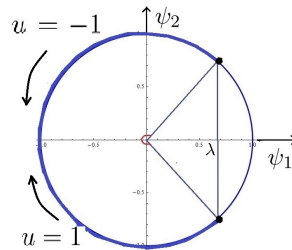


Fig. 2. Dual variable

If $\lambda = 1$, then the duration between two switchings should equal 2π . This means that the optimal trajectory $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ contains a whole circle, what contradicts the time optimality of this trajectory. Hence, if a trajectory has at least two switching points, then $\lambda < 1$.

It follows from (15) that, at the end time moment, $|\phi(T)| = |\psi_1(T)|$; hence, (14) implies $|\psi_1(T)| + \psi_1(T) = \lambda$. Since $\lambda > 0$, we get $\psi_1(T) > 0$ and then $\psi_1(T) = \frac{1}{2}\lambda$. This implies that the duration of the last piece of the optimal trajectory is less than the duration between two switchings.

Now let us suppose that the optimal trajectory has a singular piece, that is, there exists an interval (t_1, t_2) where $\phi(t) \equiv 0, t \in (t_1, t_2)$. Then (17) implies that $\psi_2(t) \equiv 0, t \in (t_1, t_2)$. Therefore, (14) and (18) give $\psi_1(t) \equiv \lambda$ on (t_1, t_2) and therefore $\lambda = 1$. Then from (15) it follows that $\hat{y}(t) \equiv 0$. Finally, from (7) we get $\hat{x}(t) \equiv 1$, i.e., the trajectory goes along the line $y = 0$ in the positive direction with the unit speed (Fig. 3).

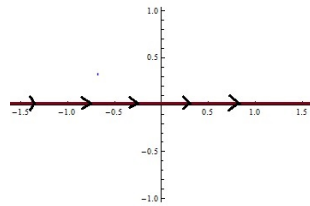


Fig. 3. Singular trajectories

Thus, $\lambda = 1$. Taking into account the previous arguments we see that if the trajectory has a singular piece, then it has neither other singular pieces nor switchings from $u = 1$ to $u = -1$ or vice versa. Therefore, such a trajectory has one or two switchings: one from $u = \pm 1$ to $u = 0$ (possibly) and one from $u = 0$ to $u = \pm 1$ (necessarily).

Finally, consider the case $\lambda = 0$.

Suppose that such a trajectory has a singular piece, i.e., $\phi(t) \equiv 0, t \in (t_1, t_2)$, then (14) and (17) imply $\psi_1(t) \equiv 0$ and $\psi_2(t) \equiv 0, t \in (t_1, t_2)$, what is impossible.

Hence, a trajectory has no singular pieces. Suppose it has at least one switching point. For example, let the final point be $(0, 1)$ (the case $(0, -1)$ can be treated analogously). If t_0 is the moment of the last switching, then $\phi(t_0) = 0$. Then (14), (15), (18) imply $\hat{x}(t_0) = 0$. This means that the last switching (from $u = -1$ to $u = 1$) is at the point $(0, -3)$. Let us consider a piece of this trajectory preceding this switching; this is an arc of the circle of radius 4 centered at $(0, 1)$. Let us consider a point (x_1, y_1) on this arc (which differs from $(0, -3)$); then

$$x_1 = -4 \sin \xi, \quad y_1 = 1 - 4 \cos \xi,$$

for some $\xi > 0$. The time of motion from the point (x_1, y_1) to the final point $(0, 1)$ equals $T(\xi) = \xi + \pi$.

Now let us consider a trajectory from (x_1, y_1) having a singular piece. Namely, $u(t) = 1$ until the trajectory reaches the line $y = 0$; then $u(t) = 0$ until $x(t)$

becomes $-\sqrt{3}$; finally $u(t) = 1$. The first piece of such a trajectory is an arc of the circle centered at $(0, -1)$ of radius

$$r = \sqrt{x_1^2 + (y_1 + 1)^2} = \sqrt{20 - 16 \cos \xi}.$$

Then

$$x_1 = -r \sin \tau, \quad y_1 = -1 - r \cos \tau,$$

where $\tau = \arcsin(-\frac{x_1}{r}) = \arcsin(\frac{4 \sin \xi}{r}) > 0$. Suppose this trajectory reaches the line $y = 0$ at the point $(x_2, y_2) = (x_2, 0)$, then

$$x_2 = -r \sin \varphi, \quad y_2 = 0 = -1 - r \cos \varphi$$

for some $\varphi > 0$. Hence, $\varphi = \arccos(-\frac{1}{r})$ and $x_2 = -r \sin \varphi = -\sqrt{r^2 - 1}$, and the time of motion from (x_1, y_1) to $(x_2, 0)$ equals $\varphi - \tau$. Obviously, the times of motion from $(x_2, 0)$ to $(-\sqrt{3}, 0)$ (with $u = 0$) and from $(-\sqrt{3}, 0)$ to $(0, 1)$ (with $u = 1$) equal $-\sqrt{3} - x_2$ and $\frac{\pi}{3}$ respectively. Therefore, the time of motion from the point (x_1, y_1) to the final point $(0, 1)$ along this trajectory equals

$$\begin{aligned} T_1(\xi) &= (\varphi - \tau) + (-\sqrt{3} - x_2) + \frac{\pi}{3} = \\ &= \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{20 - 16 \cos \xi}}\right) - \arcsin\left(\frac{4 \sin \xi}{\sqrt{20 - 16 \cos \xi}}\right) - \sqrt{3} + \sqrt{19 - 16 \cos \xi} + \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Obviously, for $\xi = 0$ we get $T(0) = T_1(0) = \pi$.

If ξ increases, $T(\xi)$ also increases. For $T_1(\xi)$, evaluating its derivative at $\xi = 0$ we get $\frac{d}{d\xi} T_1(\xi)|_{\xi=0} = -2$. Hence, $T_1(\xi)$ decreases as ξ increases. This means that for (small) $\xi > 0$

$$T_1(\xi) < T(\xi),$$

therefore, the trajectory from (x_1, y_1) through the point $(0, -3)$ is not optimal.

Hence, $\lambda = 0$ can correspond to the $(0, 1)$ -optimal or $(0, -1)$ -optimal trajectories without switchings entirely contained in the left semi-circles of radius 2 centered at $(0, -1)$ or at $(0, 1)$. For all other $(0, 1)$ -optimal and $(0, -1)$ -optimal trajectories we have $\lambda > 0$.

Summarizing, we obtain that there can exist two types of $(0, 1)$ -optimal or $(0, -1)$ -optimal trajectories:

- Singular trajectories, which contain one singular piece $\hat{u}(t) \equiv 0$ and have no more than two switchings (from $u = 0$ to $u = \pm 1$ and, maybe, from $u = \pm 1$ to $u = 0$). In particular, the point of the last switching is $(-\sqrt{3}, 0)$ and the duration of the last piece equals $\frac{\pi}{3}$.
- Nonsingular trajectories, where the control takes the values ± 1 . If such a trajectory has more than one switching, then the time intervals between switchings are of the same duration (greater than π), the first piece can be the same or shorter, and the last piece is shorter.

3. Duration of the last piece of an optimal trajectory

Now we return to the time-optimal control problem with two final points (7), (10) and study properties of optimal trajectories. Recall that each optimal trajectory is a $(0, 1)$ -optimal or a $(0, -1)$ -optimal trajectory, i.e., it is of the form described above.

Let us consider a nonsingular optimal trajectory $(\widehat{x}(t), \widehat{y}(t))$ ending at $(\widehat{x}(T), \widehat{y}(T)) = (0, 1)$ and suppose it has at least one switching (then $\lambda > 0$). Denote by $(x_1, y_1) = (\widehat{x}(t_1), \widehat{y}(t_1))$ the point of the last switching; it belongs to the circle of radius 2 centered at $(0, -1)$. Now we show that $T - t_1 \leq \frac{\pi}{3}$.

Suppose the contrary, i.e., $T - t_1 > \frac{\pi}{3}$, then the point $(\widehat{x}(t_0), \widehat{y}(t_0)) = (-\sqrt{3}, 0)$ lies on the trajectory, where $t_0 = T - \frac{\pi}{3}$, and moreover $t_0 > t_1$. Let us consider the curve $(\widehat{x}(t), |\widehat{y}(t)|)$. Obviously, it is also a trajectory of the system (7). Moreover, it ends at the point $(0, 1)$ at the same time T and has at least one switching more than the initial trajectory; in particular, $(x_1, |y_1|)$ and $(-\sqrt{3}, 0)$ are its switching points.

Suppose $(\widehat{x}(t), |\widehat{y}(t)|)$ is $(0, 1)$ -optimal. Since its last switching point is $(\widehat{x}(t_0), |\widehat{y}(t_0)|) = (-\sqrt{3}, 0)$, the duration of the last piece equals $\frac{\pi}{3}$. As was shown in the previous section, $\psi_1(t_0) = \lambda$ and $\psi_1(T) = \frac{\lambda}{2}$. Therefore, $T - t_0 = \frac{\pi}{3} = \arccos(\frac{\lambda}{2}) - \arccos(\lambda)$, what implies $\lambda = 1$. Hence, this trajectory has no other switchings, what contradicts our construction.

Therefore, $(\widehat{x}(t), |\widehat{y}(t)|)$ is not $(0, 1)$ -optimal. Hence, there exists a $(0, 1)$ -optimal trajectory $(x^0(t), y^0(t))$ starting at the point $(\widehat{x}(0), |\widehat{y}(0)|)$ and ending at $(0, 1)$ in the time $T^0 < T$.

If $\widehat{y}(0) \geq 0$, the obtained fact contradicts the optimality of the initial trajectory $(\widehat{x}(t), \widehat{y}(t))$.

If $\widehat{y}(0) < 0$, let us consider the symmetric trajectory $(x^0(t), -y^0(t))$. It starts at the point $(\widehat{x}(0), \widehat{y}(0))$ and ends at $(0, -1)$ in the time $T^0 < T$, what contradicts the optimality of $(\widehat{x}(t), \widehat{y}(t))$.

Hence, $T - t_1 \leq \frac{\pi}{3}$. For an optimal trajectory ending at $(\widehat{x}(T), \widehat{y}(T)) = (0, -1)$, the arguments are the same.

Thus, in any case the duration of the last piece of the optimal trajectory is no greater than $\frac{\pi}{3}$.

4. Switching curve

Let us consider a nonsingular optimal trajectory ending at $(\widehat{x}(T), \widehat{y}(T)) = (0, 1)$ and suppose it has at least two switchings. Denote by (x_1, y_1) the point of the last switching. Arguments given above yield that the duration of the last piece of the trajectory is no greater than $\frac{\pi}{3}$, hence, (x_1, y_1) belongs to the circle of radius 2 centered at $(0, -1)$ and $0 \leq y_1 < 1$, $x_1 < 0$. We suppose that $y_1 > 0$ (the case $y_1 = 0$ is noted below).

We are interested in the point of the preceding switching; denote it by (x, y) . Obviously, the points (x_1, y_1) and (x, y) are located at the same circle centered at $(0, 1)$.

If $y_1 = y$, then the point (x, y) belongs to the circle of radius 2 centered at $(0, -1)$; hence, the preceding piece of this trajectory goes along this circle. Let us consider any point (x_2, y_2) on this piece which is located on the upper arc of the mentioned circle between the points (x_1, y_1) and (x, y) ; without loss of generality assume $x_2 > 0$. Obviously, there exists a control which steers (x_2, y_2) to $(0, 1)$ faster than through the points (x, y) and (x_1, y_1) : namely, $u = -1$ until the trajectory again crosses the mentioned circle, and then $u = 1$. This contradicts the optimality of the initial trajectory.

Hence, $y_1 \neq y$. The switching function ϕ equals zero and ψ_1 equals λ at both time moments of switching, while ψ_2 equals $\sqrt{1 - \lambda^2}$ at one of them and $-\sqrt{1 - \lambda^2}$ at the other. Hence, (15) implies

$$\frac{x_1}{y_1} = -\frac{x}{y}.$$

Then we have the following relations between (x_1, y_1) and (x, y) :

$$\begin{cases} x_1^2 + (y_1 + 1)^2 = 4, \\ x_1^2 + (y_1 - 1)^2 = x^2 + (y - 1)^2, \\ \frac{x_1}{y_1} = -\frac{x}{y}. \end{cases} \quad (19)$$

Our goal is to express x via y . Denote $\frac{x}{y} = c > 0$. Substituting $x = cy$ and $x_1 = -cy_1$ to the second equation of (19) gives

$$(c^2 + 1)y_1^2 - 2y_1 = (c^2 + 1)y^2 - 2y.$$

Denoting $a = c^2 + 1$ and taking into account that $y_1 \neq y$ we obtain

$$a(y_1 + y) = 2, \quad (20)$$

hence, $y_1 = \frac{2}{a} - y$. Substituting $x_1 = -cy_1$ and $y_1 = \frac{2}{a} - y$ to the first equation of (19) we get

$$a \left(\frac{2}{a} - y \right)^2 + 2 \left(\frac{2}{a} - y \right) = 3,$$

what gives

$$a^2 y^2 - (6y + 3)a + 8 = 0.$$

Solving this equation w.r.t. a , we get

$$a = \frac{6y + 3 - \sqrt{4y^2 + 36y + 9}}{2y^2} = \frac{1}{y^2} \left(3y + \frac{3}{2} - \sqrt{y^2 + 9y + \frac{9}{4}} \right) \quad (21)$$

(the sign “ $-$ ” is chosen since $ay < 2$ due to (20)). However, $x = cy = \sqrt{a - 1}y$. Substituting the expression for a from (21), we obtain the description of the switching curve:

$$x = \sqrt{-y^2 + 3y + \frac{3}{2} - \sqrt{y^2 + 9y + \frac{9}{4}}}, \quad y \in (0, 1). \quad (22)$$

As a limit case, the values $y = 0$ and $y = 1$ correspond to $x = 0$.

Notice that for all points (x_1, y_1) such that $x_1^2 + (y_1 - 1)^2 > 1$ there is no preceding switching point *in the upper semi-plane*; this concerns also the point $(-\sqrt{3}, 0)$. In the next section we show that such optimal trajectories have only one switching.

For all points (x_1, y_1) such that $x_1^2 + (y_1 - 1)^2 \leq 1$ there exists a unique point (x, y) satisfying (22); if the optimal trajectory contains this point and also contains some preceding piece, it necessarily has a switching at (x, y) .

Considering analogously the case of optimal trajectories ending at $(0, -1)$ we obtain the complete description of the switching curve

$$x = \sqrt{-y^2 + 3|y| + \frac{3}{2} - \sqrt{y^2 + 9|y| + \frac{9}{4}}}, \quad y \in [-1, 1]. \quad (23)$$

Since a duration of any interval between two switchings is no less than π , we get that any nonsingular optimal trajectory has no more than two switchings in the semi-plane where the final point lies.

5. Optimal trajectories (may) lie entirely in one semi-plane

We now apply arguments close to those used in Section 3. Let us consider an optimal trajectory $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$; suppose it ends at $(\hat{x}(T), \hat{y}(T)) = (0, 1)$. Suppose $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ passes through the point $(\hat{x}(t_0), \hat{y}(t_0))$ with $\hat{y}(t_0) = 0$ so that $\hat{y}(t)$ changes its sign. Suppose also that this trajectory has at least one switching.

Let us consider the curve $(\hat{x}(t), |\hat{y}(t)|)$. It is a trajectory of the system (7) and ends at the point $(0, 1)$ in the same time T . Suppose $(\hat{x}(t), |\hat{y}(t)|)$ is $(0, 1)$ -optimal.

First suppose $\hat{x}(t_0) \neq 0$, then $(\hat{x}(t_0), \hat{y}(t_0)) = (\hat{x}(t_0), 0)$ is a switching point of $(\hat{x}(t), |\hat{y}(t)|)$. Since $\phi(t_0) = 0$ and $\hat{y}(t_0) = 0$, (15) gives $\psi_2(t_0)\hat{x}(t_0) = 0$. Since $\hat{x}(t_0) \neq 0$, we obtain $\psi_2(t_0) = 0$. Then $\psi_1(t_0) = 1$, therefore, $\lambda = 1$ and the optimal trajectory $(\hat{x}(t), |\hat{y}(t)|)$ cannot have other switchings, what gives a contradiction.

Now suppose $\hat{x}(t_0) = \hat{y}(t_0) = 0$, then the curve $(\hat{x}(t), |\hat{y}(t)|)$ for $t \in [t_0, T]$ consists of the arc of the circle of radius 1 centered at $(0, 1)$ and the arc of the circle of radius 2 centered at $(0, -1)$. However, as was shown above, if this trajectory is $(0, 1)$ -optimal, it should have a switching at the point $(0, 0)$ whereas the curve $(\hat{x}(t), |\hat{y}(t)|)$ for $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0]$ for small $\varepsilon > 0$ belongs to the circle of radius 1 centered at $(0, 1)$ and, therefore, has no switching at $(0, 0)$.

Thus, $(\hat{x}(t), |\hat{y}(t)|)$ is not $(0, 1)$ -optimal. Hence, there exists a $(0, 1)$ -optimal trajectory $(x^0(t), y^0(t))$ starting at the point $(\hat{x}(0), |\hat{y}(0)|)$ and ending at $(0, 1)$ in the time $T^0 < T$.

If $\hat{y}(0) \geq 0$, the obtained fact contradicts the optimality of $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$.

If $\hat{y}(0) < 0$, let us consider the symmetric trajectory $(x^0(t), -y^0(t))$. It starts at the point $(\hat{x}(0), \hat{y}(0))$ and ends at $(0, -1)$ in the time $T^0 < T$, what contradicts the optimality of $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$.

For an optimal trajectory which ends at $(0, -1)$, the arguments are the same.

Therefore, we get that any nonsingular optimal trajectory having at least one switching lies completely in one semi-plane $y \geq 0$ or $y \leq 0$ and, moreover, has no

more than two switchings.

Now let us consider an optimal trajectory without switchings; suppose it ends at $(0, 1)$. Then it belongs to the circle of radius 2 centered at $(0, -1)$. If it fills more than a half of this circle and $y(0) > 0$, the arguments given above (with the trajectory $(\hat{x}(t), |\hat{y}(t)|)$) yield a contradiction. Hence, this trajectory crosses over the line $y = 0$ no more than once. Analogous result holds for an optimal trajectory without switchings ending at $(0, -1)$.

Finally, notice that if an optimal trajectory $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ without switchings passes through the line $y = 0$, it can be substituted by the optimal trajectory $(\hat{x}(t), |\hat{y}(t)|)$ or $(\hat{x}(t), -|\hat{y}(t)|)$ (depending on the sign of $\hat{y}(0)$), which lies completely in one semi-plane. The same is true for singular trajectories.

Thus, in any case one can choose an optimal trajectory which lies completely in one semi-plane $y \geq 0$ or $y \leq 0$.

6. Optimal synthesis

Now we describe the optimal control as a function of $(x, y) \neq (0, \pm 1)$ (Fig. 4).

(i) Let $y \neq 0$. Then $u(x, y) = -\text{sign}(y)$ if

$$-\sqrt{-y^2 - 2|y| + 3} \leq x < \sqrt{-y^2 + 3|y| + \frac{3}{2}} - \sqrt{y^2 + 9|y| + \frac{9}{4}}$$

and $u(x, y) = \text{sign}(y)$ otherwise. (This condition implies that $u(x, y) = -\text{sign}(y)$ if $|y| \geq 1$.)

(ii) Let $y = 0$. Then $u(x, y) = 0$ iff $x < -\sqrt{3}$; otherwise $u(x, y)$ can equal 1 or -1 .

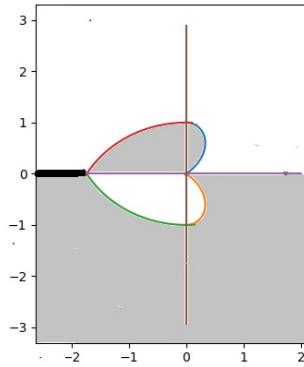


Fig. 4. Optimal synthesis: $u = 0$ (black), $u = -1$ (white), $u = 1$ (grey)

Finally, let us summarize the solution of the optimal control problem with two final points (7), (10).

First, suppose $y_0 \neq 0$. For all starting points satisfying the condition

$$x_0^2 + (y_0 + \text{sign}(y_0))^2 > 4 \quad (24)$$

the optimal control is singular. Namely, $u(t) = -\text{sign}(y_0)$ until the trajectory reaches the line $y = 0$; then $u(t) = 0$ until $x(t)$ becomes $-\sqrt{3}$; finally $u(t) = 1$ or $u(t) = -1$. If

$$x_0^2 + (y_0 + \text{sign}(y_0))^2 = 4, \quad (25)$$

the optimal control has one switching: $u(t) = -\text{sign}(y_0)$ until the trajectory reaches the line $y = 0$; then $u(t) = 1$ or $u(t) = -1$.

Hence, for each such starting point there exist two optimal controls which differs by the sign on the last piece of the trajectory.

For all other points the control is nonsingular and has no more than two switchings; moreover, it is unique. Namely, if (24), (25) do not hold and

$$-\sqrt{-y_0^2 - 2|y_0| + 3} < x_0 < \sqrt{-y_0^2 + 3|y_0| + \frac{3}{2}} - \sqrt{y_0^2 + 9|y_0| + \frac{9}{4}}, \quad (26)$$

then $u(t) = \text{sign}(y_0)$ until the trajectory reaches the switching curve (23); then $u(t) = -\text{sign}(y_0)$ until the trajectory reaches the circle of radius 2 centered at $(0, -\text{sign}(y_0))$; finally $u(t) = \text{sign}(y_0)$. If

$$x_0 = -\sqrt{-y_0^2 - 2|y_0| + 3}, \quad (27)$$

then $u(t) = \text{sign}(y_0)$ has no switchings. If (24)–(27) do not hold, then $u(t) = -\text{sign}(y_0)$ until the trajectory reaches the circle of radius 2 centered at $(0, -\text{sign}(y_0))$; then $u(t) = \text{sign}(y_0)$.

Now suppose $y_0 = 0$.

If $x_0 < -\sqrt{3}$, then $u(t) = 0$ until $x(t)$ becomes $-\sqrt{3}$; then $u(t) = 1$ or $u(t) = -1$. If $x_0 = -\sqrt{3}$, then the trajectory has no switchings, $u(t) = 1$ or $u(t) = -1$.

If $-\sqrt{3} < x_0 < 0$, then $u(t) = u_0 = \pm 1$ until the trajectory reaches the switching curve (23); then $u(t) = -\text{sign}(u_0)$ until the trajectory reaches the circle of radius 2 centered at $(0, -\text{sign}(u_0))$; finally $u(t) = \text{sign}(u_0)$ (the final point is $(0, u_0)$).

If $0 \leq x_0 < \sqrt{3}$, then $u(t) = u_0 = \pm 1$ until the trajectory reaches the circle of radius 2 centered at $(0, \text{sign}(u_0))$; finally $u(t) = -\text{sign}(u_0)$ (the final point is $(0, -u_0)$). If $x_0 = \sqrt{3}$, then $u(t) = u_0 = \pm 1$ until the trajectory reaches the line $y = 0$; then $u(t) = 1$ or $u(t) = -1$.

If $x_0 > \sqrt{3}$, then $u(t) = \pm 1$ until the trajectory reaches the line $y = 0$; then $u(t) = 0$ until $x(t)$ becomes $-\sqrt{3}$; then $u(t) = 1$ or $u(t) = -1$.

Hence, for all starting points satisfying $y_0 = 0$ there exist two or four (if $x_0 \geq \sqrt{3}$) optimal controls.

7. Examples

Example 1. Consider the time-optimal control problem

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cdot y + 1, \\ \dot{y} = -u \cdot x, \end{cases} \\ u \in [-1, 1], \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(0) = 4, \quad x(T) = 0, \quad y(0) = 4, \quad y(T) = \pm 1.$$

Checking the condition (24) we get that the optimal control is singular; since $y(0) > 0$ we get

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \tau_1), \\ 0, & t \in [\tau_1, \tau_2), \\ \pm 1, & t \in [\tau_2, T], \end{cases} \quad (28)$$

where $y(\tau_1) = 0$ and $T - \tau_2 = \frac{\pi}{3}$. Hence, for $t \in [0, \tau_1]$ we get

$$\begin{cases} x(t) = a_1 \cdot \cos t + a_2 \cdot \sin t, \\ y(t) = a_1 \cdot \sin t - a_2 \cdot \cos t + 1. \end{cases}$$

Substituting $x(0) = 4$, $y(0) = 4$, $y(\tau_1) = 0$ we obtain $a_1 = 4$, $a_2 = -3$, $\tau_1 = \pi + \arcsin(\frac{1}{5}) - \arcsin(\frac{3}{5}) \approx 2.6994$, $x(\tau_1) = -\sqrt{24} \approx -4.8990$ (here and below we keep four digits after comma). For $t \in [\tau_1, \tau_2]$ we get

$$\begin{cases} x(t) = t + x(\tau_1) - \tau_1, \\ y(t) = 0. \end{cases}$$

Since $x(\tau_2) = \tau_2 + x(\tau_1) - \tau_1 = -\sqrt{3}$, we get $\tau_2 = -\sqrt{3} + \sqrt{24} + \tau_1 \approx 5.8664$. Finally, for $t \in [\tau_2, T]$ where $T = \tau_2 + \frac{\pi}{3} \approx 6.9136$ we get

$$\begin{cases} x(t) = b_1 \cdot \cos t + b_2 \cdot \sin t, \\ y(t) = \pm(-b_1 \cdot \sin t + b_2 \cdot \cos t - 1), \end{cases}$$

where the sign \pm corresponds to the choice $u = 1$ or $u = -1$ for the last piece of the trajectory. Substituting $x(\tau_2) = -\sqrt{3}$, $y(\tau_2) = 0$ we finally obtain $b_1 = -2 \sin(\tau_2 + \frac{\pi}{3}) \approx -1.1789$, $b_2 = 2 \cos(\tau_2 + \frac{\pi}{3}) \approx 1.6156$.

We conclude that the optimal controls (28) with $u = 1$ and $u = -1$ on the last piece steer the system from the initial point $(4, 4)$ to the end-point $(0, 1)$ or $(0, -1)$ respectively in the same time $T = -\sqrt{3} + \sqrt{24} + \pi + \arcsin(\frac{1}{5}) - \arcsin(\frac{3}{5}) + \frac{\pi}{3} \approx 6.9136$. The obtained trajectories are drawn in Fig. 5.



Fig. 5. Two optimal trajectories, $(x(0), y(0)) = (4, 4)$

Example 2. Consider the time optimal control problem

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cdot y + 1, \\ \dot{y} = -u \cdot x, \end{cases}$$

$u \in [-1, 1]$, $0 \leq t \leq T$, $x(0) = -0.53$, $x(T) = 0$, $y(0) = 0.31$, $y(T) = \pm 1$.

Checking the condition (24) we get that the optimal control is nonsingular, i.e., it takes the values ± 1 only. Since $y(0) > 0$, the final point is $(0, 1)$.

First, let us try to find an admissible control with one switching,

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \tau), \\ 1, & t \in [\tau, T]. \end{cases} \quad (29)$$

Substituting such a control to the system and using the initial and final conditions, we obtain the admissible trajectory ending at $(0, 1)$ (up to four digits after comma)

$$\begin{cases} x(t) = -0.53 \cdot \cos t + 0.69 \cdot \sin t, \\ y(t) = -0.53 \cdot \sin t - 0.69 \cdot \cos t + 1, \end{cases} \quad t \in [0, 5.5867),$$

$$\begin{cases} x = 0.5103 \cdot \cos t + 1.9338 \cdot \sin t, \\ y = -0.5103 \cdot \sin t + 1.9338 \cdot \cos t - 1, \end{cases} \quad t \in [5.5867, 6.0252];$$

i.e., the time of steering to the origin equals $T \approx 6.0252$ (Fig. 6).

However, the given initial point satisfies the condition (26). Hence, the control (29) is not optimal; the optimal control has two switchings, i.e., has the form

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau_1), \\ -1, & t \in [\tau_1, \tau_2), \\ 1, & t \in [\tau_2, T]. \end{cases}$$

In order to find τ_1 we use the fact that the point $(x(\tau_1), y(\tau_1))$ satisfies the condition (23). For $t \in [0, \tau_1]$ we have the trajectory

$$\begin{cases} x(t) = -0.53 \cos t + 1.31 \sin t, \\ y(t) = 0.53 \sin t + 1.31 \cos t - 1. \end{cases}$$

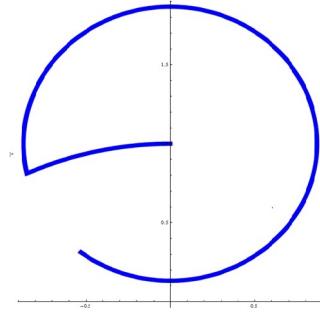
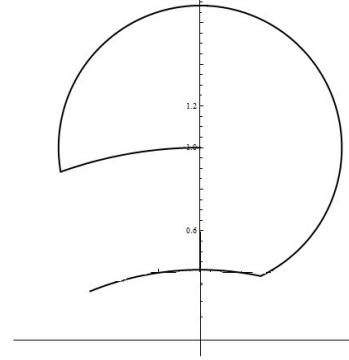
Then the condition (23) implies $\tau_1 \approx 0.5921$. Hence, for $t \in [0, \tau_1]$ we have

$$\begin{cases} x(t) = b_1 \cdot \cos t + b_2 \cdot \sin t, \\ y(t) = b_1 \cdot \sin t - b_2 \cdot \cos t + 1, \end{cases}$$



where $b_1 \approx -0.1027$, $b_2 \approx 0.6748$. Taking into account that the point $(x(\tau_2), y(\tau_2))$ belongs to the circle of radius 2 centered at $(0, -1)$, we get $\tau_2 \approx 5.0349$. Finally, for $t \in [\tau_2, T]$ we obtain

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \\ y(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t - 1, \end{cases}$$

where $c_1 \approx 1.5732$, $c_2 \approx 1.2349$ and, therefore, the trajectory steers to the end point $(0, 1)$ at the time $T \approx 5.3779$. The optimal trajectory is drawn in Fig. 7.

Fig. 6. Admissible trajectory, $T \approx 6.0252$ Fig. 7. Optimal trajectory, $T \approx 5.3779$

ORCID ID

S. Yu. Ignatovich  <https://orcid.org/0000-0003-2272-8644>Yu. V. Sukhinina  <https://orcid.org/0000-0002-1001-9675>

REFERENCES

1. T. Maillot, U. Boscain, J.-P. Gauthier, U. Serres. Lyapunov and minimum-time path planning for drones, *J. Dyn. Control Syst.* – 2015. – 1. V. **21**. – P. 47-80.
2. M.A. Lagache, U. Serres, V. Andrieu. Minimal time synthesis for a kinematic drone model, *Mathematical Control and Related Fields.* – 2017. – 2. V. **7**. – P. 259-288.
3. A.A. Markov. Some examples of the solution of a special kind of problem in greatest and least quantities (Russian), *Communications of Kharkov Mathematical Society.* – 1889. – V. **1**. – P. 250-276.
4. L.E. Dubins. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents, *American Journal of Mathematics.* – 1957. – V. **79**. P. 497-516.
5. A.F. Filippov. On some questions in the theory of optimal regulation (Russian), *Vestnik Moskov. Univ. Ser. Mat. Mec. Astr. Fiz. Him.* – 1959. – 2. – P. 25-32.
6. L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko. *Mathematical theory of optimal processes.* 1961. Nauka, Moscow, 391 p.; Engl. transl.: John Wiley & Sons, Inc., New York-London, 1962.

Ігнатович С. Ю., Сухініна Ю. В. **Задача швидкодії з двома кінцевими точками для кінематичної моделі БПЛА.** Ми досліджуємо задачу швидкодії для безпілотного літального апарату (дрону), що рухається у площині на сталій висоті. Розглядається кінематична модель, в якій керуванням є кутлова швидкість. Така

система описується рівняннями Маркова-Дубінса; розв'язанню різних задач оптимального і допустимого керування і стабілізації для подібних моделей присвячена велика кількість робіт. У статтях [T. Maillot, U. Boscain, J.-P. Gauthier, U. Serres, Lyapunov and minimum-time path planning for drones, *J. Dyn. Control Syst.*, V. 21 (2015)] та [M.A. Lagache, U. Serres, V. Andrieu, Minimal time synthesis for a kinematic drone model, *Mathematical Control and Related Fields*, V. 7 (2017)] розв'язується задача швидкодії, в якій дрон має досягти заданого одиничного кола за найменший можливий час і залишитись на цьому колі, обертаючись проти годинникової стрілки. У вказаних роботах, зокрема, показано, що в цьому випадку задача спрощується, а саме, стає двовимірною. У даній роботі ми розглядаємо природне узагальнення вказаної постановки: в нашій задачі дрон має досягти заданого одиничного кола за найменший можливий час і залишитись на ньому, але при цьому обидва напрямки обертання є допустимими. Тобто дрон може обертатися за годинниковою стрілкою або проти годинникової стрілки, а напрямок обертання обирається з міркувань мінімізації часу руху. Таке переформулювання приводить до задачі оптимальної швидкодії з двома кінцевими точками. У статті ми отримуємо повний розв'язок цієї задачі швидкодії. Зокрема, ми показуємо, що оптимальне керування набуває значень ± 1 або 0 і має не більше двох перемикань. Якщо оптимальне керування є сингулярним, тобто містить ділянку $u = 0$, то така ділянка є єдиною, а тривалість останньої ділянки дорівнює $\pi/3$; більш того, в цьому випадку оптимальне керування неєдине, а кінцева точка може бути як $(0, 1)$, так і $(0, -1)$. Якщо ж оптимальне керування є несингулярним, тобто набуває значень ± 1 , то воно єдине (за винятком випадку, коли тривалість останньої ділянки дорівнює $\pi/3$), а оптимальна траєкторія цілком міститься у верхній або в нижній півплощині. Також ми даємо розв'язок задачі оптимального синтезу.

Ключові слова: кінематична модель; задача швидкодії; оптимальний синтез.

S. Yu. Ignatovich, Yu. V. Sukhinina. **Time-optimal control problem with two final points for a kinematic model of an UAV.** We study the time-optimal control problem for an unmanned aerial vehicle (drone) moving in the plane of a constant altitude. A kinematic model is considered where the angular velocity is a control. Such a system is described by Markov-Dubins equations; a large number of works are devoted to solving different optimal and admissible control and stabilization problems for such models. In the papers [T. Maillot, U. Boscain, J.-P. Gauthier, U. Serres, Lyapunov and minimum-time path planning for drones, *J. Dyn. Control Syst.*, V. 21 (2015)] and [M.A. Lagache, U. Serres, V. Andrieu, Minimal time synthesis for a kinematic drone model, *Mathematical Control and Related Fields*, V. 7 (2017)] the time optimal control problem is solved where the drone must reach a given unit circle in the minimal possible time and stay on this circle rotating counterclockwise. In particular, in the mentioned works it is shown that in this case the problem is simplified; namely, the problem becomes two-dimensional. In the present paper we consider a natural generalization of the formulation mentioned above: in our problem, the drone must reach a given unit circle in the minimal possible time and stay on this circle, however, both rotating directions are admissible. That is, the drone can rotate clockwise or counterclockwise; the direction is chosen for reasons of minimizing the time of movement. Such a reformulation leads to the time-optimal control problem with two final points. In the paper, we obtain a complete solution of this time-optimal control problem. In particular, we show that the optimal control takes the values ± 1 or 0 and has no more than two switchings. If the optimal control is singular, i.e., contains a piece $u = 0$, then this piece is unique and the duration of the last piece equals $\pi/3$; moreover, in this case the optimal control is non-unique and

the final point can be $(0, 1)$ as well as $(0, -1)$. If the optimal control is non-singular, i.e., takes the values ± 1 , then it is unique (except the case when the duration of the last piece equals $\pi/3$) and the optimal trajectory entirely lies in the upper or lower semi-plane. Also, we give a solution of the optimal synthesis problem.

Keywords: a kinematic model; time-optimal control problem; optimal synthesis.

Article history: Received: 1 April 2019;

Accepted: 18 May 2019.

Controllability of the linear switched dynamical systems of the special type

V.I. Korobov, A.I. Derevianko

V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 4 Svobody sq., 61022, Ukraine
korobov@karazin.ua, derev.anna.08.96@gmail.com

In this paper, the controllability of a special type of linear switched systems is studied. Switch is carried out between two 2×2 matrices with purely imaginary eigenvalues. Such a system describes oscillations of a spring pendulum with a switchable stiffness coefficient. The main result of the work is an algorithm that allows finding a set of switching signals for switching from point to point, and a theorem for switching systems with a block-diagonal matrix.

Keywords: linear switched systems; controllability; switching way; getting to the given point; spring pendulum.

Коробов В.І., Дерев'яно А.І. **Керованість лінійними динамічними системами перемикання спеціального типу.** У даній роботі вивчається керованість лінійних систем перемикання спеціального типу. Перемикання відбувається між двома 2×2 матрицями з чисто уявними власними значеннями. Така система описує коливання пружинного маятника з коефіцієнтом жорсткості, який перемикається. Основним результатом роботи є алгоритм, що дозволяє визначити набір сигналів перемикання для переходу з точки в точку, і теорема про керованість для систем перемикання з блочно-діагональною матрицею.

Ключові слова: лінійні системи перемикання; керованість; спосіб перемикання; потрапляння в задану точку; пружинний маятник.

Коробов В.И., Деревяно А.И. **Управляемость линейными динамическими системами переключения специального типа.** В данной работе изучается управляемость линейных систем переключения специального типа. Переключение происходит между двумя 2×2 матрицами с чисто мнимыми собственными значениями. Такая система описывает колебания пружинного маятника с переключающимся коэффициентом жесткости. Основным результатом работы является алгоритм, позволяющий найти набор сигналов переключения для перехода из точки в точку, и теорема об управляемости для систем переключения с блочно-диагональной матрицей.

Ключевые слова: линейные системы переключения; управляемость; способ переключения; попадание в заданную точку; пружинный маятник.

2010 Mathematics Subject Classifications: 93C15; 93B05.

Introduction and Statement of the Problem

Switched systems is a special case of hybrid dynamical systems with discrete and continuous dynamics. They are widely applied when a real system cannot be described by one single model. Numerous examples are given by engineering systems of electronics, power systems, traffic control and others. Since the 1990s, the issue of switched systems stability has become very popular (see [1], [3]). The particular case of linear switched systems was considered in [2]. More modern literature about switched systems is presented by works of Patrizio Colaneri [2], Yuan Lin, Yuan Sun-Ge Wang, and Jiang-Wang [4], Zhong-Ping, Yuan Wang [5]; the question of stability remains popular nowadays.

In the present paper we consider one particular class of switched system from the point of view of controllability property.

Let us recall the basic terminology. By a switched system we mean the following system

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

where $x \in \mathbb{R}^m$ is called a *continuous state*, σ stands for a *discrete state* with values from an index set $M := \{1, \dots, n\}$, and f_k , for $k \in M$, are given vector fields.

The behavior of the dynamical system is regulated by the switching signal. Namely, at some moments $\tau_1 \dots \tau_n$ the signal changes its value from $\sigma(\tau_i)$ to $\sigma(\tau_{i+1})$, hence the trajectory of the system, starting from $t = \tau_i$, is given by the vector field $f_{\sigma(\tau_{i+1})}$ instead of $f_{\sigma(\tau_i)}$. In works on switched systems, switching times can be random or given by some law. It is clear that stability depends both on vector fields and on the switching law.

In our work, we consider a slightly different formulation of the problem, namely, the switching signal is under our control.

We introduce the following definition.

Definition 1 *We say that the switched system*

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

is controllable if for any two points there exists a switching signal that allows to get from the first point to the second one.

This definition corresponds to the concept of controllability for control systems of the form

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0,$$

where the control $u(t)$ plays the role of a switching signal.

In this paper we consider linear switched systems (see [2]) of the form

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad x(0) = x_0 \neq 0,$$

where $A_1 \dots A_n$ are given matrices. Our main goal is studying the case $m = 2$, $n = 2$ with both systems having pure imaginary eigenvalues, which are introduced

in Section 1. We show that such systems are controllable and propose an algorithm for constructing a controlling switching signal; the algorithm is presented in Section 2. Section 3 contains one generalization.

1. Controllability of 2×2 linear switched dynamical systems

Consider the problem of oscillation of a spring pendulum

$$\ddot{x} = -kx,$$

with a switchable stiffness coefficient $k > 0$. Assume that we have a spring with a stiffness coefficient k_1 , and we can change the stiffness coefficient of the system by joining and removing an additional spring with a stiffness coefficient k_2 .

Two cases can be considered. If the springs are connected in parallel, the parameter k of the system switches between $k = k_1$ and $k = k_1 + k_2$. If the connection is series, the parameter k of the system switches between $k = k_1$ and $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

Let us rewrite the differential equation of the pendulum oscillations as a switched system:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t),$$

where

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}.$$

For definiteness, let us assume that we start and end with the first system. Suppose that two nonzero points (initial (x_1, y_1) and ending (x_2, y_2)) are given.

So we have two cases: $\beta > \alpha$ and $\beta < \alpha$. Notice that under the parallel connection condition we can get only $\beta > \alpha$.

1.1. Case $\alpha > \beta$.

Rewrite coordinates of x as (x, y) . Solutions of the system

$$\dot{x}(t) = A_1(x(t)),$$

are of the form

$$\begin{aligned} x(t) &= \gamma_1 \sin(\sqrt{\alpha}t) + \gamma_2 \cos(\sqrt{\alpha}t), \\ y(t) &= \sqrt{\alpha}\gamma_1 \sin(\sqrt{\alpha}t) - \sqrt{\alpha}\gamma_2 \cos(\sqrt{\alpha}t), \end{aligned} \tag{1}$$

while solutions of the system

$$\dot{x}(t) = A_2(x(t)).$$

are of the form

$$\begin{aligned} x(t) &= \delta_1 \sin(\sqrt{\beta}t) + \delta_2 \cos(\sqrt{\beta}t), \\ y(t) &= \sqrt{\beta}\delta_1 \sin(\sqrt{\beta}t) - \sqrt{\beta}\delta_2 \cos(\sqrt{\beta}t). \end{aligned} \tag{2}$$

So the trajectories are given by ellipses of the following types:

$$x^2 + \frac{y^2}{\alpha} = c^2 \quad (3)$$

(we call them horizontal ellipses) and

$$x^2 + \frac{y^2}{\beta} = c^2 \quad (4)$$

(we call them vertical ellipses). Phase portraits are presented in Fig. 1.

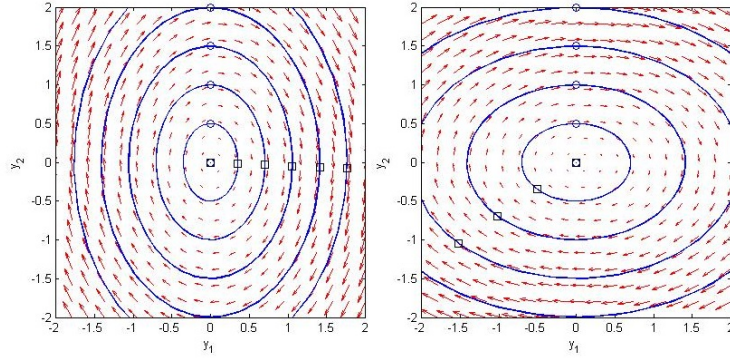


Fig. 1. Phase portraits for the first (left) and the second (right) systems with $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{2}$

Let the trajectory (1) go through the initial point (x_1, y_1) and the trajectory (2) go through the end point (x_2, y_2) . Denote

$$c_1 = \min(\gamma_1^2 + \gamma_2^2; \delta_1^2 + \delta_2^2)$$

and

$$c_2 = \max(\gamma_1^2 + \gamma_2^2; \delta_1^2 + \delta_2^2).$$

Let us fix the vertical ellipses $x^2 + \frac{y^2}{\beta} = c_1^2$, $x^2 + \frac{y^2}{\beta} = c_2^2$ and find the conditions under which they have a common horizontal ellipse $x^2 + \frac{y^2}{\alpha} = d^2$, i.e., intersecting both.

Consider the smaller vertical ellipse $x^2 + \frac{y^2}{\beta} = c_1^2$. The horizontal ellipse circumscribing it looks like $x^2 + \frac{y^2}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}c_1^2$. Now we consider the bigger vertical ellipse $x^2 + \frac{y^2}{\beta} = c_2^2$. The horizontal ellipse inscribed in it is $x^2 + \frac{y^2}{\alpha} = c_2^2$. So we get that intermediate horizontal ellipses (see Fig. 2) exist under the condition $c_2 < \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}c_1$. They have the form $x^2 + \frac{y^2}{\alpha} = d^2$, where $d \in (c_2; \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}c_1)$.

If this is not the case, that is, two ellipses of the first family do not have a common ellipse of the second family, then we build the intermediate vertical

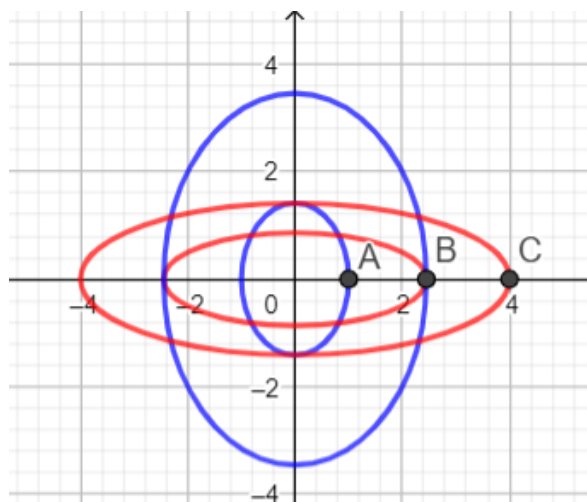


Fig. 2. $A(c_1, 0)$, $B(\sqrt{\alpha/\beta}c_1, 0)$, $C(\alpha/\beta c_1, 0)$

ellipse $x^2 + \frac{y^2}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}c_1^2$, and repeat the described procedure. Now the condition of existence of a common horizontal ellipse takes the form $c_2 < \frac{\alpha}{\beta}c_1$.

After $N = \lceil 2 \log_{\alpha/\beta} c_2/c_1 \rceil$ such steps we get the set of vertical and horizontal ellipses. Thus, it is possible to organize getting from the initial point to the end point. Therefore we have shown that the switched system is controllable.

1.2. Case $\alpha < \beta$.

Now it is natural to refer to (3) as vertical ellipses and (4) as horizontal ellipses.

Unlike the previous case, the initial and end ellipses are horizontal (see Fig. 3). Then the number of intermediate ellipses is also estimated as $N = \lceil 2 \log_{\alpha/\beta} c_2/c_1 \rceil$ and the system is controllable.

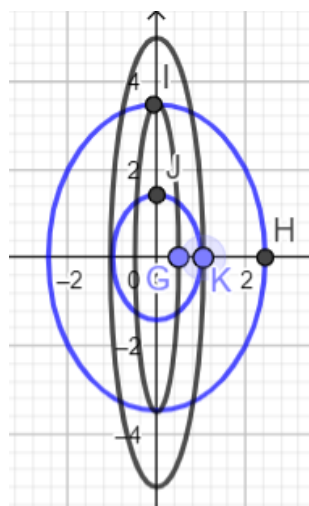


Fig. 3. $G(c_1, 0)$, $K(c_2, 0)$, $I(0, \sqrt{\alpha}c_1)$, $H(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}c_1)$, $J(0, \frac{\alpha}{\beta}c_2)$

2. Algorithm of finding the controlling switching signals

The obtained results allow us to propose an algorithm of getting from an initial point to an end point for the system under consideration.

1. Get initial and final points (x_1, y_1) , (x_2, y_2) .

2. Calculate

$$c_{1,2} = \sqrt{x_{1,2}^2 + \frac{y_{1,2}^2}{\alpha}}.$$

Build initial and final ellipses $x_{1,2}^2 + \frac{y_{1,2}^2}{\alpha} = c_{1,2}^2$.

3. Define intervals $[c_1, \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}c_1]$, $[c_2, \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}c_2]$.

4. If there exists $d \in [c_1, \frac{\alpha}{\beta}c_1] \cap [c_2, \frac{\alpha}{\beta}c_2]$ then build ellipse $x^2 + \frac{y^2}{\beta} = d^2$.

Otherwise define $c_1 := \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}c_1$, build ellipses $x_{1,2}^2 + \frac{y_{1,2}^2}{\alpha} = c_1^2$, $x^2 + \frac{y^2}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}d^2$, return to item 3.

5. Build N auxiliary ellipses till the intersection with $x^2 + \frac{y^2}{\alpha} = c_2^2$. Find intersection points, get the way from point to point by choosing the closest point in needed direction.

Consider the following example, which generalizes the system from [6, p. 6]. Suppose the matrices to be of the form

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

$\alpha = 4$, the initial point is $(-50, -11)$, and we need to find the way to the point $(6, 1)$. Using the MATLAB program we get a collection of ellipses and a switching path.

In our case the set of switching points is:

$$\{(45.4832, 44.3520), (0.0000, 48.3322), (24.1661, 0.0000), (0.0000, 12.0830)\}$$

and one possible trajectory is drawn in Fig. 4.

3. Generalization

Let us suggest a generalization to linear switched systems of higher dimension.

Theorem 1 *Let us consider a switched system of the form*

$$\dot{x}(t) = A_i(x(t)), \quad x(0) = x_0 \neq 0,$$

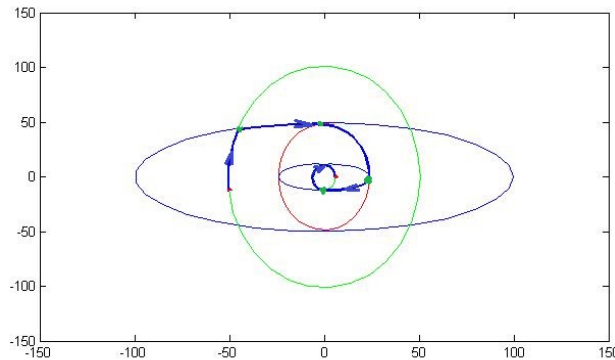


Fig. 4. Possible trajectory

where A_i are block-diagonal matrices of dimension $2n \times 2n$

$$A_i = \begin{pmatrix} A_{i_1}^1 & & 0 \\ & A_{i_2}^2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & A_{i_n}^n \end{pmatrix}, \quad i_j = 1, 2, \quad i = (i_1 \dots i_n), \quad (5)$$

where A_i^j are given 2×2 matrices. The switched system

$$\dot{x}(t) = A_i(x(t)), \quad x(0) = x_0 \neq 0$$

is controllable if and only if the systems

$$\dot{x}(t) = A_i^j(x(t)), \quad x(0) = x_0 \neq 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1 \dots n$$

are controllable.

Conclusion on the results and directions for further research

In this work, the controllability of switched linear systems of the special type was studied.

Namely, linear switched system with purely imaginary eigenvalues of both matrices are considered.


The main result of the work is an algorithm, that allows to find a set of switching signals for getting from point to point.

We also formulated the theorem that states the controllability of the switched system of one special type with a block-diagonal matrix.

In the future, we plan to study the behavior and controllability of switched systems with different types of eigenvalues (real and complex) and switched systems of higher dimension.

ORCID ID

V. I. Korobov  <https://orcid.org/0000-0001-8421-1718>

A. I. Derevianko  <https://orcid.org/0000-0003-1105-8745>

REFERENCES

1. M. Vidyasagar. *Nonlinear System Analysis*, 2nd ed. New Jersey: Prentice Hall, Eaglewood Cliffs, 1993.
2. P. Colaneri. *Analysis and Control of Linear Switched Systems*. Politecnico di Milano, 2018,
<http://users.dimi.uniud.it/franco.blanchini/scuolasidra09/SW.pdf>
3. Z. Sun, S. S. Ge. *Stability Theory of Switched Dynamical Systems*. New York: Springer-Verlag London, 2011.
4. Y. Lin, E. D. Sontag, Y. Wang. A Smooth Converse Lyapunov Theorem for Robust Stability, *SIAM Journal on Control and Optimization*. – 1996. – Vol. **34**, No. 1. – P. 124-160.
5. Z.-P. Jiang, Y. Wang. A converse Lyapunov theorem for discrete-time systems with disturbances, *Systems and Control Letters*. – 2002. – Vol. **45**, No. 1. – P. 49-58.
6. W.A. Coppel. *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*. Boston: D. C. Heath and Company, 1965.
7. J. Polking. *Ordinary Differential Equations Using MATLAB*, 3rd ed. Pearson, 2004.
8. L.S. Pontryagin. *Ordinary Differential Equations*. Moscow, 1974.
9. A.I. Derevianko, V.I. Korobov. Controllability of the given switched linear system of special type, *Technical Sciences: problem and solutions*. Moscow, 2019.

V. I. Korobov, A. I. Derevianko. **Controllability of the linear switched dynamical systems of the special type.** Switched systems is a special case of hybrid dynamical systems with discrete and continuous dynamics. They are widely applied when a real system cannot be described by one single model. In theoretical works on switched systems, switching signals and times can be random or given by some law. Stability depends both on vector fields and on the switching law. In the present paper, a different formulation of the problem is considered, that is the case, when switching signal is under our control. Namely, a switched system is called controllable if for any two points there exists a switching signal that allows to get from the first point to the second one. In the paper the controllability of linear switched systems of a special type is studied. More specifically, we consider a switch, that is carried out between two 2×2 matrices with purely imaginary eigenvalues of both matrices. In the first section we discuss the physical meaning of switched systems of this type. Namely, the problem of oscillation of a spring pendulum with a switchable stiffness coefficient is considered with the series and parallel connection of an additional spring to the system with one given spring. We prove that such a system

is controllable, and propose the method of finding the controlling switching signal. In the second section we present the main result of the work. We formulate an algorithm that allows finding a set of switching signals for getting from any given initial point to any given end point. We present an example of such controlling switching signals, simulated in MATLAB. In the last section we propose a generalization of the obtained result and formulate the theorem that states the controllability of the special type switched system with a block-diagonal matrix of high dimension. The method presented in the paper can be generalized to study of controllability of linear switched systems of more general form.

Keywords: linear switched systems, controllability, switching way, getting to the given point, spring pendulum.

Коробов В.І., Дерев'янюк А.І. **Керованість лінійними динамічними системами перемикання спеціального типу.** Системи перемикання – це окремий випадок гібридних динамічних систем з дискретною і неперервною динамікою. Вони широко застосовуються, коли реальна система не може бути описана однією єдиною моделлю. У теоретичних роботах по системам перемикання сигнали і час перемикання можуть бути випадковими або контролюватись яким-небудь законом. Стійкість залежить як від векторних полів, так і від закону перемикання. У даній роботі розглядається інша постановка задачі, тобто випадок, коли сигнал перемикання знаходиться під нашим контролем. А саме, система перемикання називається керованою, якщо для будь-яких двох точок існує сигнал перемикання, що дозволяє потрапити з першої точки до другої. У статті вивчається керованість лінійних систем перемикання спеціального типу. Точніше, ми розглянемо перемикання, яке виконується між двома матрицями 2×2 з чисто уявними власними значеннями обох матриць. У першому розділі ми обговорюємо фізичний зміст систем перемикання цього типу. А саме, задача коливання пружинного маятника з коефіцієнтом жорсткості, що перемикається, розглядається при послідовному і паралельному приєднанні додаткової пружини до системи з однією даною пружиною. Доводиться, що така система є керованою, і пропонується спосіб пошуку сигналів перемикання. У другому розділі ми представляємо основний результат роботи. Формулюється алгоритм, який дозволяє знайти набір сигналів перемикання для потрапляння з будь-якої початкової точки в будь-яку задану кінцеву точку. Наведено приклад такого керування перемикальними сигналами, змодельований в MATLAB. В останньому розділі ми пропонуємо узагальнення отриманого результату та формулюємо теорему, в якій стверджується керованість системи перемикання спеціального типу з блочно-діагональною матрицею вищої розмірності. Метод, представлений у статті, можна узагальнити для вивчення керованості лінійних систем перемикання більш загального вигляду.

Ключові слова: лінійні системи перемикання; керованість; спосіб перемикання; потрапляння в задану точку; пружинний маятник.

Article history: Received: 14 May 2019; Final form: 20 May 2019;

Accepted: 21 May 2019.

Правила для авторів
«Вісника Харківського національного університету
імені В.Н.Каразіна»,
Серія «Математика, прикладна математика і механіка»

Редакція просить авторів при направленні статей керуватися наступними правилами.

1. В журналі публікуються статті, що мають результати математичних досліджень (англійською, українською або російською мовами).

2. Поданням статті вважається отримання редакцією файлів статті оформлених у редакторі LATEX (версія 2e), анотацій, відомостей про авторів та архіва, що включає LATEX файли статті та файли малюнків. Файл-зразок оформлення статті можна знайти в редакції журналу та на веб-сторінці (<http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>).

3. Стаття повинна починатися з анотацій, в яких повинні бути чітко сформульовані мета та результати роботи. Анотації повинні бути трьома мовами (англійською, українською та російською): першою повинна стояти анотація тією мовою, якою є основний текст статті. В анотації повинні бути прізвища, ініціали авторів, назва роботи, ключові слова та номер за міжнародною математичною класифікацією (Mathematics Subject Classification 2010). Анотація не повинна мати посилань на літературу чи малюнки. На першій сторінці вказується номер УДК класифікації. В кінці статті треба додати розширені (обсягом не менш як 1800 знаків кожна) анотації англійською та українською мовами.

4. Список літератури повинен бути оформлений латинським шрифтом. Приклади оформлення списку літератури:

1. А.М. Ляпунов. A new case of integrability of differential equations of motion of a solid body in liquid, Rep. Kharkov Math. Soc., – 1893. – 2. V.4. – P. 81-85.

2. А.М. Ляпунов. The general problem of the stability of motion. 1892. Kharkov Mathematical Society, Kharkov, 251 p.

5. Кожний малюнок повинен бути пронумерований та представлений окремим файлом в одному з форматів: EPS, BMP, JPG. В файлі статті малюнок повинен бути вставлений автором. Під малюнком повинен бути підпис. Назви файлів малюнків повинні починатись з прізвища першого автора.

6. Відомості про авторів повинні містити: прізвища, імена, по батькові, службові адреси та номери телефонів, адреси електронних пошт та інформацію про наукові профайли авторів (orcid.org, www.researcherid.com, www.scopus.com) з відповідними посиланнями. Прохання також повідомити прізвище автора, з яким треба вести листування.

7. Рекомендуємо використовувати в якості зразка оформлення останні випуски журналу (vestnik-math.univer.kharkov.ua/currentv.htm).

8. У випадку порушення правил оформлення редакція не буде розглядати статтю.

Електронна скринька: vestnik-khnu@ukr.net

Електронна адреса в Інтернеті: <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна,
Серія “Математика, прикладна математика і механіка”, Том 89

Збірник наукових праць

Англійською, українською, російською мовами

Підписано до друку 25.06.2019 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.

Ум. друк. арк. 8,4

Обл.– вид. арк. 9,7

Наклад 60 пр. Зам. №

Безкоштовно.

61022, м.Харків, майдан Свободи, 4, Харківський національний університет
імені В.Н.Каразіна. Видавництво.

Надруковано: ХНУ імені В.Н.Каразіна

61022, м.Харків, майдан Свободи, 4, тел. 705-24-32

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09