

ISSN 2221-5646 (Print),  
ISSN 2523-4641 (Online)



**KARAZIN UNIVERSITY**  
**CLASSICS AHEAD OF TIME**

VISNYK OF V.N.KARAZIN  
KHARKIV NATIONAL UNIVERSITY

**Ser. MATHEMATICS, APPLIED  
MATHEMATICS AND MECHANICS**



**Том 88 ' 2018**

Вісник Харківського національного  
університету імені В.Н.Каразіна  
серія

**МАТЕМАТИКА,  
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА  
І МЕХАНІКА**

ISSN 2221-5646 (Print)  
ISSN 2523-4641 (Online)

Міністерство освіти і науки України

# ВІСНИК

Харківського національного  
університету імені В.Н. Каразіна

**Серія**

«Математика, прикладна математика і механіка»

Серія започаткована 1965 р.

**Том 88**



Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University  
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"

**Vol. 88**

Харків  
2018

До Віснику включено статті з математичного аналізу, математичної фізики, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних наук  
(Наказ МОН України №1328 від 21.12.2015 р.)

*Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (протокол № 13 від 17 грудня 2018р.).*

**Головний редактор** – Коробов В.І. – д-р ф.-м. наук,  
ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

**Члени редакційної колегії:**

Кадець В.М. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна  
Пацегон М.Ф. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна  
Фаворов С.Ю. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна  
Борисенко О.А. – д-р ф.-м. наук, чл.-кор. НАН України, ФТІНТ НАН України  
Єгорова І.Є. – д-р ф.-м. наук, ФТІНТ НАН України  
Пастур Л.А. – д-р ф.-м. наук, акад. НАН України, ФТІНТ НАН України  
Хруслов Є.Я. – д-р ф.-м. наук, акад. НАН України, ФТІНТ НАН України  
Шепельский Д.Г. – д-р ф.-м. наук, ФТІНТ НАН України та ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна  
Когут П.І. – д-р ф.-м. наук, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, м.Дніпро, Україна  
Чуйко С.М. – д-р ф.-м. наук, Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України, м.Слов'янськ, Україна  
Домбровський А. – д-р ф.-м. наук, Університет Щецина, Польща  
Карлович Ю.І. – д-р ф.-м. наук, Університет Морелос, Мехіко, Мексика  
Нгуєн Хоа Шон – д-р ф.-м. наук, Академія наук та технології В'єтнама, Інститут математики, Ханой, В'єтнам  
Поляков А.І. – д-р ф.-м. наук, ІНРІА Національний дослідницький інститут інформатики та автоматики, Ле-Шене, Франція  
Скляр Г.М. – д-р ф.-м. наук, Університет Щецина, Польща  
Солдатов О.П. – д-р ф.-м. наук, Белгородський університет, Росія

**Відповідальний секретар** – канд. ф.-м. наук Резуненко О.В.,  
ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

**Адреса редакційної колегії:** 61022, Харків, майдан Свободи, 4,  
ХНУ імені В.Н. Каразіна, факультет математики і інформатики, к. 7-27.  
Тел. 7075240, 7075135,  
Email: vestnik-khnu@ukr.net  
Интернет:<http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/>  
[http://periodicals.karazin.ua/mech\\_math/](http://periodicals.karazin.ua/mech_math/)

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21568-11468 Р від 21.08.2015

©Харківський національний університет  
імені В.Н. Каразіна, оформлення, 2018

## ЗМІСТ

<b>Рибалко Я., Шепельський Д.,</b> Метод задачі Рімана-Гільберта для інтегровного нелокального нелінійного рівняння Шредингера з початковими даними типу сходинки.	4
<b>Резуненко В. О.,</b> Дифракція поля вертикального електричного диполя на спіральній провідній сфері в присутності конуса.	17
<b>Чуйко С. М., Калініченко Я. В.,</b> Про регуляризацію задачі Коші для системи лінійних різницевих рівнянь.	27
<b>Андреєва Д. М., Ігнатович С. Ю.,</b> Про побудову неавтономних систем повного рангу з одним керуванням.	35
<b>Соловійова О. М., Кізілова Н. М.,</b> Математичне моделювання біоактивної артеріальної стінки.	44
<b>Жученко С. В.,</b> Чисельне моделювання термодинаміки ядерного реактора на швидких нейтронах.	58

## CONTENTS

<b>Ya. Rybalko, D. Shepelsky,</b> Riemann-Hilbert approach for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation with step-like initial data.	4
<b>V. A. Rezunenko,</b> Diffraction of the field of vertical electric dipole on the spiral conductive sphere in the presence of a cone.	17
<b>S. M. Chuiko, Ya. V. Kalinichenko,</b> On the regularization of the Cauchy problem for a system of linear difference equations.	27
<b>D. N. Andreieva, S. Yu. Ignatovich,</b> On constructing single-input non-autonomous systems of full rank.	35
<b>H. N. Solovyova, N. N. Kizilova,</b> Mathematical modeling of bioactive arterial wall.	44
<b>S. V. Zhuchenko,</b> Numerical simulation of the thermodynamics of a fast neutron reactor.	58

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Рыбалко Я., Шепельский Д.,</b> Метод задачи Римана-Гильберта для интегрируемого нелокального нелинейного уравнения Шредингера с начальными данными типа ступеньки.	4
<b>Резуненко В. А.,</b> Дифракция поля вертикального электрического диполя на спирально проводящей сфере в присутствии конуса.	17
<b>Чуйко С. М., Калиниченко Я. В.,</b> К вопросу о регуляризации задачи Коши для системы линейных разностных уравнений.	27
<b>Андреєва Д. Н., Ігнатович С. Ю.,</b> О построении неавтономных систем полного ранга с одним управлением.	35
<b>Соловьєва Е. Н., Кизилова Н. Н.,</b> Математическое моделирование биоактивной артериальной стенки.	44
<b>Жученко С. В.,</b> Численное моделирование термодинамики ядерного реактора на быстрых нейтронах.	58

## Riemann-Hilbert approach for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation with step-like initial data

Ya. Rybalko<sup>1</sup>, D. Shepelsky<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine*

<sup>2</sup> *V.Karazin Kharkiv National University, 4, Svobody Sq., Kharkiv, 61022,  
Ukraine*

*rybalkoyan@gmail.com, shepelsky@yahoo.com*

We study the Cauchy problem for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger (NNLS) equation

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2q^2(x, t)\bar{q}(-x, t) = 0$$

with a step-like initial data:  $q(x, 0) = o(1)$  as  $x \rightarrow -\infty$  and  $q(x, 0) = A + o(1)$  as  $x \rightarrow \infty$ , where  $A > 0$  is an arbitrary constant. We develop the inverse scattering transform method for this problem in the form of the Riemann-Hilbert approach and obtain the representation of the solution of the Cauchy problem in terms of the solution of an associated Riemann-Hilbert-type analytic factorization problem, which can be efficiently used for further studying the properties of the solution, including the large time asymptotic behavior.

*Keywords:* nonlocal nonlinear Schrödinger equation, inverse scattering transform method, Riemann-Hilbert problem.

Рибалко Я., Шепельський Д. **Метод задачі Рімана-Гільберта для інтегровного нелокального нелінійного рівняння Шредінгера з початковими даними типу сходинки.** Ми розглядаємо задачу Коші для інтегровного нелокального нелінійного рівняння Шредінгера (ННШ)

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2q^2(x, t)\bar{q}(-x, t) = 0$$

з початковими даними типу сходинки:  $q(x, 0) = o(1)$ , при  $x \rightarrow -\infty$ ,  $q(x, 0) = A + o(1)$ , при  $x \rightarrow \infty$ , де  $A > 0$  – будь-яка константа. Ми розробляємо метод оберненої задачі розсіяння для цієї задачі у вигляді методу задачі Рімана-Гільберта, та отримуємо зображення для розв'язку вихідної задачі у термінах розв'язку відповідної задачі аналітичної факторизації типу Рімана-Гільберта, яке може бути ефективно використано для подальшого дослідження властивостей розв'язку, зокрема, його асимптотики за великим часом.

*Ключові слова:* нелокальне нелінійне рівняння Шредінгера, метод оберненої задачі розсіяння, задача Рімана-Гільберта.

Рыбалко Я., Шепельский Д. **Метод задачи Римана-Гильберта для интегрируемого нелокального нелинейного уравнения Шредингера с начальными данными типа ступеньки.** Мы рассматриваем задачу Коши для интегрируемого нелокального нелинейного уравнения Шредингера

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2q^2(x, t)\bar{q}(-x, t) = 0$$

с начальными данными типа ступеньки:  $q(x, 0) = o(1)$  при  $x \rightarrow -\infty$ ,  $q(x, 0) = A + o(1)$  при  $x \rightarrow \infty$ , где  $A > 0$  некоторая константа. Мы разрабатываем метод обратной задачи рассеяния для этой проблемы в виде метода задачи Римана-Гильберта, и получаем представление для решения исходной задачи в терминах решения соответствующей задачи аналитической факторизации типа Римана-Гильберта, которое может быть эффективно использовано для дальнейшего изучения свойств решения, в частности его асимптотики при больших временах

*Ключевые слова:* нелокальное нелинейное уравнение Шредингера, метод обратной задачи рассеяния, задача Римана-Гильберта.

*2010 Mathematics Subject Classification* 35Q55, 35Q15.

## 1. Introduction

In this letter we consider the following Cauchy problem for the focusing nonlocal nonlinear Schrödinger (NNLS) equation with a step-like initial data:

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2q^2(x, t)\bar{q}(-x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1a)$$

$$q(x, 0) = q_0(x), \quad (1b)$$

where  $\bar{q}$  denotes the complex conjugate of  $q$  and

$$q_0(x) \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow -\infty \text{ and } q_0(x) \rightarrow A \text{ as } x \rightarrow \infty \quad (1c)$$

sufficiently fast, with some  $A > 0$ .

The nonlocal nonlinear Schrödinger equation (1a) was introduced by M. Ablowitz and Z. Musslimani in [2]. This equation is a reduction of a member of the AKNS hierarchy [1]

$$iq_t + q_{xx} + 2q^2r = 0, \quad (2a)$$

$$-ir_t + r_{xx} + 2r^2q = 0, \quad (2b)$$

with  $r(x, t) = \bar{q}(-x, t)$ , which introduces a remarkably simple nonlocality to the above system and reduces it to equation (1a). The NNLS equation has been widely considered recently due to its interesting physical and mathematical features. First, this equation is invariant under the joint transformations  $x \rightarrow -x$ ,  $t \rightarrow -t$ , and complex conjugation. Therefore, it is parity-time (PT) symmetric and thus is related to this state-of-art research area of modern physics [4]. Moreover, in [9] it was shown, that NNLS is gauge-equivalent to the unconventional system of coupled Landau-Lifshitz (CLL) equations and consequently can be used in the

physics of nanomagnetic artificial materials. Finally, the focusing NNLS equation (1a), in contrast to the conventional (local) NLS equation, can simultaneously support both bright and dark soliton solutions [11].

In [3] the authors presented the Inverse Scattering Transform (IST) method to the study of the Cauchy problem for equation (1a), based on a variant of the Riemann-Hilbert approach, in the case of decaying initial data and obtained the one- and two-soliton solutions. In the present paper we assume that the solution  $q(x, t)$  of problem (1a-1b) satisfies the following boundary conditions for all  $t > 0$ :

$$q(x, t) = o(1), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (3a)$$

$$q(x, t) = A + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (3b)$$

This choice of initial data and boundary values is inspired by the shock problems for the classical (local) NLS equation, which has been considered since 1980s (see e.g. [5], [6]). Particularly, in [6] the authors study the asymptotics of the Cauchy problem for the NLS equation with the step-like initial data.

The present paper aims at the development of the Riemann-Hilbert approach to the initial value problem (1) with boundary values (3). It is organized as follows. In Section 2 we construct the dedicated solutions of the Lax pair equations fixing their large  $x$  behavior (Jost solution). In Section 3 we discuss the properties of the associated spectral functions. Finally, in Section 4, we give the representation of the solution of the Cauchy problem in terms of a Riemann-Hilbert problem. Notice that this RH problem has a form suitable for further large time asymptotic analysis by using an appropriate adaptation of the nonlinear steepest descent method [8, 7].

## 2. Eigenfunctions of the Lax pair equations with step-like boundary conditions

The focusing NNLS equation (1a) is a compatibility condition of the following two linear equations (Lax pair)

$$\begin{cases} \Phi_x + ik\sigma_3\Phi = U(x, t)\Phi \\ \Phi_t + 2ik^2\sigma_3\Phi = V(x, t, k)\Phi \end{cases} \quad (4)$$

where  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\Phi(x, t, k)$  is a  $2 \times 2$  matrix-valued function,  $k \in \mathbb{C}$  is an auxiliary (spectral) parameter, and the matrix coefficients  $U(x, t)$  and  $V(x, t, k)$  are given in terms of  $q(x, t)$ :

$$U(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x, t) \\ -\bar{q}(-x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

where  $V_{11} = -V_{22} = iq(x, t)\bar{q}(-x, t)$ ,  $V_{12} = 2kq(x, t) + iq_x(x, t)$ , and  $V_{21} = -2k\bar{q}(-x, t) + i(\bar{q}(-x, t))_x$ .

Introduce the notations

$$U_+ = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, U_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A & 0 \end{pmatrix}, V_+ = \begin{pmatrix} 0 & 2kA \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2kA & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Then, assuming that there exists  $q(x, t)$  satisfying (1) and (3), it follows that

$$U(x, t) \rightarrow U_{\pm} \text{ and } V(x, t, k) \rightarrow V_{\pm}(k) \text{ as } x \rightarrow \pm\infty. \quad (7)$$

It is easy to see that that the system (4) is compatible with  $U, V$  replaced by  $U_+, V_+$  or  $U_-, V_-$ . Particularly, these equations are satisfied by  $\Phi_{\pm}(x, t, k)$  defined as follows:

$$\Phi_{\pm}(x, t, k) = N_{\pm}(k)e^{-(ikx+2ik^2t)\sigma_3}, \quad (8)$$

where  $N_+(k) = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & \frac{A}{2ik} \end{pmatrix}$ ,  $N_-(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{A}{2ik} & 1 \end{pmatrix}$ . Notice that  $\det \Phi_{\pm} \equiv 1$ . On the other hand, the singularities of  $N_{\pm}(k)$  at  $k = 0$  will significantly affect the analysis that follows. Namely, the solution of the basic RH problem has a singularity as  $k \rightarrow 0$ , i.e. at a point on the contour of the RH problem (see (38) and (39) below).

Now define the  $2 \times 2$ -valued functions  $\Psi_j(x, t, k)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq t < \infty$  as the solutions of the Volterra integral equations:

$$\Psi_1(x, t, k) = N_-(k) + \int_{-\infty}^x G_-(x, y, t, k) (U(y, t) - U_-) \Psi_1(y, t, k) e^{ik(x-y)\sigma_3} dy, \quad (9a)$$

$$\Psi_2(x, t, k) = N_+(k) + \int_{\infty}^x G_+(x, y, t, k) (U(y, t) - U_+) \Psi_2(y, t, k) e^{ik(x-y)\sigma_3} dy, \quad (9b)$$

where  $G_{\pm}(x, y, t, k) = \Phi_{\pm}(x, t, k)[\Phi_{\pm}(y, t, k)]^{-1}$ . The functions  $\Psi_j(x, t, k)$ ,  $j = 1, 2$  are the main ingredients of the basic RH problem (see (31) below). The main properties of the matrices  $\Psi_j(x, t, k)$  are summarized in Proposition 1, where we denote by  $\Psi_j^{(i)}(x, t, k)$  the  $i$ -th column of  $\Psi_j(x, t, k)$ ,  $\mathbb{C}^{\pm} = \{k \in \mathbb{C} \mid \pm \Im k > 0\}$ , and  $\overline{\mathbb{C}^{\pm}} = \{k \in \mathbb{C} \mid \pm \Im k \geq 0\}$ .

**Proposition 1** *The matrices  $\Psi_1(x, t, k)$  and  $\Psi_2(x, t, k)$  have the following properties*

1. *The columns  $\Psi_1^{(1)}(x, t, k)$  and  $\Psi_2^{(2)}(x, t, k)$  are well-defined and analytic in  $k \in \mathbb{C}^+$  and continuous in  $\overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}$ ; moreover,*

$$\Psi_1^{(1)}(x, t, k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{k}\right) \text{ and } \Psi_2^{(2)}(x, t, k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{k}\right), k \rightarrow \infty$$

for  $k \in \mathbb{C}^+$ .

2. *The columns  $\Psi_1^{(2)}(x, t, k)$  and  $\Psi_2^{(1)}(x, t, k)$  are well-defined and analytic in  $k \in \mathbb{C}^-$  and continuous in  $\overline{\mathbb{C}^-}$ ; moreover,*

$$\Psi_1^{(2)}(x, t, k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{k}\right) \text{ and } \Psi_2^{(1)}(x, t, k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{k}\right), k \rightarrow \infty$$

for  $k \in \mathbb{C}^-$ .



3. The functions  $\Phi_j(x, t, k)$ ,  $j = 1, 2$  defined by

$$\Phi_j(x, t, k) = \Psi_j(x, t, k)e^{-(ikx+2ik^2t)\sigma_3}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad j = 1, 2, \quad (10)$$

are the Jost solutions of the Lax pair equations (4) satisfying the boundary conditions

$$\Phi_1(x, t, k) \rightarrow \Phi_-(x, t, k), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (11a)$$

$$\Phi_2(x, t, k) \rightarrow \Phi_+(x, t, k), \quad x \rightarrow \infty. \quad (11b)$$

4.  $\det \Psi_j(x, t, k) = 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2$ .

5. The following symmetry relation holds:

$$\Lambda \overline{\Psi_1(-x, t, -k)} \Lambda^{-1} = \Psi_2(x, t, k), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (12)$$

where  $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

6. As  $k \rightarrow 0$ ,

$$\Psi_1^{(1)}(x, t, k) = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{pmatrix} + O(1), \quad (13a)$$

$$\Psi_1^{(2)}(x, t, k) = \frac{2i}{A} \begin{pmatrix} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{pmatrix} + O(k), \quad (13b)$$

$$\Psi_2^{(1)}(x, t, k) = -\frac{2i}{A} \begin{pmatrix} \overline{v_2(-x, t)} \\ \overline{v_1(-x, t)} \end{pmatrix} + O(k), \quad (13c)$$

$$\Psi_2^{(2)}(x, t, k) = -\frac{1}{k} \begin{pmatrix} \overline{v_2(-x, t)} \\ \overline{v_1(-x, t)} \end{pmatrix} + O(1), \quad (13d)$$

where  $v_j(x, t)$ ,  $j=1,2$  solve the following system of linear Volterra integral equations:

$$\begin{cases} v_1(x, t) = \int_{-\infty}^x q(y, t)v_2(y, t) dy, \\ v_2(x, t) = -i\frac{A}{2} - \int_{-\infty}^x \overline{q(-y, t)}v_1(y, t) dy. \end{cases} \quad (14)$$

*Proof.* Properties 1–5 follows directly from the construction (9) of  $\Psi_j$ . Particularly, property 5 follows from the corresponding symmetry of  $U$  and  $V$ . Now let us prove property 6. From (9) and the structure of singularity of  $N_{\pm}$  at  $k = 0$  it follows that, as  $k \rightarrow 0$ ,

$$\Psi_1^{(1)}(x, t, k) = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{pmatrix} + O(1), \quad \Psi_1^{(2)}(x, t, k) = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1(x, t) \\ \tilde{v}_2(x, t) \end{pmatrix} + O(k), \quad (15a)$$

$$\Psi_2^{(1)}(x, t, k) = \begin{pmatrix} \tilde{w}_1(x, t) \\ \tilde{w}_2(x, t) \end{pmatrix} + O(k), \quad \Psi_2^{(2)}(x, t, k) = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} w_1(x, t) \\ w_2(x, t) \end{pmatrix} + O(1). \quad (15b)$$

Then the symmetry relation (12) implies

$$\begin{pmatrix} w_1(x, t) \\ w_2(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{v_2(-x, t)} \\ -\overline{v_1(-x, t)} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \tilde{w}_1(x, t) \\ \tilde{w}_2(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\tilde{v}_2(-x, t)} \\ \overline{\tilde{v}_1(-x, t)} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Substituting (15) into (9) we conclude that  $v_j(x, t)$ ,  $j = 1, 2$  satisfy (14) whereas  $\tilde{v}_j(x, t)$ ,  $j = 1, 2$  solve the following system of equations

$$\begin{cases} \tilde{v}_1(x, t) = \int_{-\infty}^x q(y, t) \tilde{v}_2(y, t) dy, \\ \tilde{v}_2(x, t) = 1 - \int_{-\infty}^x \overline{q(-y, t)} \tilde{v}_1(y, t) dy. \end{cases} \quad (17)$$

Comparing this with (14) implies that

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_1(x, t) \\ \tilde{v}_2(x, t) \end{pmatrix} = \frac{2i}{A} \begin{pmatrix} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

### 3. Scattering matrix and spectral functions

Since  $\Phi_1(x, t, k)$  and  $\Phi_2(x, t, k)$  satisfy both equations in the Lax pair (4), the following dependence relation holds

$$\Phi_1(x, t, k) = \Phi_2(x, t, k)S(k), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (19)$$

or, in terms of  $\Psi_j$ ,

$$\Psi_1(x, t, k) = \Psi_2(x, t, k)e^{-(ikx+2ik^2t)\sigma_3} S(k)e^{(ikx+2ik^2t)\sigma_3}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (20)$$

where  $S(k)$  is called the scattering matrix. The symmetry relation (12) implies the same relation for the Jost solutions:

$$\Lambda \overline{\Phi_1(-x, t, -\bar{k})} \Lambda^{-1} = \Phi_2(x, t, k), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (21)$$

This implies that the scattering matrix  $S(k)$  can be written as follows (cf. [3, 10])

$$S(k) = \begin{pmatrix} a_1(k) & -\overline{b(-k)} \\ b(k) & a_2(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (22)$$

with some  $b(k)$ ,  $a_1(k)$ , and  $a_2(k)$ ; moreover,  $a_1(k)$ , and  $a_2(k)$  are well defined in respectively  $\mathbb{C}^+ \setminus \{0\}$  and  $\mathbb{C}^- \setminus \{0\}$ , where they satisfy the symmetry relations

$$\overline{a_1(-\bar{k})} = a_1(k), \quad \overline{a_2(-\bar{k})} = a_2(k). \quad (23)$$

The scattering matrix  $S(k)$  is uniquely determined by the initial data  $q_0(x)$ . Indeed, introducing the notations  $\psi_1(x, k) = (\Psi_1)_{11}(x, 0, k)$ ,  $\psi_2(x, k) = (\Psi_1)_{12}(x, 0, k)$ ,  $\psi_3(x, k) = (\Psi_1)_{21}(x, 0, k)$  and  $\psi_4(x, k) = (\Psi_1)_{22}(x, 0, k)$ , equations (9a) reduce to the systems of Volterra integral equations for  $\psi_1$ ,  $\psi_3$  and  $\psi_2$ ,  $\psi_4$  respectively:

$$\begin{cases} \psi_1(x, k) = 1 + \int_{-\infty}^x q_0(y) \psi_3(y, k) dy, \\ \psi_3(x, k) = \frac{A}{2ik} + \int_{-\infty}^x e^{2ik(x-y)} \left( A - \overline{q_0(-y)} \right) \psi_1(y, k) dy \\ \quad + \frac{A}{2ik} \int_{-\infty}^x q_0(y) (1 - e^{2ik(x-y)}) \psi_3(y, k) dy. \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \psi_2(x, k) = \int_{-\infty}^x e^{-2ik(x-y)} q_0(y) \psi_4(y, k) dy, \\ \psi_4(x, k) = 1 + \int_{-\infty}^x \left( A - \overline{q_0(-y)} \right) \psi_2(y, k) dy \\ \quad + \frac{A}{2ik} \int_{-\infty}^x q_0(y) (e^{-2ik(x-y)} - 1) \psi_4(y, k) dy. \end{cases} \quad (25)$$

Having these equations solved, the entries of  $S(k)$  are given by

$$a_1(k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \psi_1(x, k) - \frac{A}{2ik} \psi_3(x, k) \right), \quad (26a)$$

$$b(k) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2ikx} \psi_3(x, k), \quad (26b)$$

$$a_2(k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \psi_4(x, k). \quad (26c)$$

Alternatively, the spectral functions (the entries of the scattering matrix) can be written in terms of the determinant relations:

$$a_1(k) = \det \left( \Psi_1^{(1)}(0, 0, k), \Psi_2^{(2)}(0, 0, k) \right), \quad k \in \mathbb{C}^+, \quad (27a)$$

$$a_2(k) = \det \left( \Psi_2^{(1)}(0, 0, k), \Psi_1^{(2)}(0, 0, k) \right), \quad k \in \mathbb{C}^-, \quad (27b)$$

$$b(k) = \det \left( \Psi_2^{(1)}(0, 0, k), \Psi_1^{(1)}(0, 0, k) \right), \quad k \in \mathbb{R}. \quad (27c)$$

The properties of the spectral functions, which follow from Proposition 1, are summarized in

**Proposition 2** *The spectral functions  $a_j(k)$ ,  $j=1,2$ , and  $b(k)$  have the following properties*

1.  $a_1(k)$  is analytic in  $k \in \mathbb{C}^+$  and continuous in  $\overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}$ ;  $a_2(k)$  is analytic in  $k \in \mathbb{C}^-$  and continuous in  $\overline{\mathbb{C}^-}$ .
2.  $a_j(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right)$ ,  $j = 1, 2$  and  $b(k) = O\left(\frac{1}{k}\right)$  as  $k \rightarrow \infty$  (the latter holds for  $k \in \mathbb{R}$ ).
3.  $\overline{a_1(-\bar{k})} = a_1(k)$ ,  $k \in \overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}$ ;  $\overline{a_2(-\bar{k})} = a_2(k)$ ,  $k \in \overline{\mathbb{C}^-}$ .
4.  $a_1(k)a_2(k) + b(k)\overline{b(-\bar{k})} = 1$ ,  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (follows from  $\det S(k) = 1$ ).
5. As  $k \rightarrow 0$ ,  $a_1(k) = \frac{A^2 a_2(0)}{4k^2} + O\left(\frac{1}{k}\right)$  and  $b(k) = \frac{A a_2(0)}{2ik} + O(1)$ .

**Remark 1.** Concerning the last item of Proposition 2, we notice that substituting (13) into (26) yields, as  $k \rightarrow 0$ ,

$$a_1(k) = \frac{1}{k^2} (|v_2(0, 0)|^2 - |v_1(0, 0)|^2) + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad (28a)$$

$$a_2(k) = \frac{4}{A^2} (|v_2(0, 0)|^2 - |v_1(0, 0)|^2) + O(k), \quad (28b)$$

$$b(k) = -\frac{2i}{kA} (|v_2(0, 0)|^2 - |v_1(0, 0)|^2) + O(1), \quad (28c)$$

from which item 5 follows. Since (27) holds for any  $(x, t)$ , the “conservation law” holds for the Jost solutions:

$$v_2(x, t)\bar{v}_2(-x, t) - v_1(x, t)\bar{v}_1(-x, t) = \text{const.}$$

**Remark 2.** In the case of the pure-step initial data:

$$q_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ A, & x > 0 \end{cases} \quad (29)$$

the scattering matrix  $S(k)$  is as follows:

$$S(k) = [\Phi_2(0, 0, k)]^{-1}\Phi_1(0, 0, k) = N_+^{-1}(k)N_-(k) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{A^2}{4k^2} & -\frac{A}{2ik} \\ \frac{A}{2ik} & 1 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

#### 4. The basic Riemann-Hilbert problem

The Riemann–Hilbert formalism of the IST is based on constructing (using the Jost solutions) a piece-wise meromorphic,  $2 \times 2$ -valued function in the  $k$ -complex plane, whose “lack of analyticity”, i.e., the jump across a contour and, if appropriate, some conditions at singular points, can be fully characterized in terms of the spectral data (spectral functions and a discrete set of data related to the poles) uniquely determined by the initial data.

Define the  $2 \times 2$ -valued function  $M(x, t, k)$ , piece-wise meromorphic relative to  $\mathbb{R}$ , as follows:

$$M(x, t, k) = \begin{cases} \left( \frac{\Psi_1^{(1)}(x, t, k)}{a_1(k)}, \Psi_2^{(2)}(x, t, k) \right), & k \in \mathbb{C}^+ \setminus \{0\}, \\ \left( \Psi_2^{(1)}(x, t, k), \frac{\Psi_1^{(2)}(x, t, k)}{a_2(k)} \right), & k \in \mathbb{C}^- \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (31)$$

Then the scattering relation (20) implies that the boundary values  $M_{\pm}(x, t, k) = \lim_{k' \rightarrow k, k' \in \mathbb{C}^{\pm}} M(x, t, k')$ ,  $k \in \mathbb{R}$  satisfy the multiplicative jump condition

$$M_+(x, t, k) = M_-(x, t, k)J(x, t, k), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (32)$$

where

$$J(x, t, k) = \begin{pmatrix} 1 + r_1(k)r_2(k) & r_2(k)e^{-2ikx-4ik^2t} \\ r_1(k)e^{2ikx+4ik^2t} & 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

with the reflection coefficients defined by

$$r_1(k) := \frac{b(k)}{a_1(k)}, \quad r_2(k) := \frac{\overline{b(-k)}}{a_2(k)}. \quad (34)$$

Moreover, we have the normalization

$$M(x, t, k) \rightarrow I, \quad k \rightarrow \infty, \quad (35)$$

where  $I$  is the  $2 \times 2$  identity matrix.

Observe that the symmetry conditions 3 (see Proposition 2) imply that

$$r_1(-k)r_2(-k) = \overline{r_1(k)} \overline{r_2(k)}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (36)$$

By the determinant property 4 in Proposition 2, we also have

$$1 + r_1(k)r_2(k) = \frac{1}{a_1(k)a_2(k)}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (37)$$

Now notice that in view of (28), the behavior of  $M$  as  $k \rightarrow 0$  depends qualitatively on whether  $a_2(0) \neq 0$  or  $a_2(0) = 0$ . The former case, which is generic, contains the case of “pure-step initial data”, where  $a_1(k)$  has (in  $\mathbb{C}^+$ ) a single, simple zero located on the imaginary axis, and  $a_2(k)$  has no zeros in  $\mathbb{C}^-$ . Since small (in the  $L_1$  sense) perturbations of the pure-step initial data preserve these properties, this motivates us to concentrate, in the present paper, on the following two cases:

**Generic case:** The spectral function  $a_1(k)$  has one simple zero in  $\overline{\mathbb{C}^+}$ , say  $k = ik_1$ ,  $k_1 > 0$ ;  $a_2(k)$  has no zeros in  $\overline{\mathbb{C}^-}$ .

**Non-generic case:** The spectral function  $a_1(k)$  has one simple zero in  $\overline{\mathbb{C}^+}$ , say  $k = ik_1$ ,  $k_1 > 0$ ;  $a_2(k)$  has one simple zero in  $\overline{\mathbb{C}^-}$  at  $k = 0$  (and thus  $\dot{a}_2(0) \neq 0$ ). Moreover, we assume that  $\lim_{k \rightarrow 0} ka_1(k) \neq 0$ .

**Remark 3.** From the symmetry relations (23) it follows that  $a_{11} := \lim_{k \rightarrow 0} ka_1(k)$  is purely imaginary. Moreover, if  $a_1(k)$  has one simple zero, then  $\Im a_{11} < 0$  in the non-generic case.

Taking into account the singularities of  $\Psi_j(x, t, k)$ ,  $j = 1, 2$  and  $a_1(k)$  at  $k = 0$  (see Proposition 1), the behavior of  $M(x, t, k)$  at  $k = 0$  can be described as follows: in the *generic case*,

$$M_+(x, t, k) = \begin{pmatrix} \frac{4}{A^2 a_2(0)} v_1(x, t) & -\overline{v_2}(-x, t) \\ \frac{4}{A^2 a_2(0)} v_2(x, t) & -\overline{v_1}(-x, t) \end{pmatrix} (I + O(k)) \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}, \quad k \rightarrow +i0, \quad (38a)$$

$$M_-(x, t, k) = \frac{2i}{A} \begin{pmatrix} -\overline{v_2}(-x, t) & \frac{v_1(x, t)}{a_2(0)} \\ -\overline{v_1}(-x, t) & \frac{v_2(x, t)}{a_2(0)} \end{pmatrix} + O(k), \quad k \rightarrow -i0, \quad (38b)$$

and in the *non-generic case*,

$$M_+(x, t, k) = \begin{pmatrix} \frac{v_1(x, t)}{a_{11}} & -\overline{v_2}(-x, t) \\ \frac{v_2(x, t)}{a_{11}} & -\overline{v_1}(-x, t) \end{pmatrix} (I + O(k)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}, \quad k \rightarrow +i0, \quad (39a)$$

$$M_-(x, t, k) = \frac{2i}{A} \begin{pmatrix} -\overline{v_2}(-x, t) & \frac{v_1(x, t)}{\dot{a}_2(0)} \\ -\overline{v_1}(-x, t) & \frac{v_2(x, t)}{\dot{a}_2(0)} \end{pmatrix} (I + O(k)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}, \quad k \rightarrow -i0 \quad (39b)$$

(recall that  $a_{11}$  is determined by  $a_1(k) = \frac{a_{11}}{k} + O(1)$  as  $k \rightarrow 0$ ).

Additionally, if  $a_1(ik_1) = 0$  (simple zero) with  $k_1 > 0$ , then  $M(x, t, k)$  satisfies the residue condition

$$\operatorname{Res}_{k=ik_1} M^{(1)}(x, t, k) = \frac{\gamma_1}{\dot{a}_1(ik_1)} e^{-2k_1 x - 4ik_1^2 t} M^{(2)}(x, t, ik_1), \quad |\gamma_1| = 1, \quad (40)$$

where

$$\Psi_1^{(1)}(0, 0, ik_1) = \gamma_1 \Psi_2^{(2)}(0, 0, ik_1). \quad (41)$$

Notice that the symmetry relation (12) yields  $\overline{\Psi}_1^{(1)}(0, 0, ik_1) = \gamma_1^{-1} \overline{\Psi}_2^{(2)}(0, 0, ik_1)$  and thus  $|\gamma_1| = 1$  (cf. [3]).

Now we summarize the results of the analysis above in the representation Theorem that gives the solution of the Cauchy problem (1), (3) in terms of the solution of the associated Riemann-Hilbert problem.

**Theorem 1** *Let  $q_0(x)$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$  be given such that*

$$\int_{-\infty}^0 |q_0(x)| dx + \int_0^{\infty} |q_0(x) - A| dx < \infty.$$

*Let  $a_1(k)$ ,  $a_2(k)$ , and  $b(k)$  be constructed according to (24)–(26). Assume that (i)  $a_1(k)$  has a single, simple, pure imaginary zero  $k_1$  in  $\overline{\mathbb{C}^+}$ ; (ii)  $a_2(k)$  has no zeros in  $\overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}$  and, if  $a_2(0) = 0$ , then 0 is the simple zero of  $a_2(k)$ ; (iii)  $\lim_{k \rightarrow 0} (ka_1(k)) \neq 0$ . Determine  $\gamma_1$  according to (41).*

*Consider the following Riemann-Hilbert problem: find the  $2 \times 2$ -valued function  $M(x, t, k)$ , piece-wise meromorphic in  $k$  relative to  $\mathbb{R}$  and satisfying the following conditions:*

(i) *Jump conditions. The boundary values  $M_{\pm}(x, t, k) = M(x, t, k \pm i0)$ ,  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  satisfy the condition*

$$M_+(x, t, k) = M_-(x, t, k) J(x, t, k), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (42)$$

*where the jump matrix  $J(x, t, k)$  is given by (33), with  $r_1$  and  $r_2$  given by (34).*

(ii) *Normalization at  $k = \infty$ :*

$$M(x, t, k) = I + O(k^{-1}), \quad k \rightarrow \infty.$$

(iii) *Residue condition (40).*

(iv) *Structural conditions at  $k = 0$ :  $M(x, t, k)$  satisfies (38) (generic case:  $a_2(0) \neq 0$ ) or (39) (non-generic case:  $a_2(0) = 0$ ), where  $v_j(x, t)$ ,  $j = 1, 2$  are some (not prescribed) functions.*

Assume that the RH problem (i)–(iv) has a solution  $M(x, t, k)$ . Then the solution of the Cauchy problem (1), (3) is given in terms of the (12) and (21) entries of  $M(x, t, k)$  as follows:

$$q(x, t) = 2i \lim_{k \rightarrow \infty} k M_{12}(x, t, k), \quad (43)$$

and

$$q(-x, t) = -2i \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{k M_{21}(x, t, k)}. \quad (44)$$

The solution of the RH problem is unique, if exists. Indeed, if  $M$  and  $\tilde{M}$  are two solutions, then conditions (38) or (39) provide the boundedness of  $M(k)\tilde{M}^{-1}(k)$  at  $k = 0$ . Moreover,  $M(k)\tilde{M}^{-1}(k)$  has no jump across  $\mathbb{R}$  and  $M(k)\tilde{M}^{-1}(k) \rightarrow I$  as  $k \rightarrow \infty$ , which allows to deduce, using the Liouville theorem, that  $M(k)\tilde{M}^{-1}(k) \equiv I$ .

**Remark 4.** From (43) and (44) it follows that in order to present the solution of (1), (3) for all  $x \in \mathbb{R}$ , it is sufficient to have the solution of the RH problem for, say,  $x \geq 0$  only.

**Proposition 3** *The solution  $M$  of the Riemann–Hilbert problem (i)–(iv) satisfies the following symmetry condition (cf. (21)):*

$$M(x, t, k) = \begin{cases} \overline{\Lambda M(-x, t, -\bar{k})} \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1(k)} & 0 \\ 0 & a_1(k) \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{C}^+ \setminus \{0\}, \\ \overline{\Lambda M(-x, t, -\bar{k})} \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} a_2(k) & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2(k)} \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{C}^- \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (45)$$

*Proof.* Follows from the symmetry of the jump matrix (33) in (42)

$$\overline{\Lambda J(-x, t, -\bar{k})} \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} a_2(k) & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2(k)} \end{pmatrix} J(x, t, k) \begin{pmatrix} a_1(k) & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_1(k)} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(which, in turns, follows from (36) and (37)), and the fact that the structural conditions (38) and (39) and the residue condition (40) are consistent with (45).

## REFERENCES

1. M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur, The Inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for Nonlinear Problems, Stud. Appl. Math., – 1974. – **53**. – P. 249–315.
2. M. J. Ablowitz and Z. H. Musslimani, Integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation, Phys. Rev. Lett., – 2013. – **110**. – P. 064105-1–064105-5.

3. M. J. Ablowitz and Z. H. Musslimani, Inverse scattering transform for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation, *Nonlinearity*. – 2016. – **29**. – P. 915–946.
4. C. M. Bender and S. Boettcher, Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having P-T symmetry, *Phys. Rev. Lett.*, – 1998. – **80**. – P. 5243–5246.
5. R. F. Bikbaev, Diffraction in Nonlinear Defocusing Medium, *Zapiski Nauch. Semin. LOMI*. – 1989. – **179**. – P. 23–31.
6. A. Boutet de Monvel, V. P. Kotlyarov and D. Shepelsky, Focusing NLS Equation: Long-Time Dynamics of Step-Like Initial Data, *International Mathematics Research Notices*. – 2011. – **7**. – P. 1613–1653.
7. P. A. Deift, A. R. Its and X. Zhou, Long-time asymptotics for integrable nonlinear wave equations, *Important developments in Soliton Theory 1980-1990*, edited by A. S. Fokas and V. E. Zakharov, New York: Springer. – 1993. – P. 181–204.
8. P. A. Deift and X. Zhou, A steepest descend method for oscillatory Riemann–Hilbert problems. Asymptotics for the MKdV equation, *Ann. Math.* – 1993. – **137**. – P. 295–368.
9. T. Gadzhimuradov and A. Agalarov, Towards a gauge-equivalent magnetic structure of the nonlocal nonlinear Schrödinger equation, *Phys. Rev. A*. – 2016. – **93**. – P. 062124-1–062124-6.
10. Ya. Rybalko, D. Shepelsky, Long-time asymptotics for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation, *arXiv:1710.07961*, 18 Apr 2018.
11. A. Sarma, M. Miri, Z. Musslimani, D. Christodoulides, Continuous and discrete Schrödinger systems with parity-time-symmetric nonlinearities, *Physical Review E*. – 2014. – **89**. – P. 052918-1–052918-7

Рибалко Я., Шепельський Д. **Метод задачі Рімана-Гільберта для інтегровного нелокального нелінійного рівняння Шредінгера з початковими даними типу сходінки**. Досліджується задача Коші для інтегровного нелокального нелінійного рівняння Шредінгера (ННШ)

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2q^2(x, t)\bar{q}(-x, t) = 0$$

з початковими даними типу сходінки: припускається, що початкова функція  $q(x, 0)$  є такою, що  $q(x, 0) = o(1)$ , коли  $x \rightarrow -\infty$ , та  $q(x, 0) = A + o(1)$ , коли  $x \rightarrow \infty$ , де  $A > 0$  – довільний (фіксований) параметр, що відповідає ненульовому фону сходінки. Починаючи з 2013 року, коли рівняння ННШ було запропоновано як інтегровна модель, воно привертає значну увагу дослідників (як математиків, так і фізиків) у зв'язку з тим, що рівняння ННШ є симетричним у сенсі «парність-час»: воно інваріантне відносно спільного перетворення  $x \rightarrow -x, t \rightarrow -t$ , та комплексного спряження.



Зокрема, рівняння ННШ є калібрувально-еквівалентним до системи пов'язаних рівнянь Ландау-Ліфшиця та, відповідно, може знайти застосування у фізиці штучних наномагнітних матеріалів.

Для дослідження задачі Коші для рівняння ННШ, автори розробляють варіант методу оберненої задачі розсіяння у формі методу задачі Рімана-Гільберта. Метод базується на використанні розв'язків Йоста (у тому числі, на ненульовому фоні) для рівнянь відповідної пари Лакса та детальному аналізу їх аналітичних властивостей. У результаті отримано зображення для розв'язку вихідної задачі у термінах розв'язків відповідної задачі аналітичної факторизації типу Рімана-Гільберта. Це зображення має цілий ряд відмінностей від відповідного зображення у випадку класичного (локального) нелінійного рівняння Шредінгера. Зокрема, це стосується сингулярної поведінки у околі нуля спектрального параметра, особливістю якої є те, що ця сингулярність локалізована на контурі спряження для задачі Рімана-Гільберта. Отримане зображення може бути ефективно використано для подальшого дослідження властивостей розв'язків задачі Коші, зокрема, дослідження його асимптотичної поведінки за великим часом.

*Ключові слова:* нелокальне нелінійне рівняння Шредінгера, метод оберненої задачі розсіяння, розв'язки Йоста, задача Рімана-Гільберта.

Article history: Received: 26 October 2018;

Accepted: 29 November 2018.

## Diffraction of the field of vertical electric dipole on the spiral conductive sphere in the presence of a cone

V. A. Rezunenکو

*V. N. Karazin Kharkiv National University,  
4, Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine  
varezunenکو@yahoo.com*

The problem of diffraction of a vertical electric dipole field on a spiral conductive sphere and a cone has been solved. By the method of regularization of the matrix operator of the problem, an infinite system of linear algebraic equations of the second kind with a compact matrix operator in Hilbert space  $\ell_2$  is obtained. Some limiting variants of the problem statement are considered.

*Keywords:* spiral conductive sphere; cone; vertical electric dipole; regularization method; system of equations of the second kind.

Резуненко В. О. **Дифракція поля вертикального електричного диполя на спіральній провідній сфері в присутності конуса.** Розв'язана задача дифракції поля вертикального електричного диполя на спіральній провідній сфері у присутності конуса. Методом регуляризації матричного оператора задачі отримано нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду з компактним матричним оператором у гільбертовому просторі  $\ell_2$ . Розглянуто деякі граничні варіанти постановки задачі.

*Ключові слова:* спіральна провідна сфера; конус; вертикальний електричний диполь; метод регуляризації; система рівнянь другого роду.

Резуненко В. А. **Дифракция поля вертикального электрического диполя на спирально проводящей сфере в присутствии конуса.** Решена задача дифракции поля вертикального электрического диполя на спирально проводящей сфере в присутствии конуса. Методом регуляризации матричного оператора задачи получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений второго рода с компактным матричным оператором в гильбертовом пространстве  $\ell_2$ . Рассмотрены некоторые предельные варианты постановки задачи.

*Ключевые слова:* спирально проводящая сфера; конус; вертикальный электрический диполь; метод регуляризации; система уравнений 2-го рода.

*2010 Mathematics Subject Classification:* 78A40; 78A45; 35A22; 97N42.

### 1. Introduction

There is an interest to the problems of diffraction, electrodynamics, antenna techniques, optics, electrostatics, acoustics and other tasks on the sphere and on the cone. Different cases are considered: one sphere and one cone; two-three

spheres and two-three cones; chains of hundreds of spheres and several cones nested into each other [1, 2, 3]. Increased attention to tasks on such surfaces and other resonance structures [4] has at least two reasons: 1) increased practical requirements for reducing the size of devices using parts of spheres and cones; 2) the emergence of new materials with new physical properties, for example, spiral conductive surfaces, nanomaterials, impedance structures. Such requests of practice lead to the need to reformulate standard problem statements, to create mathematical models of the studied processes, to create new numerical-analytical methods for solving new theoretical and applied problems. Among the numerical-analytical methods for solving a wide range of problems, an important role is played by the regularization method of the matrix or integral operator of the problem [5, 6]. In this paper, based on a variant of the regularization method of the matrix operator of the problem [2]-[6], [11, 12], [14]-[18], we construct a numerical-analytical algorithm for solving the problem of diffraction of a vertical electric dipole field on a spiral conductive sphere in the presence of an ideally conductive cone. An efficiently solvable infinite system of linear algebraic equations of the second kind with a compact operator is obtained [3]. Some limiting variants of the problem statement are considered.

## 2. Formulation of the problem

We place the origin of the Cartesian  $(x, y, z)$  and spherical  $(r, \theta, \varphi)$  coordinate systems in the centre of a spiral conductive hollow sphere of radius  $a$  [3]. The top of an ideally conductive cone is in the center of the sphere, and the axis of the cone coincides with the negative semi-axis of the axis  $0z$ . The opening angle of the cone is counted from the positive semi-axis of the axis  $0z$  and is assumed to be equal  $\gamma$ ,  $\gamma \in (0, \pi)$ . The cone is the ideally conductive. We isolate the cone and the sphere by a non-conductive infinitely thin and infinitely narrow tape. We place a vertical electric dipole at the point  $(0, 0, b)$ ,  $a < b$ . The moment  $\vec{P}$  of the dipole is oriented along the axis  $0z$  and  $|\vec{P}| = 1$ . The dipole field creates, in particular, secondary fields outside of the sphere and inside of the sphere, and also creates electric currents on the surfaces of the sphere and the cone. The time dependence of the dipole field and secondary fields is assumed to be harmonic with the frequency  $\omega = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  is the wavelength of the dipole field. The electric currents, arising on the surface of the sphere under the influence of its spiral conductivity, change the standard direction along the meridians. Currents can pass on the surface of the sphere only along lines directed at an angle  $0 \leq \beta < \pi/2$  to the meridians. For an observer located at the pole of the sphere, this direction corresponds to the movement of the currents clockwise at an angle  $\beta$  to meridians. The sphere, the cone, and the currents on the sphere are axisymmetric. In this paper, we consider two independent variants of current movement along the surface of a sphere [3]. The first variant corresponds to the movement of currents at an angle  $(+\beta)$  to the meridians on the sphere, and the second one corresponds to the movement of currents at an angle  $(-\beta)$  to the meridians on the sphere [3]. Consider briefly the formulation of the problem [3]. We will use the method of partial domains. Full

fields inside of a sphere and secondary fields outside of a sphere should be solutions to the Maxwell's equations, satisfy material equations, satisfy radiation conditions at infinity, have bounded energy in any restricted volume of space, including the top of the cone, and have the required feature at the dipole placement point. The boundary conditions on the surface of the sphere  $r = a, \theta \in [0, \gamma), \varphi \in [0, 2\pi]$  are as follows [3], [7]-[12]. The tangential components of the total magnetic fields  $H_\varphi, H_\theta$  and the tangential components  $E_\varphi, E_\theta$  of the full electric fields are related, in particular, by means of a multiplier like  $\text{tg}(\pm\beta)$

$$\left(H_\varphi^{(2)} + H_\varphi^{(0)} - H_\varphi^{(1)}\right) \text{tg}(\pm\beta) + \left(H_\theta^{(2)} - H_\theta^{(1)}\right) = 0, \quad (1)$$

$$E_\theta^{(1)} + E_\varphi^{(1)} \text{tg}(\pm\beta) = 0, \quad E_\theta^{(1)} = E_\theta^{(0)} + E_\theta^{(2)}, \quad E_\varphi^{(2)} = E_\varphi^{(1)}, \quad (2)$$

The boundary conditions on the surface of the cone are set as follows: the vector products of the complete electromagnetic fields and the external normal  $\vec{n}_1$  to the surface of the cone are zero

$$E^{(1)} \otimes \vec{n}_1 = 0, \quad r \in [0, a), \quad \theta = \gamma, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (3)$$

$$\left(E^{(2)} + E^{(0)}\right) \otimes \vec{n}_1 = 0, \quad r \in (a, \infty), \quad \theta = \gamma, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (4)$$

where in formulas (1)-(4) the superscripts of the electromagnetic field vectors refer to the source field, to the field inside the sphere,  $r < a$ , the field outside  $r > a$ , the sphere, respectively. In this formulation, problem (1)-(4) has a unique solution [13]. We note that in this work, on the basis of [3], [7]-[12] the boundary conditions on a spiral conductive sphere are refined. The continuity of the tangential components of the total electric field on a spiral conducting sphere is required. We also clarify the difference in representations and transformations of the Debye potentials for TM and TE waves and the differences in the corresponding Fourier series. We note that the introduction of additional boundary conditions naturally leads to the complication of the method for solving the problem and to obtaining new systems of algebraic equations of the second kind.

### 3. Fourier series for Debye scalar potentials

Since the time of Debye (near 1903), scalar and vector potentials have been used successfully to reduce the dimensionality of problems, in particular, problems of diffraction of electromagnetic waves, acoustics, and electrostatics. To solve these and other problems on the coordinate surfaces used, in particular, the method of separation of variables in 11 coordinate systems. The type of representation of potentials depends not only on the shape of the surface and the type of boundary conditions on the surface. The main ones are, in particular, the methods of direct and inverse integral transformations of differential equations for potentials, as well as the method of Green functions. Both methods are in most cases used in conjunction with the Fourier method of separation of variables. Thus, in [8]-[10], the method of integral transformations and the method of separation of Fourier

variables were among the first used to solve the problem of diffraction of a vertical electric dipole field on an ideally conductive cone. On the basis of [3], [7]-[10], we write in the spherical coordinate system the Fourier series for the Debye electric potential of the dipole field in the presence of an ideally conductive cone

$$U^{(0)} = \sum_{m=1}^{\infty} F_m^{(1)} M_m P_{\nu_m}(\cos \theta) \begin{cases} [\psi_{\nu_m}(kr) \xi_{\nu_m}(kb)] / (kr), & r < b, \\ [\xi_{\nu_m}(kr) \psi_{\nu_m}(kb)] / (kr), & r > b, \end{cases} \quad (5)$$

where

$$M_m = \left[ (kb)^3 \sin \gamma \frac{\partial}{\partial \nu} P_{\nu}(\cos \gamma) \Big|_{\nu=\nu_m} P_{\nu_m}^1(\cos \gamma) \right]^{-1}, \quad F_m^{(1)} = 2\nu_m + 1, \quad (6)$$

$\psi_{\nu_m}(kr)$ ,  $\xi_{\nu_m}(kb)$  are spherical Bessel functions of the first kind and, accordingly, Hankel of the third kind in the Debye notation,  $P_{\nu_m}(\cos \theta)$  – Legendre functions of the first kind of the  $\nu_m$  degree of the zero order of the argument  $\cos \theta$ ,  $P_{\nu_m}^1(\cos \gamma)$  – associated Legendre functions of the first kind of the  $\nu_m$  degree of the first order of the argument  $\cos \gamma$ . The spectral parameters  $\nu_m$  and new parameters  $\mu_n$  satisfy the transcendental equations  $P_{\nu_m}(\cos \gamma) = 0$  and  $P_{\mu_n}^1(\cos \gamma) = 0$ . The roots of these equations  $\nu_m$  (and  $\mu_n$ ) are simple and do not coincide for  $m, n \geq 1$ . The magnetic potential  $V^{(0)}$  of the dipole is zero by the definition.

We look for the secondary potentials in the form of Fourier series (5), (6)

$$U^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} F_m^{(1)} A_m P_{\nu_m}(\cos \theta) \psi_{\nu_m}(kr) / (kr), \quad r < a, \quad (7)$$

$$V^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(2)} B_n P_{\mu_n}(\cos \theta) \psi_{\mu_n}(kr) / (kr), \quad r < a, \quad (8)$$

$$U^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} F_m^{(1)} C_m P_{\nu_m}(\cos \theta) \xi_{\nu_m}(kr) / (kr), \quad r > a, \quad (9)$$

$$V^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(2)} D_n P_{\mu_n}(\cos \theta) \xi_{\mu_n}(kr) / (kr), \quad r > a, \quad (10)$$

where

$$F_n^{(2)} = 2\mu_n + 1, \quad n \geq 1. \quad (11)$$

#### 4. The system of four functional equations containing fractional degree Legendre functions

To find the coefficients  $A_m, B_n, C_m, D_n, m, n \geq 1$  of the Debye potentials (7) – (11), we construct a system of four functional equations. Note that the sequences of coefficients  $\{A_m\}, \{B_n\}, \{C_m\}, \{D_n\}, m, n \geq 1$  belong to Hilbert spaces with different weights. We first use the boundary conditions (1)-(4), perform linear

transformations to obtain a system of four functional equations which connect all desired coefficients. For example, the first two equations are as follows

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(2)} [D_n \xi_{\mu_n}^1(ka) - B_n \psi_{\mu_n}^1(ka)] P_{\mu_n}^1(\cos \theta) + (ika)(\operatorname{tg}(\pm\beta)) \\ & \times \sum_{m=1}^{\infty} F_m^{(1)} [C_m \xi_{\nu_m}(ka) - M_m \psi_{\nu_m}(ka) \xi_{\nu_m}(kb) - A_m \psi_{\nu_m}(ka)] P_{\nu_m}^1(\cos \theta) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

where  $\theta \in [0, \gamma]$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} B_n F_n^{(2)} \psi_{\mu_n}(ka) / \xi_{\mu_n}^1(ka) P_{\mu_n}(\cos \theta) \\ & + (ika)(\operatorname{tg}(\pm\beta)) \sum_{m=1}^{\infty} F_m^{(1)} [A_m \xi_{\nu_m}^1(ka) - M_m \xi_{\nu_m}^1(kb)] P_{\nu_m}^1(\cos \theta) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

where  $\theta \in [0, \gamma]$ . For functions  $\xi_{\mu_n}^1(ka), \psi_{\mu_n}^1(ka), \xi_{\nu_m}^1(ka), \xi_{\nu_m}^1(kb)$  the superscript 1 denotes the differentiation by argument  $ka$  or  $kb$ , respectively.

### 5. The system of linear algebraic equations of the second kind

The resulting system of four functional equations is a system of the first kind with respect to the coefficients being sought  $A_m, B_n, C_m, D_n, m, n \geq 1$  and it is ineffective for directly solving the problem. Note that in solving problems of electrodynamics, electrostatics, acoustics and other problems on a sphere with aperture, the use of an integral representation of the Abel type for the Legendre functions [11]-[12], [14]-[18] is recommended. In our case, for example, for equation (13), the Abel representation is ineffective. The resulting functional equations require, in particular, additional decomposition over new orthogonal classes of functions.

Indeed, we use the generalized integral representations of Abel type

$$P_{\nu_m}(\cos \theta) = \pi^{-1} \sqrt{2} \int_0^\theta (\cos \phi - \cos \theta)^{-0.5} \cos\left(\nu_m + \frac{1}{2}\right) \phi d\phi,$$

in (13) for the Legendre functions. Then we change the order of summation and integration in the functional equation using the uniform convergence of the series. We get an integral equation of Abel type with the kernel  $(\cos \phi - \cos \theta)^{-0.5}$ . Solving an integral equation using the inverse Abel transformation, we received a new functional equation in the form of series containing functions  $\cos\left(\nu_m + \frac{1}{2}\right) \phi, \cos\left(\mu_n + \frac{1}{2}\right) \phi, m, n \geq 1$ . These functions are not orthogonal in the space  $L_2(0, \gamma)$ . The Fourier series of these functions must be redeveloped in the corresponding functional space. Let us transform system (12), (13) and the remaining two functional equations into a system of algebraic equations of the second kind as follows. First, we apply the discrete Fourier transform to each

functional equation, taking into account, in particular, the orthogonality of the associated Legendre functions  $P_{\mu_n}^1(\cos \theta)$  with weight  $\sin \theta$  [8]–[10]

$$N_{n,n}^{(2)} = \int_0^\gamma (P_{\mu_n}^1(\cos \theta))^2 \sin \theta d\theta = -\frac{\mu_n(\mu_n + 1)}{2\mu_n + 1} \sin \gamma P_{\mu_n}^1(\cos \gamma) \frac{\partial}{\partial \mu} P_\mu^1(\cos \gamma) \Big|_{\mu=\mu_n}, \quad (14)$$

$$N_{m,n}^{(2)} = 0, \quad m \neq n, \quad m, n \geq 1. \quad (15)$$

The resulting auxiliary system of four linear equations includes, for example, the equation

$$N_{n,n}^{(2)} F_n^{(2)} [D_n \xi_{\mu_n}^1(ka) - B_n \psi_{\mu_n}^1(ka)] = -(ika) \operatorname{tg}(\pm\beta) \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} F_m^{(1)} [C_m \xi_{\nu_m}(ka) - M_m \psi_{\nu_m}(ka) \xi_{\nu_m}(kb) - A_m \psi_{\nu_m}(ka)] J_{n,m}, \quad (16)$$

where

$$J_{n,m} = \frac{\mu_n(\mu_n + 1)}{(\mu_n - \nu_m)(\nu_m + \mu_n + 1)} \sin \gamma P_{\mu_n}(\cos \gamma) P_{\nu_m}^1(\cos \gamma). \quad (17)$$

Let us return to the system of four functional equations, including (12), (13) and (14)–(17). Based on it, to find coefficients  $B_n, n \geq 1$ , for potential (8), we construct a system of linear equations of the second kind. For this, we first exclude the coefficients  $A_n, C_m, D_n, m, n \geq 1$ , from the auxiliary system. In this case, we solve the auxiliary system, use the equality for Wronski determinants  $W(\psi_{\nu_m}(ka), \xi_{\nu_m}(ka)) = W(\psi_{\mu_n}(ka), \xi_{\mu_n}(ka)), m, n \geq 1$  and perform some linear transformations. So, in the auxiliary double sum, using uniform convergence of the series, we change the order of summation and get

$$\sum_{m=1}^{\infty} T_m J_{n,m} \sum_{k=1}^{\infty} B_k R_k J_{k,m} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k R_k \sum_{m=1}^{\infty} J_{k,m} T_m J_{n,m}$$

With these operations, we separate and inverse the main part of the matrix operator of the problem. As a result, we obtained an infinite system of linear algebraic equations of the second kind (ISLAE-II)

$$B_n = -[(ka) \operatorname{tg}(\pm\beta)]^2 \sum_{s=1}^{\infty} B_s \varepsilon_{s,n} - [(ika) \operatorname{tg}(\pm\beta)] \sum_{m=1}^{\infty} F_m^{(3)} J_{n,m}, \quad (18)$$

where

$$\varepsilon_{s,n} = \left[ F_s^{(2)} / F_n^{(1)} \right] \psi_{\mu_s}^1(ka) \xi_{\mu_n}(ka) \left[ 1 / N_{n,n}^{(2)} \right] \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \left[ N_{m,m}^{(1)} \psi_{\nu_m}^1(ka) \xi_{\nu_m}^1(ka) \right]^{-1} J_{s,m} J_{m,n}, \\ F_m^{(3)} = \frac{F_m^{(1)}}{F_m^{(2)}} M_m \frac{\xi_{\mu_n}(kb) \xi_{\mu_n}(ka)}{\xi_{\nu_m}^1(ka)} \frac{1}{N_{n,n}^{(2)}}, \quad m, n \geq 1.$$

$$N_{m,m}^{(1)} = \frac{\nu_m(\nu_m + 1)}{2\nu_m + 1} \sin \gamma P_{\nu_m}^1(\cos \gamma) \frac{\partial}{\partial \nu} P_{\nu}^1(\cos \gamma) \Big|_{\nu=\nu_m}.$$

In the matrix elements  $\varepsilon_{s,n}$  and in the second series of the system (18), the convergence is uniform on the set  $ka \in (0, \infty)$ ,  $ka < kb$ ,  $\beta \in [0, \pi/2)$  and  $\gamma \in (0, \pi)$ . As a result, ISLAE-II with a compact operator  $M^{(1)}$  in space  $\ell_2$  and a right-hand  $B^{(1)}$  column in  $\ell_2$  are obtained [19]

$$B = M^{(1)}B + B^{(1)}, \tag{19}$$

where  $B = (B_1, B_2, B_3, \dots, B_n, \dots)^T$  is the vector of magnetic potential coefficients sought (8), where the superscript  $T$  denotes the transposition of the row into a column,  $M^{(1)} = \left\{ -(ka)^2(\text{tg}^2(\pm\beta)) \times \varepsilon_{s,n} \right\}_{s,n=1}^{\infty}$  is the system matrix,  $B^{(1)} = (B_1, B_2, B_3, \dots, B_n, \dots)^T = \left( \left\{ -(ika)(\text{tg}(\pm\beta)) \times \sum_{m=1}^{\infty} F_m^{(3)} J_{n,m} \right\}_{n=1}^{\infty} \right)^T$  – right column of the system.

## 6. Conclusions

1. System (19) is effectively solvable analytically and numerically in Hilbert space  $\ell_2$ . At small angles  $\gamma$ , ( $0 < \gamma \ll 1$ ), (and large angles  $\gamma$ , ( $0 \ll \gamma < \pi$ ), the system is analytically solvable for any values  $0 < ka < kb$ .

2. To find the coefficients  $A_m, m \geq 1$  and potential  $U^{(1)}$  (7), it is necessary to build a new ISLAE-II. At the same time, to obtain an ISLAE-II, we use the same regularization method for the matrix operator of the diffraction problem, as in deducing the system (19). In this case to find the coefficients  $C_m, D_n, m, n \geq 1$  and potentials (9) and (10), we use linear transformation of variables.

3. Let us discuss the limiting case of the problem statement, when the sphere loses its spiral conductivity and becomes ideally conducting ( $\beta \rightarrow 0$ ). In this case [2, 3], the problem of diffraction of a dipole field on such a sphere in the presence of a cone, the desired coefficients of the Fourier series of Debye potentials (8)-(10) can be found explicitly. So, when  $\beta = 0$  we find the solution to the system (18) and we get the explicit value of the coefficients  $B_n : B_n = 0, n \geq 1$ . Also we obtain the explicit values of the limiting components of the diffracted field.

4. In another limiting case, when the sphere is absent ( $ka = 0$ ), the components of the desired fields of diffraction of a dipole field on a cone are known and are calculated explicitly from a given dipole potential  $U^{(0)}$  (5), (6).

5. The parametric equations  $x = \sin(\pm\eta) \times \cos(\pm 14\eta)$ ,  $y = \sin(\pm\eta) \times \sin(\pm 14\eta)$ ,  $z = 1 + \cos(\pm\eta)$ ,  $\eta \in [0, \pi/2)$  are refined for two variants of the movement of currents along the surface of a spiral conductive sphere corresponding to fixed angles  $\pm\beta_0$  to the meridians on the sphere.

6. The approach developed in this paper is applicable, for example, to the problem of diffraction of a dipole field on a spiral conductive sphere, which has a circular hole between a sphere and a cone, as well as for other applied problems.



## REFERENCES

1. H. Nakano, T. Shimizu, H. Kataoka, J. Yamauchi. Circularly and linearly polarized waves from a metamaterial spiral antenna. International Symposium AP and USNC-URSI RSM. – 2014 – July 6-11. – P. 226.2.
2. D.B. Kyruliak, Z.T. Nazarchuk, O.B. Trishchuk. Axially-symmetrical TM – waves diffraction by sphere-cone cavity. Progress in electromagnetics research. B. – 2017. –Vol. 73.– P. 1-17.
3. V.A. Rezunenko. The scattering of the vertical electric dipole field by a spiral conductive sphere with a load. Materials of the 18th International Scientific Conference Named After Academic of Mikhail Kravchuk. 7-10 October 2017, Lutsk-Kyiv. - V. 1. – P.126-129, (in Russian).
4. V.F. Kravchenko, Yu.K. Sirenko, K.Yu. Sirenko. Electromagnetic waves transformation and radiation by the open resonant structures. Modeling and analysis of transient and steady-state processes. - M. – Physmatlit. – 2011. – 320p, (in Russian).
5. Z.S. Agranovich, V.A. Marchenko, V.P. Shestopalov. Electromagnetic wave diffraction on plane metallic gratings. Journal of Technical Physics. – 1962. – T.32. - Issue 4. - P. 381–394, (in Russian).
6. V.P. Shestopalov, L.N. Litvinenko, S.A. Masalov, V.G. Sologub. Diffraction of waves by gratings. –Kharkov. – Kharkov University Press. – 1973.– 288 p. (in Russian).
7. K. Mei, M. Meyer. Solution to spherical anisotropic antennas. - IEEE trans., – 1964, AP-12, – P.459.
8. M.I. Kontorovich, N.N. Lebedev. About one method of solving some problems of the theory of diffraction and related problems. Journal of Experimental and Theor. Physics. - 1938. - Vol. 10-11. - P. 1192 - 1206, (in Russian).
9. N.N. Lebedev, M.I. Kontorovich. On the application of the treatment formulas to some problems of electrodynamics. Journal of Experimental and Theor. Physics. — 1939. - V.9. - Vol. 3. - P. 729, (in Russian).
10. L.B. Felsen, N. Marcuvitz. Radiation and scattering of waves. Prentice-Hall Microwaves and Fields Series. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1973. xxxii+888 pp.
11. V.A. Rezunenko. The field of the vertical electrical dipole placed above the spiral conductive unclosed sphere. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – Vol. 81. — 2015. – P. 10–19.

12. V. A. Rezunenکو. The field diffraction of current ring on a spiral conductive sphere with a hole. The X-th International Conference on Antenna Theory and Techniques ICATT'2015, KhNURE, Kharkiv, 21–24 April, 2015. Proceedings. – P. 129–131.
13. O.A. Ladyzhenskaya. The boundary value problems of mathematical physicist. Translated from the Russian by Jack Lohwater. Applied Mathematical Sciences. – New York. – 1985. – 322p.
14. V. A. Rezunenکو. Integral equation of the electrostatic problem for a spherical segment and a dielectric rounding of a cone, Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2006. – N.749. Issue 56. – P. 50-56, (in Russian).
15. I.A. Vyazmitinov, S. S. Vyazmitinova, V.A. Rezunenکو. The calculation of the potential of electron-optical systems with unloaded spherical cathode. 'Radio. Engineering'. Ukrainian interdepartmental scientific and technical collection. – 89. – 1990. – P.130-133, (in Russian).
16. V. A. Rezunenکو. The potential of a spherical segment within a spherical layer with a circular aperture. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Radiotechnics and Electronics. –834 (13). – 2008. –P.120-126, (in Russian).
17. V.A. Rezunenکو, I. A. Vyazmitinov, L.V. Udyanskaya, V.P. Shestopalov. Antennas characteristics of spherical reflector which is working at Helmholtz resonance excitation. International Scientific and Technical Conference "Modern Radar". – Kiev. – 1994. –P. 72-76.
18. V. A. Rezunenکو, S.V. Roshchupkin, E. I. Radchenko. Diffraction field of the vertical dipole from sphere with aperture, screening by the dielectical layer. The VI International Conference ICATT'2007. SNTU, Sevastopol. – 2007. Proceedings. – P. 128–130.
19. V.A. Sadovnichy. Theory of the operators. –M.: –High School. –1999. –368p, (in Russian).

Резуенко В. О. **Дифракція поля вертикального електричного диполя на спірально провідній сфері в присутності конуса.** Розв'язана задача дифракції електромагнітного поля вертикального електричного диполя на спірально провідній сфері у присутності ідеально провідного кругового конуса. Центр сфери і вершина конуса розміщено у початку декартової та сферичної систем координат. Диполь розміщений на вісі симетрії сфери і конуса та поза сфери і конуса. Момент диполя орієнтовний вздовж вісі симетрії сфери та конуса. Електричні токи на поверхні сфери, в наслідок спіральної провідності сфери, можуть текти під фіксованим кутом до кожного меридіану. Повні електромагнітні поля повинні задовольняти, зокрема, рівняння Максвелла, матеріальні рівняння, умови скінченності енергії у довільному обмеженому об'єму, граничні умови. Для розв'язку задачі будемо використовувати метод часткових областей. В сферичній системі координат

використані чотири скалярні електричні і магнітні потенціали Дебая. Потенціали Дебая представлені рядами Фур'є по функціям Бесселя, функціям Ханкеля, а також по функціям Лежандра дробових спектральних параметрів. Граничні умови на поверхні спірально провідної сфери неперервно пов'язують тангенціальні компоненти електричних і магнітних полів. Потрібно для чотирьох потенціалів Дебая знайти коефіцієнти чотирьох рядів Фур'є. Послідовності коефіцієнтів цих рядів шукаємо у Гільбертових просторах зі своєю вагою. Для пошуку коефіцієнтів використовуємо граничні умови та одержуємо чотири функціональні рівняння. Їх прямиї розв'язок неефективний. Також не є ефективним застосування у функціональних рівняннях для функцій Лежандра узагальненого інтегрального представлення типа Абеля. У даній роботі для застосування метода регуляризації матричного оператора задачі до кожного з чотирьох рівнянь застосовуємо дискретне перетворення Фур'є. Далі використовуємо рівність визначників Вронського для функцій Бесселя з дробовими індексами. Після лінійних перетворень та застосування зміни порядків підсумування у допоміжних подвійних числових рядах одержуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду (НСЛАР-11). В цій системі матричний оператор є компактним у гільбертовому просторі числових послідовностей. Система ефективно розв'язна у гільбертовому просторі аналітично для граничних значень параметрів задачі і чисельно для довільних параметрів. У роботі розглянуто деякі граничні варіанти постановки задач.

*Ключові слова:* спірально провідна сфера; конус; вертикальний електричний диполь; метод регуляризації; система рівнянь другого роду.

Article history: Received: 15 October 2018; Final form: 29 November 2018;  
Accepted: 1 December 2018.

## К вопросу о регуляризации задачи Коши для системы линейных разностных уравнений

С. М. Чуйко, Я. В. Калиниченко

*Донбасский государственный педагогический университет, Славянск,  
84 116 Донецкая обл., ул. Генерала Батюка, 19, chujko-slav@inbox.ru*

Чуйко С. М., Калиниченко Я. В. **Про регуляризацію задачі Коші для системи лінійних різницевих рівнянь.** Отримано оригінальну схему регуляризації задачі Коші для виродженої системи лінійних різницевих рівнянь.

*Ключові слова:* регуляризація; задача Коші; лінійні різницеві рівняння; псевдообернена матриця.

Чуйко С. М., Калиниченко Я. В. **К вопросу о регуляризации задачи Коши для системы линейных разностных уравнений.** Предложена оригинальная схема регуляризации задачи Коши для линейной вырожденной системы разностных уравнений.

*Ключевые слова:* регуляризация; задача Коши; линейные разностные уравнения; псевдообратные матрицы.

S. M. Chuiko, Ya. V. Kalinichenko. **On the regularization of the Cauchy problem for a system of linear difference equations.** An original regularization scheme for the Cauchy problem for a linear singular system of difference equations is proposed.

*Keywords:* regularization scheme; Cauchy problem, linear difference equations; pseudoinverse matrices.

*2010 Mathematics Subject Classification:* 15A24; 34B15; 34C25.

### 1. Невырожденные системы линейных разностных уравнений

Исследуем задачу о нахождении ограниченных решений  $z(k) \in \mathbb{R}^n$  системы линейных разностных уравнений

$$z(k+1) = A(k)z(k) + f(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (1)$$

здесь  $A(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — ограниченные матрицы и  $f(k)$  — действительные ограниченные вектор-столбцы. Как известно [1], общее решение задачи Коши

$$z(0) = c \in \mathbb{R}^n$$

для однородной части невырожденной ( $\det A(k) \neq 0$ ) системы разностных уравнений (1) представимо в виде:

$$z(k) = X(k)c, \quad c \in \mathbb{R}^n;$$

здесь  $X(k)$  — нормальная фундаментальная матрица:

$$X(k+1) = A(k)X(k), \quad X(0) = I_n.$$

Одной из фундаментальных матриц является, в частности, матрица

$$X(k) = \prod_{j=0}^{k-1} A(j).$$

Общее решение задачи Коши  $z(0) = c \in \mathbb{R}^n$  для неоднородной части невырожденной ( $\det A(k) \neq 0$ ) системы разностных уравнений (1) представимо в виде:

$$z(k) = X(k)c + K[f(j)](k), \quad c \in \mathbb{R}^n;$$

здесь

$$K[f(j)](k) := X(k) \sum_{j=0}^{k-1} X^{-1}(j+1)f(j)$$

— оператор Грина задачи Коши для системы разностных уравнений (1).

## 2. Стандартное разложение матрицы.

Предположим, что матрица  $A(k)$  имеет постоянный ранг, а именно:

$$1 \leq \text{rank } A(k) = \sigma.$$

Как известно [6, 7, 8], любая  $(m \times n)$ - матрица  $A(k)$  в определенном базисе может быть представлена в виде стандартного разложения

$$A(k) = R(k) \cdot J_\sigma \cdot S(k), \quad J_\sigma := \begin{pmatrix} I_\sigma & O \\ O & O \end{pmatrix};$$

здесь  $R(k)$  и  $S(k)$  — ограниченные невырожденные матрицы. Стандартное разложение матрицы  $A(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  может быть получено при помощи сингулярного разложения матрицы [9]

$$A(k) = \Phi(k) \Lambda \Psi(k),$$

где  $\Phi(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $\Psi(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — унитарные матрицы и  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — диагональная матрица:

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \Lambda_\sigma & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \det \Lambda_\sigma \neq 0.$$

Используя сингулярное разложение  $A(k) = \Phi(k) \Lambda \Psi(k)$ , находим невырожденные матрицы

$$R(k) = \Phi(k), \quad S(k) = \begin{pmatrix} \Lambda_\sigma & O \\ O & I_{n-\sigma} \end{pmatrix} \Psi(k),$$

необходимые для нахождения стандартного разложения матрицы  $A(k)$ .

**Пример 1.** Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

приводится к стандартному разложению посредством матриц

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Действительно,  $\text{rank } A = 2$ , при этом сингулярное разложение определяют матрицы

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad J_\sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, находим матрицы  $R = \Phi$  и  $S$ , необходимые для нахождения стандартного разложения матрицы  $A$ .

### 3. Регуляризация задачи Коши для системы линейных разностных уравнений

Задача о нахождении ограниченных решений системы линейных разностных уравнений (1) существенно усложняется в случае ее вырождения, а именно: при условии  $\det A(k) = 0$  хотя бы для некоторых  $k = 0, 1, 2, \dots$ . В этом случае для нахождения ограниченных решений системы линейных разностных уравнений (1) можно использовать технику регуляризации [2, 3, 4, 5]. Возмущение квадратной, но вырожденной матрицы  $A(k)$  будем искать в виде

$$\mathcal{A}(k, \varepsilon) := A(k) + \varepsilon \Omega(k), \quad \Omega(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

предполагая матрицу  $\mathcal{A}(k, \varepsilon)$  невырожденной и ограниченной. Таким образом, приходим к задаче о нахождении ограниченных решений

$$z(k, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

регуляризованной системы линейных разностных уравнений

$$z(k+1, \varepsilon) = \mathcal{A}(k, \varepsilon)z(k, \varepsilon) + f(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Поскольку любая  $(n \times n)$ -матрица  $A(k)$  постоянного ранга  $\sigma$  в определенном базисе может быть представлена в виде стандартного разложения  $A(k) = R(k) \cdot J_\sigma \cdot S(k)$ , постольку возмущение матрицы  $A(k)$  представимо в виде

$$\Omega(k) = R(k) \cdot \check{J}_\sigma \cdot S(k), \quad \check{J}_\sigma := \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-\sigma} \end{pmatrix}.$$

Общее решение задачи Коши

$$z(0, \varepsilon) = c \in \mathbb{R}^n$$

для однородной части невырожденной ( $\det \mathcal{A}(k, \varepsilon) \neq 0$ ) системы разностных уравнений (2) представимо в виде:

$$z(k, \varepsilon) = X(k, \varepsilon)c, \quad c \in \mathbb{R}^n;$$

здесь  $X(k, \varepsilon)$  — нормальная фундаментальная матрица:

$$X(k+1, \varepsilon) = \mathcal{A}(k, \varepsilon)X(k, \varepsilon), \quad X(0, \varepsilon) = I_n.$$

Одной из фундаментальных матриц является, в частности, матрица

$$X(k, \varepsilon) = \prod_{j=0}^{k-1} \mathcal{A}(j, \varepsilon).$$

Общее решение задачи Коши  $z(0, \varepsilon) = c \in \mathbb{R}^n$  для неоднородной регуляризованной системы разностных уравнений (2) представимо в виде:

$$z(k, \varepsilon) = X(k, \varepsilon)c + X(k, \varepsilon) \sum_{j=0}^{k-1} X^{-1}(j+1, \varepsilon)f(j), \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 1** *Предположим, что  $(n \times n)$  – матрица  $A(k)$  имеет постоянный ранг, а именно:*

$$1 \leq \text{rank } A(k) = \sigma < n.$$

*Тогда общее решение задачи Коши  $z(0, \varepsilon) = c \in \mathbb{R}^n$  для неоднородной регуляризованной системы разностных уравнений (2) представимо в виде:*

$$z(k, \varepsilon) = X(k, \varepsilon)c + K[f(j)](k, \varepsilon), \quad c \in \mathbb{R}^n;$$

здесь

$$K[f(j)](k, \varepsilon) := X(k, \varepsilon) \sum_{j=0}^{k-1} X^{-1}(j+1, \varepsilon)f(j)$$

— оператор Грина задачи Коши для регуляризованной системы разностных уравнений (2).

**Пример 2.** *Найдем решение системы разностных уравнений первого порядка*

$$z(k+1) = Az(k) + f(k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (3)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения возмущенной матрицы

$$\mathcal{A}(k, \varepsilon) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 5 & 4\varepsilon & -2\varepsilon \\ 10 & -2\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}(k, 0) = A,$$

определяющей регуляризованную систему линейных разностных уравнений используем возмущение матрицы  $A$  в виде

$$\Omega = R \cdot \check{J}_\sigma \cdot S, \quad J_\sigma := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

При этом  $X(k, \varepsilon)$  – нормальная фундаментальная матрица:

$$X(0, \varepsilon) = I_3, \quad X(1, \varepsilon) = \mathcal{A}(k, \varepsilon),$$

кроме того

$$X(2, \varepsilon) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 5 + 4\varepsilon^2 & 2(5 - \varepsilon^2) \\ 0 & 2(5 - \varepsilon^2) & 20 + \varepsilon^2 \end{pmatrix},$$

$$X(3, \varepsilon) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 25 & 50 \\ 25 & 4\varepsilon^3 & -2\varepsilon^3 \\ 50 & -2\varepsilon^3 & \varepsilon^3 \end{pmatrix}.$$

Общее решение задачи Коши  $z(0, \varepsilon) = c \in \mathbb{R}^n$  для неоднородной регуляризованной системы разностных уравнений для системы (3) представимо в виде:

$$z(k, \varepsilon) = X(k, \varepsilon)c + K[f(j)](k, \varepsilon), \quad c \in \mathbb{R}^3;$$

здесь

$$K[f(j)](1, \varepsilon) = f(1), \quad K[f(j)](2, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 45 \\ 15 + 2\varepsilon \\ 25 - \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$K[f(j)](3, \varepsilon) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 70 \\ 55 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^2 \\ 105 - \varepsilon - \varepsilon^2 \end{pmatrix}$$



— оператор Грина регуляризованной задачи Коши для системы разностных уравнений (3). При этом нормальная фундаментальная матрица  $X(k, \varepsilon)$  и оператор Грина задачи Коши для регуляризованной системы разностных уравнений (3)  $K[f(j)](k, \varepsilon)$  непрерывны по  $\varepsilon$  :

$$X(k, \cdot), K[f(j)](k, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

поэтому общее решение задачи Коши  $z(0, \varepsilon) = c \in \mathbb{R}^n$  для неоднородной регуляризованной системы разностных уравнений для системы (3)  $z(k, \varepsilon)$  при  $\varepsilon = 0$  обращается в точное решение  $z(k)$  системы разностных уравнений (3)

$$z(k) = X(k)c + K[f(j)](k), \quad c \in \mathbb{R}^3;$$

здесь

$$X(1) = I_3, \quad X(2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad X(3) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 5 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— нормальная фундаментальная матрица и

$$K[f(j)](1) = f(1), \quad K[f(j)](2) = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad K[f(j)](3) = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 21 \end{pmatrix}$$

— обобщенный оператор Грина вырожденной задачи Коши для системы разностных уравнений (3).

Доказанная теорема обобщает соответствующие результаты [1] на случай необратимости матрицы  $A(k)$ . Кроме того, полученные результаты аналогично [10] могут быть использованы в теории устойчивости для систем разностных уравнений, а также аналогично [11, 12] — в теории нелинейных нетеровых краевых задач для систем разностных уравнений.

**Acknowledgement.** Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0115U003182.

#### REFERENCES

1. *A.A. Boichuk* Boundary-value problems for systems of difference equations. Ukrainian Mathematical Journal. — 1997. — **49**. № 6. — P. 930 — 934.
2. *S.G. Krein* Linear Differential Equations in Banach Space. — Amer. Math. Soc., Providence, RI 1971. — 104 p.
3. *A.N. Tikhonov, V.Ya. Arsenin* Solution of Ill-Posed Problems. — Winston, Washington, DC, (1977).— 1986. — 288 p.

4. *N.V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rakhmatullina* Introduction to the Theory of Linear Functional Differential Equations.— World Federation Publ., Atlanta (1995) — 277 p.
5. *S.M. Chuiko, E.V. Chuiko, A.V. Belushenko* On a regularization method for solving linear matrix equation. Bull. of Taras Shevchenko National Univ. Ser. Math. — 2014. — 1. — P. 12 — 14.
6. *V.I. Arnold, A.N. Varchenko, S.M. Gusein-Zade* Singularities of Differentiable Maps. 3rd ed M.: Izd. MTsNMO. — 2009. — 672 p. [in Russian].
7. *S.M. Chuiko* On a reduction of the order in a differential-algebraic system. Ukr. mat. vestnik. — 2018. — 15. — № 1. — P. 1 — 17 [in Russian].
8. *S.M. Chuiko* On a reduction of the order in a differential-algebraic system. Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — 235. — № 1. — P. 2 — 18.
9. *V.V. Voevodin, Ya.A. Kuznetsov* Matrices and Calculations.— M.: Nauka. — 1984. — 318 p. [in Russian].
10. *V.I. Korobov, M.O. Bebiya* Stabilization of one class of nonlinear systems, Automation and Remote Control. — 2017 — Vol. 78 — Iss. 1— P. 1–15.
11. *A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). — Berlin; Boston: De Gruyter — 2016. — 298 pp.
12. *S.M. Chuiko* Generalized Green operator for a linear non-Ruby boundary value problem for a matrix difference equation. Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki. — 2015. — №1 (26). — P. 104 — 116. [in Russian].

С.М. Чуйко **Про регуляризацію задачі Коші для системи лінійних різнице-вих рівнянь.** У статті запропоновано оригінальні умови регуляризації, а також схема знаходження розв'язків лінійної задачі Коші для системи різницевих рівнянь, при цьому істотно використано техніку псевдообернення матриць за Муром-Пенроузом. Поставлена в статті задача продовжує дослідження умов регуляризації лінійних не-терових крайових задач, наведених у монографіях М.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматулліної, А.М. Самойленка та О.А. Бойчука. Досліджено загальний випадок, коли лінійний обмежений оператор, відповідний до однорідної частини лінійної задачі Коші, не має оберненого. У статті побудовано узагальнений оператор Гріна та знайдений вигляд лінійного збурення регуляризованої лінійної задачі Коші для системи різницевих рівнянь. Запропоновані умови регуляризації, а також схема знаходження розв'язків лінійної задачі Коші для системи різницевих рівнянь детально проілюстровано на прикладах. На відміну від попередніх статей авторів, задача про регуляризацію лінійної задачі Коші для системи різницевих рівнянь розв'язана конструктивно, причому отримані достатні умови існування розв'язку задачі про регуляризацію.

*Ключові слова:* регуляризація; задача Коші; лінійні різницеві рівняння; псевдообернена матриця.

S.M. Chuiko, Ya.V. Kalinichenko **On the regularization of the Cauchy problem for a system of linear difference equations.** The article proposes unusual regularization conditions as well as a scheme for finding solutions of the linear Cauchy problem for a system of difference equations in the critical case, significantly using the Moore-Penrose matrix pseudo-inversion technology. The problem posed in the article continues the study of the regularization conditions for linear Noetherian boundary value problems in the critical case given in the monographs by S.G. Krein, N.V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rakhmatullina, A.M. Samoilenko and A.A. Boichuk. The general case is studied in which a linear bounded operator corresponding to a homogeneous part of a linear Cauchy problem has no inverse. In the article, a generalized Green operator is constructed and the type of a linear perturbation of a regularized linear Cauchy problem for a system of difference equations in the critical case is found. The proposed regularization conditions, as well as the scheme for finding solutions to linear Cauchy problems for a system of difference equations in the critical case, are illustrated in details with examples. In contrast to the earlier articles of the authors, the regularization problem for a linear Cauchy problem for a system of difference equations in the critical case has been resolved constructively, and sufficient conditions has been obtained for the existence of a solution to the regularization problem. *Keywords:* regularization scheme; Cauchy problem, linear difference equations; pseudoinverse matrices.

Article history: Received: 20 November 2018; Final form: 10 December 2018;  
Accepted: 13 December 2018.

## On constructing single-input non-autonomous systems of full rank

D. N. Andreieva, S. Yu. Ignatovich

*V.N. Karazin Kharkiv National University  
4, Svobody sqr., Kharkiv, 61022, Ukraine  
andreieva\_darja@ukr.net, ignatovich@ukr.net*

For a nonlinear system of differential equations  $\dot{x} = f(x)$ , a method of constructing a system of full rank  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  is studied for vector fields of the class  $C^k$ ,  $1 \leq k < \infty$ , in the case when  $f(x) \neq 0$ . A method for constructing a non-autonomous system of full rank is proposed in the case when the vector field  $f(x)$  can vanish.

*Keywords:* nonlinear control system; accessible system; system of full rank; non-autonomous system; the straightening theorem for vector fields.

Андреєва Д. М., Ігнатович С. Ю. **Про побудову неавтономних систем повного рангу з одним керуванням.** Для нелінійної системи диференціальних рівнянь вигляду  $\dot{x} = f(x)$  досліджено метод конструювання системи повного рангу  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  для векторних полів класу  $C^k$ ,  $1 \leq k < \infty$ , у випадку, коли  $f(x) \neq 0$ . Запропоновано метод конструювання неавтономної системи повного рангу у випадку, коли векторне поле  $f(x)$  може обернутися на нуль.

*Ключові слова:* нелінійна керована система; досяжна система; система повного рангу; неавтономна система; теорема про випрямлення векторного поля.

Андреєва Д. Н., Игнатович С. Ю. **О построении неавтономных систем полного ранга с одним управлением.** Для нелинейной системы дифференциальных уравнений вида  $\dot{x} = f(x)$  исследован метод конструирования системы полного ранга  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  для векторных полей класса  $C^k$ ,  $1 \leq k < \infty$ , в случае, когда  $f(x) \neq 0$ . Предложен метод конструирования неавтономной системы полного ранга в случае, когда векторное поле  $f(x)$  может обращаться в нуль.

*Ключевые слова:* нелинейная управляемая система; достижимая система; система полного ранга; неавтономная система; теорема о выпрямлении векторного поля.

*2010 Mathematics Subject Classification:* 93B10; 93C10.

### 1. Introduction

In the paper [1] the following problem was considered. Let a system

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

be given, where  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  is a (real analytic) vector field,  $n > 1$ ; the problem is to find conditions under which there exists a vector field  $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  such that the system

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2)$$

has full rank. Systems of full rank are also called accessible. This property for the system (2) means that the dimension of the span of all Lie brackets of vector fields  $\text{ad}_f^k g(x)$ ,  $k \geq 0$ , equals  $n$ .

The important result was obtained in [1], which implies that *an accessible system (2) can be constructed if and only if  $f(x) \neq 0$* . Moreover, a method for constructing a system of full rank was proposed, which was based on the straightening theorem for vector fields [2].

Let us recall the main points of the construction [1]. Suppose  $f(x) \neq 0$ . According to the straightening theorem, there exist local coordinates  $z_1, \dots, z_n$  in which the vector field  $f$  takes the form  $f = (0, \dots, 0, 1)^T$ , i.e., in the new coordinates the system (1) has the form

$$\dot{z}_1 = 0, \dots, \dot{z}_{n-1} = 0, \dot{z}_n = 1. \quad (3)$$

Without loss of generality assume  $f_n(x) \neq 0$ ; then a straightening diffeomorphism  $z = \eta(x) = (\eta_1(x), \dots, \eta_n(x))^T$  can be found from the system of partial differential equations

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_n} = -\frac{1}{f_n} \left( \frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial \eta_i}{\partial x_{n-1}} f_{n-1} \right), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \frac{\partial \eta_n}{\partial x_n} = \frac{1}{f_n} \left( 1 - \frac{\partial \eta_n}{\partial x_1} f_1 - \dots - \frac{\partial \eta_n}{\partial x_{n-1}} f_{n-1} \right). \end{cases} \quad (4)$$

Then, let us apply the polynomial transformation  $\xi = \psi(z)$  of the form

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{z_1}{0!} + \frac{z_2 z_n}{1!} + \frac{z_3 z_n^2}{2!} + \dots + \frac{z_{n-1} z_n^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{z_n^n}{n!}, \\ \xi_2 = \frac{z_2}{0!} + \frac{z_3 z_n}{1!} + \frac{z_4 z_n^2}{2!} + \dots + \frac{z_{n-1} z_n^{n-3}}{(n-3)!} + \frac{z_n^{n-1}}{(n-1)!}, \\ \dots \\ \xi_{n-1} = \frac{z_{n-1}}{0!} + \frac{z_n^2}{2!}, \\ \xi_n = \frac{z_n}{1!}, \end{cases} \quad (5)$$

and obtain the system (1) in  $\xi$ -coordinates:

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \dot{\xi}_2 = \xi_3, \dots, \dot{\xi}_{n-1} = \xi_n, \dot{\xi}_n = 1. \quad (6)$$

Now, we choose a vector field  $g(\xi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  in the form  $g(\xi) = (0, \dots, 0, 1)^T$ ; then we obtain a linear system of full rank

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \dot{\xi}_2 = \xi_3, \dots, \dot{\xi}_{n-1} = \xi_n, \dot{\xi}_n = 1 + u. \quad (7)$$

Finally, by the inverse coordinate transformation

$$x = \eta^{-1}(\psi^{-1}(\xi)), \quad (8)$$

the system (7) is transformed to the form (2). Since the full rank property is invariant under the transformation (8), the obtained system (2) has full rank.

Due to using the straightening theorem, this construction is local, that is, a vector field  $g(x)$  is built in a neighborhood of any point where  $f(x) \neq 0$ .

In the present paper we consider two generalizations. First, we consider the case when the vector field  $f(x)$  belongs to the class  $C^k$  and find out what class of smoothness is guaranteed for a vector field  $g(x)$ . In particular, this question is related to the linearizability of control systems in the class  $C^1$  [3]. Second, we consider the case when the vector field  $f(x)$  can vanish and propose a method of constructing a non-autonomous vector field  $g(t, x)$ .

## 2. The case of a vector field $f(x)$ from the class $C^k$

Let us consider a vector field  $f(x)$  which is finitely many times differentiable in a certain domain,

$$f(x) \in C^k(Q), \quad (9)$$

where  $1 \leq k < \infty$ , and analyze the class of smoothness of transformations in the method of [1] recalled above.

**Theorem 1** *Let a vector field  $f(x) \in C^k(Q)$  be given,  $Q \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ , and  $f(x_0) \neq 0$  where  $x_0 \in Q$ . There exists a neighborhood  $U(x_0)$  and a vector field  $g(x) \in C^{k-1}(U(x_0))$  such that the system (2) has full rank (in  $U(x_0)$ ).*

*Proof.* This theorem is a consequence of the construction of [1] and the straightening theorem. We give a formal proof.

Let us apply the method of [1] described above. By the straightening theorem, a straightening diffeomorphism  $z = \eta(x)$  defined by the system (4) exists in some neighborhood  $U(x_0)$  and belongs to the class  $C^k(U(x_0))$  [2].

Now, let us observe that the system (7) is linear and the change of variables  $\xi = \psi(z)$  is polynomial, hence, the system (7) in  $z$ -coordinates takes the form

$$\dot{z} = \tilde{f}(z) + \tilde{g}(z)u,$$

where  $\tilde{f}(z)$ ,  $\tilde{g}(z)$  are real analytic. Then for the system in the initial coordinates we get

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\eta^{-1}(z))' \dot{z} |_{z=\eta(x)} = \\ &= (\eta^{-1}(z))' \tilde{f}(z) |_{z=\eta(x)} + (\eta^{-1}(z))' \tilde{g}(z) |_{z=\eta(x)} u = \\ &= f(x) + (\eta^{-1}(z))' \tilde{g}(z) |_{z=\eta(x)} u. \end{aligned}$$

As we mentioned above,  $\eta(x) \in C^k(U(x_0))$ , hence,  $(\eta^{-1}(z))'$  belongs to the class  $C^{k-1}$ . Thus, the vector field  $g(x) = (\eta^{-1}(z))' \tilde{g}(z) |_{z=\eta(x)}$  is from the class  $C^{k-1}(U(x_0))$ . The theorem is proved.

**Example 1.** We give an example of a control system in the case when the right-hand side  $f(x)$  is from the class  $C^1$ . Consider the system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = 1 + x_1|x_1|, \end{cases}$$

where  $x \in Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > -1\}$ . We find a straightening diffeomorphism from the following system of partial differential equations

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} = \frac{1}{1+x_1|x_1|}. \end{cases} \quad (10)$$

Solving this system we get a transformation  $z = \eta(x)$  of the form

$$\begin{cases} z_1 = x_1, \\ z_2 = \frac{x_2}{1+x_1|x_1|}. \end{cases} \quad (11)$$

The initial system in  $z$ -coordinates has the form

$$\dot{z}_1 = 0, \quad \dot{z}_2 = 1,$$

and in  $\xi$ -coordinates, where  $\xi_1 = z_1 + \frac{z_2^2}{2}$ ,  $\xi_2 = z_2$ , it is

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = 1.$$

Let us choose  $g(\xi) = (0, 1)^T$ , then the system

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = 1 + u \quad (12)$$

has full rank. The system of full rank (12) in  $z$ -coordinates takes the form

$$\dot{z}_1 = -z_2 u, \quad \dot{z}_2 = 1 + u.$$

By the inverse coordinate transformation

$$\begin{cases} x_1 = z_1, \\ x_2 = z_2(1 + z_1|z_1|) \end{cases}$$

we obtain the system of full rank in the initial coordinates:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{x_2}{1+x_1|x_1|}u, \\ \dot{x}_2 = 1 + x_1|x_1| + (1 + x_1|x_1| - \frac{2|x_1|x_2^2}{(1+x_1|x_1|)^2})u. \end{cases} \quad (13)$$

Thus, the vector field  $g(x)$  is chosen as

$$g(x) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{1+x_1|x_1|} \\ 1 + x_1|x_1| - \frac{2|x_1|x_2^2}{(1+x_1|x_1|)^2} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

This example illustrates Theorem 1. We can see that the vector field

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + x_1|x_1| \end{pmatrix}$$

is indeed from the class  $C^1$  while the smoothness class of the constructed vector field  $g(x)$  of the form (14) is one less, i.e.,  $g(x)$  is only continuous (it is not differentiable at the points where  $x_1 = 0, x_2 \neq 0$ ).

### 3. Constructing a system of full rank in the case $f(x_0) = 0$

Now, let us consider a method of constructing a system of full rank in a neighborhood of a point  $x_0$  such that  $f(x_0) = 0$ . In this case we admit non-autonomous vector fields, that is, we choose a vector field  $g$  in the form  $g = g(t, x)$ . For a system

$$\dot{x} = f(x) + g(t, x)u,$$

the full rank property means that the dimension of the span of all Lie brackets of vector fields  $\text{ad}_{\hat{f}}^k g(t, x), k \geq 0$ , equals  $n$ , where the vector field  $\hat{f}$  corresponds to the differential operator  $\frac{\partial}{\partial t} + f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ .

**Theorem 2** *Let a vector field  $f(x) \in C^k(Q)$  be given,  $Q \subset \mathbb{R}^n, n > 1$ , and  $x_0 \in Q$ . There exists a neighborhood  $U(\hat{x}_0)$ , where  $\hat{x}_0 = (0, x_0)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ , and a vector field  $g(t, x) \in C^{k-1}(U(\hat{x}_0))$  such that the system*

$$\dot{x} = f(x) + g(t, x)u \tag{15}$$

*has full rank (in  $U(\hat{x}_0)$ ).*

In some cases (for example, if  $f(x_0) \neq 0$ ) a vector field  $g$  can be chosen as  $g = g(x)$ . However, the case  $f(x) \equiv 0$  demonstrates that this is not true in the general case (if  $n > 1$ ).

*Proof.* Supplementing the system (1) by the equation  $\dot{t} = 1$  we obtain the following system

$$\dot{x}_1 = f_1(x), \dots, \dot{x}_n = f_n(x), \dot{t} = 1, \tag{16}$$

where the right-hand side is nonzero for any  $x$  and  $t$ . Now we find a straightening diffeomorphism  $z = \eta(t, x)$  from the system

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta_i}{\partial t} = -\frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} f_1 - \dots - \frac{\partial \eta_i}{\partial x_n} f_n, & i = \overline{1, n}, \\ \eta_{n+1} = t. \end{cases} \tag{17}$$

As a result of straightening the vector field, the system (16) takes the form

$$\dot{z}_1 = 0, \dots, \dot{z}_n = 0, \dot{z}_{n+1} = 1. \tag{18}$$



Let us choose the vector field  $g$  in the form  $g = g(t) = (1, t, t^2, \dots, t^{n-1}, 0)^T$ ; then we obtain the system of full rank of the form

$$\dot{z}_1 = u, \dot{z}_2 = tu, \dots, \dot{z}_n = t^{n-1}u, \dot{z}_{n+1} = 1. \quad (19)$$

Applying the inverse coordinate transformation  $(x, t) = \eta^{-1}(z)$  (and dropping the equation  $\dot{t} = 1$ ) we obtain the system of full rank in the initial coordinates:

$$\dot{x} = f(x) + g(t, x)u.$$

Arguing analogously to the proof of Theorem 1 we get that  $g(t, x) \in C^{k-1}(U(\hat{x}_0))$ . The theorem is proved.

**Example 2.** Consider the linear system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = x_1. \end{cases}$$

Since we cannot use the result of [1] at the point with  $x_1 = 0$ , we apply the method described above. Namely, we add the equation  $\dot{t} = 1$  to the given system and obtain the equivalent system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{t} = 1. \end{cases} \quad (20)$$

Now we can straighten the vector field and find a straightening diffeomorphism from the following system of partial differential equations

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta_i}{\partial t} = -\frac{\partial \eta_i}{\partial x_2} x_1, \quad i = 1, 2, \\ \eta_3 = t. \end{cases} \quad (21)$$

Solving this system we obtain a transformation of the form

$$\begin{cases} z_1 = x_1, \\ z_2 = tx_1 - x_2, \\ z_3 = t. \end{cases} \quad (22)$$

We perform the straightening diffeomorphism, then the system (20) in  $z$ -coordinates takes the form

$$\dot{z}_1 = 0, \dot{z}_2 = 0, \dot{t} = 1.$$

Let us choose the vector field  $g(t) = (1, t, 0)^T$ , then the resulting system

$$\dot{z}_1 = u, \dot{z}_2 = tu, \dot{t} = 1 \quad (23)$$

has full rank. Performing the inverse change of variables

$$\begin{cases} x_1 = z_1, \\ x_2 = tz_1 - z_2, \\ t = z_3, \end{cases}$$

and dropping the trivial equation  $\dot{t} = 1$  we get the system of full rank in the initial coordinates

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1. \end{cases} \quad (24)$$

Thus, the vector field  $g$  is chosen as  $g = (1, 0)^T$ , therefore, it is constant and in particular does not depend on  $t$ .

**Example 3.** Consider the nonlinear system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2, \\ \dot{x}_2 = x_2. \end{cases} \quad (25)$$

Let us construct a system of full rank in a neighborhood of the point where  $f(x) = 0$ , i.e.,  $x_0 = 0$ . To this end, we supplement the system (25) with the equation  $\dot{t} = 1$  and get

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2, \\ \dot{x}_2 = x_2, \\ \dot{t} = 1. \end{cases} \quad (26)$$

A straightening diffeomorphism for the system (26) can be found from the following system of partial differential equations

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta_i}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} x_1^2 + \frac{\partial \eta_i}{\partial x_2} x_2\right), \quad i = 1, 2, \\ \eta_3 = t, \end{cases} \quad (27)$$

then as a transformation  $z = \eta(x, t)$  we can take

$$\begin{cases} z_1 = \frac{x_1}{x_1 t + 1}, \\ z_2 = x_2 e^{-t}, \\ z_3 = t, \end{cases} \quad (28)$$

which is defined in a neighborhood of the origin. The system (26) in  $z$ -coordinates has the form

$$\dot{z}_1 = 0, \quad \dot{z}_2 = 0, \quad \dot{t} = 1.$$

We choose the vector field  $g(t) = (1, t, 0)^T$  and obtain the system of full rank in  $z$ -coordinates

$$\dot{z}_1 = u, \quad \dot{z}_2 = tu, \quad \dot{t} = 1.$$

Performing the inverse change of variables

$$\begin{cases} x_1 = \frac{z_1}{1-z_1 t}, \\ x_2 = z_2 e^t, \\ t = z_3, \end{cases} \quad (29)$$

and removing the trivial equation  $\dot{t} = 1$  we obtain the system in  $x$ -coordinates

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + (x_1 t + 1)^2 u, \\ \dot{x}_2 = x_2 + t e^t u, \end{cases}$$

which has full rank in a neighborhood of the point  $x_0 = 0$  where the vector field  $f$  equals zero.

## REFERENCES

1. Y. Kawano, Ü. Kotta, C.H. Moog. Any dynamical system is fully accessible through one single actuator, and related problems, Intern. J. of Robust and Nonlinear Control, – 2016. – 8. V.26. – P. 1748-1754.
2. V.I. Arnold. Ordinary differential equations. 1984. Nauka, Moscow, 272 p. (in Russian).
3. G.M. Sklyar, K.V. Sklyar, S.Yu. Ignatovich. On the extension of the Korobov's class of linearizable triangular systems by nonlinear control systems of the class  $C^1$ , Syst. Control Lett., – 2005. – 11. V.54. – P. 1097-1108.

Андреєва Д. М., Ігнатович С. Ю. **Про побудову неавтономних систем повного рангу з одним керуванням.** У статті розвинено метод конструювання системи повного рангу, який було запропоновано в роботі [Y. Kawano, Ü. Kotta, C.H. Moog. Any dynamical system is fully accessible through one single actuator, and related problems, Intern. J. of Robust and Nonlinear Control, – 2016. – 8. V.26. – P. 1748-1754.]. Задача полягає в наступному: для заданого векторного поля  $f(x)$  знайти таке векторне поле  $g(x)$ , що отримана афінна керована система  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  буде повного рангу. У вищевказаній роботі було показано, що таке  $g(x)$  існує в околі точки  $x$ , якщо  $f(x) \neq 0$ , та було запропоновано метод конструювання  $g(x)$ . Як основний інструмент було застосовано теорему про випрямлення векторного поля; фактично, випрямляючи векторне поле  $f(x)$ , ми конструюємо лінійну керовану систему. Проте, було розглянуто тільки випадок дійсно аналітичних векторних полів. В даній роботі ми розглядаємо два узагальнення. По-перше, ми вивчаємо дане питання для векторних полів  $f(x) \in C^k$ ,  $1 \leq k < \infty$ . Ми показуємо, що запропонований метод можна застосувати, проте векторне поле  $g(x)$ , взагалі кажучи, буде належати тільки класу  $C^{k-1}$ . Ми наводимо приклад векторного поля  $f(x) \in C^1$ , а саме,  $f(x) = (0, 1/(1 + x_1|x_1|))^T$ , для якого метод дає недиференційовне (хоча й неперервне) векторне поле  $g(x)$ . По-друге, ми розглядаємо випадок, коли  $f(x)$  обертається на нуль, та описуємо метод конструювання векторного поля  $g(t, x)$ , яке, взагалі кажучи,

є неавтономним, такого, що система  $\dot{x} = f(x) + g(t, x)u$  є повного рангу. Ми застосуємо теорему про випрямлення векторного поля, але для розширеної системи, в якій час є додатковою координатою. Ми наводимо приклад лінійного векторного поля  $f(x) = (0, x_1)^T$  в околі початку координат, в якому отримане векторне поле є автономним, а саме  $g(x) = (1, 0)^T$ . Також ми наводимо приклад нелінійного векторного поля  $f(x) = (x_1^2, x_2)^T$  в околі початку координат; відповідне неавтономне векторне поле має вигляд  $g(t, x) = ((x_1 t + 1)^2, t e^t)^T$ .

*Ключові слова:* нелінійна керована система; досяжна система; система повного рангу; неавтономна система; теорема про випрямлення векторного поля.

Article history: Received: 7 November 2018; Final form: 13 December 2018;

Accepted: 14 December 2018.

## Mathematical modeling of bioactive arterial wall

H. N. Solovyova<sup>1</sup>, N. N. Kizilova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Kharkov National Politechnical University "KhPI Kharkov,  
2 Kirpichova Street, 61002, Ukraine*

<sup>2</sup>*V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkov,  
4 Svobody Square, 61022, Ukraine  
helenfilippova@yahoo.co.uk, n.kizilova@gmail.com*

Biological tissues and their artificial substitutes are composed by different fibers and possess complex viscoelastic properties. Here the most popular 3-element and 5-element rheological models of human soft tissues as viscoelastic bodies are considered accounting for the time delay between the load and mechanical respond of the material. The obtained data compared to the experimental curves got on the vessel wall and heart tissues.

*Keywords:* active biomaterials; viscoelastic fluids; rheology; mathematical modelling.

Соловйова О. М., Кізілова Н. М. **Математичне моделювання біоактивної артеріальної стінки.** Біологічні тканини та їх штучні замітники складаються з різних волокон і мають складні в'язко-пружні властивості. В роботі розглянуті найпопулярніші 3-елементні та 5-елементні реологічні моделі м'яких тканин людини як в'язкопружні тіла, що враховують затримку часу між навантаженням та механічним відгуком матеріалу. Отримані дані порівнювались з експериментальними кривими отриманими на стінці судин і тканинах серця.

*Ключові слова:* активні біоматеріали; в'язкопружні рідини; реологія; математичне моделювання.

Соловьева Е. Н., Кизилова Н. Н. **Математическое моделирование биоактивной артериальной стенки.** Биологические ткани и их искусственные заменители состоят из разных волокон и характеризуются сложными вязкоупругими свойствами. В работе рассматриваются наиболее популярные 3-элементные и 5-элементные реологические модели мягких тканей человека как вязкоупругих тел, учитывающие запаздывание во времени между нагрузкой и механическим ответом материала. Полученные данные сравнивались с экспериментальными кривыми, полученными на стенках кровеносных сосудов и тканях сердца.

*Ключевые слова:* активные биоматериалы; вязкоупругие жидкости; реология; математическое моделирование.

*2010 Mathematics Subject Classification:* 35K05; 76Z05.

### 1. Introduction

Bioactive materials are biological tissues or artificial materials that can perform a mechanical work at the expense of chemical reactions, conformational

changes, micro- and mesostructure formation and remodeling [1]. Such materials are abound in biological organisms like skeletal, smooth and cardiac muscles, flagella and cilia in bacteria, cytoskeleton and molecular motors in the cells [2]. Recently novel artificial solid and liquid materials with complex chemical and physical properties, reinforced by the micro- and nanofibers or other inclusions, porous materials with active reaction on the mechanical, chemical, electrical stimuli have appeared [3]. The external signals evoke contraction of the fibers, remodeling of the internal micro/mesostructure, produce phase transitions, fluid flows, mass and heat redistribution and related physical phenomena [4]. During the last years a novel concept of biological active fluids (BAF) has been elaborated and developed [3, 5]. Initially concentrated suspensions of biological cells were considered as active biofluids, but nowadays the artificial suspensions and emulsions of colloidal particles, fibers and other inclusions that are able to change their shape, size or/and physical properties depending on the nature and amplitude of the external signal have been designed and studies. BAFs are used in the microbiological reactors for the chemical, pharmaceutical, energetic applications. They are also promising compounds of modern microfluidic units, labs-on-a-chip, fuel cells and other micro/nano technologies [3, 4, 5]. For instance, in the new version of smart Apple watch ver.4 BAF is used for visualization of information taken from the human body via the chemical/electrical skin signaling.

The first mathematical model of the active biological material was proposed by A.Hill in the form of a hyperbolic relationship between the tension (or load)  $F$  in the muscle and its active velocity of contraction  $v$ :

$$(F + a)(v + b) = (F_0 + a)b,$$

where  $F_0$  is the maximum isomeric tension/load in the muscle,  $a$  and  $b$  are coefficients. It describes the 1D contraction in the term of the dissipation function approach to the active muscular work [6].

The corresponding continual equation for 1D muscular tonus of blood vessels has been postulated in the form [7].

$$\tau_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = E\varepsilon + \tau_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \lambda, \quad (1)$$

where  $\sigma$  and  $\varepsilon$  are stress and strain,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  are the relaxation times,  $\lambda$  is a control parameter.

In the biological materials the control over the stress-strain relation is provided by local concentrations of some chemicals (Ca, NO) released by special cells. Therefore, the rheological equation (1) with the source term  $\lambda = \lambda(C_{Ca}, C_{NO}, \dots)$  must be completed by the corresponding balance equations for the concentrations  $\{C_j\}_{j=1}^n$  [8].

A simple model for the active blood vessel with changing radius  $R$  ( $\langle \sigma \rangle$ ,  $\langle p \rangle$ ), where  $\langle \sigma \rangle$  and  $\langle p \rangle$  are the averaged shear stress and pressure in the vessel postulated in the form

$$\dot{R}(t) = f(R, \sigma(t - \tau_1), p(t - \tau_2), \dots) \quad (2)$$

accounting for the delay in response of the corresponding stress and pressure receptors in the vessel wall, and completed by the Poiseuille flow based equations for the shear stress and pressure has been proposed in [9]. The solution was sought in the form of small excitations  $R = R_0 + R'$ ,  $\sigma = \sigma_0 + \sigma'$ ,  $p = p_0 + p'$ ,  $\{R', \sigma', p'\} = \{R_a, \sigma_a, p_a\} e^{\lambda t}$  where the subscripts 0 and a relate to the steady state and amplitudes. The stability condition  $Re(\lambda) < 0$  led to some conditions on the function  $f(R, \dots)$  and its derivatives.

The model (1) has been generalized in [10, 11] for the nonlinear viscoelastic Kelvin-Voigt body

$$\tau_2 \frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon = F(\sigma) + \tau_1 \frac{d\sigma}{dt} + \Lambda(C) \quad (3)$$

where  $F(\sigma)$  is the passive law function,  $\Lambda(C)$  is the control function via the concentration(s) of active chemical components.

In this paper a comparative study of the existing discrete rheological models and their continual analogies with the experimental data is carried out in order to conduct the identification of material parameters of the models on a minimal set of experimental measurements. The loading and relaxation curves for those models at the isometric, isotonic and oscillatory experiments have been studied in [12, 13]. Since in the experiments with soft biological tissues the dynamical loads at different extension rates are usually used, the corresponding mathematical models are needed for the adequate treatment and analysis of the experimental data.

## 2. Rheological model without regard for the time delay.

### 2.1. Three element model with one active element.

The model is represented (Fig.1 a) by two elastic spring elements correspondent to the passive elastic behavior of the outer  $E_1$  and internal  $E_2$  collagen structures, one viscous component  $\mu$ , and the active element that produces immediate mechanical response  $f = k_1\varepsilon + k_2\dot{\varepsilon}$  proportional to the local strain  $\varepsilon$  and strain rate  $\dot{\varepsilon}$ ,  $\dot{*} \equiv d*/dt$ . The model is a modified viscoelastic Zener model with one active element. Passive Zener model is widely used for interpretation of the experimental data obtained on single cells by atomic force microscopy or optical tweezers [14, 15]. The rheological equation for the model is [13] :

$$\begin{aligned} (k_2 + \mu) \dot{\sigma} + (k_1 + E_2) \sigma &= E_1 (E_2 + k_1) \varepsilon + \\ (E_1 (k_2 + \mu) + (E_2 + k_1) \mu) \dot{\varepsilon} &+ \mu k_2 \ddot{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4)$$

In the experiments with muscles a linear extension

$$\varepsilon(t) = kt \quad (5)$$

with a constant extension rate  $\dot{\varepsilon} = k$  is applied. Then the resulting rheological curves  $\sigma(t)$  can be obtained from (4) after substitution (5) with the initial conditions

$$\sigma(t_0) = \sigma_0 \quad (6)$$

and compared to the experimental curves  $\sigma_{exp}(t)$  measured by the stress sensors.

Solution of (4)-(6) is

$$\sigma(t) = k\mu + E_1kt + (\sigma_0 - k\mu) \exp\left(-\frac{E_2 + k_1}{k_2 + \mu}t\right). \quad (7)$$

When the external strain (5) is applied until the stress

$$\sigma_1 = \sigma(t_1) \quad (8)$$

at some  $t = t_1$  is reached and then the material got released, the relaxation curve  $\sigma_{rel}(t)$  can be obtained from (4) at  $\varepsilon = 0$  with initial condition (8) in the form

$$\sigma_{rel}(t) = \sigma_1 \exp\left(-\frac{E_2 + k_1}{k_2 + \mu}(t - t_1)\right). \quad (9)$$

For the dynamical experiments with a linear growing stress  $\sigma(t) = k_0 + kt$  applied to the viscoelastic body, the corresponding solution of (4) with initial conditions

$$\varepsilon(t_0) = 0, \quad \dot{\varepsilon}(t_0) = 0 \quad (10)$$

is

$$\varepsilon(t) = \frac{(E_1k_0 - \mu k)\mu k_2}{E_1^2} (1 - \exp(-\lambda_2 t)) + \frac{\mu k k_2}{E_1} t + C_3 \frac{(\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t))}{(\lambda_1 - \lambda_2) E_1^2}, \quad (11)$$

where

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \pm \sqrt{A^2 - 4B} - A \right), \quad A = \frac{(E_2 + k_1)\mu + (k_2 + \mu)E_1}{\mu k_2},$$

$$B = \frac{E_1(E_2 + k_1)}{\mu k_2}.$$

The corresponding relaxation curve for the strain can be obtained from (4) in the similar way and has the form

$$\varepsilon_{rel}(t) = \varepsilon_1 + \frac{\lambda_1 \varepsilon_1 + \dot{\varepsilon}_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \exp(-\lambda_2 t) - \frac{\lambda_2 \varepsilon_1 + \dot{\varepsilon}_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \exp(-\lambda_1 t), \quad (12)$$

where  $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$ ,  $\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}(t_1)$ ,  $t_1$  is the time instant when the sample got released from the load ( $\sigma = 0$ ).

The stress relaxation curve (3) exhibits simple exponential decay with time, while the strain relaxation demonstrates two-step dynamic with initial faster and final slower decays that is more proper to the biological materials. For the constant loads  $\sigma = \sigma^* = const$  and  $\varepsilon = \varepsilon^* = const$  the expressions (7),(9),(11),(12) give the corresponding curves obtained in [13].

Dynamical experiments on the model (4) with a periodical load  $\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$ , where  $\omega$  is the frequency of the load produce the oscillations of strain in the form

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i(\omega t + \psi)}, \quad (13)$$



where  $\varepsilon_0 = A\sigma_0$ ,  $A$  and  $\psi$  are the amplitude and phase shift which are complex functions of all the material parameters of the model. The expressions are not presented here for brevity. The corresponding simpler expressions for the case  $k_1 = 0, k_2 = 0$  are given in [13].

Viscoelastic properties and active reaction of the material lead to the phase shift between the applied load and produced strain oscillations. As it is known from vast experimental literature, the shift is negligible in the healthy tissues and noticeable in the case of pathologies connected with water accumulation in the tissues (oedema) and the active respond of the material to the applied load and its time dependent parameters [16].

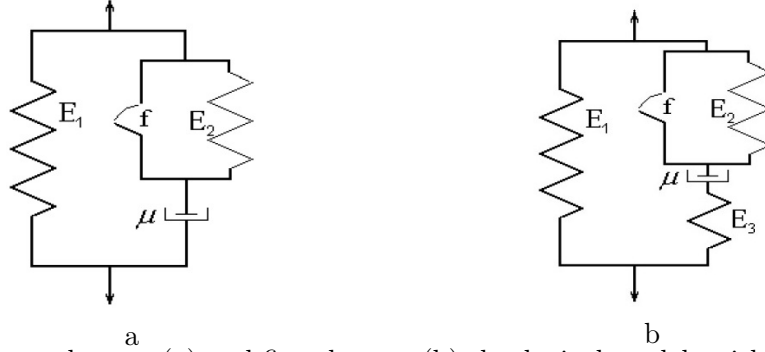


Fig. 1: Three element (a) and five element (b) rheological models with one active element.

## 2.2. Five element model with one active element.

The more detailed five element rheological model (Fig.1b) of an active biological material like muscles is described by the corresponding rheological equation [13]

$$\begin{aligned} \mu k_2 \ddot{\sigma} + ((k_2 + \mu) E_3 + (E_2 + k_1) \mu) \dot{\sigma} + E_3 (k_1 + E_2) \sigma = \\ E_1 E_3 (E_2 + k_1) \varepsilon + (E_1 E_3 (k_2 + \mu) + (E_2 + k_1) (E_1 + E_3) \mu) \dot{\varepsilon} + \\ \mu (E_1 + E_3) k_2 \ddot{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (14)$$

where  $E_1, E_2, \mu, k_1, k_2$  have the same meaning as in (4), and  $E_3$  corresponds to passive elastic tissues which are in a series connections with the contracting muscle fibers. This model better explains the rheological behavior of the stresses, over trained or diseased tissues. Normal circular muscles in mammals as well as active contracting structures in insects and mollusks also have serial inclusions of passive tissues [16].

The isotonic, isometric and oscillatory experiments with model (7) have been studied in [12, 13]. Let us consider the linear extension in the form (5) applied to

(14) with the same initial conditions (6); then to solution reads

$$\sigma(t) = C + E_1 k t + \frac{\dot{\sigma}_0 + \lambda_2(\sigma_0 - C) - E_1 k}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-\lambda_1 t) + C_4 \frac{E_1 k - \dot{\sigma}_0 - \lambda_1(\sigma_0 - C)}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-\lambda_2 t), \quad (15)$$

where

$$\sigma_0 = \sigma(0), \quad \dot{\sigma}_0 = \dot{\sigma}(0),$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( A \pm \sqrt{A^2 - 4B} \right), \quad A = \frac{((k_2 + \mu) E_3 + (E_2 + k_1) \mu)}{\mu k_2},$$

$$B = \frac{E_3(k_1 + E_2)}{\mu k_2}, \quad C = \frac{(E_2 + k_1)^2 ((E_1 + E_3) E_3 - E_1 E_3 k)}{k_2}.$$

For the linear growing stress  $\sigma(t) = k_0 + kt$  the solution of (14) with initial conditions (10) is

$$\varepsilon(t) = C + \frac{k}{E_1} t + \frac{k/E_1 + \lambda_2 C}{\lambda_1 - \lambda_2} \exp(-\lambda_1 t) - \frac{k/E_1 + \lambda_1 C}{\lambda_1 - \lambda_2} \exp(-\lambda_2 t), \quad (16)$$

where

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \pm \sqrt{A^2 - 4B} - A \right), \quad A = \frac{(E_1 E_3 (k_2 + \mu) + (E_2 + k_1) (E_1 + E_3) \mu)}{\mu (E_1 + E_3) k_2},$$

$$B = \frac{E_1 E_3 (E_2 + k_1)}{\mu (E_1 + E_3) k_2}, \quad C = \frac{((k_2 + \mu) E_3 + (E_2 + k_1) \mu) k + E_3 (k_1 + E_2) k_0}{E_1 E_3 (E_2 + k_1)}.$$

The corresponding relaxation curves for the five element model can be also written in the forms (9) and (12) accordingly. Despite the tree element model, the five element one exhibits the two time relaxation processes for both stress and strain relaxations that is more common for the biological tissues especially in the pathological state [14, 15, 16].

Dynamical experiments with the model also produce a phase shift between the applied oscillating load and the resulting oscillations of the measured strain in the form of (13) with different more complex expressions for the amplitude  $A$  and phase shift  $\psi$ .

### 3. Rheological models with time delay.

#### 3.1. Three element model.

The active respond of the biological tissues is determined by reactions of the corresponding receptors or mediated by chemical reactions [16]. This response can come with some time delay or even two times in the case of different sensors; therefore, the active delayed response (2) can be written in the form of the control function

$$f(t) = k_1 \varepsilon(t - \tau_1) + k_2 \dot{\varepsilon}(t - \tau_2), \quad (17)$$

where  $\tau_1, \tau_2$  are the delays for the strain and strain rate receptors.

Then instead of (4) one can obtain the following rheological equation

$$\mu \dot{\sigma}(t) + E_2 \sigma(t) = E_1 E_2 \varepsilon(t) + \mu(E_1 + E_2) \dot{\varepsilon}(t) + \mu(k_1 \dot{\varepsilon}(t - \tau_1) + k_2 \ddot{\varepsilon}(t - \tau_2)). \quad (18)$$

For the dynamical experiments with a linear growing stress the solution of the resulting equation

$$\begin{aligned} \mu(E_1 + E_2) \dot{\varepsilon}(t) + E_1 E_2 \varepsilon(t) + \mu k_2 \ddot{\varepsilon}(t - \tau_2) + \mu k_1 \dot{\varepsilon}(t - \tau_1) = \\ \mu k + E_2(k_0 + kt). \end{aligned} \quad (19)$$

can be found in the form

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-\lambda t} + \frac{k}{E_1} t + \frac{E_1 k_0 - k \mu}{E_1^2} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (20)$$

where  $\varepsilon_0 = \varepsilon(t)$  and the constant  $\lambda$  is a solution of the transcendental equation similar to [9]:

$$E_1 E_2 = \lambda \mu (E_1 + E_2) + \mu k_1 \lambda e^{\lambda \tau_1} - \mu k_2 \lambda^2 e^{\lambda \tau_2} \quad (21)$$

For the dynamical experiments with oscillating external load  $\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$  (18) gives the following non-uniform ODE with delay

$$\begin{aligned} \mu(E_1 + E_2) \dot{\varepsilon}(t) + E_1 E_2 \varepsilon(t) + \mu(k_1 \dot{\varepsilon}(t - \tau_1) + k_2 \ddot{\varepsilon}(t - \tau_2)) = \\ \sigma_0 e^{i\omega t} (E_2 + i\omega \mu) \end{aligned} \quad (22)$$

Solution of (22) can be found as a superposition of the oscillating and non-oscillating terms

$$\varepsilon(t) = A \sigma_0 \left( e^{i(\omega t + \psi)} - e^{i\psi - \lambda t} \right), \quad (23)$$

where

$$A = \sqrt{(E_2 f_1 + \omega^2 \mu f_2)^2 + \omega^2 (\mu f_1 + E_2 f_2)^2}, \quad \psi = \text{atan} \left( \frac{\omega (\mu f_1 + E_2 f_2)}{E_2 f_1 + \omega^2 \mu f_2} \right),$$

$$f_1 = E_1 E_2 - \mu k_2 \omega^2 \cos(\omega \tau_1) + \omega \mu k_1 \sin(\omega \tau_2),$$

$f_2 = \mu(E_1 + E_2) + \omega \mu k_2 \sin(\omega \tau_1) + \mu k_1 \cos(\omega \tau_2)$ ,  $\lambda$  is the solution of the transcendental equation  $E_1 E_2 - \lambda \mu (E_1 + E_2) = \mu (\lambda k_1 e^{-\lambda \tau_1} - \lambda^2 k_2 e^{-\lambda \tau_2})$ .

### 3.2. Five element model.

For the five element model (Fig.1b) with delay instead of (13) one can obtain the following rheological equation

$$\begin{aligned} \mu(E_1 E_2 + E_1 E_3 + E_2 E_3) \dot{\varepsilon} + E_1 E_2 E_3 \varepsilon + \\ E_3 \mu (k_1 \dot{\varepsilon}(t - \tau_1) + k_2 \ddot{\varepsilon}(t - \tau_2)) = E_2 E_3 (k_0 + kt) + \mu (E_2 + E_3) k \end{aligned} \quad (24)$$

that has the solution in the form

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-\lambda t} + \frac{k}{E_1} t + \frac{E_1 E_2 k_0 - \mu k (E_2 + k_1)}{E_1^2 E_2} \quad (25)$$

where  $\varepsilon_0 = \varepsilon(t)$  and the constant  $\lambda$  is a solution of the transcendental equation

$$E_1 E_2 E_3 = \mu (E_1 E_2 + E_1 E_3 + E_2 E_3) \lambda + E_3 \mu k_1 \lambda e^{\lambda \tau_1} - E_3 \mu k_2 \lambda^2 e^{\lambda \tau_2} \quad (26)$$

For the dynamical experiments with oscillating external load the corresponding solution of (24) is similar to (23).

#### 4. Numerical results and discussions.

Numerical computations on (7), (9),(11),(12), (15), (16) have been carried out with following model parameters:  $E_{1,2,3} = 10^5 - 10^8 Pa$ ,  $\mu = 1 - 10^3 Pa \cdot s$ ,  $\tau_{1,2} = 10 - 50 s$ ,  $k_1 = 10^6 - 10^7 Pa$ ,  $k_2 = 10 - 100 Pa \cdot s$ . The results have been plotted in the non-dimensional form using the characteristic values  $\sigma^* = 10^4 Pa$ ,  $t^* = 5 \text{ min}$ . The load was applied at  $0 < t < 10$  and then relaxed at  $t > 10$ .

Typical time dependencies of the measured non-dimensional stress over the non-dimensional time  $\sigma(t)$  are presented in Fig.1 for the three-element (Fig.2a) and five-element (Fig.2b) rheological models with one active element without delay. In comparison to the isometric experiments [13] both models exhibit faster dynamics of the stress growth due to the linear terms in (7),(15). The three-element model has the only relaxation time  $\lambda^{-1}$  that is a complex combination of the model parameters. Therefore, identification of the parameters  $E_1 k$  and  $\mu k$  can be carried out on the growing part of the  $\sigma(t)$  curve (Fig.2a) and only the combinations of the parameters can be determined. Then the value  $\lambda^{-1} = (k_2 + \mu) / (E_2 + k_1)$  can be identified on the relaxing part of the same curve. Knowing the combinations  $E_1 k$  and  $\mu k$ , the values, the parameters  $E_2, k_1, k_2$  can not be separately determined. As it was shown in [13] in the case of a passive model the oscillatory experiments give an opportunity to determine all the material parameters separately. In the case of the active material with two more unknown material parameters  $k_1, k_2$  even the dynamical experiments will not allow determination of all the parameters. In the case of biological materials some additional chemical treatment changing elasticity of the fibers (i.e.  $E_1, E_2$  or  $E_3$ ) could be useful [14, 15] .

The five-element model demonstrates two-phase relaxation with different relaxation times  $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}$  that correspond to the bigger and smaller positive roots of the related quadratic equation in (15). This is an essential feature of dynamical behavior of complex viscoelastic materials even without any active response [13]. Again, in the case of one active element the identification of the material parameters is somehow complicated, because all the parameters are introduced in the values  $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}$  in certain combinations only. The dynamical experiments give an opportunity for complete identification only for a passive five-element material [13].

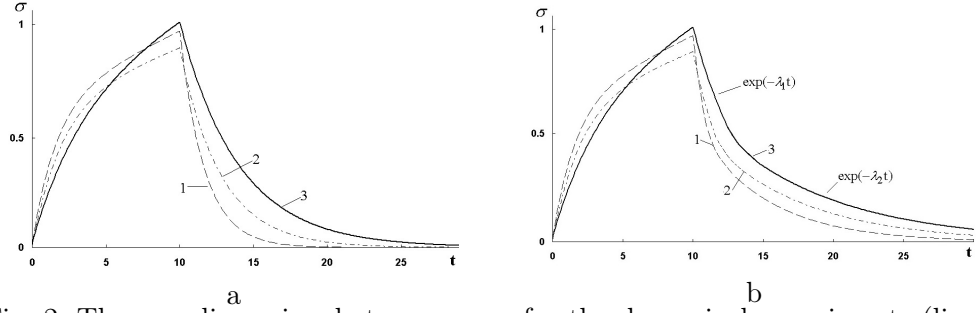


Fig. 2: The non-dimensional stress curves for the dynamical experiments (linear load and relaxation) for the three-element (a) and five-element (b) models for  $E_1 = 10^6 \text{Pa}$ ,  $\mu = 100 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $k_1 = 10^6 \text{Pa}$ ,  $k_2 = 100 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ; the curves 1-3 correspond to  $E_2 = 10^5; 5 \cdot 10^5; 10^6 \text{Pa}$ ; the values for  $E_3$  has been computed to get similar dynamics of the stress increase during the load period.

The influence of the time delay is illustrated by Fig.3a,b. Here the results of experiments with load and relaxation at different load rates  $k=0.1; 1.10$  have been computed. As it is known from biomechanics of soft tissues, the larger stresses and elongations can be achieved at lower loading rates, both stress and strain rates [17]. Similar dynamics is visible on the five-element models without (Fig.3a) and with time delay (Fig.3b). When the delay is absent (passive material), the changes from the load to relaxation curves are resented by sharp changes in the tangents to the loading and relaxation curves (Fig.3a). The delay prolongs the ‘respond’ of the material after the transition from load to relaxation and the correspondent transition is presented as a smooth line for all the strain rates applied (Fig.3b). This smoothness is almost insignificant at short delays, and for visibility purposes it has been taken quite large comparative to those detected in experiments with active muscles [17].

An alternative representation of the rheological representation of the cycling loading-discharge experiments is usually presented by the stress-strain  $\sigma(\varepsilon)$  or stress-strain rate  $\sigma(\dot{\varepsilon})$  curves [17]. The discharge curve is always located below the corresponding load curve because of some energy dissipated during the deformations. Some sets of experimental data with aortic wall and muscles [17] have been chosen for testing the studied 3-element and 5-element models. Due to different amounts of elastin and collagen in the vessel wall and muscles, the  $\sigma(\varepsilon)$  curves exhibit high elongation at lower loads when the actin fibers participate in the deformation, followed by smaller elongation at higher loads when the more rigid collagen fibers participate in the deformation (Fig.4a). The differences between the corresponding load and discharge curves in each cycle of load are small because of the high efficiency of the muscle work and negligible energy dissipation. Based on the experimental data, the parameters of the 3-element and 5-element models without delay have been identified by the least square method. As it is shown by Fig.4a, the 3-element model when being well matched to the low loads does not correspond to the dynamics at the high loads, for both models (without or

with delay). The 5-element model better correspond to the experimental data. The model without delay being well matched to the low loads, underestimate the stress, while the model with delay is overestimate it.

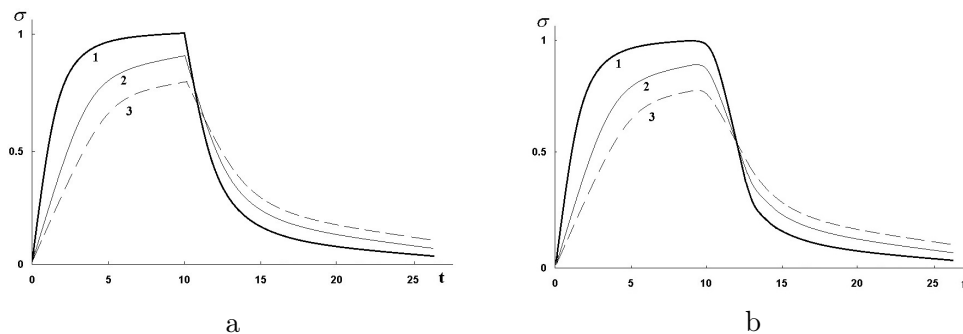


Fig. 3: The non-dimensional stress curves for the dynamical experiments for the five-element model without (a) and with (b) delay; the material parameters are the same as in Fig.2; the curves 1-3 correspond to  $k = 0.1; 1; 10$ .

In Fig.4b the load-relaxation curves computed on the rheological parameters identified from the experimental curves (Fig.4a) on the 5-element models are presented. The curves 1-3 correspond to the same strain rates  $k=0.1, 1, 10$ , while the solid lines depict the model without delay while the thin lines shows the relaxation curves for the 5-element model with delay. The last model shows again the smoother dynamics, because at the beginning of the relaxation the delay in the active respond influences the initial part of the relaxation curves. Moreover, the models without/with delay again slightly over/underestimate the reaction of the active material to both load and relaxation.

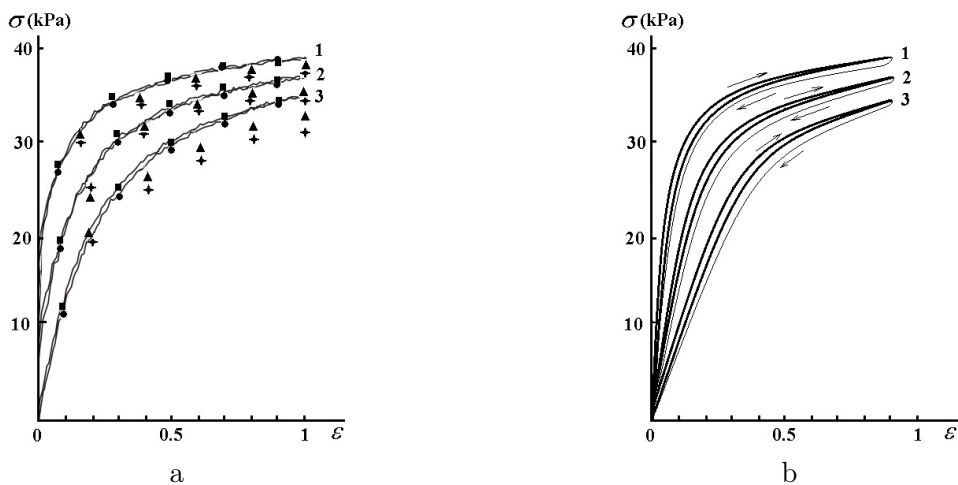


Fig. 4: The dimensional experimental  $\sigma(\epsilon)$  curves for the aortic wall (a) heart tissues (b); the curves 1-3 correspond to the strain rates  $0.1, 1, 10 \text{ s}^{-1}$ , the symbols  $\clubsuit$  and  $\blacktriangle$  correspond to 3-element models without and with delay, the symbols  $\blacksquare$  and  $\bullet$  correspond to 5-element models without/with delay.

Similar results have been obtained for the experimental data (Table 1) measured on the heart tissues [18]. It was shown, a five-element rheological model better corresponds to the experimental data than the standard three-element model [18]. The model differs from one presented in (Fig.1b) by the second viscous element ( $\mu_2$ ) instead of the active element used in our model. It means, the 5-element model in [18] corresponds to our 5-element model without delay and  $k_1 = 0$ . The experimental data have been obtained on 10 samples of human heart tissues and exhibit significant scatter. The identified values of the model [18] parameters correspondent to our model are given in Table 1. The numerical data correspond to the mean experimental values. The comparative study reveals very good agreement between the experimental data measured on heart tissues and our modeling results (Fig.4b).

Table 1: Averaged measurement data for the material parameters of the 5-element rheological model [18] and our model presented in (Fig.1b); the Young modules and viscosity are measured in  $MPa$  and  $Pa \cdot s$  respectively.

$\varepsilon$	Experimental data					Computed data				
	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$\mu_1$	$\mu_2$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$\mu_1$	$\mu_2$
0.1	0.92± 0.80	0.31± 0.25	0.28± 0.22	32.2± 23.8	18.4± 16.0	0.88	0.26	0.22	30.8	18.1
0.2	1.69± 1.40	0.49± 0.36	0.38± 0.27	55.8± 38.9	25.3± 19.0	1.67	0.46	0.31	54.6	24.9
0.3	2.50± 1.86	0.73± 0.51	0.58± 0.37	83.4± 58.6	37.5± 24.6	2.44	0.69	0.52	81.8	36.9
0.4	3.29± 2.11	0.97± 0.59	0.8± 0.44	109.9± 68.6	49.1± 26.1	3.25	0.93	0.74	108.4	48.5
0.5	4.07± 2.25	1.23± 0.71	1.11± 0.54	143.9± 94.8	65.0± 31.2	4.02	1.19	1.06	142.1	64.3
0.6	4.89± 2.40	1.44± 0.58	1.25± 0.53	165.3± 6.76	77.2± 3.04	4.83	1.40	1.21	163.9	76.3

## 5. Conclusions.

Based on different experimental data, it was shown the 5-element rheological models better correspond to the experimental curves measured on soft viscoelastic biological tissues during their mechanical load and relaxation. Nowadays the most popular rheological models are 3-element and 5-element passive models with 2(3) elastic and 1(2) viscous elements accordingly. The more complex model with one active element reacting additively on both strain and strain rate changes with two different time delay was found perfectly corresponding to the experimental studies on different viscoelastic samples. In the presented study the differences between dynamical behavior of the 3 and 5-element rheological models without/with time delay in the load/discharge experiments have been studied. It was shown, the time

delay is essential to distinguish the realistic behavior of biological active (live) tissues. The constitutive relations for 3-element and 5-element models without and with delay were obtained and studied for the linear strain load experiments. The obtained data were compared to the experimental curves measured on the vessel wall and heart tissues. The better correspondence is detected for the 5-element curve that exhibit two-time relaxation, and for the model with delay.

**Acknowledgement.** The authors are grateful to the organizers and participants of the 3rd International conference "Differential Equations and Control Theory" (DECT-2018) for the interest to the topic and stimulating discussions.

#### REFERENCES

1. G. Bao, S. Suresh. Cell and molecular mechanics of biological material. *Nature Materials*, – 2003 – **2**. – P. 715–725.
2. H. Fröhlich. Coherent Excitation in Active Biological Systems. In: F. Gutmann, H. Keyzer (eds). *Modern Bioelectrochemistry*. Springer, Boston, MA.,– 1986 – P. 241–261.
3. D. Saintillan, Rheology of Active Fluids. *Annual Review of Fluid Mechanics*, – 2018 – **1**. **50**. – P. 563–592.
4. M.C. Marchetti, J.F. Joanny, S. Ramaswamy, T.B. Liverpool, J. Prost, M. Rao, S.R. Aditi, Hydrodynamics of soft active matter. *Reviews of Modern Physics*, – 2013. – **3**. **85**. – P. 1143–1189.
5. V. Bratanov, F. Jenko, E. Frey, New class of turbulence in active fluids. *Proceedings of the National Academy of Sciences*,– 2015. – **49**. **112**. – P. 15048–15053.
6. S.R. Caplan, Autonomic energy conversion. II. An approach to the energetics of muscular contraction. *Biophys J.*, – 1968. – **8**. – P. 1167–1193.
7. S.A. Regirer, I.M. Rutkevich, P.I. Usik, Model of vascular tone. *Mechanics of Polimers*, – 1975. – **4**. – P. 585–589.
8. N.Kh. Shadrina, V.A. Buchin, Mathematical Modeling of the Response of a Resistive Vessel to Pressure. *Biophysics*, – 2009. – **2**. **54**. – P. 188–192.
9. S.A. Regirer, N.Kh. Shadrina, A simple model of a blood vessel with the wall sensitive to mechanical stimuli. *Biophysics*, – 2002. – **5**. **47**. – P. 845–850.
10. N.N. Kizilova, E.N. Filippova, The model of arterial tree with autoregulation as viscoelastic chamber from bioactive material. *Mechanics. The scientific research and study-methodology developments. Collected articles of Gomel*, – 2014.–**8**. – P. 100–105. (in Russian).



11. H. Philippova, N. Kizilova, The investigation of the flow of viscous fluid in the viscoelastic chamber from bioactive material. Reporter Of Kyiv National University of Taras Shevchenko. Series: "Physics and mathematics sciences", – 2015. – 5. **47**. – P. 845–850. (in Ukrainian).
12. E.N. Solovyova, N.N. Kizilova, The analysis of discrete models of bioactive soft and fluid materials. Collected articles of XVIII International symposium "The methods of discrete singularities in problems of mathematical physics" (MDOZMF-2017). Kharkiv, – 2017. – P. 198–201. (in Russian).
13. N.N. Kizilova, E.N. Solovyova, The analysis of the rheology models of bioactive soft and fluid materials. Reporter of Kharkiv National University of V.N. Karazin. Ser. "Mathematical modelling. Thechnology of information. Automatization systems of control". – 2017. – **35**. – P. 21–30. (in Russian).
14. T. Bronshtein, G.C.T. Au-Yeung, U. Sarig et al., A Mathematical Model for Analyzing the Elasticity, Viscosity, and Failure of Soft Tissue: Comparison of Native and Decellularized Porcine Cardiac Extracellular Matrix for Tissue Engineering. Tissue Eng Part C Methods. – 2013. – Aug. – 8. **19**. – P. 620–630.
15. Y. Zhu, Y. Zheng, Y.-Y. Shen et al., Analyzing and modeling rheological behavior of liver fibrosis in rats using shear viscoelastic moduli. J Zhejiang Univ Sci B. – 2014. – Apr. – 4. **15**. – P. 375–381.
16. Biomechanics of Cells and Tissues. Experiments, Models and Simulations. P. Lecca (Ed.), – 2013. – 175 p.
17. Mechanics of Biological Tissue. G. A. Holzapfel, R. W. Ogden (eds.), Heidelberg: Springer-Verlag, – 2005. – 466 p.
18. P. Kochova, J. Klepacek, J. Hlubocky et al., Heart valve viscoelastic properties - a pilot study. Applied and Computational Mechanics, – 2007. – **1**. – P. 97–104.

Соловійова О. М., Кізілова Н. М. **Математичне моделювання біоактивної артеріальної стінки.** Біологічно активні матеріали - це біологічні тканини або штучні матеріали, які можуть виконувати механічну роботу за рахунок хімічних реакцій, конфірмаційних змін, формування мікро - та мезоструктури та реконструкції. Такіх матеріалів багато у біологічних організмах, таких як скелетні, гладкі та серцеві м'язи, джгутики та вії в бактеріях, цитоскелет і молекулярні мотори в клітинах. Біологічні тканини та їх штучні замінники складаються з різних волокон і мають складні в'язко-пружні властивості. Відповідність матеріальних параметрів природних та інженерних матеріалів при різних режимах навантаження та релаксації має важливе значення для їх успішної та тривалої роботи. Перша математична модель активного біологічного матеріалу була запропонована А. Хіллом у вигляді гіперболічного зв'язку між напругою (або навантаженням) в м'язі та його активна швидкість стиснення. В роботі розглянуті найпопулярніші 3-елементні та 5-елементні реологічні моделі м'яких тканин людини як в'язкопружні тіла, що враховують затримку часу між навантаженням та механічним відгуком матеріалу. Затримка часу стосується лише активних (живих) біологічних матеріалів. В роботі моделюється активний

відгук як додаткова лінійна в'язко-еластична реакція на швидкість деформації та деформації матеріалу. У біологічних тканинах такий відгук забезпечується різними датчиками і, таким чином, моделюється різними затримками часу. Отримані та досліджені рівняння для 3-елементних та 5-елементних моделей без затримки і з затримкою часу, та вивчені для лінійних деформацій при експериментах. Відмінності між моделями описуються в термінах навантаження-релаксація кривих. Отримані дані порівнювались з експериментальними кривими отриманими на стінці судин і тканинах серця. Краща відповідність була отримана для 5-елементної кривої, яка демонструє дворазову релаксацію, і для моделі з затримкою.

*Ключові слова:* активні біоматеріали; в'язкопружні рідини; математичне моделювання.

H. N. Solovyova, N. N. Kizilova. **Mathematical modeling of bioactive arterial wall.**

Bioactive materials are biological tissues or artificial materials that can perform a mechanical work at the expense of chemical reactions, conformational changes, micro- and mesostructure formation and remodeling. Such materials are abundant in biological organisms like skeletal, smooth and cardiac muscles, flagella and cilia in bacteria, cytoskeleton and molecular motors in the cells. Biological tissues and their artificial substitutes are composed by different fibers and possess complex viscoelastic properties. Correspondence of the material parameters of natural and engineered materials at different loading regimes and relaxation is essential for their successful and long time performance. The first mathematical model of the active biological material was proposed by A.Hill in the form of a hyperbolic relationship between the tension (or load) in the muscle and its active velocity of contraction. Here the most popular 3-element and 5-element rheological models of human soft tissues as viscoelastic bodies are considered accounting for the time delay between the load and mechanical response of the material. The time delay is only proper to active (live) biological materials only. Here the active response is modeled and the additive linear viscoelastic reaction to the strain and strain rate of the material. In the biological tissues such response is provided by different sensors and, thus, is modeled by distinct time delays. The constitutive relations for 3-element and 5-element models without and with delay are obtained and studied for the linear strain applied experiments. The differences between the models are described in terms of the load-relaxation curves. The obtained data compared to the experimental curves got on the vessel wall and heart tissues. The better correspondence is detected for the 5-element curve that exhibit two-time relaxation, and for the model with delay.

*Keywords:* active biomaterials; viscoelastic fluids; mathematical modelling.

Article history: Received: 6 November 2018; Final form: 14 December 2018;

Accepted: 16 December 2018.

## Численное моделирование термодинамики ядерного реактора на быстрых нейтронах

Жученко С. В.

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4, 61002, Харьков, Украина  
stanislavzhuchenko@ukr.net*

В статье предлагается алгоритм решения двумерной начально-краевой задачи, возникающей при численном моделировании быстро протекающих процессов термодинамики, которые происходят в кассете из нескольких тепловыделяющих элементов, а также в примыкающих к ней коллекторах. Также представлены результаты некоторых вычислительных экспериментов, проведенных с помощью авторской программы ПЭВМ.

*Ключевые слова:* кассета тепловыделяющих элементов; распределительный и сборный коллекторы; гелиевый теплоноситель; турбулентные течения; возвратные потоки; аварийная ситуация; траектории свободных вихрей.

**Жученко С. В. Чисельне моделювання термодинаміки ядерного реактора на швидких нейтронах.** У статті пропонується алгоритм розв'язання двомірної початково-крайової задачі, що виникає при чисельному моделюванні швидко протікаючих процесів термодинаміки, які відбуваються в касеті з декількох тепловиділяючих елементів, а також в колекторах, що примикають до неї. Також представлені результати деяких обчислювальних експериментів, проведених за допомогою авторської програми ПЕВМ.

*Ключові слова:* касета тепловиділяючих елементів; розподільний і збірний колектори; гелієвий теплоносій; турбулентні течії; поворотні потоки; аварійна ситуація; траєкторії вільних вихорів.

**S. V. Zhuchenko. Numerical simulation of the thermodynamics of a fast neutron reactor.** The article offers an algorithm of solving two dimensional initial-boundary value problem with computational modelling of fast proceeding thermodynamical processes, that appears in the cassette that consist of several fuel elements, and adjacent collectors. What is more there are some results of computing experiments that were conducted by using author's PC program.

*Keywords:* cassette of fuel elements; distributive and collapsible collector; helium coolant-moderator; turbulent flows; recurrent streams; emergency situation; trajectories of free whirlwinds.

*2010 Mathematics Subject Classification:* 76W05.

## 1. Введение

В статье предлагается алгоритм совместного решения начально-краевой задачи термодинамики в активной зоне ядерного реактора на быстрых нейтронах и в примыкающих к ней коллекторах. В качестве теплоносителя в реакторе используется газ гелий. Ядерное топливо представлено в виде круглых шариков диаметром 2–5 мм, которые засыпаются в активную зону реактора. Эти шарики в дальнейшем будут называться микротвэлами, а активная зона вместе с заполняющими её шариками будет называться тепловыделяющим элементом или твэлом.

В статье рассматривается один вариант конструкции такого реактора, в котором один твэл представляет собой кольцевую полость, образованную двумя соосными круговыми цилиндрами. Оба основания этой кольцевой области сделаны проницаемыми и через них с одной стороны из распределительного коллектора в твэл поступает холодный газ, а с другой — нагретый газ из твэла поступает в сборный коллектор.

На рис. 1 показаны осевое и поперечное сечение кассеты из нескольких таких твэлов с коллекторами. В силу сложности течения газа в коллекторах и в засышке в предлагаемой математической модели всюду рассматривается осреднённое течение теплоносителя. Предполагается, что осреднённое течение всюду симметрично относительно общей оси цилиндров, образующих кольцевую область, а, следовательно, осесимметрично, то есть двумерное. Во второй главе рассматривается постановка задачи термодинамики и метод её решения отдельно в каждом из твэлов и в коллекторах. В прежние годы автор уже рассматривал численные модели подобных реакторов [1] — [4], но тогда поток теплоносителя в коллекторах предполагался одномерным, что чрезмерно упрощало реально моделируемый физический процесс. В третьей главе предлагается алгоритм совместного решения задачи для всей кассеты.

В четвертой главе приводятся результаты вычислительных экспериментов, которые получены с помощью программы ПЭВМ, составленной и отлаженной автором для решения этой задачи. Уточняются некоторые особенности программы, обсуждаются вычислительные трудности, возникающие при отладке программы, и предлагаются методы их преодоления.

## 2. Раздельное решение двумерных задач термодинамики в ТВЭЛЕ и коллекторах

В данной главе для описания применяемой математической модели рассмотрим решение подобной задачи отдельно для одного твэла и отдельно в примыкающих к нему распределительном и сборном коллекторах. На рис. 2 показано аксиальное сечение такой конструкции. Течение в твэле и коллекторах предполагается нестационарным. Задача состоит в определении распределения осреднённых значений скоростей, плотности, температуры и энергии

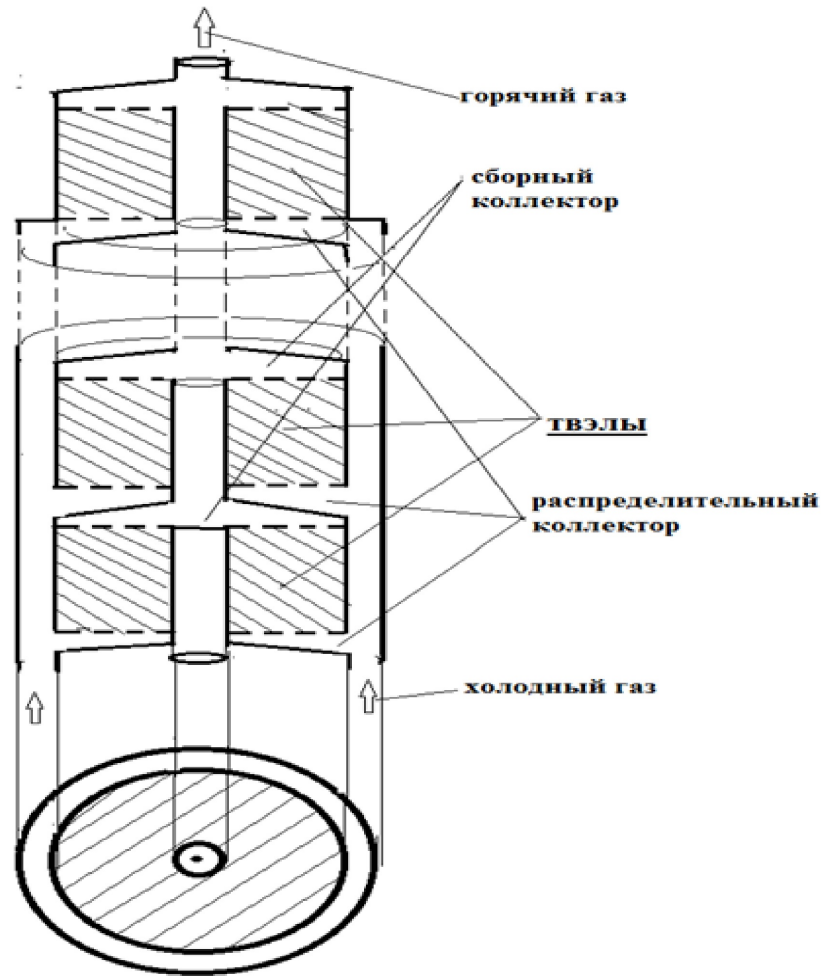


Рис. 1: Кассета из тепловыделяющих элементов

теплоносителя в твэле и коллекторах на всём этапе его нагрева от момента, когда он холоден, до момента полного нагрева. В силу турбулентности потока его течение не будет стационарным даже после полного нагрева теплоносителя в твэлах, и от этого температура нагретого газа на выходе из такого твэла будет постоянно меняться возле своего среднего значения.

## 2 а. Постановка задачи термодинамики в тепловыделяющем элементе

Задачу по определению параметров теплоносителя в твэлах предлагается решать по методу решения нестационарной начально-краевой задачи. Для получения такой задачи аксиальное сечение твэла, как это показано на рис. 2, разбивается на элементарные объёмы. После этого, по аналогии с методом

«потоков» [5], в твэле для каждого элементарного объёма составляются интегральные соотношения, вытекающие из законов сохранения массы и полной внутренней энергии:

$$\int_{\Omega_{i,j}} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} d\Omega + \int_{S_{i,j}} \rho(\bar{V}, \bar{n}) dS = 0, \quad (1)$$

где

$S_{i,j} = S_{i,j}^* \varepsilon_{i,j}$  — поверхность элементарного объёма (с учетом просветности);

$\Omega_{i,j} = \Omega_{i,j}^* \varepsilon_{i,j}$  — элементарный объём (с учетом пористости);

$\varepsilon_{i,j}$  — просветность засыпки в узле  $(i, j)$ . В статье предполагается, что пористость равна просветности, хотя легко реализовать и другие варианты;

$S_{i,j}^*$  — поверхность элементарного объёма  $\Omega_{i,j}^*$ ;

$\tau$  — время;

$\bar{n} = (n_z, n_r)$  — вектор внешней нормали к поверхности  $S_{i,j}$ ;

$\rho$  — плотность теплоносителя;

$\bar{V} = (u_z, v_r)$  — вектор скорости.

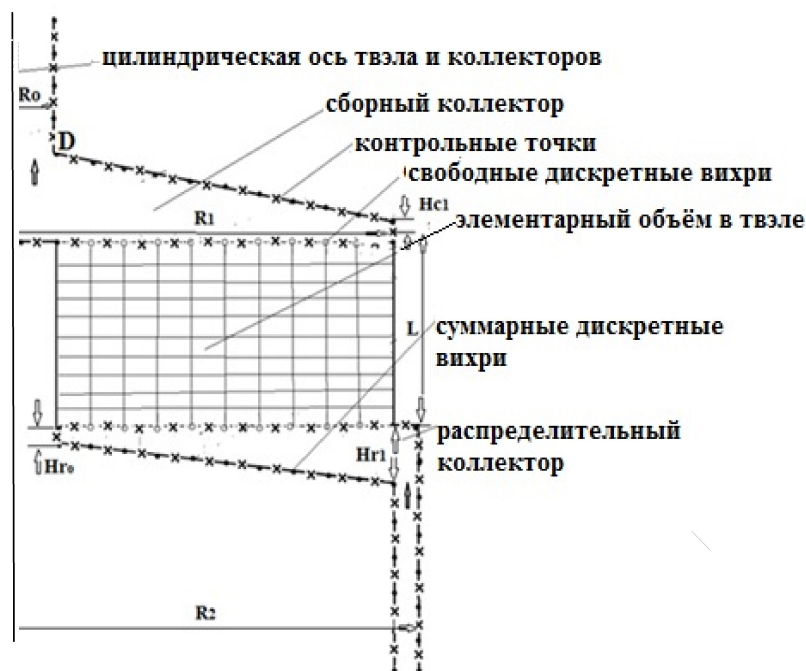


Рис. 2: Пример разбиения аксиального сечения твэла на элементарные объёмы, а также положение дискретных вихрей и контрольных точек в коллекторах.

Уравнение сохранения полной внутренней энергии:

$$\int_{\Omega_{i,j}} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\Omega + \int_{S_{i,j}} E(\bar{V}, \bar{n}) dS = \int_{S_{i,j}} \lambda(\bar{\nabla} T, \bar{n}) dS - \int_{S_{i,j}} P(\bar{V}, \bar{n}) dS + \int_{S_{i,j}^M} \alpha(\Theta_{i,j}^M - T) dS, \quad (2)$$

где

$E$  — полная внутренняя энергия теплоносителя;

$P$  — давление теплоносителя;

$\lambda$  — эффективная теплопроводность теплоносителя;

$\alpha$  — коэффициент теплопередачи на границе теплоноситель — микротвэл;

$\Theta_{i,j}^M$  — температура на поверхности микротвэла — представителя засыпки в элементарном объёме  $\Omega_{i,j}$ ;

$T$  — температура теплоносителя;

$S_{i,j}^M$  — суммарная поверхность микротвэлов, расположенных в  $\Omega_{i,j}$ .

Кроме интегральных соотношений (1) и (2), на соответствующих границах элементарного объёма составляются дифференциальные уравнения сохранения вектора импульса количества движения  $\rho \bar{V} = (\rho u_z, \rho v_r)$ :

— на поверхностях элементарного объёма, перпендикулярных оси  $OZ$  цилиндров, образующих твэл (для компоненты  $\rho u_z$ )

$$\frac{\partial \rho u_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} - F_{i,j}^z u_z |\rho \bar{V}|; \quad (3)$$

— на цилиндрических поверхностях, перпендикулярных радиусу цилиндрической поверхности (для компоненты  $\rho v_r$ )

$$\frac{\partial \rho v_r}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial r} - F_{i,j}^r v_r |\rho \bar{V}|. \quad (4)$$

Здесь  $F_{i,j}^z, F_{i,j}^r$  — коэффициенты объёмного сопротивления засыпки в элементарном объёме  $\Omega_{i,j}$ .

В уравнениях (3) и (4) отсутствуют конвективные и дисперсионные члены, поскольку, как показывают физические и вычислительные эксперименты, они пренебрежимо малы в сравнении с силами объёмного сопротивления засыпки.

Наряду с уравнениями (1)–(4) в каждой элементарной ячейке  $\Omega_{i,j}$  рассматриваются и одномерные уравнения теплового баланса, составленные для элементарных объёмов в микротвэле — представителе шаровой засыпки:

$$\int_{W_k} C^M \frac{\partial \Theta_{i,j}}{\partial \tau} dW = \int_{S_k} \lambda^M (\bar{\nabla} \Theta_{i,j}, \bar{n}) dS + \int_{W_k} Q dW, \quad (5)$$

где

$\Theta_{i,j}(r)$  — функция температуры в микротвэле;

$C^M$  — теплоёмкость материала микротвэлов;

$\lambda^M$  — теплопроводность материала микротвэлов;

$Q$  — удельное тепловыделение материала микрострелы;

$W_k$  — сферические слои, на которые разбивается микрострела концентрическими сферами радиуса  $R_k = \Delta r * k$ , ( $k = 1, 2, \dots, L$ );

$S_k$  — площадь срединного сечения элементарного сферического слоя  $W_k$ .

Одномерное уравнение (5) возникает из предположения о сферической симметрии тепловых процессов в шаровом микростреле. Для замыкания системы (1)–(5) используются уравнение состояния идеального газа и выражение для полной внутренней энергии, соответственно:

$$P = \rho(C_p - C_v)T, \quad (6)$$

$$E = \rho C_v T + \frac{(\rho u_z)^2 + (\rho v_r)^2}{2\rho}, \quad (7)$$

где  $C_p$  — удельная теплоёмкость теплоносителя при постоянном давлении;

$C_v$  — удельная теплоёмкость теплоносителя при постоянном объёме;

$T$  — температура теплоносителя.

Интегральные соотношения в выражениях (1) и (2) приближаются по методу прямоугольников. При этом, в соответствии с методом «потоков», значения переменных  $\rho$  и  $E$  на поверхности элементарного объёма  $\Omega_{i,j}$ , то есть в узлах  $(i + \frac{1}{2}, j)$ ,  $(i, j + \frac{1}{2})$  и т. д., определяются с помощью несимметричных формул линейной экстраполяции второго порядка точности из узлов с целыми индексами, например:

$$E_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} 1.5E_{i,j} - 0.5E_{i-1,j} & \text{при } (u_z)_{i+\frac{1}{2},j} \geq 0; \\ 1.5E_{i+1,j} - 0.5E_{i+2,j} & \text{при } (u_z)_{i+\frac{1}{2},j} < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Значения переменных  $P$  и  $T$  и их производных в тех же узлах определяются с помощью симметричных формул линейной интерполяции второго порядка точности, например:

$$P_{i,j+\frac{1}{2}} = (P_{i,j} + P_{i,j+1})/2, \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{i-\frac{1}{2},j} = (T_{i,j} - T_{i-1,j})/\Delta z. \quad (10)$$

В результате из уравнений (1) и (2) получается система конечно-разностных уравнений для твэла:

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + \frac{\Delta \tau}{\Omega_{i,j}} \left[ (\rho u_z S^z)_{i-\frac{1}{2},j} - (\rho u_z S^z)_{i+\frac{1}{2},j} + (\rho v_r S^r)_{i,j-\frac{1}{2}} - (\rho v_r S^r)_{i,j+\frac{1}{2}} \right]^n, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} E_{i,j}^{n+1} = & E_{i,j}^n + \frac{\Delta \tau}{\Omega_{i,j}} \left[ (E u_z S^z)_{i-\frac{1}{2},j} - (E u_z S^z)_{i+\frac{1}{2},j} + (E v_r S^r)_{i,j-\frac{1}{2}} - \right. \\ & \left. - (E v_r S^r)_{i,j+\frac{1}{2}} + (P u_z S^z)_{i-\frac{1}{2},j} - (P u_z S^z)_{i+\frac{1}{2},j} + (P v_r S^r)_{i,j-\frac{1}{2}} - \right. \\ & \left. - (P v_r S^r)_{i,j+\frac{1}{2}} + \lambda \left[ \left(\frac{\partial T}{\partial z} S^z\right)_{i+\frac{1}{2},j} - \left(\frac{\partial T}{\partial z} S^z\right)_{i-\frac{1}{2},j} + \left(\frac{\partial T}{\partial r} S^r\right)_{i,j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial r} S^r\right)_{i,j-\frac{1}{2}} \right] + \right. \\ & \left. + \alpha \left( \Theta_{i,j}^B - T_{i,j} \right) S_{i,j}^M \right]. \end{aligned} \quad (12)$$



Аппроксимация дифференциальных уравнений (3) и (4) приводит к системе конечно-разностных уравнений:

$$(\rho u_z)_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = (\rho u_z)_{i+\frac{1}{2},j}^n + \Delta\tau \left[ (P_{i,j} - P_{i+1,j})/\Delta z - (F^{zz}\rho|\bar{V}|u_z)_{i+\frac{1}{2},j} \right]^n, \quad (13)$$

$$(\rho v_r)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = (\rho v_r)_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \Delta\tau \left[ (P_{i,j} - P_{i,j+1})/\Delta r - (F^{rr}\rho|\bar{V}|v_r)_{i,j+\frac{1}{2}} \right]^n. \quad (14)$$

Уравнения теплового баланса, составленные для элементарных объёмов в микротвэлах в уравнении (5), приводят к конечно-разностным уравнениям:

$$\begin{aligned} (\Theta_{i,j}^k)^{n+1} = (\Theta_{i,j}^k)^n + \frac{\Delta\tau}{C_k^M} \left\{ \frac{1}{\Delta r W_k} \left[ \lambda_{k+\frac{1}{2}}^M \left( \Theta_{i,j}^{k+1} - \Theta_{i,j}^k \right) S_{k+\frac{1}{2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \lambda_{k-\frac{1}{2}}^M \left( \Theta_{i,j}^k - \Theta_{i,j}^{k-1} \right) S_{k-\frac{1}{2}} \right] + Q_k \right\}^n. \end{aligned} \quad (15)$$

Способ построения конечно-разностной схемы обеспечивает её консервативность по массовому расходу, по полной внутренней энергии теплоносителя и тепловой энергии в микротвэлах.

## 2 б. Численное моделирование газодинамики коллекторов

Осевые сечения распределительного и сборного коллекторов представлены на рис. 2. В этих коллекторах рассматривается осесимметричный поток несжимаемого невязкого газа одной температуры. Распределение скоростей в коллекторах предлагается определять по методу дискретных вихрей [6]. Согласно этому методу все непроницаемые стенки в коллекторах и проницаемая сетка, соединяющая коллектор с твэлом, заменяются непрерывными слоями кольцевых вихрей. Поле скоростей, вызванное этими вихревыми слоями, удовлетворяет уравнениям Эйлера для идеальной жидкости во всей области течения теплоносителя. Напряжённость вихревых слоёв  $\gamma(z, r)$  определяется из условия непроницаемости стенок коллектора, по заданному профилю скоростей на сетке, а также из баланса расхода газа на входе и выходе из коллектора. При решении нестационарной краевой задачи в коллекторах принимается во внимание, что с течением времени вихревой слой с сетки увлекается потоком теплоносителя внутрь области, и в результате течение здесь тоже становится вихревым. Отрыв пограничного слоя на острой кромке коллектора моделируется непрерывно сходящей оттуда по касательной линии вихревой пеленой, тем самым выполняются требования гипотезы Чаплыгина–Жуковского о конечных значениях скоростей и давления во всей области течения.

Практическая реализация метода дискретных вихрей состоит в переходе от непрерывного распределения параметров потока в пространстве и процессов изменения во времени к дискретным [6].

Вихревой слой моделируется системой дискретных кольцевых вихрей. Непрерывный процесс изменения во времени граничных условий заменяется

ступенчатим. Полагается, что граничные условия скачкообразно изменяются в некоторые расчётные моменты времени  $t = 0, t_1, \dots, t_n$ , а в промежутках между этими моментами остаются неизменными и равными значениям этих величин в начальной точке каждого промежутка.

Вихри, расположенные на непроницаемой границе, моделируют как присоединённый, так и свободный вихревой слой, и их объединение называется *суммарным вихревым слоем*. Дискретные вихри, моделирующие свободный вихревой слой на сетке и вихревую пелену, сходящую с острого ребра, называются *свободными*. Вихри на границе размещаются на кольцевых линиях, расположенных примерно на равном расстоянии друг от друга вдоль образующей, а контрольные точки — на линиях, расположенных между ними по середине. При этом на всех изломах границы размещаются вихри.

На рис. 3 показан пример размещения дискретных вихрей и контрольных точек в сборном коллекторе. Ближайший к острому ребру  $D$  свободный вихрь и соответствующая ему контрольная точка располагаются на конусе, который является касательным к границе в этом месте.

## 2 с. На примере сборного коллектора рассмотрим алгоритм определения вектора потока скоростей по методу дискретных вихрей.

Введём цилиндрические координаты  $0zr$  (см. рис. 3) и перейдём к безразмерным величинам циркуляции, скорости и координат:

$$g = \frac{G}{U_0 L_0}, \quad \bar{w} = \frac{2\pi\bar{V}}{U_0}, \quad \bar{v} = \frac{2\pi\bar{V}L_0}{G}, \quad z = Z/L_0, \quad r = R/L_0. \quad (16)$$

Здесь  $G, U_0, L_0$  — величины интенсивности вихрей, скорости потока и линейные размеры области, соответственно, принятые за единицу.

Отсюда видно, что используются безразмерные скорости двух типов  $\bar{w}$  и  $\bar{v}$ . Между ними выполняется соотношение  $\bar{w} = g\bar{v}$ .

Рассмотрим кольцевой вихрь радиуса  $r_1$ , расположенный в плоскости  $z = z_1$ . Осевую и радиальную составляющие безразмерной скорости, вызванной этим вихрем в точке с координатами  $z_0, r_0$ , определяем по формулам [6]:

$$v_z = -\frac{r_1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{(r_1 - r_0 \cos \theta) d\theta}{[(z_0 - z_1)^2 + r_1^2 + r_0^2 - 2r_1 r_0 \cos \theta]^{\frac{3}{2}}}, \quad (17)$$

$$v_r = -\frac{(z_0 - z_1)r_1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{(\cos \theta) d\theta}{[(z_0 - z_1)^2 + r_1^2 + r_0^2 - 2r_1 r_0 \cos \theta]^{\frac{3}{2}}}. \quad (18)$$

Безразмерные скорости  $v_z$  и  $v_r$  могут быть выражены через полные эллиптические интегралы первого и второго рода  $K$  и  $E$  с модулем

$$k^2 = \frac{4r_1 r_0}{(z_0 - z_1)^2 + (r_0 - r_1)^2}. \quad (19)$$

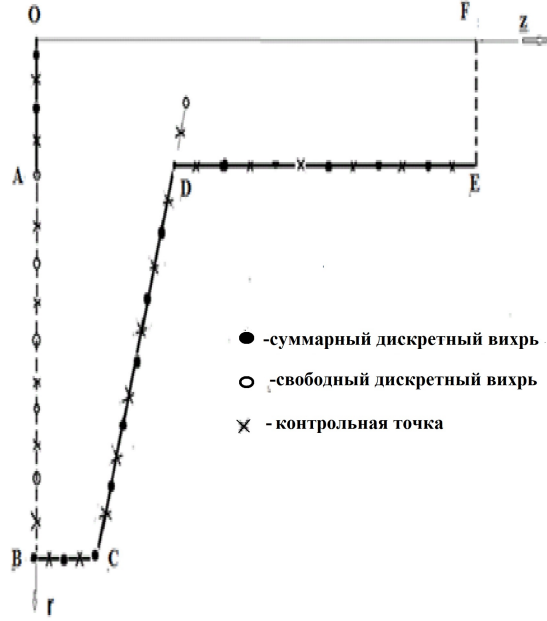


Рис. 3: Распределение вихрей и контрольных точек на границе области в сборном коллекторе

При этом

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi. \quad (20)$$

В результате выражения (17) и (18) приводятся к следующему виду:

$$v_z(z_0, r_0, z_1, r_1) = \frac{1}{\sqrt{(z_0 - z_1)^2 + (r_0 - r_1)^2}} \left( \frac{2 - k^2}{1 - k^2} E - 2K - \frac{r_1}{r_0} \frac{k^2}{1 - k^2} E \right), \quad (21)$$

$$v_r(z_0, r_0, z_1, r_1) = -\frac{(z_0 - z_1)}{r_0 \sqrt{(z_0 - z_1)^2 + (r_0 - r_1)^2}} \left( \frac{2 - k^2}{1 - k^2} E - 2K \right). \quad (22)$$

Система из вихрей интенсивности  $g_i$ , радиуса  $r_i$  и расположенные в области течения в плоскостях  $z = z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) в произвольной точке  $z_0, r_0$  индуцируют вектор скорости  $\bar{w}(z_0, r_0) = (w_z, w_r)$ , определяемый по формуле:

$$\bar{w}(z_0, r_0) = \sum_{i=1}^M g_i(z_i, r_i) \bar{v}(z_0, r_0, z_i, r_i). \quad (23)$$

С помощью соотношения (23) выписываем выражения для нормальной составляющей вектора скорости во всех контрольных точках границы  $(z_k, r_k)$  и приравниваем их к известным значениям этих величин  $w_n = f_n(z_k, r_k)$ . На

непроницаемой границе  $f_n(z_k, r_k) = 0$ . На сетке  $AB$  они заданы по условиям задачи и равны нормальным составляющим вектора скорости в контрольных точках этой границы коллектора  $f_n = f(r_k)$ , которые совпадают с текущими значениями скорости на выходе из твэла. В результате получаем  $(M - 1)$  уравнений для определения  $M$  неизвестных значений циркуляции  $g_i$ :

$$\sum_{i=1}^M g_i [v_z(z_k, r_k, z_i, r_i) n_z(z_k, r_k) + v_r(z_k, r_k, z_i, r_i) n_r(z_k, r_k)] = f_n(z_k, r_k),$$

$$k = 1, 2, \dots, M - 1. \quad (24)$$

Недостающее уравнение получаем, выписывая уравнение баланса объёмного расхода для сечений  $AB$  и  $EF$ , т. е.  $R_{EF} = R_{AB}$ . Расход теплоносителя через сечение  $AB$  определяется по известному из условия задачи распределению нормальной составляющей вектора скорости на границе сборного коллектора с твэлом. Расход через сечение  $EF$  определяется с помощью формулы (24). Для этого выходную часть сборного коллектора на сечении  $EF$  разбиваем на  $L$  кольцевых частей с площадями  $S_j^{EF}$ ,  $j = 1, \dots, L$ . В результате имеем:

$$\sum_{i=1}^M g_i \sum_{j=1}^L v_z(z_j, r_j, z_i, r_i) S_j^{EF} = \sum_{k=P_1}^{P_2} f(r_k) S_k^{AB}. \quad (25)$$

Здесь  $P_1, P_2$  — номера первой и последней контрольной точки в сечении  $AB$  (см. рис.3). Из системы линейных алгебраических уравнений (24)–(25) определяем интенсивность вихрей  $g_i$ , и после этого по формуле (23) можем вычислить скорость потока в любой точке области течения, а, следовательно, и скорость увлекаемых им свободных вихрей. Новые координаты свободного вихря, расположенного в точке  $(z_s, r_s)$ , определяем, интегрируя систему обыкновенных дифференциальных уравнений в промежутке времени  $(\tau_0, \tau_1)$ :

$$\frac{dz_s}{d\tau} = w_z(z_s, r_s), \quad \frac{dr_s}{d\tau} = w_r(z_s, r_s). \quad (26)$$

Промежуток времени  $(\tau_0, \tau_1)$  выбираем с тем расчетом, чтобы смещение самого быстрого вихря в коллекторе не превышало расстояния между соседними суммарными вихрями на непроницаемой границе.

В силу предположения об отсутствии дисперсии вихрей интенсивность сошедших свободных вихрей остаётся неизменной во всё время решения.

На последующих шагах решения в уравнениях (24) и (25) дополнительно присутствуют слагаемые и от свободных вихрей, сошедших в поток перед этим (на предыдущих шагах). Циркуляция этих вихрей известна, поэтому эти слагаемые переносят в правую часть уравнений и в результате уравнения (24) и (25) преобразуются к виду, соответственно:

$$\sum_{i=1}^M g_i [v_z(z_k, r_k, z_i, r_i) n_z(z_k, r_k) + v_r(z_k, r_k, z_i, r_i) n_r(z_k, r_k)] =$$

$$= f_n(z_k, r_k) - \sum_{n=1}^N \gamma_n [v_z(z_k, r_k, z_n, r_n) n_z(z_k, r_k) + v_r(z_k, r_k, z_n, r_n) n_r(z_k, r_k)],$$

$$(k = 1, 2, \dots, M - 1); \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M g_i \sum_{j=1}^L v_z(z_j, r_j, z_i, r_i) S_j^{EF} &= \\ &= \sum_{k=P_1}^{P_2} f(r_k) - \sum_{n=1}^N \gamma_n \sum_{j=1}^L v_z(z_j, r_j, z_n, r_n) S_j^{EF}. \end{aligned} \quad (28)$$

Решив систему (27)–(28) относительно  $g_i$  и модернизируя формулу (23), можно определить векторы скорости всех свободных вихрей. Для этого в формулу (23) добавляются слагаемые, отвечающие за свободные вихри, и в результате для вихря с координатами  $(z_s, r_s)$  получаем вектор скорости по формуле:

$$\begin{aligned} \bar{w}(z_s, r_s) &= \sum_{i=1}^M g_i(z_i, r_i) \bar{v}(z_s, r_s, z_i, r_i) + \\ &+ \sum_{n=1, n \neq s}^N \gamma_n(z_n, r_n) \bar{v}(z_s, r_s, z_n, r_n). \end{aligned} \quad (29)$$

После этого, интегрируя систему (26), находим смещение свободного вихря с координатами  $(z_s, r_s)$  вместе с потоком.

Повторяя этот процесс, осуществляем численное моделирование нестационарного течения теплоносителя в сборном коллекторе в зоне каждого твэла.

## 2 d. Определение давления в сборном коллекторе

По известному распределению скоростей потока можно получить распределение давления в сборном коллекторе и тем самым определить величину его гидродинамического сопротивления как в целом, так и на отдельных его участках. Для этого воспользуемся уравнениями Эйлера для осесимметричного течения в цилиндрических координатах [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_r}{\partial t} + w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} + w_z \frac{\partial w_r}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial r}, \\ \frac{\partial w_z}{\partial t} + w_r \frac{\partial w_z}{\partial r} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z}. \end{aligned} \quad (30)$$

Из уравнений (30) и уравнения неразрывности потока можно получить уравнение Пуассона для давления в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = - \left[ \left( \frac{\partial w_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{\partial w_r}{\partial z} \frac{\partial w_z}{\partial r} + \left( \frac{w_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_z}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (31)$$

Соотношения (30) определяют  $gradP$  и на границе области, поэтому вместе с уравнением (31) являются задачей Неймана для давления в коллекторе.

Однако в нашем случае краевое условие Неймана применять всюду не стоит. На проницаемой границе  $EF$ , то есть на выходе из коллектора давление с большой точностью можно считать постоянным и, поэтому считается, что оно известно по условию задачи. Отсюда на отрезке границы  $EF$  задаётся краевое условие Дирихле. Это обстоятельство служит мощным стабилизирующим эффектом и решение не «плывет», как это обычно случается в задачах Неймана. Чтобы решить эту систему, к левой части уравнения (31) формально прибавляем нестационарный член  $\frac{\partial P}{\partial \tau}$  и в получившемся уравнении и в уравнениях (30) переходим к конечным разностям. Получившуюся систему нестационарных уравнений решаем по методу «классики» [8].

Аналогичным образом двумерная задача гидродинамики решается и в распределительном коллекторе.

### 3. Алгоритм совместного решения двумерной начально-краевой задачи для кассеты из нескольких ТВЭЛОВ

При составлении алгоритма учитываем, что твэлы нумеруются здесь по потоку теплоносителя, то есть первым считается твэл, который расположен ближе всех ко входу в распределительный коллектор (см. рис. 1).

1. На начальном этапе теплоноситель в твэлах и коллекторах предполагается холодным. В каждом из твэлов задаётся начальное распределение давления и скорости потока, а, следовательно, распределение плотности и энергии.

2. Независимо друг от друга в твэлах по формулам (11)–(15) выполняется  $N$  эмпирически подобранных шагов итерации по времени. Среди вновь полученных текущих значений параметров термодинамики в каждом твэле выделяются значения скоростей теплоносителя на его входе и выходе.

3. Вычисление распределения скоростей теплоносителя проводится не во всём коллекторе сразу, а по очереди отдельно в зонах, примыкающих к каждому твэлу, как на рис. 2. Для этого, используя полученные во 2-ом пункте настоящего алгоритма распределения скоростей потока теплоносителя на входе и выходе из твэлов, по формулам (24)–(25) в начальный момент времени и по формулам (27)–(28) на последующих шагах итерации, определяется интенсивность вихрей, а после этого по формуле (29) вычисляется распределение скоростей потока теплоносителя в коллекторах.

Однако, формулы (24)–(25) и (27)–(28) верны без изменений только для кассеты из одного твэла. В кассете из нескольких твэлов в этих формулах появляются дополнительные слагаемые. Эти слагаемые учитывают, что, например, в распределительном коллекторе теплоноситель, поступающий в зону каждого твэла, кроме последнего, используется не только для охлаждения данного твэла, но также идет и на охлаждение всех последующих по потоку твэлов.

Были попытки определять поле скорости сразу во всём распределительном или сборном коллекторах, но это приводило к плохой сходимости, а иногда и

расходимости итерационного процесса при определении распределения давления в них.

4. По полученному в пункте 3 распределению скоростей в коллекторах для области каждого твэла решаются системы обыкновенных дифференциальных уравнений (26), по которым определяются смещения всех свободных вихрей в коллекторе на интервале времени  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ . При этом, такой интервал времени выбирается из расчёта, чтобы смещение самого быстрого вихря не превышало расстояния между соседними вихрями на границе. На каждом этапе таких шагов по времени в коллекторах может быть несколько. Количество шагов выбирается с таким расчётом, чтобы их суммарная длина была равна суммарной длине интервалов по времени для итерационного процесса, выполненного в твэлах на втором этапе итерационного процесса. Образование новых свободных вихрей внутри коллектора за счёт смещения свободных вихрей на границе происходит не обязательно за один шаг итерации. Если расстояние между образуемым свободным вихрем и его источником на границе меньше, чем расстояние между соседними вихрями на границе, то новый свободный вихрь не образуется, а лишь запоминается его потенциальное смещение. Эти потенциальные смещения каждого свободного вихря на границе суммируются на последующих шагах до тех пор пока их суммарная длина не превысит расстояние между соседними вихрями на границе. Лишь после этого внутри коллектора образуется новый свободный вихрь.

Такая процедура вызвана тем, что если образовавшийся новый свободный вихрь окажется очень близко от своего источника, то сингулярности в формулах (21), (22) могут привести к большим числам, а то и к переполнениям в вычислительном процессе.

По этой же причине, когда два свободных вихря в коллекторе чрезмерно сближаются, то они объединяются в один с суммарной интенсивностью. В каждой зоне параметры свободных вихрей запоминаются отдельно и, когда какой-либо вихрь переходит в зону, принадлежащую области другого твэла, его параметры передаются туда.

5. По полученному в пункте 3 распределению скоростей в коллекторах определяется распределение давления в них. Для этого используется метод установления в нестационарном варианте формулы Пуассона (31). В качестве краевых условий Дирихле на входе в распределительный и на выходе из сборного коллекторов используются заданные по условию задачи значения давления в этих местах, а на других участках границы используются традиционные условия Неймана, определяемые с помощью формул (30).

6. Полученные значения давления в коллекторах в зоне их контакта с твэлами в дальнейшем используются во втором пункте настоящего алгоритма, где, как и прежде, они применяются в качестве краевых условий давления для твэлов. Причём надо отметить, что полученные только что давления не сразу используются в качестве граничных значений давления для твэлов. Значения давлений на границе твэлов во втором пункте настоящего алгоритма линейно изменяются за  $N$  шагов итерационного процесса от значений

давления на предыдущем этапе к значениям, только что полученным в пункте 5 данного алгоритма.

Многokrатно выполняемый итерационный процесс, описанный в пунктах 2–6, полностью решает начально-краевую задачу теплогазодинамики в касете из нескольких твэлов и моделирует режим нагревания теплоносителя.

#### 4. Результаты вычислительных экспериментов

Вначале рассматривалась численная модель малогабаритного ядерного реактора на быстрых нейтронах с одним твэлом, поперечное сечение которого вместе с сечениями коллекторов показана на рис. 2. В экспериментальном образце использовалось сечение с размерами:  $R_0 = 18$ ,  $R_1 = 58$ ,  $R_2 = 70$ ,  $Hr_0 = 10$ ,  $Hr_1 = 30$ ,  $Hc_0 = 40$ ,  $Hc_1 = 20$ ,  $L=70$  (мм). В вычислительных экспериментах ставилась задача смоделировать режим термодинамики твэла и прилегающих к нему коллекторов от момента, когда теплоноситель ещё холоден всюду, до момента, когда в сборном коллекторе он нагрет полностью. В распределительный коллектор подавался холодный газ гелий при температуре 573 К и давлении 20.15 МПа, на выходе из сборного коллектора газ был под давлением 19.75 МПа. Перепад давлений в течение всего эксперимента полагался постоянным. Один из главных вопросов, на которые приходилось отвечать — это эмпирический подбор количества  $N$  шагов итерационного процесса в твэле, которые необходимо совершать на втором этапе алгоритма. Понятно, что чем меньше таких шагов выполняется, тем точнее программа будет моделировать реальный физический процесс, поскольку в реальности связь между процессами в твэле и коллекторах постоянна. Однако при малом количестве шагов сильно возрастает время счёта программы и, кроме того, поскольку речь идёт об осреднённом течении, брать слишком малое число шагов тоже не стоит.

В качестве примера был проведен счёт при числе шагов  $N = 5000$ . На рис. 4 показаны графики зависимости массового расхода теплоносителя (кг/сек) от времени (сек) на входе в твэл и выходе из него. Пунктирная кривая представляет расход на входе, а непрерывная — на выходе из твэла. На начальном этапе расчёта до времени  $t = 0.002$  сек., когда свободных вихрей в коллекторах ещё нет или их совсем немного, графики массового расхода представлены достаточно гладкими кривыми. Ко времени  $t = 0.00235$  сек. в сборном коллекторе тоже всего 3 свободных вихря, но все они сошли с угла  $D$  (см. рис. 2) и расположились таким образом, что течение в зоне сборного коллектора от угла  $D$  до выхода из него сильно затруднено и, чтобы обеспечить требуемый расход в сборном коллекторе, необходимо создать больший градиент давления на этом участке коллектора. Поскольку на выходе из сборного коллектора по условию задачи давление постоянно и равно 19.75 МПа, то за счёт такого большого градиента на границе сборного коллектора и твэла может установиться давление большее, чем в твэле, и в результате течение



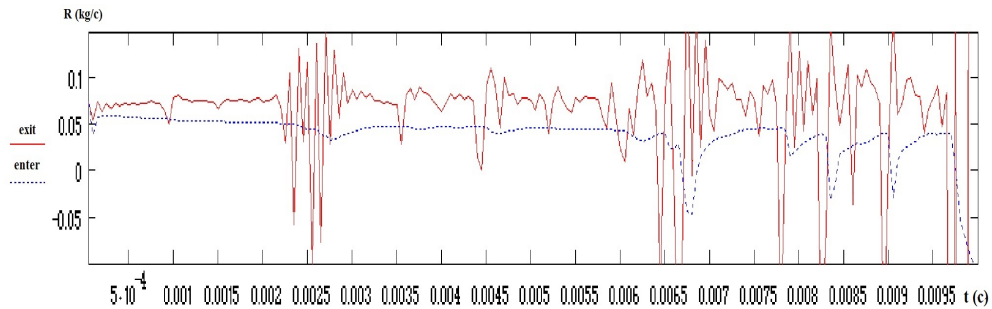


Рис. 4: Графики изменения по времени массового расхода на входе и выходе из твэла при  $R_0 = 18$  мм.

теплоносителя на этой границе станет обратным. Это мы и наблюдаем на рис. 4, где ко времени  $t = 0.00235$  сек. расход на границе сборного коллектора и твэла кратковременно становится отрицательным. Из-за встречного течения давление в твэле резко возрастает, поэтому за короткий промежуток времени течение вновь возвращается к нормальному. На графике видно, что поначалу это давление возрастает даже чрезмерно и от этого кривая расхода на графике после отрицательных значений расхода имеет резкий всплеск вверх. Поскольку время обратного течения не продолжительно, это не приведёт к заметному влиянию на температуру теплоносителя и поэтому это явление нельзя пока считать аварийным. Влияние этих вихрей на распределение давления в сборном коллекторе хорошо видно на рис. 5. На нём изображено два поперечных сечения твэла и коллекторов, покрытые областями тёмного и белого цвета. Границы этих областей являются изобарами.

Первое сечение на рис. 5 отображает изобары в начале процесса, когда вихрей ещё нет и течение теплоносителя однонаправленно. На втором сечении представлены изобары в момент времени  $t = 0.00235$  сек., когда течение завихрено и изобары в выходной зоне сборного коллектора размещены гораздо гуще, что говорит о большом градиенте давления здесь. На рис. 4 видно, что подобные обратные течения возникают неоднократно не только в сборном, но и в распределительном коллекторах и возникают они тоже за счёт свободных вихрей, сходящих с острого угла там. На рис. 4 видно, что обратное течение там возникает гораздо позже лишь на  $t = 0.0067$  сек. и вызвано это тем, что в нашем примере скорость теплоносителя в распределительном коллекторе меньше, чем в сборном. Подобные обратные течения возникают неоднократно, а начиная с 0.0065 сек. всё чаще и чаще и в конце концов к 0.0095 сек. поток теплоносителя становится практически возвратно-поступательным и вскоре итерационный процесс становится расходящимся.

Этот эксперимент и множество других подобных привел к мысли, что количество  $N$  шагов итерационного процесса во 2-м пункте алгоритма не должен быть постоянным во всё время решения задачи, а должен меняться в зависимости от динамики изменения расхода теплоносителя в твэлах кассеты.

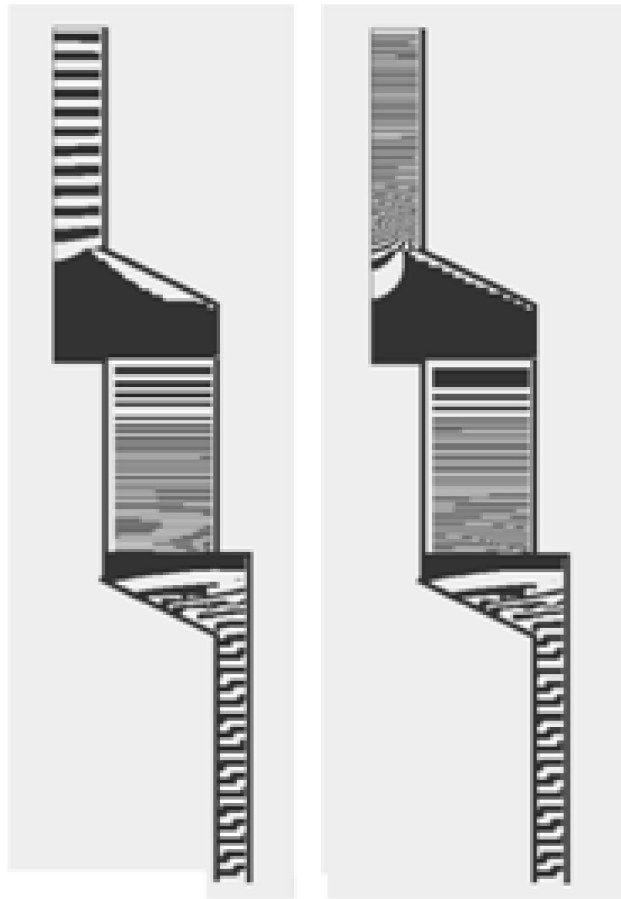


Рис. 5: Изобары в коллекторах и твэлах при незавихрѐнном и завихрѐнном течениях.

Для этого изначально задаѐтся некоторое текущее, а оно же и максимальное количество шагов  $N = N_{tek} = N_{max}$  итерационного процесса во 2-м пункте алгоритма. После этого в ходе итерационного процесса на входе и выходе из всех твэлов кассеты каждые несколько шагов вычисляются относительные величины изменения массового расхода теплоносителя с момента начала итерационного процесса. Если после таких вычислений, хотя бы в одном из твэлов кассеты на входе или выходе относительное изменение расхода превысит некоторое, выбранное экспериментально, малое число  $\varepsilon$ , итерационный процесс в твэлах прекращается и вычисления передаются в 3-й пункт алгоритма. Значение  $N$ , при котором прервался итерационный процесс во 2-м пункте алгоритма, в дальнейшем полагается текущим ( $N_{tek}$ ). Впоследствии, если в этом пункте алгоритма итерационный процесс пройдет, не прерываясь, до  $N_{tek}$  и относительные изменения массового расхода во всех твэлах окажутся меньше некоторого  $\varepsilon_{min}$ , то в дальнейших вычислениях  $N_{tek}$  удваивается при условии, что получившееся значение не станет больше  $N_{max}$ , заданного

в исходных условиях.

При такой модернизации алгоритма любое заметное изменение сопротивления потоку теплоносителя в каком-либо из коллекторов приводит к заметному изменению расхода в соответствующем твэле. В результате итерационный процесс в твэлах прекращается и программа вычисляет распределение скоростей и давления теплоносителя в коллекторах. Такая программа точнее моделирует реальный процесс, где связь между твэлами и коллекторами происходит непрерывно. После такой модернизации прежние вычисления удалось провести успешно. На рис. 6 графики массового расхода тоже имеют моменты обратных течений, но их гораздо меньше

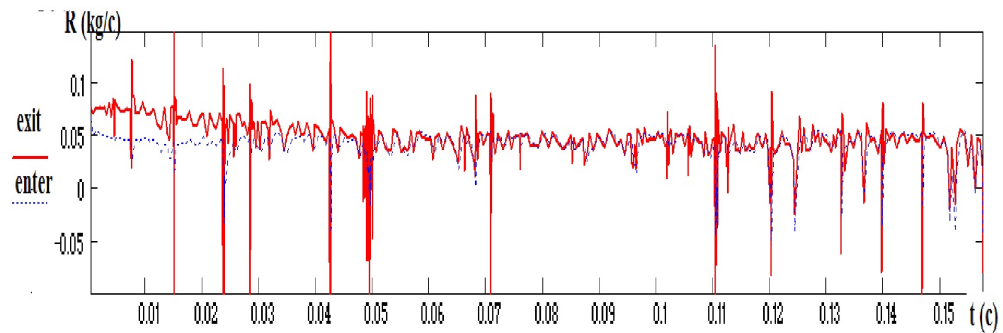


Рис. 6: График изменения по времени массового расхода на входе и выходе из твэла при  $R_0 = 18$  мм.

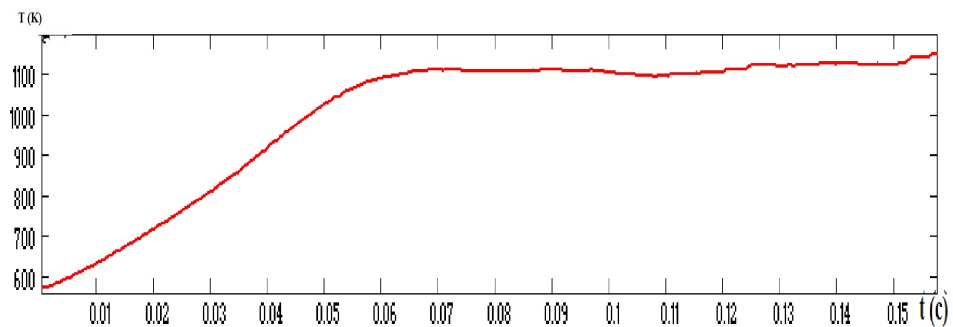


Рис. 7: График изменения температуры по времени в сборном коллекторе.

и, хотя кривые расхода негладкие, что объяснимо для турбулентного процесса, итерационный процесс проходит устойчиво, температура газа в сборном коллекторе на рис. 7 монотонно растёт до  $t = 0.06$  сек. процесса, а после этого непрерывно меняется возле своего среднего значения до  $t = 0.16$  сек.

На рис. 8 представлены два поперечных сечения твэла и коллекторов. На первом сечении изображены изобары, а на втором — траектории вихрей в

конце решения, то есть на 0.15 сек итерационного процесса. К этому моменту времени в построении решения участвуют 406 свободных вихрей в сборном и 35 — в распределительном коллекторах, но на рисунке показаны траектории только первых 50-ти свободных вихрей в сборном коллекторе и 20-ти в распределительном. Траектории остальных вихрей не показаны, чтобы они не сливались в одно чёрное пятно.

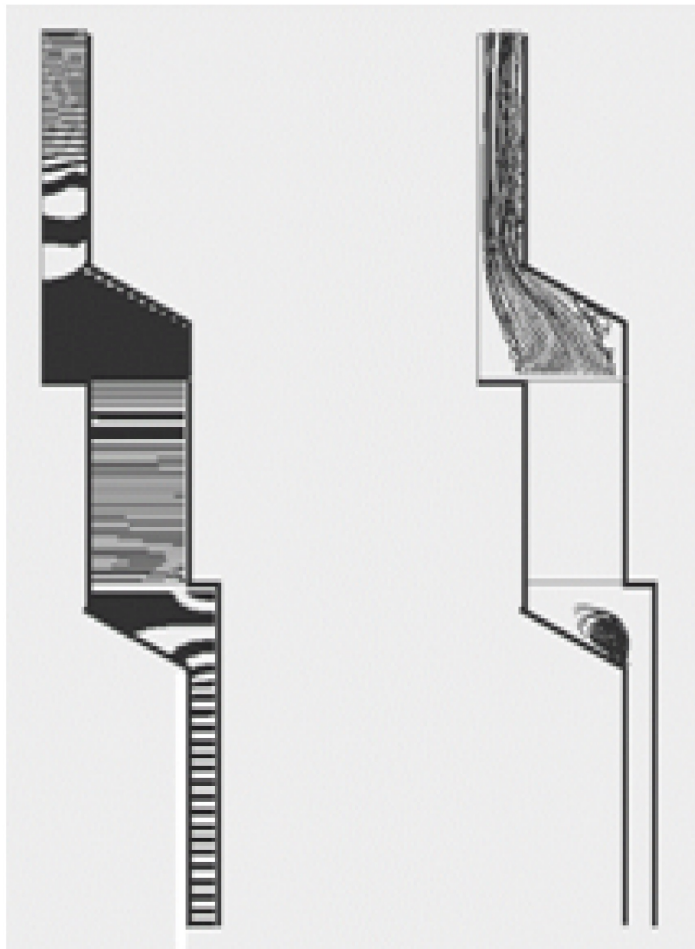


Рис. 8: Распределение изобар в твэле и коллекторах и траекторий свободных вихрей в коллекторах.

В дальнейшем проводились вычислительные эксперименты для кассет из 2-х подобных твэлов. Перепад давления в кассете остаётся таким же, как в прошлом вычислительном эксперименте. В результате, если прежде на выходе из сборного коллектора нагретый газ имел скорость 5–6 м/сек, то теперь его скорость возросла вдвое и при этом к 0.15 сек в сборном коллекторе в окрестности первого твэла сформировалось 300 свободных вихрей, а в окрестности второго, то есть на выходе из сборного коллектора, уже 500 сво-

бодных вихрей. Столь высокая турбулентность потока (и это при давлении 20 МПа) является причиной нерегулярности течения в сборном коллекторе. Большой градиент давления, который может возникать из-за этих вихрей, приводит к наибольшему давлению именно на выходе из первого твэла, потому что он расположен дальше всего от выхода из сборного коллектора. На рис. 9 для этой кассеты представлены графики массового расхода теплоносителя на входе и выходе из первого (верхний график) и второго (нижний график) твэлов, соответственно. С течением времени расход, особенно на входе и выходе из первого твэла, меняется крайне нерегулярно, да и обратные течения возникают, в основном, только в первом твэле. Именно из-за этого по-разному меняется температура на выходе из твэлов. На рис. 10 видно, что до времени 0.04 сек температура теплоносителя на выходе из твэлов растёт одинаково, но к 0.05 сек рост температуры на выходе из второго твэла прекращается, и она после этого слабо меняется возле своего среднего значения (1028 К), а на выходе из первого твэла температура теплоносителя до 0.16 сек монотонно растёт до температуры 1370 К.

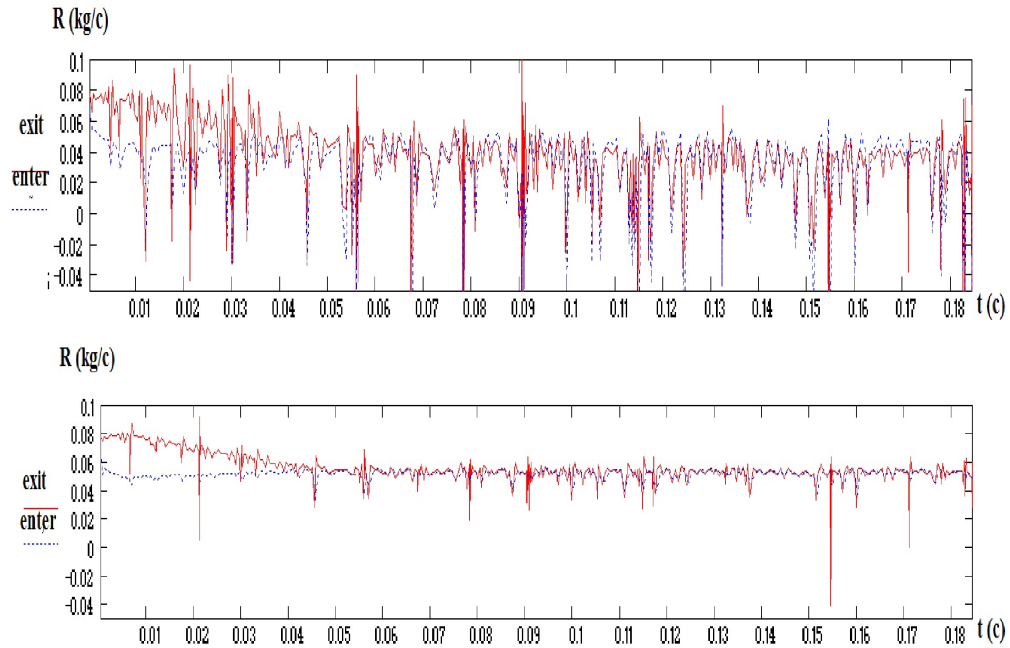


Рис. 9: График изменения по времени массового расхода на входе и выходе из кассеты из двух твэлов при  $R_0 = 18\text{мм}$ .

На рис. 11 изображены сечения кассеты с изобарами и траекториями свободных вихрей. На первом сечении (рис. 11а) изобары в самом начале процесса, когда свободных вихрей ещё мало и градиенты давления в сборном

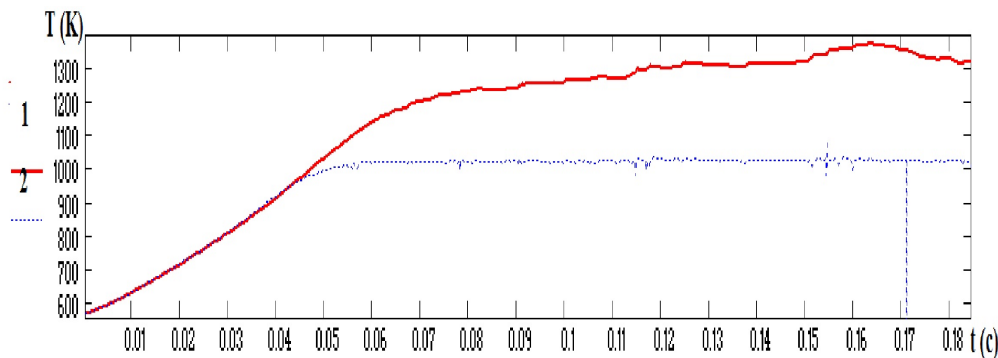


Рис. 10: График изменения температуры по времени в сборном коллекторе кассеты из двух твэлов.

коллекторе невелики. На рис. 11b и рис. 11d показаны градиенты давления на 0.04 и 0.1 сек с начала процесса, соответственно. Траектории свободных вихрей, изображенные на рис. 11c и особенно на рис. 11e, занимают много места в сборном коллекторе, что говорит о большой турбулентности течения в этой области. Это подтверждает и наличие здесь густой сети изобар. Столь различная температура нагрева теплоносителя в твэлах кассеты и нерегулярный массовый расход теплоносителя в первом твэле вряд ли можно назвать удовлетворительным и, хотя итерационный процесс был всё время сходящимся, его точнее назвать предаварийным. Эти опасения подтвердили вычислительные эксперименты для кассеты, составленной из трёх твэлов таких же размеров. Скорость теплоносителя на выходе из сборного коллектора здесь достигала 18 м/сек и, когда температура теплоносителя к 0.05 сек процесса превысила 1000 К, в сборном коллекторе в окрестности первого твэла образовалась зона повышенного давления, превышающая величину давления на входе в распределительный коллектор, и в результате возвратное течение в первом твэле и коллекторах привело к расходящемуся итерационному процессу при определении распределения давления в сборном коллекторе.

Чтобы уменьшить скорости теплоносителя в кассете, при её создании было решено использовать твэлы других размеров. Для этого толщина засыпки была сокращена с 70 мм до 50 мм, а радиусы приняты размеров  $R_0 = 28$ ,  $R_1 = 68$  и  $R_2 = 90$  мм, соответственно. В результате объём шаровой засыпки в твэле, а, следовательно, и мощность реактора практически не уменьшились; а для получения подобных значений температуры нагретого газа в сборном коллекторе перепад давления в кассете уменьшается и принимается равным 20.15 МПа — 20.0 МПа вместо прежних 20.15 МПа — 19.75 МПа. Таким образом, давление на входе в распределительный коллектор осталось прежним: 20.15 МПа. Другие размеры коллекторов, кроме радиусов  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ , остались прежними.

В результате таких геометрических изменений удалось провести успешные эксперименты даже для кассеты из четырёх подобных твэлов. Как видно

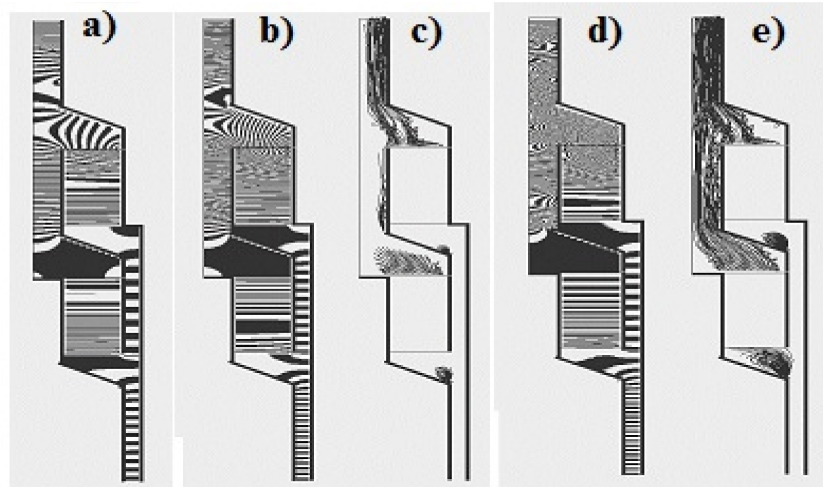


Рис. 11: Изобары и траектории вихрей в кассете из 2 твэлов при  $R_0 = 18\text{мм}$ .

на рис. 12 массовый расход представляют более регулярные кривые, хотя обратные течения, особенно на первом твэле (верхний график), возникают и здесь. На этих рисунках особенно хорошо заметно, что с начала итерационного процесса и до 0.04 сек массовый расход теплоносителя на выходе из всех твэлов в кассетах больше, чем на входе в них. Объясняется это явление тем, что именно на этом интервале времени в твэлах происходит активный рост температуры теплоносителя, и газ в результате расширяется. Впрочем, это явление также можно заметить и на рис. 4, 6 и 9. Графики температуры в сборном коллекторе на его границах с твэлами тоже представлены на рис. 12 (нижний график) и из них видно, что они идут более тесным пучком, чем на рис. 10 и значения средних температур, возле которых изменяются их кривые, по очереди равны 1125, 1060, 1104 и 1114 К, соответственно. На рис. 13 изображены изобары и траектории свободных вихрей в кассете из 4 твэлов на 0.036, 0.1 и 0.18 сек итерационного процесса, соответственно. С увеличением числа твэлов в кассете растет количество свободных вихрей в сборном коллекторе. Со временем большинство из них окажется на выходе из сборного коллектора. Если отслеживать, как ранее, траектории 50-ти свободных вихрей, то на рисунке они образуют сплошное черное пятно. Поэтому на рис. 13 отражены траектории лишь первых 15-ти свободных вихрей, которые образуются в сборном коллекторе в окрестности каждого твэла.

В используемой вычислительной модели поток теплоносителя в распределительном коллекторе возмущён не сильно, поскольку в окрестности каждого твэла свободные вихри сходят только с одного острого угла. От этого изобары, особенно в кольцевой части коллектора, размещены однородно и со временем в основном меняется только их густота. Возвратные течения на границе распределительного коллектора и твэла в основном возникают син-

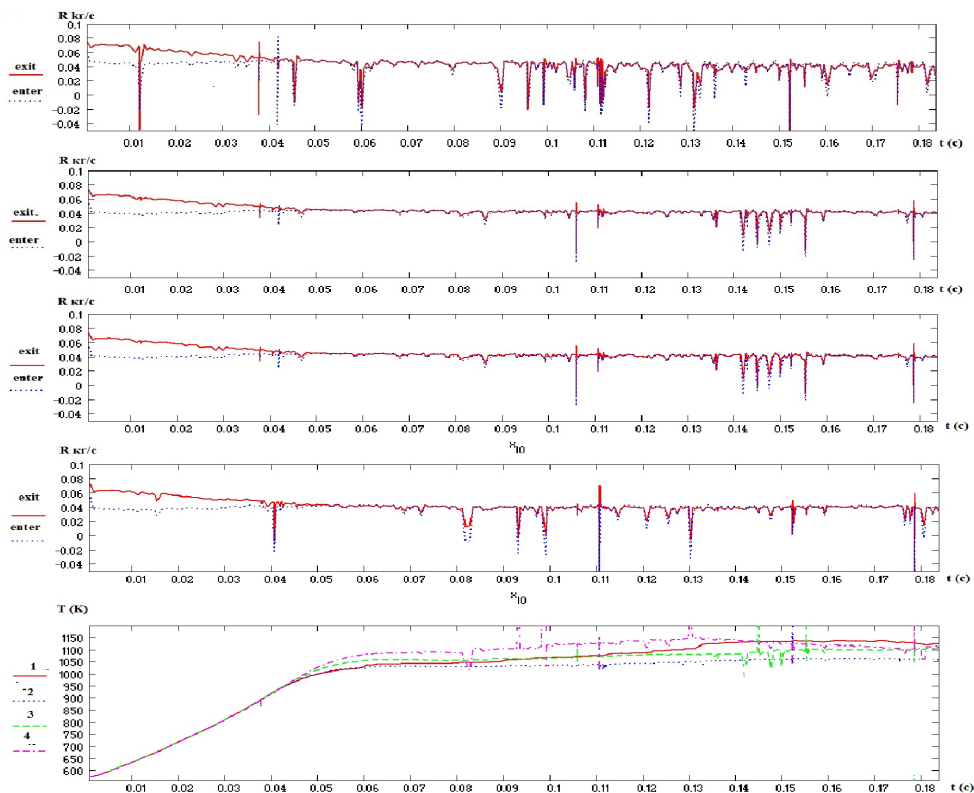


Рис. 12: Зависимость от времени массового расхода в твэлах и температуры в сборном коллекторе для кассеты из четырёх твэлов при  $R_0 = 28$  мм.

хронно с подобными течениями на границе сборного коллектора с твэлом; и причиной их появления, очевидно, являются турбулентные явления в сборном коллекторе.

И лишь в отдельные моменты времени обратные течения в распределительном коллекторе возникают за счет турбулентных течений в них. В таких случаях обратные течения в распределительном коллекторе мало влияют на течения в сборном коллекторе, где оно в это время происходит в правильном направлении.

В этом случае можно уверенно считать, что причиной возвратного течения на границе распределительного коллектора и твэла являются турбулентные течения в распределительном коллекторе. Например, на рис. 12 можно отметить несколько таких моментов. Однако основной причиной возвратных течений в кассете, очевидно, является турбулентное течение в сборном коллекторе и особенно на выходе из него, где свободных вихрей больше всего и особенно велика скорость нагретого газа. Так, в кассете из 4-х твэлов на 0.18



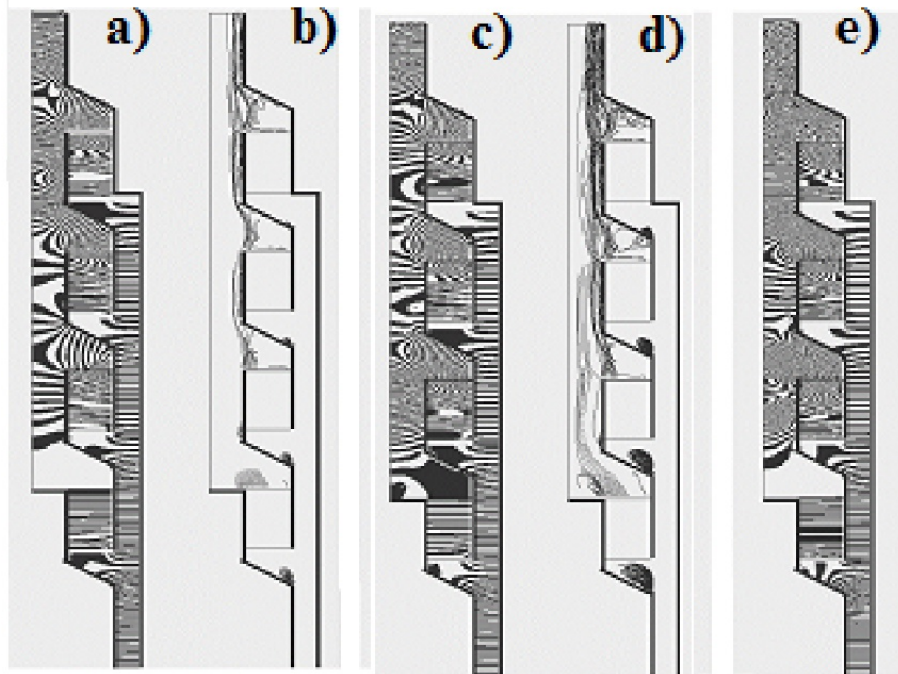


Рис.13: Изобары и траектории вихрей в кассете из 4 твэлов при  $R_0 = 28$  мм.

сек итерационного процесса в сборном коллекторе в зонах 1, 2, 3 и 4 твэлов в построении решения принимают участие 436, 587, 872 и 931 свободных вихрей, а в цилиндрических частях этих зон средняя скорость теплоносителя соответственно равнялась 1.86, 3.85, 5.83, 7.79 м/сек. Инерционные свойства потока при давлении газа 20 МПа и таких скоростях, особенно на выходе их сборного коллектора, весьма велики.

Теперь несколько слов о распределении давления теплоносителя в твэлах для всех рассмотренных в статье кассет. Изобары этого давления показаны на рис. 8, 11 и 13. На всех этих рисунках видно, что наилучшим образом давление устанавливается в первом твэле каждой кассеты. Именно там изобары размещены перпендикулярно основному направлению течения теплоносителя в твэле, то есть перпендикулярно цилиндрической оси кассеты. Отсюда понятно, что и осреднённое течение теплоносителя в этих твэлах с большой точностью совпадает с основным. В других твэлах распределение давления теплоносителя сильно отличается от идеального и особенно в зоне их границы со сборным коллектором. Вдоль этой границы давление в сборном коллекторе сильно меняется, а это искажает распределение давления в твэле. Но поскольку течение в коллекторах турбулентное, то распределение давления в коллекторах постоянно меняется, от этого давление меняется и в

твэлах, что постоянно изменяет направление и величину поперечного осреднённого течения в твэлах, и от этого распределение температуры на выходе из твэлов, видимо, немного выравнивается. Однако неравномерность нагрева теплоносителя на выходе из этих твэлов по радиусу, то есть по поперечному сечению, имеет место. Так для 0.018 сек процесса в кассете из 4-х твэлов если на выходе из первого твэла эта разница нагрева теплоносителя по радиусу не превышает 5 градусов, то на выходе из 4-го твэла в тупиковой зоне сборного коллектора (на рис. 3 это в окрестности точки  $B$ ) температура теплоносителя равняется 1078 К, а затем (с уменьшением поперечного радиуса твэла) температура монотонно растёт до 1224 К при радиусе равном  $R_0$  (на рис. 3 это в окрестности точки  $A$ ).

## 5. Выводы

В статье проводится численное моделирование быстро протекающих процессов термодинамики, возникающих в активной зоне и примыкающих к ней коллекторах ядерного реактора на быстрых нейтронах. В частности, предлагается алгоритм решения возникающей начально-краевой задачи, а также составлена и отлажена программа ПЭВМ и проведены вычислительные эксперименты. Вычислительные эксперименты показали большую зависимость распределения давления, а с ним и коэффициентов сопротивления от степени завихрённости газового потока в коллекторах. Особенно велика эта завихрённость, то есть турбулентность потока на выходе, из сборного коллектора, где образуется наибольшая скорость нагретого теплоносителя и куда устремляются все свободные вихри возникшие в коллекторе. Именно из-за турбулентности потока, прежде всего в этой зоне, случайным образом меняется сопротивление потоку. В результате расход теплоносителя меняется не регулярно, а иногда возникают и обратные течения, которые в крайних случаях могут являться причинами аварийных ситуаций. Отсюда главной задачей, возникающей при проектировании таких конструкций, является минимизация скорости потока теплоносителя в выходной зоне сборного коллектора. Это требование подтверждается результатами вычислительных экспериментов. Проведенные вычислительные эксперименты также показали большое влияние геометрических размеров твэлов на регулярность моделируемых процессов.

## REFERENCES

1. S. V. Zhuchenko. Numerical Simulation of Gas Dynamics and Heat Exchange Tasks in Fuel Assemblies of the Nuclear Reactors, Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences AIP Conf. Proc. 1629, — P. 135–145 (2014).
2. S. V. Zhuchenko. Numerical model of an axisymmetric current of the heat carrier in collectors for fuel elements of an axial blowing. Visnyk of V.N.Karazin University. Ser. Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems, 2016. — Vol. 32, — P. 35–49.

3. S. V. Zhuchenko, The calculable program PEVM designing the flow of coolant gas in a nuclear reactor fast-neutron. Collected Works of XVIII the International symposium of Methods of discrete features are in the tasks of mathematical physics, 2017. — Kharkiv, — P. 119–123.
4. S. V. Zhuchenko, The first calculable experiments designing thermodynamics of active zone of nuclear reactor fast-neutron. Collected Works of the International scientific and technical conference the "Computer design in the science capacious technologies 2018. — Kharkiv, — P. 114–117.
5. O. M. Belotserkovskii, L. I. Severinov, The conservative "flow" method and the calculation of the flow of a viscous heat-conducting gas past a body of finite size, U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 1973. — **13**: 2, — P. 141–156.
6. S. M. Belotserkovsky, M. I. Nisht. Excavate and steady airflow around the thin wings by ideal fluid. — Moscow: Nauka, 1978. — 352 p.
7. G. Schlichting, Theory of the boundary layer. 1974. Moscow: Nauka, 712 p.
8. P. Roach, Computational Fluid Dynamics. 1980. M.: Mir, 618 p.

Жученко С. В. **Чисельне моделювання термодинаміки ядерного реактора на швидких нейтронах.** У статті проводиться чисельне моделювання термодинаміки ядерних реакторів на швидких нейтронах з гелієвим теплоносієм і замкнутим паливним циклом (GFR). У рамках Міжнародного форуму реактори подібного типу відносяться до 4-го покоління GIF - IV (Generation IV International Forum). Використання гелію як теплоносія в реакторах подібного типу дуже перспективно, але зв'язано з великими труднощами, які виникають при реалізації такого проекту, і тому нині на практиці створені лише дослідні зразки подібних реакторів. Автором розглядаються реактори однієї конструкції, для яких видається спосіб чисельного моделювання швидко протікаючих процесів термодинаміки, що виникають в касеті з декількох тепловиділяючих елементів, а також в колекторах, що примикають до неї. У статті пропонується алгоритм рішення виникаючої початково-крайової задачі, а також наводяться результати обчислювальних експериментів, які отримані за допомогою програми ПЕВМ складеною і відлагодженою автором для вирішення цього завдання. Уточнюються деякі особливості програми, обговорюються обчислювальні труднощі програми, що виникають при відладці, і пропонується методи їх подолання.

*Ключові слова:* касета тепловиділяючих елементів; розподільний і збірний колектора; гелієвий теплоносіє; турбулентні течії; поворотні потоки; аварійна ситуація; траєкторії вільних вихорів.

S. V. Zhuchenko. **Numerical simulation of the thermodynamics of a fast neutron reactor.** The article deals with one reactors design, which, under the International Forum, are attributed to the 4th generation of the GIF-IV (Generation IV International Forum) of fast neutron reactors with a helium coolant and a closed fuel cycle (GFR). Although the use of helium as a coolant in reactors of this type and has great advantages in comparison with other coolants, for example, CO<sub>2</sub> gas, however, due to the great difficulties encountered in the implementation of such a project, only prototypes of similar

reactors are currently implemented. Due to the complexity of gas flow in the collectors and backfill, the averaged flow of the coolant is considered throughout the proposed mathematical model. It is assumed that the averaged flow is symmetric everywhere relative to the common axis of the cylinders forming the annular domain, and, consequently, is axisymmetric, that is, two-dimensional. One such annular cylindrical cavity will be called a fuel element. The mathematical model of a cassette of several such fuel elements connected by common distributed and gathering collectors is considered in the article. The algorithm for solving the arising non-stationary initial-boundary value problem is proposed in the article, as well as the results of some computational experiments that are obtained using the PC program, compiled and debugged by the author of the article. The experiments were carried out both for one fuel element, and for cassettes of 2, 3 and 4 fuel elements. The algorithm for solving the arising non-stationary initial-boundary value problem is proposed in the article, as well as the results of some computational experiments that are obtained using the PC program, compiled and debugged by the author of the article.

*Keywords:* cassette of fuel elements; distributive and collapsible collector; helium coolant-moderator; turbulent flows; recurrent streams; emergency situation; trajectories of free whirlwinds.

Article history: Received: 7 November 2018; Final form: 13 December 2018;  
Accepted: 15 December 2018.

**Правила для авторів**  
**«Вісника Харківського національного університету**  
**імені В.Н.Каразіна»,**  
**Серія «Математика, прикладна математика і механіка»**

Редакція просить авторів при направленні статей керуватися наступними правилами.

**1.** В журналі публікуються статті, що мають результати математичних досліджень (англійською, українською або російською мовами).

**2.** Поданням статті вважається отримання редакцією файлів статті оформлених у редакторі LATEX (версія 2e), анотацій, відомостей про авторів та архіва, що включає LATEX файли статті та файли малюнків. Файл-зразок оформлення статті можна знайти в редакції журналу та на веб-сторінці (<http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>).

**3.** Стаття повинна починатися з анотацій, в яких повинні бути чітко сформульовані мета та результати роботи. Анотації повинні бути трьома мовами (англійською, українською та російською): першою повинна стояти анотація тією мовою, якою є основний текст статті. В анотації повинні бути прізвища, ініціали авторів, назва роботи, ключові слова та номер за міжнародною математичною класифікацією (Mathematics Subject Classification 2010). Анотація не повинна мати посилань на літературу чи малюнки. На першій сторінці вказується номер УДК класифікації. В кінці статті треба додати розширені (обсягом не менш як 1800 знаків кожна) анотації англійською (якщо основний текст статті написаний не англійською) та українською (якщо основний текст статті написаний не українською) мовами.

**4.** Список літератури повинен бути оформлений латинським шрифтом. Приклади оформлення списку літератури:

1. А.М. Lyapunov. A new case of integrability of differential equations of motion of a solid body in liquid, Rep. Kharkov Math. Soc., – 1893. – 2. V.4. – P. 81-85.
2. А.М. Lyapunov. The general problem of the stability of motion. 1892. Kharkov Mathematical Society, Kharkov, 251 p.

**5.** Кожний малюнок повинен бути пронумерований та представлений окремим файлом в одному з форматів: EPS, BMP, JPG. В файлі статті малюнок повинен бути вставлений автором. Під малюнком повинен бути підпис. Назви файлів малюнків повинні починатись з прізвища першого автора.

**6.** Відомості про авторів повинні містити: прізвища, імена, по батькові, службові адреси та номери телефонів, адреси електронних пошт та інформацію про наукові профайли авторів (orcid.org, www.researcherid.com, www.scopus.com) з відповідними посиланнями. Прохання також повідомити прізвище автора, з яким треба вести листування.

**7.** Рекомендуємо використовувати в якості зразка оформлення останні випуски журналу ([vestnik-math.univer.kharkov.ua/currentv.htm](http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/currentv.htm)).

**8.** У випадку порушення правил оформлення редакція не буде розглядати статтю.

Електронна скринька: [vestnik-khnu@ukr.net](mailto:vestnik-khnu@ukr.net)

Електронна адреса в Інтернеті: <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>

*Наукове видання*

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна,  
Серія “Математика, прикладна математика і механіка”, Том 88

Збірник наукових праць

Англійською, українською, російською мовами

Підписано до друку 20.12.2018 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.

Ум. друк. арк. 5,2

Обл.– вид. арк. 6,1

Наклад 60 пр. Зам. №

Безкоштовно.

61022, м.Харків, майдан Свободи, 4, Харківський національний університет  
імені В.Н.Каразіна. Видавництво.

Надруковано: ХНУ імені В.Н.Каразіна

61022, м.Харків, майдан Свободи, 4, тел. 705-24-32

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09