ISSN 2221-5646 (Print)
ISSN 2523-4641 (Online)

Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна

Серія
«Математика, прикладна математика і механіка»

Серія започаткована 1965 р.

Том 85

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 85

Харків
2017

До Віснику включено статті з математичного аналізу, математичної фізики, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних наук
(Наказ МОН України №1328 від 21.12.2015 р.)

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (протокол №17 від 27 листопада 2017р.).

Адреса редакційної колегії: 61022, Харків, майдан Свободи, 4,
ХНУ імені В.Н. Каразіна, факультет математики і інформатики, к.7-27.
Тел. 7075240, 7075135, Email: vestnik-khnu@ukr.net
Интернет:
http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/
http://periodicals.karazin.ua/mech_math/

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.
Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21568-11468 Р від 21.08.2015

ЗМІСТ

CONTENTS

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна Серія "Математика, прикладна математика і механіка" Том 85, 2017, с.4–15

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics" Vol. 85, 2017, p. 4–15
DOI: 10.26565/2221-5646-2017-85-01

УДК 517.574

The convergence of sequences of canonical potentials in the space $L_{1,loc}(\mathbb{C})$

Nguyen Van Quynh

Hanoi University of Industry, Viet Nam
quynhsonla1988@gmail.com

Potential theory is important in the theory of subharmonic and δ-subharmonic functions. In the article we sharpen Azarin's variant on the convergence of the sequence of canonical potentials in the space $L_{1,loc}(\mathbb{C})$.
Keywords: canonical potential, Radon measure, widely convergence.

Нгуен Ван Куинь. **Сходимость последовательности канонических потенциалов в пространстве $L_{1,loc}(\mathbb{C})$.** В теории субгармонических и δ-субгармонических функций существенную роль играет теория потенциала. В статье предлагается усиление варианта Азарина теоремы о сходимости последовательности канонических потенциалов в пространстве $L_{1,loc}(\mathbb{C})$.
Ключевые слова: канонический потенциал, мера Радона, широкая сходимость.

Нгуєн Ван Куінь. **Збіжність послідовності канонічних потенціалів в просторі $L_{1,loc}(\mathbb{C})$.** У теорії субгармонічних і δ-субгармонічних функцій суттєву роль відіграє теорія потенціалу. У статті пропонується посилення варіанту Азаріна теореми про збіжність послідовності канонічних потенціалів в просторі $L_{1,loc}(\mathbb{C})$.
Ключові слова: канонічний потенціал, міра Радону, широка збіжність.

2000 Mathematics Subject Classification: 31A05, 31B05.

The study of the potential theory and related problems in mathematical physics has been in the focus of mathematicians since the nineteenth century. In particular, in the study of subharmonic and δ - subharmonic functions, methods of the potential theory play an important role. The results in the present paper can be viewed as the versions of some theorems from monographs of N.S.Landkof [2] and V.S. Azarin [1]. See also the paper of A. F. Grishin, N. Quynh, and I. Podiedtseva [3], where the representation theorem for δ -subharmonic functions of finite order in the form of canonical potentials was proved, and the paper of A. F. Grishin and A. Shuigi [4], in which various types of convergence of sequences of δ-subharmonic functions were studied. The results of our article allow us to simplify to some extent the constructions from these articles.

In Section 1 we give the necessary definitions and known results in convenient formulations, where we follow [2] and [1]. In the main section 2 we give new theorems on the convergence of the sequence of canonical potentials. Note that when studying canonical potentials, it is necessary to evaluate separately the corresponding integrals for $\zeta| < |z|$ and $|\zeta| > |z|$, since the kernels in these cases are different. Therefore, these cases are considered separately.

1. Preliminary results

We will use the following notation:

$$B(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \le R\};$$
$$C(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < R\};$$
$$S(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = R\};$$
$$R([R_1,R_2]) = B(0;R_2)/C(0,R_1).$$

A proximate order is an important tool for investigating the functions of finite order.

An absolutely continuous function $\rho(r)$ on the semiaxis $(0,\infty)$ is called a *proximate order* (in the sense of Valiron [5]), if two conditions hold: 1) there exists the limit $\rho = \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r)$,
2) $\lim\limits_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r = 0$ (under $\rho'(r)$ we mean the maximum modulus of the number of derivative).

In the case when $\rho = 0$, the proximate order $\rho(r)$ is called the zero proximate order. We denote $V(r) = r^{\rho(r)}$. The proximate order $\rho(r)$ is called a *proximate order of the function* f if

$$\sigma = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{f(r)}{V(r)} \in (0,\infty). \tag{1}$$

By the equality (1), the value of σ is defined for an arbitrary positive function f and an arbitrary proximate order $\rho(r)$. It is called the type of the function f with respect to the proximate order $\rho(r)$. In general, $\sigma \in [0,\infty]$. If the inequality $\sigma < \infty$ holds, then $f(r)$ is called a function of no higher than normal type with respect to the proximate order $\rho(r)$.

In the case of an arbitrary refined order, an additional condition on the proximate order looks as follows. An arbitrary proximate order $\rho(r)$ is represented in the form $\rho(r) = \rho + \rho_1(r)$, where $\rho_1(r)$ is the zero proximate order.

The properties of proximate orders can be found in [7], [6], [8]. Let us formulate several of them we need in what follows.

Theorem 1 *(See [6], Chapter 1, § 12, Lemma 5). Let $\rho(r)$ be an arbitrary proximate order. Then for any $t > 0$*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V(rt)}{V(r)} = t^{\rho},$$

and there is a uniform convergence on any segment $[a, b] \subset (0, \infty)$.

Theorem 2 *(See for example [8], Theorem 2.5). Let $\rho(r)$ be a zero proximate order. Let*

$$\gamma(t) = \sup_{r>0} \frac{V(rt)}{V(r)}.$$

Then $\gamma(t)$ – $\gamma(t)$ is a continuous function on the semiaxis $(0, \infty)$, moreover the functions $\gamma(t)$ and $\gamma(\frac{1}{t})$ have zero order, that is

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln \gamma(t)}{\ln t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \gamma(\frac{1}{t})}{\ln t} = 0.$$

Remark. There is a global inequality

$$V(rt) \le \gamma(t)V(r), \ r, t > 0, \tag{2}$$

where $\rho(r)$ is the zero proximate order. If $\rho(r)$ is an arbitrary proximate order, then

$$V(rt) = (rt)^{\rho(rt)} = t^{\rho} r^{\rho} (rt)^{\rho_1(rt)} \le \gamma(t) t^{\rho} r^{\rho} V_1(r) = \gamma(t) t^{\rho} V(r), \tag{3}$$

where $\rho = \rho(\infty)$, and the function $\gamma(t)$ is constructed using the zero proximate order $\rho_1(r)$.

We define a Radon measure as the difference of two locally finite Borel measures $\mu = \mu_1 - \mu_2$. If $\mu = \mu_1 - \mu_2$ is such a representation, then the measure μ_1 is called a positive part of the Radon measure μ and is denoted by μ^+. The measure μ_2 is called a negative part of μ and is denoted by μ^-. The measure $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ is the modulus of the measure μ.

For Radon measures μ the domain of definition consists of all Borel sets $E \subset G \subset \mathbb{C}$ except for those E for which $\mu_1(E) = \mu_2(E) = +\infty$.

If there exists a Radon measure μ such that for any continuous compactly supported function φ the relation

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi(x) d\mu_n(x) \to \int \varphi(z) d\mu_n(x)$$

holds, we say that the sequence μ_n widely converges to μ.

Let μ be the Radon measure in $\mathbb{C}$, $\rho(r)$ the proximate order. The value

$$\sigma = \lim_{r\to\infty} \frac{|\mu|(B(0, r))}{V(r)}$$

is called a type of μ with respect to the proximate order $\rho(r)$.

If $\sigma < \infty$, then the measure μ is called a measure of no higher than normal type with respect to the proximate order $\rho(r)$.

If the measure μ is such a measure, then there exists a constant C such that for $r \geq 1$ we have the inequality

$$|\mu|(B(0,r)) \leq CV(r). \tag{4}$$

If the measure μ does not load the disk $B(0,1)$, then the inequality (4) holds for all $r > 0$.

Given μ and $\rho(r)$ as above, we denote by μ_t $(t > 0)$ the following measure

$$\mu_t(E) = \frac{\mu(tE)}{V(t)}.$$

The set of measures $\nu = \lim_{n\ to \infty} \mu_{t_n}$, where $t_n \to \infty$, is called the Azarin limit set of the measure μ (with respect to the proximate order $\rho(r)$) and is denoted by $Fr[\mu]$ or if $Fr[\mu, \rho(r)]$, should the need arise.

The results below follow in essence from previous definitions and statements.

Theorem 3 *Let μ be the Radon measure in $\mathbb{C}$ of no higher than normal type with respect to the proximate order $\rho(r)$, which does not load the disk $B(0,1)$. Then there exists a constant C such that for $t > 0$ and $r > 0$ the inequality*

$$|\mu_t|(B(0,r)) \leq C\gamma(r)r^\rho, \ \ \rho = \rho(\infty)$$

holds.

Proof. Taking into account the inequality (4), we have

$$|\mu_t|(B(0,r)) = \frac{|\mu|(B(0,rt))}{V(t)} \leq C\frac{V(rt)}{V(t)}.$$

The inequality (3) completes the proof.

Theorem 4 *(See [9], Theorem 1). Let μ be the Radon measure in $\mathbb{C}$ of the type σ with respect to the proximate order $\rho(r)$, $\rho = \rho(\infty) > 0$. Let the measure μ_t be constructed by using the proximate order $\rho(r)$. Then for any measure $\nu \in Fr[\mu]$ and any $r > 0$ the inequality*

$$|\nu|(B(0,r)) \leq \sigma r^\rho$$

holds.

In the theory of subharmonic and δ-subharmonic functions in the plane $\mathbb{C}$, an important role is played by the kernel

$$K_p(z,\zeta) = Re\left(\ln\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) + \frac{z}{\zeta} + \cdots + \frac{1}{p}\frac{z^p}{\zeta^p}\right),$$

where $p \in \mathbb{N}$. For all $z,\ \zeta \in \mathbb{C}$ we have the inequality (see [6], Lemma 2)

$$|K_p(z,\zeta)| \le M(p)\frac{|z|^p}{|\zeta|^p}\min\left\{1, \frac{|z|}{|\zeta|}\right\}, \tag{5}$$

where $M(p)$ depends only on p. Let μ be the Radon measure in $\mathbb{C}$. We consider the following potential

$$\int\limits_{\mathbb{C}} K_p(z;\zeta)d\mu(\zeta),$$

which we call *the canonical potential of the measure* μ.

The convergence of the sequence $\upsilon_n(z)$ to $\upsilon(z)$ in the space $L_{1,loc}(\mathbb{C})$ means

$$\int |\upsilon_n(z) - \upsilon(z)|d\gamma(z) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

where the measure γ is the restriction of the Lebesgue measure on the compact set $K \subset \mathbb{C}$.

2. Main results

In this section we prove a series of results on the convergence of a sequence of canonical potentials.

Theorem 5 *Let $\rho(r)$ be a proximate order, $\rho = \rho(\infty) \ge 1$ be an integer. Let the measure μ be a measure of no higher than normal type with respect to the proximate order $\rho(r)$, which does not load the disk $B(0,1)$. Let the sequence of measures μ_{t_n} $(t_n \to \infty)$ widely converge to the measure ν. Then the sequence of functions*

$$\upsilon_n(z) = \int\limits_{B(0,|z|)} K_{\rho-1}(z,\zeta)d\mu_{t_n}(\zeta)$$

converges to a function

$$\upsilon(z) = \int\limits_{B(0,|z|)} K_{\rho-1}(z,\zeta)d\nu(\zeta)$$

in the spaces $L_{1,loc}(\mathbb{C})$.

Proof. Since mu is a measure of no higher than normal type with respect to the proximate order $\rho(r)$, which does not load the disk $B(0,1)$, it follows that there exists a constant M_1 such that for all $r > 0$ we have the inequality

$$|\mu_{t_n}|(B(0,r)) \le M_1\frac{V(t_n r)}{V(t_n)}.$$

Applying the inequality (3), we obtain $|\mu_{t_n}|(B(0,r) \leq M_1\gamma(r)r^\rho$. Since $\nu \in Fr[\mu]$, it follows from the theorem 4 that there exists a constant M_2 such that for all $r > 0$ the inequality $|\nu|(B(0,r)) \leq M_2 r^\rho$ holds.

We denote by $\alpha_n = \mu_{t_n} - \nu$. Then there exists a constant M such that we have

$$|\alpha_n|(B(0,r)) \leq M_3\gamma(r)r^\rho, \ r > 0. \tag{6}$$

Let d be an arbitrary number with $d \geq 2$. We have

$$\begin{aligned} A_n &= \int\limits_{B(0,d)} |\upsilon_n(z) - \upsilon(z)| dm_2(z) \\ &= \int\limits_{B(0,d)} \left| \int\limits_{B(0,|z|)} K_{\rho-1}(z,\zeta) d\alpha_n(\zeta) \right| dm_2(z) \\ &= \int\limits_{B(0,d)} \int\limits_{B(0,d)} s(z)\chi_{B(0,|z|)}(\zeta) K_{\rho-1}(z,\zeta) d\alpha_n(\zeta) dm_2(z), \end{aligned} \tag{7}$$

where

$$s(z) = sign\ g(z),$$

$$g(z) = \int\limits_{B(0,|z|)} K_{\rho-1}(z,\zeta) d\alpha_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{\rho-1} f_k(z),$$

$$f_0(z) = \int\limits_{B(0,|z|)} \ln\left|1 - \frac{1}{\zeta}\right| d\alpha_n(\zeta),$$

$$f_k(z) = \frac{1}{k} Re\left(z^k \int\limits_{B(0,|z|)} \frac{1}{\zeta^k} d\alpha_n(\zeta) \right), \ k = \overline{1, \rho - 1}.$$

The function $\int\limits_{B(0,|z|)} \frac{1}{\zeta^k} d\alpha_n(\zeta)$ is a linear combination with complex coefficients of increasing functions of the variable $|z|$. Therefore, this function is a Borel function in $\mathbb{C}$. From this it follows that the functions $f_k(z),\ k = \overline{1, \rho - 1}$, are Borel functions in the plane $\mathbb{C}$ as well.

Consider the function

$$\tilde{f}_0(z) = \int\limits_{B(0,|z|)} \ln|z - \zeta|\, d\alpha_n(\zeta) = \int\limits_{B(0,|z|)} \chi_{B(0,|z|)}(\zeta) \ln|z - \zeta|\, d\alpha_n(\zeta).$$

The function $\chi_{B(0,|z|)}(\zeta) \ln|z - \zeta|$ is a Borel function of the variables $z,\ \zeta$.

We have

$$I = \int\limits_{B(0,d)} \int\limits_{B(0,d)} \chi_{B(0,|z|)}(\zeta)\, |\ln|z-\zeta||\, d\alpha_n(\zeta)$$
$$\leq \int\limits_{B(0,d)} \left(\int\limits_0^d \left(\int\limits_0^{2\pi} \big|\ln|re^{i\varphi}-\zeta|\big|\, d\varphi \right) rdr \right) d|\alpha_n|(\zeta).$$

Next, we find

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{2\pi} \big|\ln|re^{i\varphi}-\zeta|\big|\, d\varphi &= \int\limits_0^{2\pi} \left(2\ln^+|re^{i\varphi}-\zeta| - 2\ln|re^{i\varphi}-\zeta|\right) d\varphi \\ &\leq 4\pi \ln 2d + 4\pi \min\left(\ln\frac{1}{r},\ \ln\frac{1}{|\zeta|}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^d \left(\int\limits_0^{2\pi} \big|\ln|re^{i\varphi}-\zeta|\big|\, d\varphi \right) rdr \\ &\leq 2\pi d^2 \ln 2d - 2\pi \left(2\ln|\zeta| \int\limits_0^{|\zeta|} rdr + 2\int\limits_{|\zeta|}^d r\ln r dr \right) \leq M_4(d). \end{aligned} \tag{9}$$

From these inequalities it follows that I is finite. This and the Tonelli theorem [10] imply that the function $\chi_{B(0,|z|)} \ln|z-\zeta|$ belongs to the space $L_1(B(0,d)\times B(0,d), dm_2 \times d\alpha_n)$. Next, the Fubini theorem [10] implies that the function $\tilde{f}_0(z)$ is integrable with respect to m_2 and, in particular, is a Borel function. We successively obtain that the functions $f_0(z), g(z), s(z)$ are Borel functions and so the function $h(z,\zeta) = s(z)\chi_{B(0,|z|)}(\zeta)K_{\rho-1}(z,\zeta)$ of the variables z, ζ is also the Borel finction on every set $B(0,d)\times B(0,d)$.

The finiteness of the integral

$$\int\limits_{B(0,d)} \left(\int\limits_{B(0,d)} |h(z,\zeta)| dm_2(z) \right) d|\alpha_n|(\zeta).$$

can be proved in the same way as the finiteness of I above.

Now Tonelli's theorem [10] implies

$$h(z,\zeta) \in L_1(B(0,d)\times B(0,d), dm_2 \times d\alpha_n). \tag{10}$$

Note that this means the finiteness of the four integrals

$$\int\limits_{B(0,d)} \int\limits_{B(0,d)} \left(h(z,\zeta)^{\pm}\right) dm_2(z) d\alpha_n^{\pm}(\zeta).$$

From the equality (ref q8) and the Fubini theorem cite K it follows that

$$A_n = \int\limits_{B(0,d)} p(\zeta) d\alpha_n(\zeta), \tag{11}$$

where

$$p(\zeta) = \int\limits_{B(0,d)} s(z)\chi_{B(0,|z|)}(\zeta) K_{\rho-1}(z,\zeta) dm_2(z) = \int\limits_{R([|\zeta|,d])} s(z) K_{\rho-1}(z,\zeta) dm_2(z).$$

Let us prove that the function $p(\zeta)$ is continuous on the set $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. It is easy to see that the continuity of $p(\zeta)$ follows from the continuity of the function

$$q(\zeta) = \int\limits_{R([|\zeta|,d])} \ln|z-\zeta| s(z) dm_2(z).$$

We assume for definiteness that the inequality $|\zeta_0| \le |\zeta|$ holds. We have

$$|q(\zeta) - q(\zeta_0)| \le \int\limits_{R([|\zeta_0|,d])} \left| \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta_0}\right| \right| dm_2(z) + \int\limits_{R([|\zeta_0|,|\zeta|])} |\ln|z-z_0|| \, dm_2(z)$$

$$\le \int\limits_{R([|\zeta_0|,d])} \ln\left(1 + \frac{|\zeta-\zeta_0|}{|z-\zeta_0|}\right) dm_2(z) + \int\limits_{|\zeta_0|}^{|\zeta|} \left(\int\limits_0^{2\pi} |\ln|re^{i\varphi} - \zeta_0|| d\varphi \right) r dr$$

$$= J_1 + J_2.$$

The inequality (8) implies the inequality

$$J_2 \le 2\pi|\zeta| \left(\ln 2d + \ln\frac{1}{|\zeta_0|} \right) (|\zeta| - |\zeta_0|).$$

Also, the inequality

$$J_1 \le \int\limits_{B(\zeta_0,2d)} \ln\left(1 + \frac{|\zeta-\zeta_0|}{|z-\zeta_0|}\right) dm_2(z)$$

holds.

The integral J_2 can be estimated from above by using the polar coordinates with the vertex at ζ_0

$$J_2 \le 2\pi \int\limits_0^{2d} r \ln\left(1 + \frac{|\zeta-\zeta_0|}{r}\right) dr.$$

Now the continuity of the function $q(\zeta)$ on the set $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ is obvious. Thus, we have proved the continuity of the function $p(\zeta)$ on the set $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Note that the equality $p(\zeta)=0$ holds for $|\zeta|=d$. If we assume that $p(\zeta)=0$ for $|\,|\geq d$, then the equality (11) can be rewritten as

$$A_n=\int p(\zeta)d\alpha_n(\zeta), \tag{12}$$

where $p(\ zeta)$ is a continuous function compactly supported on the set $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. If the function $p(\zeta)$ were continuous in the whole plane, then the equality 12 would already imply the relation $A_n\to 0$ $(n\to\infty)$. However, this is not the case. Therefore, additional reasoning is required. We evaluate the function $p(\zeta)$. The following estimate stems from the inequalities (5), (9)

$$|p(\zeta)|\leq\frac{M_1(d)}{|\zeta|^{\rho-1}},\ |\zeta|\leq 1.$$

Now let ε be an arbitrary number in the interval $(0,\frac{1}{2})$, $1=\psi_1(\zeta)+\psi_2(\zeta)$ – a continuous partition of unity such that $supp\ \psi_1\subset B(0,2\varepsilon)$, $supp\ \psi_2\cap B(0,\varepsilon)=\emptyset$. Then it follows that

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n &\leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\ M_1(d)\int\limits_{B(0,2\varepsilon)}\frac{d|\alpha_n|(\zeta)}{|\zeta|^{\rho-1}}+\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int\psi_2(\zeta)p(\zeta)d\alpha_n(\zeta)\right| \\ &= M_2(d)\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\int\limits_{B(0,2\varepsilon)}\frac{d|\alpha_n|(\zeta)}{|\zeta|^{\rho-1}}.\end{aligned} \tag{13}$$

If $\rho=1$, it is easily seen from the resulting inequality that $A_n\to 0$ $(n\to\infty)$. In what follows we assume that $\rho>1$. We have

$$\int\limits_0^{2\varepsilon}\frac{d|\alpha_n|(t)}{t^{\rho-1}}=\frac{|\alpha_n|(B(0,2\varepsilon)}{(2\varepsilon)^{\rho-1}}+\frac{1}{\rho-1}\int\limits_0^{2\varepsilon}\frac{|\alpha_n|(B(0,t))}{t^{\rho}}dt.$$

The latter equality along with the inequalities (6), (13) completes the proof of the theorem.

Theorem 6 *Let $\rho(r)$ be a proximate order, $\rho=\rho(\infty)\geq 1$ be an integer. Let the measure μ be a measure of no higher than normal type with respect to the proximate order $\rho(r)$, which does not load the disk $B(0,1)$. Let the sequence of measures μ_{t_n} $(t_n\to\infty)$ widely converge to the measure ν. Then the sequence of functions*

$$\upsilon_n(z)=\int\limits_{CB(0,|z|)}K_\rho(z,\zeta)d\mu_{t_n}(\zeta)$$

converges to a function

$$\upsilon(z)=\int\limits_{CB(0,|z|)}K_\rho(z,\zeta)d\nu(\zeta)$$

in the spaces $L_{1,loc}(\mathbb{C})$.

Proof. We denote $\alpha_n = \mu_{t_n} - \nu$. Let d be an arbitrary number satisfying $d \geq 2$. We have

$$\begin{aligned} B_n &= \int\limits_{B(0,d)} |v_n(z) - v(z)| dm_2(z) \\ &= \int\limits_{B(0,d)} \left| \int\limits_{CB(0,|z|)} K_\rho(z,\zeta) d\alpha_n(\zeta) \right| dm_2(z) \\ &= \int\limits_{B(0,d)} \int s(z) \chi_{CB(0,|z|)}(\zeta) K_\rho(z,\zeta) d\alpha_n(\zeta) dm_2(z), \end{aligned} \tag{14}$$

where

$$s(z) = sign \int\limits_{CB(0,|z|)} K_\rho(z,\zeta) d\alpha_n(\zeta).$$

Let $N > d$ be an arbitrary number, $1 = \psi_1(\zeta) + \psi_2(\zeta)$ be a continuous partition of unity such that $supp\ \psi_1 \subset B(0, 2N)$, $supp\ \psi_2 \cap B(0, N) = \emptyset$. Then the equality (14) can be rewritten in the form

$$\begin{aligned} B_n &= \int\limits_{B(0,d)} \int\limits_{R((|z|,2N])} s(z) \psi_1(\zeta) K_\rho(z,\zeta) d\alpha_n(\zeta) dm_2(z) \\ &+ \int\limits_{B(0,d)} \int\limits_{CB(0,N)} s(z) \psi_2(\zeta) K_\rho(z,\zeta) d\alpha_n(\zeta) dm_2(z) \\ &= J_{1,n} + J_{2,n}. \end{aligned} \tag{15}$$

We investigate each of these integrals. We have

$$J_{1,n} = \int\limits_{B(0,d)} \int\limits_{B(0,2N)} h(z,\zeta) d\alpha_n(\zeta) dm_2(z),$$

where $h(z,\zeta) = s(z)\psi_1(\zeta)\chi_{CB(0,|z|)} K_\rho(z,\zeta)$. Next, repeating the reasoning in the theorem 5, we obtain $h(z,\zeta) \in L_1(B(0,d) \times B(0,2N), dm_2 \times d\alpha_n)$. From this and the Fubini theorem [10] it follows that

$$J_{1,n} = \int\limits_{B(0,2N)} p(\zeta) d\alpha_n(\zeta), \tag{16}$$

$$\begin{aligned} p(\zeta) &= \int\limits_{B(0,2N)} s(z)\psi_1(\zeta)\chi_{CB(0,|z|)}(\zeta) K_\rho(z,\zeta) dm_2(z) \\ &= \int\limits_{B(0,|\zeta|)} s(z)\psi_1(\zeta) K_\rho(z,\zeta) dm_2(z). \end{aligned}$$

Note that $p(\zeta) = 0$ for $\zeta = 0$. Applying the reasoning in theorem 5 after the equality (11), we obtain that the function $p(\zeta)$ is continuous on the set $B(0, 2N)$.

Note that the equality $p(\zeta) = 0$ holds for $|\zeta| = 2N$. If we assume that $p(\zeta) = 0$ for $|\zeta| = 2N$, then the equality (16) can be rewritten as

$$J_{1,n} = \int p(\zeta) d\alpha_n(\zeta), \tag{17}$$

where $p(\zeta)$ is a continuous function compactly supported in $\mathbb{C}$.

From the condition of the lemma it follows that $\lim\limits_{n\to\infty} J_{1,n} = 0$. From this and the inequality (15) we have

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to\infty}} B_n &\le \overline{\lim_{n\to\infty}} J_{1,n} + \overline{\lim_{n\to\infty}} J_{2,n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} J_{2,n} \\ &\le M(\rho, d) \overline{\lim_{n\to\infty}} \int\limits_N^\infty \frac{d|\alpha_n|(B(0,t))}{t^{\rho+1}}, \end{aligned} \tag{18}$$

where $M(\rho, d)$ is a constant depending only on ρ, d. Integrating by parts in the last integral, we obtain

$$\int\limits_N^\infty \frac{d|\alpha_n|(B(0,t))}{t^{\rho+1}} = \frac{|\alpha_n|(B(0,N))}{N^{\rho+1}} + \int\limits_N^\infty \frac{|\alpha_n|(B(0,t))}{t^{\rho+2}} dt.$$

The latter equality along with $|\alpha_n|(B(0,t)) \le Mt^\rho \gamma(t)$ and the inequality (18) imply that $B_n \to 0$ $(N \to \infty)$. The proof is complete.

Theorem 7 *Let $\rho(r)$ be a proximate order with non-integer $\rho = \rho(\infty) > 0$, $p = [\rho]$. Let the measure μ be a measure of no higher than normal type with respect to the proximate order $\rho(r)$, which does not load the disk $B(0,1)$. Let the sequence of measures μ_{t_n} $(t_n \to \infty)$ widely converge to the measure ν. Then the sequence of functions*

$$\upsilon_n(z) = \int K_p(z, \zeta) d\mu_{t_n}(\zeta)$$

converges to a function

$$\upsilon(z) = \int K_p(z, \zeta) d\nu(\zeta)$$

in the spaces $L_{1,loc}(\mathbb{C})$.

Proof. We have

$$\upsilon_n(z) = \int\limits_{B(0,|z|)} K_p(z,\zeta) d\mu_{t_n}(\zeta) + \int\limits_{CB(0,|z|)} K_p(z,\zeta) d\mu_{t_n}(\zeta).$$

The result follows from theorems 5, 6.

References

1. Azarin V. S. Growth theory of subharmonic functions. / V. S. Azarin – Birkhanser, Basel, Boston, Berlin, 2009. – 259 p.

2. Landkof N.S. Foundations of modern potential theory. / N.S. Landkof – M .: GRFML, Science, 1966. – 515 p.

3. Grishin A.F., Nguyen Van Quynh, Poedintseva I.V. Representation theorems of δ-subharmonic functions / Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University. Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics 2014. – N. 1133. – P. 56-75.

4. A. F. Grishin. Various types of convergence of sequences of δ-subharmonic functions. / A. F. Grishin, A. Chouigui, Math. sbornyk. **199**, (2008). – P. 27–48.

5. Valiron G. Lectures on the General Theory of Integral Functions. / G. Valiron – Privat, Toulouse, 1923. – 234 p.

6. Levin B.Ya. Distribution of zeros of entire functions. / B.Ya. Levin – M .: GITTL, 1956. – 632 p.

7. Grishin A.F. On the proximate order. / AF Grishin,, I.V. Malyutina // Complex analysis, Mathematical physics. - Krasnoyarsk, 1998. – P. 10–24.

8. Grishin A.F. Abel and Tauberian theorems for integrals. / A. F. Grishin, I.V. Podiedtseva // Algebra and Analysis, 2014. – T.26, No 3, – P. 1–88.

9. Grishin A.F. Limit sets of Azarin for Radon measures. I / A.F. Grishin, Nguyen Van Quynh // Mat. Studii, 2015. – V. 43, No 1. – P. 94-99 ..

10. Kadets, V.M. A course of Functional Analysis / Kharkov National University, 2006. – 607 p.

Article history: Received: 17 March 2017; Final form: 7 September 2017; Accepted: 8 September 2017.

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
Том 85, 2017, с.16–42

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics”
Vol. 85, 2017, p. 16–42
DOI: 10.26565/2221-5646-2017-85-02

УДК 517.518.88

A Multiplicative Representation of the Resolvent Matrix of the Truncated Hausdorff Matrix Moment Problem via New Dyukarev-Stieltjes Parameters

Abdon E. Choque-Rivero

Instituto de Física y Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México
abdon@ifm.umich.mx

A new multiplicative decomposition of the resolvent matrix of the truncated Hausdorff matrix moment (THMM) problem in the case of an odd and even number of moments via new Dyukarev-Stieltjes matrix (DSM) parameters is attained. Additionally, we derive Blaschke-Potapov factors of auxiliary resolvent matrices; each factor is decomposed with the help of the DSM parameters.

Keywords: Orthogonal matrix polynomial; Dyukarev-Stieltjes parameter; Resolvent matrix; Continued fractions.

Абдон Чоке-Ріверо. **Мультиплікативне зображення резольвентної матриці усіченої матричної проблеми моментів Хаусдорфа в термінах нових параметрів Дюкарева-Стільтьєса.** Отримано мультиплікативний розклад резольвентної матриці усіченої матричної проблеми моментів Хаусдорфа у випадку непарного та парного числа моментів в термінах нових матричних параметрів Дюкарева-Стільтьєса. Крім того, ми перетворюємо множники Бляшке-Потапова допоміжних резольвентних матриць; кожний множник уявлено через параметри Дюкарева-Стільтьєса.

Ключові слова: ортогональні матричні многочлени; параметри Дюкарева-Стільтьєса; резольвентна матриця; неперервні дроби.

Абдон Чоке-Риверо. **Мультипликативное представление резольвентной матрицы усеченной матричной проблемы моментов Хаусдорфа в терминах новых параметров Дюкарева-Стилтьеса.** Получено мультипликативное разложение резольвентной матрицы усеченной матричной проблемы моментов Хаусдорфа в случае нечетного и четного числа моментов в терминах новых матричных параметров Дюкарева-Стилтьеса. Кроме того, мы преобразуем множители Бляшке-Потапова вспомогательных резольвентных матриц; каждый множитель выражается через параметры Дюкарева-Стилтьеса.

Ключевые слова: ортогональные матричные многочлены; параметры Дюкарева-Стилтьеса; резольвентная матрица; непрерывные дроби.

2010 Mathematics Subject Classification: 30E05; 42C05; 47A56; 30B70.

1. Introduction

Throughout this paper, let q and p be positive integers. We will use $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}_0$ and $\mathbb{N}$ to denote the set of all complex numbers, the set of all real numbers, the set of all nonnegative integers, and the set of all positive integers, respectively. The notation $\mathbb{C}^{q\times q}$ stands for the set of all complex $q\times q$ matrices. For the null matrix that belongs to $\mathbb{C}^{p\times q}$ we will write $0_{p\times q}$. We denote by 0_q and I_q the null and the identity matrices in $\mathbb{C}^{q\times q}$, respectively. In cases where the sizes of the null and the identity matrix are clear, we will omit the indices.

In the present work we introduce new matrix Stieltjes parameters, called Dyukarev-Stieltjes matrix (DSM) parameters of the truncated Hausdorff matrix moment (THMM) problem. With the help of the DSM parameters, we obtain a new multiplicative representation of the resolvent matrix (RM):

$$U^{(m)}(z)=\begin{pmatrix}\alpha^{(m)}(z) & \beta^{(m)}(z)\\ \gamma^{(m)}(z) & \delta^{(m)}(z)\end{pmatrix}$$

of the THMM problem in the case of an odd and even number of moments. The RM $U^{(m)}$ is a $2q\times 2q$ matrix polynomial, which we factorize as follows:

$$U^{(2n)} =\mathcal{D}_1\mathbb{l}_{-1}^{(2n)}\mathbb{m}_0^{(2n)}\dots\mathbb{m}_{n-1}^{(2n)}\mathbb{l}_{n-1}^{(2n)}\mathcal{B}_2^{(2n)}\mathcal{D}_2, \tag{1}$$

$$U^{(2n+1)} =\mathcal{D}_3\mathbb{l}_{-1}^{(2n+1)}\mathbb{m}_0^{(2n+1)}\dots\mathbb{l}_{n-1}^{(2n+1)}\mathbb{m}_n^{(2n+1)}\mathcal{B}_2^{(2n+1)}\mathbf{D}_1, \tag{2}$$

where $\mathcal{D}_k$ are anti-diagonal block matrices, $\mathbf{D}_1$ is a diagonal matrix, $\mathcal{B}_2^{(2n)}$, $\mathcal{B}_2^{(2n+1)}$, $\mathbb{l}_j^{(2n+1)}$, $\mathbb{m}_j^{(2n)}$ are constant anti-triangular block matrices and $\mathbb{m}_j^{(2n+1)}$, $\mathbb{l}_j^{(2n)}$ are affine on z and anti-triangular block matrices.

See Theorem 3 and Corollary 1.

The importance of the RM is explained by the fact that linear fractional transformation

$$s(z)=(\alpha^{(m)}(z)\mathbf{p}(z)+\beta^{(m)}(z)\mathbf{q}(z))(\gamma^{(m)}(z)\mathbf{p}(z)+\delta^{(m)}(z)\mathbf{q}(z))^{-1}$$

describes the set of all associated solutions in the nondegenerate case of the THMM problem. Here the column pair $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ satisfies certain properties in every case; see Definitions [10, Definition 5.2] and [9, Definition 5.2].

Let us now summarize the notions appearing in the last two paragraphs.

Statement of the THMM problem. The THMM problem is stated as follows: given an interval $[a,b]$ on the real axis and a finite sequence of $q\times q$ matrices, $(s_j)_{j=0}^m$, describe the set $\mathcal{M}_{\geq}^q[[a,b],\mathfrak{B}\cap[a,b];(s_j)_{j=0}^m]$ of all nonnegative Hermitian $q\times q$ measures σ defined on the σ-algebra of all Borel subsets of the interval $[a,b]$ such that

$$s_j=\int\limits_{[a,b]} t^j d\sigma(t)$$

holds true for each integer jf with $0 \leq j \leq m$.

Solution set of the THMM problem. For describing the solution set of the THMM problem with the help of the finite sequence $(s_j)_{j=0}^{2n}$ (resp. $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$), we construct the following Hankel matrices

$$\widetilde{H}_{0,j} := \{s_{l+k}\}_{l,k=0}^{j}, \quad \widetilde{H}_{1,j} := \{s_{l+k+1}\}_{l,k=0}^{j}, \quad \text{and} \quad \widetilde{H}_{2,j} := \{s_{l+k+2}\}_{l,k=0}^{j}. \tag{3}$$

Furthermore, denote

$$H_{1,j} := \widetilde{H}_{0,j},\ j \geq 0, \quad H_{2,j-1} := -ab\widetilde{H}_{0,j-1} + (a+b)\widetilde{H}_{1,j-1} - \widetilde{H}_{2,j-1},\ j \geq 1 \tag{4}$$

and

$$K_{1,j} := bH_{1,j} - \widetilde{H}_{1,j}, \quad K_{2,j} := -aH_{1,j} + \widetilde{H}_{1,j}, \quad j \geq 0. \tag{5}$$

In [9, Theorem 1.3] (resp. [10, Theorem 1.3]), it was demonstrated that there is a solution to the THMM problem, that is, the set $\mathcal{M}_{\geq}^{q}[[a,b], \mathfrak{B} \cap [a,b]; (s_j)_{j=0}^{2n}]$ (resp. $\mathcal{M}_{\geq}^{q}[[a,b], \mathfrak{B} \cap [a,b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ is not empty if and only if the block matrices $H_{1,n}$ and $H_{2,n-1}$ (resp. $K_{1,n}$ and $K_{2,n}$) are both nonnegative Hermitian.

The problem of finding the set $\mathcal{M}_{\geq}^{q}[[a,b], \mathfrak{B} \cap [a,b]; (s_j)_{j=0}^{m}]$ for $m = 2n$ and $m = 2n+1$ is usually reduced to searching for the set of holomorphic functions

$$\begin{aligned} &\mathfrak{S}_{\geq}^{q}[[a,b], \mathfrak{B} \cap [a,b]; (s_j)_{j=0}^{m}] \\ &\quad := \left\{ s(z) = \int_{[a,b]} \frac{d\sigma(t)}{t-z},\ \sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^{q}[[a,b], \mathfrak{B} \cap [a,b]; (s_j)_{j=0}^{m}] \right\}. \end{aligned}$$

Definition 1 *Let $[a,b]$ be a finite interval on real axis $\mathbb{R}$. The sequence $(s_k)_{k=0}^{2j}$ (resp. $(s_k)_{k=0}^{2j+1}$) is called a Hausdorff positive definite sequence if the block Hankel matrices $H_{1,j}$ and $H_{2,j-1}$ (resp. $K_{1,j}$ and $K_{2,j}$) are both positive definite matrices.*

In the sequel, we will consider only Hausdorff positive definite sequences. In this case the THMM problem is called a nondegenerate THMM problem.

Resolvent matrix of the THMM problem. In the present work we use the following form of RM of the nondegenerate THMM problem, introduced in [5, Formula (3.24)]:

$$U^{(2n)}(z,a,b) := \begin{pmatrix} \Theta_{2,n}^{*}(\bar{z},a)\Theta_{2,n}^{*^{-1}}(a,a) & \frac{1}{b-a}\Theta_{1,n}^{*}(\bar{z},b)\Gamma_{1,n}^{*^{-1}}(a,b) \\ (z-a)\Gamma_{2,n}^{*}(\bar{z},a)\Theta_{2,n}^{*^{-1}}(a,a) & \frac{b-z}{b-a}\Gamma_{1,n}^{*}(\bar{z},b)\Gamma_{1,n}^{*^{-1}}(a,b) \end{pmatrix} \tag{6}$$

and [5, Formula (3.27)]

$$\begin{aligned} &U^{(2n+1)}(z,a,b) \\ &:= \begin{pmatrix} Q_{2,n}^{*}(\bar{z},a,b)Q_{2,n}^{*^{-1}}(a,b,a) & -Q_{1,n+1}^{*}(\bar{z})P_{1,n+1}^{*^{-1}}(a) \\ -(z-a)(b-z)P_{2,n}^{*}(\bar{z},a,b)Q_{2,n}^{*^{-1}}(a,b,a) & P_{1,n+1}^{*}(\bar{z})P_{1,n+1}^{*^{-1}}(a) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7}$$

The $q\times q$ matrix polynomials $P_{k,j}$, $Q_{k,j}$, $\Gamma_{k,j}$ and $\Theta_{k,j}$ for $k=\{1,2\}$ are $q\times q$ are constructed via the given data: the sequence of moments $(s_j)_{j=0}^{2n}$ (resp. $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$). See Definition 6 and 7.

It should be mentioned that the THMM problem in the nondegenerate case was first solved in [30].

Factorization strategy of the RM of the THMM problem. Our main purpose is to factorize the RM $U^{(2n)}$ and $U^{(2n+1)}$ as their simplest factors. To this end we pursue the following strategy consisting of three steps.

Step 1. We use the equality

$$U^{(2n)}(z)=\begin{pmatrix}\frac{1}{(z-a)(b-z)}I_q & 0_q\\ 0_q & I_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_q & s_0z\\ 0_q & I_q\end{pmatrix} \cdot\widetilde{U}_2^{(2n-2)}(z)A_2^{(2n)}\begin{pmatrix}(b-a)(z-a)I_q & 0_q\\ 0_q & \frac{b-z}{b-a}I_q\end{pmatrix} \tag{8}$$

and

$$U^{(2n+1)}(z)=\begin{pmatrix}\frac{1}{b-z}I_q & 0_q\\ 0_q & I_q\end{pmatrix}\widetilde{U}_2^{(2n+1)}(z)A_2^{(2n+1)}\begin{pmatrix}(b-z)I_q & 0_q\\ 0_q & I_q\end{pmatrix}, \tag{9}$$

where $\widetilde{U}_2^{(m)}(z)$, $A_2^{(m)}(z)$ for $m=2n-2$ $(m=2n+1)$ are introduced in (27), (A.1), (28) and (31). Equalities (8) and (9) are the consequence of [9, Equality (6.26)] and [10, Equalities (6.26),(6.27)].

Step 2. The auxiliary matrix $\widetilde{U}_2^{(2n+1)}$ is written in the following form (as in Corollary 1):

$$\widetilde{U}_2^{(2n+1)}=d^{(1)}d^{(3)}\dots d^{(2n-1)}d^{(2n+1)}. \tag{10}$$

Instead of $\widetilde{U}_2^{(2n-2)}$, the auxiliary matrix $\widehat{U}_2^{(2n-2)}$ (as in (29)) is used. The factorization

$$\widehat{U}_2^{(2n-2)}=d^{(0)}d^{(2)}\dots d^{(2n-2)}d^{(2n)} \tag{11}$$

is employed to prove a new factorization of the RM $U^{(2n-2)}$. The $2q\times 2q$ matrices $d^{(2j+1)}$ and $d^{(2j)}$ are affine on z. See Definition 8.

Step 3. We factorize every matrix $d^{(2j+1)}$ (resp. $d^{(2j+2)}$) as in the Theorem 2:

$$d^{(2j+1)}(z)=\begin{pmatrix}I_q & \mathbf{r}_j\\ 0_q & I_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_q & 0_q\\ -(z-a)\mathbf{m}_j & I_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_q & -\mathbf{r}_j\\ 0_q & I_q\end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$d^{(2j+2)}(z)=\begin{pmatrix}I_q & 0_q\\ -\mathbf{t}_j & I_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_q & (z-a)\mathbf{l}_j\\ 0_q & I_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_q & 0_q\\ \mathbf{t}_j & I_q\end{pmatrix} \tag{13}$$

for $0\le j\le n$ (resp. $0\le j\le n-1$) where the $q\times q$ matrices $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{t}_j$, $\mathbf{m}_j$ and $\mathbf{l}_j$ are as in Definition 9.

Based on Steps 1 through 3, which involves algebraic identities and auxiliary results described in Sections 2–4, the multiplicative representations (106) and (107) are found.

In [8], a similar strategy was employed to attain another factorization of the RM $U^{(2n)}$ and $U^{(2n+1)}$. Namely, the following relations were used:

$$U^{(2n)} = \widetilde{U}_1^{(2n)} A^{(2n)}$$

and

$$U^{(2n+1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z-a} I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \widetilde{U}_1^{(2n+1)} A^{(2n+1)} \begin{pmatrix} (z-a) I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}.$$

The auxiliary matrices $\widetilde{U}_1^{(2n+1)}$ and $\widetilde{U}_1^{(2n)}$ are defined by [8, Formula (1.14) and (1.32)]. The symbol $A^{(2n)}$ (resp. $A^{(2n+1)}$) denotes a $2q \times 2q$ matrix depending on a and b.

Observe that the auxiliary matrices $\widetilde{U}_1^{(2n)}$ and $\widetilde{U}_1^{(2n+1)}$ (resp. $\widetilde{U}_2^{(2n-2)}$ and $\widetilde{U}_2^{(2n+1)}$) are related to $H_{1,n}$ and $K_{2,n}$ (resp. $H_{2,n-1}$ and $K_{1,n}$), correspondingly.

The importance of the auxiliary matrices $\widetilde{U}_2^{(2n+1)}$ and $\widehat{U}_2^{(2n-2)}$ resides in the fact that they belong to the Potapov class of matrix functions [42], [10, Lemma 6.3], [9, Proposition 6.3]:

Definition 2 *Let* $J_q := \begin{pmatrix} 0_q & iI_q \\ -iI_q & 0_q \end{pmatrix}$. *Furthermore, let* $\Pi_+ := \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w \in (\infty, 0)\}$. *A matrix-valued entire function* $W : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^{p\times p}$ *is said to belong to the Potapov class* $\mathfrak{P}_{J_q}(\Pi_+)$ *if*

$$J_q - W^*(z) J_q W(z) \geq 0$$

is satisfied for all $z \in \Pi_+$. *A matrix-valued function* W *that belongs to* $\mathfrak{P}_{J_q}(\Pi_+)$ *is called a J-inner function of* $\mathfrak{P}_{J_q}(\Pi_+)$ *if*

$$J_q - W^*(x) J_q W(x) = 0$$

holds for all $x \in \mathbb{R}$.

Matrix-valued functions belonging to the Potapov class can be factorized into elementary factors, as seen in Corollary 2.

The determinateness of the TSMM problem was obtained in [25] with the help of the Dyukarev-Stieltjes matrix parameters of the TSMM. The results obtained in [25] were generalized in [26], [27], [28], [29] and [33]. In these papers, the Yu.M. Dyukarev's factorization of the matrix valued functions in the Stieltjes class [24] and [23] were employed.

In [31], by using a decomposition of the RM of the TSMM problem, the following were demonstrated: necessary and sufficient conditions for the TSMM problem to have a unique solution and infinitely many solutions for the Hamburger moment problem with the same moments. Note that in [47] and [14] the operator approach was employed to solve the THMM problem.

In comparison to the DSM parameters $\mathbf{M}_k$ and $\mathbf{L}_k$ [8], the new DSM parameters $\mathbf{m}_j$ and $\mathbf{l}_j$ depend on both terminal points of the interval $[a, b]$. Other DSM parameters which also depend on a and b were introduced in [4]. In turn the aforementioned parameters are different from the ones studied in [8] (also in [3]), where the parameters depend only on a. In Remark 8 by setting $b \to +\infty$ and $a = 0$ in the DSM parameters $\mathbf{m}_j$ and $\mathbf{l}_j$, we obtain the Dyukarev-Stieltjes parameters of the TSMM problem [25].

Throughout the paper we decisively use the forms (6) and (7) of the RM of the THMM problem obtained in [5] where the elements of the RM are given with the help of four orthogonal polynomials and their second kind polynomials. Orthogonal matrix polynomials (OMP) were first considered by M.G. Krein in 1949 [39], [40]. Further investigations of OMP were made by J.S. Geronimo [36], I.V. Kovalishina [37], [38], H. Dym [22], B. Simon [44], Damanik/Pushnitski/-Simon [15] and the references therein. See also [17], [18], [19], [20], [21], [34], [16], [41], [45], [31], [12], [13], [11], [6] and [7].

2. Notations and preliminaries

In this section we introduce some matrix notation which appear throughout the work. In particular, we propose the auxiliary RM $\widehat{U}_2^{(2j)}$ which will be factorized by elementary matrices. See Corollary 2.

The orthogonal matrix polynomials $P_{k,j}$, $\Gamma_{k,j}$ on $[a, b]$ as well as their second kind polynomials $Q_{k,j}$, $\Theta_{k,j}$ are recalled. The mentioned matrix polynomials together with the connection between the auxiliary RM $\widetilde{U}_2^{(2j+1)}$, $\widehat{U}_2^{(2j)}$ and the RM $U^{(m)}$ play an important role in this work.

Auxiliary matrices

Let $R_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{(j+1)q\times(j+1)q}$ be given by

$$R_j(z) := (I_{(j+1)q} - zT_j)^{-1}, \quad j \geq 0, \tag{14}$$

with

$$T_0 := 0_q, \quad T_j := \begin{pmatrix} 0_{q\times jq} & 0_q \\ I_{jq} & 0_{jq\times q} \end{pmatrix}, \quad j \geq 1.$$

Let

$$v_0 := I_q, \quad v_j := \begin{pmatrix} I_q \\ 0_{jq\times q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{j-1} \\ 0_q \end{pmatrix}, \quad \forall j \geq 0. \tag{15}$$

Furthermore, let

$$y_{[j,k]} := \begin{pmatrix} s_j \\ s_{j+1} \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix}, \quad 0 \le j \le k \le 2n. \tag{16}$$

Let

$$\begin{gathered} \widetilde{u}_{1,0} := s_0, \quad \widetilde{u}_{2,0} := -s_0, \\ \widetilde{u}_{1,j} := y_{[0,j]} - b \begin{pmatrix} 0_q \\ y_{[0,j-1]} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{u}_{2,j} := -y_{[0,j]} + a \begin{pmatrix} 0_q \\ y_{[0,j-1]} \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{17}$$

for every $1 \le j \le n-1$. In addition, for $1 \le j \le n$ let

$$\widetilde{Y}_{1,j} := by_{[j,2j-1]} - y_{[j+1,2j]}, \quad \widetilde{Y}_{2,j} := -a\, y_{[j,2j-1]} + y_{[j+1,2j]}. \tag{18}$$

Let $\widehat{K}_{1,j}$ (resp. $\widehat{K}_{2,j}$) denote the Schur complement of the block $bs_{2j} - s_{2j+1}$ (resp. $-as_{2j} + s_{2j+1}$) of the matrix $K_{1,j}$ (resp. $K_{2,j}$). In addition, denote

$$\widehat{K}_{1,0} = bs_0 - s_1,\ \widehat{K}_{1,j} := bs_{2j} - s_{2j+1} - \widetilde{Y}^*_{1,j} K^{-1}_{1,j-1} \widetilde{Y}_{1,j},\ 1 \le j \le n, \tag{19}$$

$$\widehat{K}_{2,0} = -as_0 + s_1,\ \widehat{K}_{2,j} := -as_{2j} + s_{2j+1} - \widetilde{Y}^*_{2,j} K^{-1}_{2,j-1} \widetilde{Y}_{2,j},\ 1 \le j \le n. \tag{20}$$

The quantities (19) and (20) have been defined in [16] for $a = 0$ and $b = 1$.

Let

$$u_{1,0} := 0_q,\ u_{1,j} := \begin{pmatrix} 0_q \\ -y_{[0,j-1]} \end{pmatrix}, \quad 1 \le j \le n \tag{21}$$

and

$$u_{2,0} := -(a+b)s_0 + s_1, \quad u_{2,j} := \begin{pmatrix} u_{2,0} \\ -\widehat{y}_{[0,j-2]} \end{pmatrix},\ 1 \le j \le 2n. \tag{22}$$

Moreover, let

$$\widehat{s}_j := -abs_j + (a+b)s_{j+1} - s_{j+2}, \quad 0 \le j \le 2n-2 \tag{23}$$

and

$$\widehat{y}_{[j,k]} := \begin{pmatrix} \widehat{s}_j \\ \widehat{s}_{j+1} \\ \vdots \\ \widehat{s}_k \end{pmatrix},\ 0 \le j \le k \le 2n-2.$$

Note that by (16) and (23)

$$\widehat{y}_{[j,k]} = -aby_{[j,k]} + (a+b)y_{[j+1,k+1]} - y_{[j+2,k+2]}.$$

We also denote

$$Y_{1,j} := y_{[j,2j-1]},\ 1 \le j \le n, \quad Y_{2,j} := \widehat{y}_{[j,2j-1]},\ 1 \le j \le n-1. \tag{24}$$

Let $\widehat{H}_{1,j}$ (resp. $\widehat{H}_{2,j}$) denote the Schur complement of the block s_{2j} (resp. $\widehat{s}_{2j-2}$) of the matrix $H_{1,j}$ (resp. $H_{2,j}$): denote $\widehat{H}_{1,0} = s_0$, $\widehat{H}_{2,0} = \widehat{s}_0$ and

$$\widehat{H}_{1,j} := s_{2j} - Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1} Y_{1,j}, \ 1 \le j \le n, \tag{25}$$

$$\widehat{H}_{2,j} := \widehat{s}_{2j} - Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1} Y_{2,j}, \ 1 \le j \le n-1. \tag{26}$$

The quantities (25) and (26) have been defined in [16] for $a = 0$ and $b = 1$.

In the following Definition, we recall the auxiliary RM $\widetilde{U}_2^{(2j+1)}$ introduced in [10, Formula (6.2)]. An additive expansion of the aforementioned matrix is attained in Proposition 3. In Corollary 2, a multiplicative representation of the auxiliary RM $\widetilde{U}_2^{(2j+1)}$ is achieved.

Definition 3 *Let $K_{1,j}$ be as in (5), and assume that $K_{1,j}$ is a positive definite matrix. Furthermore, let $\widetilde{u}_{1,j}$, R_j and v_j be as in (17), (14) and (15). The $2q \times 2q$ matrix polynomial*

$$\widetilde{U}_2^{(2j+1)}(z,a,b) := \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_2^{(2j+1)}(z) & \widetilde{\beta}_2^{(2j+1)}(z) \\ \widetilde{\gamma}_2^{(2j+1)}(z) & \widetilde{\delta}_2^{(2j+1)}(z) \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{C}, \quad 1 \le j \le n, \tag{27}$$

with

$$\widetilde{\alpha}_2^{(2j+1)}(z,a,b) := I_q - (z-a)\widetilde{u}_{1,j}^* R_j^*(\bar{z}) K_{1,j}^{-1} R_j(a) v_j,$$
$$\widetilde{\beta}_2^{(2j+1)}(z,a,b) := (z-a)\widetilde{u}_{1,j}^* R_j^*(\bar{z}) K_{1,j}^{-1} R_j(a) \widetilde{u}_{1,j},$$
$$\widetilde{\gamma}_2^{(2j+1)}(z,a,b) := -(z-a) v_j^* R_j^*(\bar{z}) K_{1,j}^{-1} R_j(a) v_j$$

and

$$\widetilde{\delta}_2^{(2j+1)}(z,a,b) := I_q + (z-a) v_j^* R_j^*(\bar{z}) K_{1,j}^{-1} R_j(a) \widetilde{u}_{1,j}$$

is called the second auxiliary matrix of the THMM problem in the case of an even number of moments.

In [10], Equality (9) was proved by using $B_{2,j} := (b-a)\widetilde{u}_{2,j}^* R_j^*(a) K_{2,j}^{-1} R_j(a) \widetilde{u}_{2,j}$ and

$$A_2^{(2j+1)} := \begin{pmatrix} I_q & B_{2,j} \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}. \tag{28}$$

In the subsequent Definition, we introduce the auxiliary RM $\widehat{U}_2^{(2j)}$. In Proposition 2, an additive expansion of the indicated matrix is attained. A multiplicative representation of the auxiliary RM $\widehat{U}_2^{(2j)}$ is given by equality (105).

Definition 4 *Let $H_{2,j}$ be as in (4), and assume that $H_{2,j}$ is a positive definite matrix. Furthermore, let $u_{2,j}$, R_j and v_j be as in (22), (14) and (15). The $2q\times 2q$ matrix polynomial*

$$\widehat{U}_2^{(2j)}(z,a,b) := \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_2^{(2j)}(z,a,b) & \widehat{\beta}_2^{(2j)}(z,a,b) \\ \widehat{\gamma}_2^{(2j)}(z,a,b) & \widehat{\delta}_2^{(2j)}(z,a,b) \end{pmatrix}, \; z\in\mathbb{C}, \quad 0\le j\le n-1, \tag{29}$$

with

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha}_2^{(2j)}(z,a,b) :=& I_q-(z-a)(u_{2,j}^*+zs_0v_j^*)R_j^*(\bar{z})H_{2,j}^{-1}R_j(a)v_j,\\
\widehat{\beta}_2^{(2j)}(z,a,b) :=& (z-a)(s_0+(u_{2,j}^*+zs_0v_j^*)R_j^*(\bar{z})H_{2,j}^{-1}R_j(a)(u_{2,j}+av_js_0)),\\
\widehat{\gamma}_2^{(2j)}(z,a,b) :=& -(z-a)v_j^*R_j^*(\bar{z})H_{2,j}^{-1}R_j(a)v_j
\end{aligned}$$

and

$$\widehat{\delta}_2^{(2j)}(z,a,b) := I_q+(z-a)v_j^*R_j^*(\bar{z})H_{2,j}^{-1}R_j(a)(u_{2,j}+av_js_0)$$

is called the second transformed auxiliary matrix of the THMM problem in the case of an odd number of moments. The adjective transformed in the sequel will be omitted.

Let

$$N_{2,j} := -(b-a)^{-1}v_j^*R_j^*(a)H_{1,j}^{-1}R_j(a)v_j \tag{30}$$

and

$$A_2^{(2j)} := \begin{pmatrix} I_q & -as_0 \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ N_{2,j} & I_q \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Remark 1 *Let $(s_j)_{j=0}^{2j}$ be a Hausdorff positive definite sequence and let $U^{(2j)}$, $\widetilde{U}_2^{(2j)}$ and $\widehat{U}_2^{(2j)}$ be as in (6), (A.1) and (29). The following equalities are valid:*
a)

$$\widehat{U}_2^{(2j)}(z) = \begin{pmatrix} I_q & zs_0 \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}\widetilde{U}_2^{(2j)}(z)\begin{pmatrix} I_q & -as_0 \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \tag{32}$$

and b)

$$\begin{aligned}
U^{(2j)}(z) = &\begin{pmatrix} \frac{1}{(z-a)(b-z)}I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}\widehat{U}_2^{(2j-2)}(z)\begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ N_{2,j} & I_q \end{pmatrix}\\
&\cdot\begin{pmatrix} (z-a)(b-z)I_q & 0_q \\ 0_q & \frac{b-z}{b-a}I_q \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{33}$$

P r o o f. Equalities (32) and (33) readily follow by direct calculations.

Orthogonal matrix polynomials on $[a, b]$

Let us reproduce some notions on OMP which were introduced in [12]. Let P be a complex $p \times q$ matrix polynomial. For all $n \in \mathbb{N}_0$, let

$$Z_n^{[P]} := [A_0, A_1, \ldots, A_n],$$

where $(A_j)_{j=0}^{\infty}$ is the unique sequence of complex $p \times q$ matrices such that for all $z \in \mathbb{C}$ the polynomial P admits the representation $P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j A_j$. Furthermore, we denote by $\deg P := \sup\{j \in \mathbb{N}_0 : A_j \neq 0_{p\times q}\}$ the *degree of* P. Observe that in the case $P(z) = 0_{p\times q}$ for all $z \in \mathbb{C}$ we thus have $\deg P = -\infty$. If $k := \deg P \geq 0$, we refer to A_k as the *leading coefficient of* P. For all $k \in \mathbb{N}_0$ and all $\kappa \in \mathbb{N}_0$ with $k \leq \kappa$, let $\mathbb{Z}_{k,\kappa} := \{n \in \mathbb{N}_0, k \leq n \leq \kappa\}$.

Definition 5 *Let $\kappa \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, and let $(s_j)_{j=0}^{2\kappa}$ be a sequence of complex $q \times q$ matrices. A sequence $(P_k)_{k=0}^{\kappa}$ of complex $q \times q$ matrix polynomials is called a* monic left orthogonal system of matrix polynomials with respect to $(s_j)_{j=0}^{2\kappa}$ *if the following three conditions are fulfilled:*

(I) $\deg P_k = k$ *for all* $k \in \mathbb{Z}_{0,\kappa}$*;*

(II) P_k *has the leading coefficient* I_q *for all* $k \in \mathbb{Z}_{0,\kappa}$*;*

(III) $Z_n^{[P_j]} H_n (Z_n^{[P_k]})^* = 0_{q\times q}$ *for all* $j, k \in \mathbb{Z}_{0,\kappa}$ *with* $j \neq k$*, where* $n := \max\{j, k\}$*.*

Remark 2 *[12, Remark 3.6] Let $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, and let $(s_j)_{j=0}^{2n}$ be a Hausdorff positive definite sequence: the corresponding Hankel block matrix H_n is positive definite. Denote by $(P_k)_{k=0}^{n}$ the monic left orthogonal system of matrix polynomials with respect to $(s_j)_{j=0}^{2n}$. Let σ be a nonnegative Hermitian $q \times q$ measure on $\mathbb{R}$ satisfying $s_j = \int_{[a,b]} t^j d\sigma(t)$ for $0 \leq j \leq 2n$. Thus,*

$$\int_{[a,b]} P_j d\sigma P_k^* = \begin{cases} \widehat{H}_j, & \text{if } \ j = k, \\ 0_q, & \text{if } \ j \neq k \end{cases}$$

for all $0 \leq j, k \leq n$ where $\widehat{H}_j$ denotes the Schur complement of H_{j-1} in H_j; see (25).

In the following two Definitions, we recall matrix-valued polynomials $P_{k,j}$, $Q_{k,j}$, $\Gamma_{k,j}$ and $\Theta_{k,j}$. With their help the RM $U^{(2n)}$ and $U^{(2n+1)}$ (as in (6), (7)) as well as the solution set of the THMM were described (as in [5, Propositions 4.4 and 4.5]).

Definition 6 *Let $(s_k)_{k=0}^{2j}$ be a Hausdorff positive definite sequence. Furthermore, let $H_{k,j}$, $u_{k,j}$, $Y_{k,j}$, for $k = 1, 2$, R_j and v_j be as in (4), (21), (22), (24), (14) and*

(15), respectively. Let

$$
\begin{aligned}
P_{1,0}(z) &:= I_q, \quad P_{2,0}(z) := I_q, \quad Q_{1,0}(z) := 0_q, \quad Q_{2,0}(z,a,b) := -(u_{2,0} + z\, s_0),\\
P_{1,j}(z) &:= (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) v_j, \quad 1 \le j \le n, && (34)\\
P_{2,j}(z,a,b) &:= (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) v_j, \quad 1 \le j \le n-1, && (35)\\
Q_{1,j}(z) &:= -(-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q) R_{1,j}(z) u_{1,j}, \quad 1 \le j \le n
\end{aligned}
$$

and

$$
Q_{2,j}(z,a,b) := -(-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z)(u_{2,j} + z v_j s_0), \quad 1 \le j \le n-1. \tag{36}
$$

Definition 7 *Let $(s_k)_{k=0}^{2j+1}$ be a Hausdorff positive definite sequence. Furthermore, let $K_{k,j}$, $\widetilde{u}_{k,j}$, $\widetilde{Y}_{k,j}$, for $k = 1,2$, R_j and v_j be as in (5), (17), (18), (14) and (15), respectively. Let*

$$
\Gamma_{1,0}(z) := I_q,\ \Gamma_{2,0}(z) := I_q, \quad \Theta_{1,0}(z) := s_0,\ \Theta_{2,0}(z) := -s_0
$$

for all $z \in \mathbb{C}$. For $k \in \{1,2\}$ and $1 \le j \le n$, define

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{1,j}(z,b) &:= (-\widetilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) v_j, && (37)\\
\Gamma_{2,j}(z,a) &:= (-\widetilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) v_j, && (38)\\
\Theta_{1,j}(z,b) &:= (-\widetilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) \widetilde{u}_{1,j} && (39)
\end{aligned}
$$

and

$$
\Theta_{2,j}(z,a) := (-\widetilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) \widetilde{u}_{2,j}, \tag{40}
$$

for all $z \in \mathbb{C}$.

For $k = 1,2$, we usually omit the dependence of the polynomials $P_{k,j}$, $Q_{k,j}$, $\Gamma_{k,j}$ and $\Theta_{k,j}$ on the parameters a and b.

In [2], (resp. [46]) it was proved that polynomials $P_{k,j}$ (resp. $\Gamma_{k,j}$) for $k = 1,2$ are in fact OMP on $[a,b]$. In [12] explicit interrelations between $P_{k,j}$, $\Gamma_{k,j}$ and their second kind polynomials were studied.

For the sake of completeness in the following Remark, we reproduce explicit interrelations between the matrices $\widehat{H}_{k,j}$, $\widehat{K}_{k,j}$ and the polynomials $P_{1,j}$, $Q_{2,j}$, $\Gamma_{1,j}$, $\Theta_{2,j}$ considered in [5, Corollary 3.4] and [5, Corollary 3.10].

Remark 3 *Let $\widehat{H}_{k,j}$, $\widehat{K}_{k,j}$, for $k = 1,2$, $P_{1,j}$, $Q_{2,j}$, $\Gamma_{1,j}$ and $\Theta_{2,j}$ be as in (25), (26), (19), (20) and Definitions 6 and 7, respectively. The following equalities then hold:*

$$
\begin{aligned}
\widehat{H}_{1,j} &= -\, P_{1,j}(a)\Theta_{2,j}^*(a), \quad \widehat{H}_{2,j} = -Q_{2,j}(a)\Gamma_{1,j+1}^*(a), && (41)\\
\widehat{K}_{1,j} &= \Gamma_{1,j}(a) Q_{2,j}^*(a), \quad \widehat{K}_{2,j} = \Theta_{2,j}(a) P_{1,j+1}^*(a). && (42)
\end{aligned}
$$

3. Algebraic identities

In this section we will single out essential identities concerning the block matrices introduced in Section . Let

$$L_{1,n} := (\delta_{j,k+1} I_q)_{\substack{j=0,\dots,n \\ k=0,\dots,n-1}} \quad \text{and} \quad L_{2,n} := (\delta_{j,k} I_q)_{\substack{j=0,\dots,n \\ k=0,\dots,n-1}}, \tag{43}$$

where $\delta_{j,k}$ is the Kronecker symbol with $\delta_{j,k} := 1$ if $j = k$ and $\delta_{j,k} := 0$ if $j \neq k$.

Furthermore, let

$$\Xi^K_{1,j} := \begin{pmatrix} -K^{-1}_{1,j-1} \widetilde{Y}_{1,j} \\ I_q \end{pmatrix} \tag{44}$$

and

$$\Xi^H_{2,j} := \begin{pmatrix} -H^{-1}_{2,j-1} Y_{2,j} \\ I_q \end{pmatrix}. \tag{45}$$

In the following two remarks important identities are attained which will we mainly use in the proof of Preposition 1. In turn Preposition 1 is employed in Theorem 1 which is the main result of Section .

Remark 4 *Let v_j, $L_{2,j}$, $\widetilde{u}_{1,j}$, R_j, T_j, $H_{1,j}$, $u_{1,j}$, $K_{1,j}$, $\Xi^K_{1,j}$ and $\Xi^H_{2,j}$ be defined as in (15), (43), (17), (14), (4), (21), (5), (44) and (45), respectively. Then the following identities are valid:*

$$v_{j-1} - L^*_{2,j} v_j = 0, \tag{46}$$

$$\widetilde{u}_{1,j-1} - L^*_{2,j} \widetilde{u}_{1,j} = 0, \tag{47}$$

$$L_{2,j} - R^{*^{-1}}_j(\bar{z}) L_{2,j} R^*_{j-1}(\bar{z}) = 0, \tag{48}$$

$$L_{2,j} L^*_{1,j} - T^*_j = 0, \tag{49}$$

$$H_{1,j} T^*_j - T_j H_{1,j} - u_{1,j} v^*_j + v_j u_{1,j} = 0, \tag{50}$$

$$T_j K_{1,j} \Xi^K_{1,j} = 0, \tag{51}$$

$$T_j H_{2,j} \Xi^H_{2,j} = 0. \tag{52}$$

P r o o f. Equalities (46), (47), (48), (49) are proved by direct calculations. Identity (50) was considered in [10, Proposition 2.1]. We prove equality (51). Let $\lambda_j := (0_q, 0_q, \dots, 0_q, I_q)$ be a $q \times jq$ matrix. Thus $T_j = \begin{pmatrix} T_{j-1} & 0_{jq} \times q \\ \lambda_j & 0_q \end{pmatrix}$. By using the last equality and equality

$$K_{1,j} = \begin{pmatrix} K_{1,j-1} & \widetilde{Y}_{1,j} \\ \widetilde{Y}^*_{1,j} & bs_{2j} - s_{2j+1} \end{pmatrix}, \tag{53}$$

we have

$$T_j K_{1,j} \Xi^K_{1,j} = \begin{pmatrix} T_{j-1} & 0_{jq\times q} \\ \lambda_j & 0_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{1,j-1} & \widetilde{Y}_{1,j} \\ \widetilde{Y}^*_{1,j} & bs_{2j} - s_{2j+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K^{-1}_{1,j-1} \widetilde{Y}_{1,j} \\ I_q \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} T_{j-1} & 0_{jq\times q} \\ \lambda_j & 0_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{jq\times q} \\ \widehat{K}_{1,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{jq\times q} \\ 0_q \end{pmatrix}.$$

Equality (52) can be proved in a similar manner to (51) with the aid of $H_{2,j} = \begin{pmatrix} H_{2,j-1} & Y_{2,j} \\ Y_{2,j}^* & \widehat{s}_{2j} \end{pmatrix}$, (44) in place of (53), (45), respectively.

Remark 5 *Let $u_{1,j}$, v_j, $H_{1,j}$, T_j, $L_{2,j}$, $L_{1,j}$, R_j, $\widetilde{H}_{2,j}$, $\widetilde{H}_{1,j}$ and $\widetilde{H}_{0,j}$ be defined as in (21), (15), (4), (43), (14) and (3), respectively. The following identities are valid:*

$$u_{1,j}^* + v_j^* H_{1,j} T_j^* = 0, \tag{54}$$
$$v_j^* H_{1,j} - v_{j+1}^* H_{1,j+1} L_{2,j+1} = 0, \tag{55}$$
$$T_{j+1}^* L_{1,j+1} + (T_{j+1}T_{j+1}^* - I)L_{2,j+1} - L_{2,j+1}L_{1,j}L_{1,j}^* = 0, \tag{56}$$
$$T_{j+1}^* L_{1,j+1} T_j^* - T_{j+1}^* L_{2,j+1} L_{1,j} L_{1,j}^* = 0, \tag{57}$$
$$T_{j+1}^* L_{2,j+1} - L_{2,j+1} L_{2,j} L_{1,j}^* = 0, \tag{58}$$
$$T_{j+1}^* L_{2,j+1} T_j^* - T_{j+1}^* L_{2,j+1} L_{2,j} L_{1,j}^* = 0, \tag{59}$$
$$(I - zT_{j+1}^*)L_{2,j+1}(T_jT_j^* - I) - (T_{j+1}T_{j+1}^* - I)L_{2,j+1} = 0, \tag{60}$$
$$(I - zT_{j+1}^*)L_{2,j+1}\left(I + (z-a)T_j^* R_j^*(\bar{z})\right) - (I - aT_{j+1}^*)L_{2,j+1} = 0, \tag{61}$$
$$v_j v_{j+2}^* H_{1,j+2} L_{1,j+2} - L_{1,j+1}^* H_{1,j+1} + L_{2,j+1}^* T_{j+1} \widetilde{H}_{2,j+1} = 0, \tag{62}$$
$$v_j v_{j+2}^* H_{1,j+2} L_{2,j+2} + L_{2,j+1}^* T_{j+1} \widetilde{H}_{1,j+1} - L_{2,j+1}^* H_{1,j+1} = 0, \tag{63}$$
$$T_j L_{1,j+1}^* H_{1,j+1} - L_{2,j+1}^* T_{1,j+1} \widetilde{H}_{1,j+1} = 0, \tag{64}$$
$$- L_{2,j+1}^* T_{j+1} \widetilde{H}_{0,j+1} + T_j L_{2,j+1}^* H_{1,j+1} = 0, \tag{65}$$
$$\begin{aligned} &- T_{j+1}^*(L_{1,j+1} - bL_{2,j+1}) - (T_{j+1}T_{j+1}^* - I)L_{2,j+1}R_j^*(a) \\ &+ (I - aT_{j+1}^*)L_{2,j+1}(L_{1,j} - bL_{2,j})L_{1,j}^* R_j^*(a) = 0. \end{aligned} \tag{66}$$

P r o o f. Identities (54)-(65) follow from a straightforward calculation. Equality (66) follows from (56)-(59).

Now we derive coupling identities between the block Hankel matrices $K_{1,j}$ and $K_{2,j}$ (resp. $H_{1,j}$ and $H_{2,j}$). These identities are crucially used in the proof of Theorem 1. Note that other coupling identities were attained in [10, Proposition 2.2], [9, Proposition 2.5] and [5, Proposition 6.2].

Proposition 1 *Let T_j, $L_{1,j}$, $L_{2,j}$, R_j, v_j, $H_{1,j}$, and $H_{2,j}$ be defined as in (43), (14), (15), (4) and (45), respectively. The following identities are valid:*

$$R_{j-1}^{-1}(a)K_{1,j-1}L_{1,j}^* - L_{2,j}^* K_{1,j} T_j^* + L_{2,j}^* T_j K_{1,j} - L_{2,j}^* T_j K_{2,j} {R_j^*}^{-1}(a) = 0, \tag{67}$$
$$\begin{aligned} &- R_j(a) v_j v_{j+2}^* H_{1,j+2}(L_{1,j+2} - bL_{2,j+2}) + (L_{1,j+1}^* - bL_{2,j+1}^*)H_{1,j+1} \\ &+ L_{2,j+1}^* R_{j+1}(a) T_{j+1} H_{2,j+1} = 0. \end{aligned} \tag{68}$$

Equality (67) follows by a straightforward calculation. Identity (68) follows from (62)-(65).

4. The Blaschke-Potapov factors

In this section we obtain a multiplicative representation (10), (11) of the second auxiliary matrices $\widetilde{U}_2^{(2n+1)}$ and $\widehat{U}_2^{(2n-2)}$ via the Blaschke-Potapov factors $d^{(2j+1)}$ and $d^{(2j)}$ defined in (73)-(75).

Since the matrices $H_{2,j}$ and $K_{1,j}$ are positive definite matrices for $0 \le j \le n-1$ and $0 \le j \le n$, respectively, their inverses can be written as

$$H_{2,j}^{-1} = \begin{pmatrix} H_{2,j-1}^{-1} & 0_{jq\times q} \\ 0_{q\times jq} & 0_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -H_{2,j-1}^{-1} Y_{2,j} \\ I_q \end{pmatrix} \widehat{H}_{2,j}^{-1}(-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I_q) \tag{69}$$

and

$$K_{1,j}^{-1} = \begin{pmatrix} K_{1,j-1}^{-1} & 0_{jq\times q} \\ 0_{q\times jq} & 0_{q\times q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K_{2,j-1}^{-1} \widetilde{Y}_{1,j} \\ I_q \end{pmatrix} \widehat{K}_{1,j}^{-1}(-\widetilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I_q). \tag{70}$$

Remark 6 *Due to Lemma 2 of the appendix, $\widehat{H}_{2,j}$ (resp. $\widehat{K}_{1,j}$) is a positive definite matrix if and only if $H_{2,j}$ (resp. $K_{1,j}$) is a positive definite matrix.*

In the following two propositions, we prove an additive property of the block elements of the auxiliary RM $\widehat{U}_2^{(2j)}(z)$ and $\widetilde{U}_2^{(2j+1)}(z)$. These properties give an indication in the form of the Blaschke-Potapov factors $d^{(2j)}$ and $d^{(2j+1)}$.

Proposition 2 *Let $H_{2,j}$ be as in (4), and assume that $H_{2,j}$ is a positive definite matrix. Furthermore, let the polynomials $P_{2,j}$ and $Q_{2,j}$ be as in Definition 6 and $\widehat{H}_{2,j}$ be defined as in (26). The block elements of the matrix $\widehat{U}_2^{(2j)}(z)$ defined by (29) can be written in the form*

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_2^{(2j)}(z) &= \widehat{\alpha}_2^{(2j-2)}(z) + (z-a)Q_{2,j}^*(\bar{z})\widehat{H}_{2,j}^{-1}P_{2,j}(a), \\ \widehat{\beta}_2^{(2j)}(z) &= \widehat{\beta}_2^{(2j-2)}(z) + (z-a)Q_{2,j}^*(\bar{z})\widehat{H}_{2,j}^{-1}Q_{2,j}(a), \\ \widehat{\gamma}_2^{(2j)}(z) &= \widehat{\gamma}_2^{(2j-2)}(z) - (z-a)P_{2,j}^*(\bar{z})\widehat{H}_{2,j}^{-1}P_{2,j}(a) \end{aligned}$$

and

$$\widehat{\delta}_2^{(2j)}(z) = \widehat{\delta}_2^{(2j-2)}(z) - (z-a)P_{2,j}^*(\bar{z})\widehat{H}_{2,j}^{-1}Q_{2,j}(a).$$

Proof. Use (15), (69) and

$$R_j(z) = \left(\begin{array}{c|c} R_{j-1}(z) & 0_{jq\times q} \\ \hline (z^j I_q, z^{j-1} I_q, \ldots, z I_q) & I_q \end{array}\right), \quad u_{2,j} = \begin{pmatrix} u_{2,j-1} \\ -\widehat{s}_{j-1} \end{pmatrix} \tag{71}$$

for $j \ge 2$.

Proposition 3 *Let $K_{1,j}$ be as in (5), and assume that $K_{1,j}$ is a positive definite matrix. Let the polynomials $\Theta_{1,j}$ and $\Gamma_{1,j}$ be as in Definition 7. The block elements of the matrix $\widetilde{U}_2^{(2j+1)}(z)$ defined by (27) can then be written in the form*

$$\widetilde{\alpha}_2^{(2j+1)}(z) = \widetilde{\alpha}_2^{(2j-1)}(z) - (z-a)\Theta^*_{1,j}(\bar{z})\widehat{K}^{-1}_{1,j}\Gamma_{1,j}(a),$$
$$\widetilde{\beta}_2^{(2j+1)}(z) = \widetilde{\beta}_2^{(2j-1)}(z) + (z-a)\Theta^*_{1,j}(\bar{z})\widehat{K}^{-1}_{1,j}\Theta_{1,j}(a),$$
$$\widetilde{\gamma}_2^{(2j+1)}(z) = \widetilde{\gamma}_2^{(2j-1)}(z) - (z-a)\Gamma^*_{1,j}(\bar{z})\widehat{K}^{-1}_{1,j}\Gamma_{1,j}(a)$$

and

$$\widetilde{\delta}_2^{(2j+1)}(z) = \widetilde{\delta}_2^{(2j-1)}(z) + (z-a)\Gamma^*_{1,j}(\bar{z})\widehat{K}^{-1}_{1,j}\Theta_{1,j}(a).$$

P r o o f. Use (15), (70), the first equality of (71) and equality

$$\widetilde{u}_{1,j} = \begin{pmatrix} \widetilde{u}_{1,j-1} \\ -bs_{j-1} + s_j \end{pmatrix} \tag{72}$$

for $j \geq 2$.

Definition 8 *Let $\widehat{H}_{2,j}$, $\widehat{K}_{1,j}$, $P_{2,j}$, $Q_{2,j}$, $\Theta_{1,j}$ and $\Gamma_{1,j}$ be as in (26), (19), and Definitions 6, 7, respectively. Define*

$$d^{(0)}(z) := \begin{pmatrix} I_q & (z-a)s_0 \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}, \tag{73}$$

$$d^{(2j+2)}(z) := \begin{pmatrix} I_q + (z-a)Q^*_{2,j}(a)\widehat{H}^{-1}_{2,j}P_{2,j}(a) & (z-a)Q^*_{2,j}(a)\widehat{H}^{-1}_{2,j}Q_{2,j}(a) \\ -(z-a)P^*_{2,j}(a)\widehat{H}^{-1}_{2,j}P_{2,j}(a) & I_q - (z-a)P^*_{2,j}(a)\widehat{H}^{-1}_{2,j}Q_{2,j}(a) \end{pmatrix} \tag{74}$$

for $0 \leq j \leq n-1$, and

$$d^{(2j+1)}(z) := \begin{pmatrix} I_q - (z-a)\Theta^*_{1,j}(a)\widehat{K}^{-1}_{1,j}\Gamma_{1,j}(a) & (z-a)\Theta^*_{1,j}(a)\widehat{K}^{-1}_{1,j}\Theta_{1,j}(a) \\ -(z-a)\Gamma^*_{1,j}(a)\widehat{K}^{-1}_{1,j}\Gamma_{1,j}(a) & I_q + (z-a)\Gamma^*_{1,j}(a)\widehat{K}^{-1}_{1,j}\Theta_{1,j}(a) \end{pmatrix} \tag{75}$$

for $0 \leq j \leq n$.

The matrix function $d^{(2j)}$ (resp. $d^{(2j+1)}$) is called the Blaschke-Potapov factor of the auxiliary matrix $\widehat{U}_2^{(2k)}$ (resp. $\widetilde{U}_2^{(2k+1)}$).

Now we prove the main result of this section.

Theorem 1 *Let the matrix $\widehat{U}_2^{(2j)}$ (resp. $\widetilde{U}_2^{(2j+1)}$) be as in (29) (resp. (27)). Let $d^{(2j)}$, $d^{(2j+1)}$ be defined as in (73)-(75), then*

$$\widehat{U}_2^{(0)}(z) = d^{(0)}(z)d^{(2)}(z), \quad \widetilde{U}_2^{(1)}(z) = d^{(1)}(z), \tag{76}$$
$$\widehat{U}_2^{(2j)}(z) = \widehat{U}_2^{(2j-2)}(z)d^{(2j+2)}(z),\ z \in \mathbb{C}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \tag{77}$$

and

$$\widetilde{U}_2^{(2j+1)}(z) = \widetilde{U}_2^{(2j-1)}(z)d^{(2j+1)}(z),\ z \in \mathbb{C}, \quad 1 \leq j \leq n. \tag{78}$$

P r o o f. Equality (76) readily follows from direct calculation. Now we demonstrate (77). Denote

$$G_j^{11}(a) := Q_{2,j}^*(a)\widehat{H}_{2,j}^{-1}P_{2,j}(a), \tag{79}$$

$$G_j^{12}(a) := Q_{2,j}^*(a)\widehat{H}_{2,j}^{-1}Q_{2,j}(a), \tag{80}$$

$$G_j^{21}(a) := P_{2,j}^*(a)\widehat{H}_{2,j}^{-1}P_{2,j}(a) \tag{81}$$

and

$$G_j^{22}(a) := P_{2,j}^*(a)\widehat{H}_{2,j}^{-1}Q_{2,j}(a) \tag{82}$$

for $1 \le j \le n-1$.

Now we prove equality (77). By using (73), (74), (79), (80), (81) and (82), Eq. (77) can be written in the equivalent form

$$\left(\begin{array}{cc} \widehat{\alpha}_2^{(2j)}(z) & \widehat{\beta}_2^{(2j)}(z) \\ \widehat{\gamma}_2^{(2j)}(z) & \widehat{\delta}_2^{(2j)}(z) \end{array}\right) - \left(\begin{array}{cc} \widehat{\alpha}_2^{(2j-2)}(z) & \widehat{\beta}_2^{(2j-2)}(z) \\ \widehat{\gamma}_2^{(2j-2)}(z) & \widehat{\delta}_2^{(2j-2)}(z) \end{array}\right)$$
$$\cdot \left(\begin{array}{cc} I_q + (z-a)G_j^{11}(a) & (z-a)G_j^{12}(a) \\ -(z-a)G_j^{21}(a) & I_q - (z-a)G_j^{22}(a) \end{array}\right) = 0. \tag{83}$$

The left-hand side of (83) is equivalent to the following four equalities:

$$\begin{aligned} \Upsilon_{11,j} :=& \widehat{\alpha}_2^{(2j)}(z) - \widehat{\alpha}_2^{(2j-2)}(z) \\ &+ (z-a)\left(-\widehat{\alpha}_2^{(2j-2)}(z)G_j^{11}(a) + \beta_2^{(2j-2)}(z)G_j^{21}(a)\right), \\ \Upsilon_{12,j} :=& \widehat{\beta}_2^{(2j)}(z) - \widehat{\beta}_2^{(2j-2)}(z) \\ &- (z-a)\left(\widehat{\alpha}_2^{(2j-2)}(z)G_j^{12}(a) - \beta_2^{(2j-2)}(z)G_j^{22}(a)\right), \\ \Upsilon_{21,j} :=& \widehat{\gamma}_2^{(2j+1)}(z) - \widehat{\gamma}_2^{(2j-2)}(z) \\ &+ (z-a)\left(-\widehat{\gamma}_2^{(2j-2)}(z)G_j^{11}(a) + \delta_2^{(2j-2)}(z)G_j^{21}(a)\right) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \Upsilon_{22,j} :=& \widehat{\delta}_2^{(2j+1)}(z) - \widehat{\delta}_2^{(2j-2)}(z) \\ &- (z-a)\left(\widehat{\gamma}_2^{(2j-2)}(z)G_j^{12}(a) - \delta_2^{(2j-2)}(z)G_j^{22}(a)\right). \end{aligned}$$

By taking into account (79) and (81), we have

$$\begin{aligned} \Upsilon_{11,j} =& (z-a)\widetilde{\Upsilon}_{1,j}\widehat{H}_{2,j}^{-1}P_{2,j}(a), \quad \Upsilon_{12,j} = (z-a)\widetilde{\Upsilon}_{1,j}\widehat{H}_{2,j}^{-1}Q_{2,j}(a), \\ \Upsilon_{21,j} =& (z-a)\widetilde{\Upsilon}_{2,j}\widehat{H}_{2,j}^{-1}P_{2,j}(a), \quad \Upsilon_{22,j} = (z-a)\widetilde{\Upsilon}_{2,j}\widehat{H}_{2,j}^{-1}Q_{2,j}(a) \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\widetilde{\Upsilon}_{1,j+1} :=&Q^*_{2,j+1}(\bar{z}) - Q^*_{2,j+1}(a) + (z-a)(u^*_{2,j} + zs_0v^*_j)R^*_j(\bar{z})H^{-1}_{2,j}R_j(a)v_j\\ &\cdot Q^*_{2,j+1}(a) + (z-a)(s_0 + (u^*_{2,j} + zs_0v^*_j)R^*_j(\bar{z})H^{-1}_{2,j}R_j(a)\\ &\cdot (u_{2,j} + av_js_0))P^*_{2,j+1}(a),\\ \widetilde{\Upsilon}_{2,j+1} :=&-P^*_{2,j+1}(\bar{z}) + P^*_{2,j+1}(a) + (z-a)v^*_jR^*_j(\bar{z})H^{-1}_{2,j}R_j(a)v_jQ^*_{2,j+1}(a)\\ &+ (z-a)v^*_jR^*_j(\bar{z})H^{-1}_{2,j}R_j(a)(u_{2,j} + av_js_0)P^*_{2,j+1}(a).\end{aligned}$$

Now we verify that

$$\widetilde{\Upsilon}_{\ell,j} = 0, \quad \ell, k \in \{1,2\}, \quad 1 \le j \le n-1. \tag{84}$$

By using (36), (35) and (45), we have

$$\begin{aligned}\widetilde{\Upsilon}_{1,j+1} =& \big(-(u_{2,j+1} + zs_0v^*_{j+1})R^*_{j+1}(\bar{z}) + (u_{2,j+1} + as_0v^*_{j+1})R^*_{j+1}(a)+\\ &-(z-a)(u_{2,j} + zs_0v^*_j)R^*_j(\bar{z})H^{-1}_{2,j}R_j(a)(u^*_{2,j+1} + as_0v^*_{j+1})R^*_{j+1}(a)\\ &+(z-a)\Big(s_0 + (u^*_{2,j} + zs_0v^*_j)R^*_j(\bar{z})H^{-1}_{2,j}R_j(a)(u_{2,j} + av_js_0)\Big)\\ &\cdot v^*_{j+1}R^*_{j+1}(a)\big)\,\Xi^H_{2,j}\\ =&(z-a)v^*_{j+2}H_{1,j+2}R^*_{j+2}(\bar{z})\left(-T^*_{j+2}(L_{1,j+2} - bL_{2,j+2})\right.\\ &-\big((I - zT^*_{j+2})L_{2,j+2}(L_{1,j+2} - bL_{2,j+1}) + (z-a)(I - zT^*_{j+1})L_{2,j+2}\\ &\cdot R^*_{j+1}(\bar{z})T^*_{j+1}(L_{1,j+1} - bL_{2,j+1}))H^{-1}_{2,j}R_j(a)v_jv^*_{j+2}H_{1,j+2}\\ &\cdot (L_{1,j+1} - bL_{2,j+1}) - (I - zT^*_{j+1})L_{2,j+2}(T_{j+1}T^*_{j+1} - I)R^*_{j+1}(a)\\ &+\big((I - zT^*_{j+2})L_{2,j+2}(L_{1,j+1} - bL_{2,j+1}) + (z-a)(I - zT^*_{j+2})L_{2,j+2}\\ &\cdot R^*_{j+1}(\bar{z})T^*_{j+1}(L_{1,j+1} - bL_{2,j+1})\big)\\ &\cdot\Big(L_{1,j+1}R^*_{j+1}(a) + H^{-1}_{2,j}(L^*_{1,j+1} - bL^*_{2,j+1})H_{1,j+1}\Big)\Big)\,\Xi^H_{2,j}\\ =&(z-a)v^*_{j+2}H_{1,j+2}R^*_{j+2}(\bar{z})\left(-T^*_{j+2}(L_{1,j+1} - bL_{2,j+1}) - (T_{j+2}T^*_{j+2} - I)\right.\\ &\cdot L_{2,j+2}R^*_{j+1}(a) + (I - aT^*_{j+1})L_{2,j+2}(L_{1,j+1} - bL_{2,j+1})L^*_{1,j+1}R^*_{j+1}(a)\\ &-(I - aT^*_{j+2})L_{2,j+2}(L_{1,j+1} - bL_{2,j+1})H^{-1}_{2,j}R_j(a)v_jv^*_{j+2}H_{1,j+2}\\ &\cdot (L_{1,j+1} - bL_{2,j+1}) + (I - aT^*_{j+2})L_{2,j+2}(L_{1,j+1} - bL_{2,j+1})H^{-1}_{2,j}\\ &\left.\cdot (L^*_{1,j+1} - bL^*_{2,j+1})H_{1,j+1}\right)\Xi^H_{2,j}\\ =&-(z-a)v^*_{j+2}H_{1,j+2}R^*_{j+2}(\bar{z})(I - aT^*_{j+2})L_{2,j+2}(L_{1,j+1} - bL_{2,j+1})H^{-1}_{2,j}\\ &\cdot L^*_{2,j+1}T_{j+1}H_{2,j+1}\Xi^H_{2,j}\\ =&0.\end{aligned}$$

In the second equality we used (54) and (55), in the third equality we employed (60) and (61). The penultimate equality follows from (66) and (68). The last equality follows from identity (52). Equality (84) for $\ell = 2$ is proved by using (35), (36), (46), (49), (68) and (52).

To prove (78), we used the following equalities:

$$\Theta_{1,j}^{*}(\bar{z})-\Theta_{1,j}^{*}(a)+(z-a)\widetilde{u}_{1,j-1}^{*}R_{j-1}^{*}(\bar{z})K_{1,j-1}^{-1}R_{j-1}(a)v_{j-1}\Theta_{1,j}^{*}(a) \\ -(z-a)\widetilde{u}_{1,j-1}^{*}R_{j-1}^{*}(\bar{z})K_{1,j-1}^{-1}R_{j-1}(a)\widetilde{u}_{1,j-1}\Gamma_{1,j}^{*}(a)=0 \tag{85}$$

and

$$\Gamma_{1,j}^{*}(\bar{z})-\Gamma_{1,j}^{*}(a)+(z-a)\widetilde{v}_{j-1}^{*}R_{j-1}^{*}(\bar{z})K_{1,j-1}^{-1}R_{j-1}(a)v_{j-1}\Theta_{1,j}^{*}(a) \\ -(z-a)\widetilde{v}_{j-1}^{*}R_{j-1}^{*}(\bar{z})K_{1,j-1}^{-1}R_{j-1}(a)\widetilde{u}_{1,j-1}\Gamma_{1,j}^{*}(a)=0. \tag{86}$$

In turn (85) and (86) are demonstrated by using (37), (39), (47), (44), (49), (46), (50), (67) and (51). The Theorem is proved.

Corollary 1 *Let the auxiliary matrices $\widetilde{U}_2^{(2n+1)}$ and $\widehat{U}_2^{(2n-2)}$ defined as in (27) and (29). Furthermore, let $d^{(2j)}$, $d^{(2j+1)}$ be as in (73)-(75). Then equalities (10) and (11) hold.*

The proof follows immediately from Theorem 1.

5. Representation of the RM via DSM parameters

In this section we introduce new DSM parameters; see Definition 9. In contrast to the DSM parameters introduced in [3] (see Definition 10) which depend on the left terminal point of the interval $[a,b]$, the new DSM parameters depend both on a and b.

With the help of the new DSM parameters and the OMP on $[a,b]$ we obtain a multiplicative representation of the RM $U^{(2n)}$, $U^{(2n+1)}$ of the THMM problem. This representation is a generalization of a similar one attained by Yu. Dyukarev in [25, Theorem 7].

Definition 9 *Let a and b be real numbers such that $a<b$. Let $H_{2,j}$, $K_{1,j}$, R_j, v_j, $u_{2,j}$ be defined by (4), (5), (14), (15), (17) and (22), respectively. Furthermore, let s_0, $H_{2,j}$, $K_{1,j}$ be positive definite matrices. For $1\le j\le n-1$, denote by*

$$\mathbf{r}_0:=s_0,\quad \mathbf{r}_j(a,b):=s_0+(u_{2,j}^{*}+as_0v_j^{*})R_j^{*}(a)H_{2,j}^{-1}R_j(a)(u_{2,j}+av_js_0), \tag{87}$$

$$\mathbf{t}_0(b):=v_0^{*}R_0^{*}(a)K_{1,0}^{-1}R_0(a)v_0,\quad \mathbf{t}_j(a,b):=v_j^{*}R_j^{*}(a)K_{1,j}^{-1}R_j(a)v_j, \tag{88}$$

$$\mathbf{l}_{-1}:=s_0,\quad \mathbf{l}_0(a,b):=(u_{2,0}^{*}+as_0v_0^{*})H_{2,0}^{-1}(u_{2,0}+av_0s_0), \tag{89}$$

$$\mathbf{l}_j(a,b):=(u_{2,j}^{*}+as_0v_j^{*})R_j^{*}(a)H_{2,j}^{-1}R_j(a)(u_{2,j}+av_js_0) \\ -(u_{2,j-1}^{*}+as_0v_{j-1}^{*})R_{j-1}^{*}(a)H_{2,j-1}^{-1}R_{j-1}(a)(u_{2,j-1}+av_{j-1}s_0) \tag{90}$$

and

$$\mathbf{m}_0(b):=\mathbf{t}_0(b), \\ \mathbf{m}_j(a,b):=v_j^{*}R_j^{*}(a)K_{1,j}^{-1}R_j(a)v_j-v_{j-1}^{*}R_{j-1}^{*}(a)K_{1,j-1}^{-1}R_{j-1}(a)v_{j-1} \tag{91}$$

for $1 \le j \le n$. *The matrices* $\mathbf{l}_j(a,b)$ *and* $\mathbf{m}_j(a,b)$ *are called the second type Dyukarev-Stieltjes matrix parameters of the THMM problem.*

Below we shall usually omit the dependence on a and b of the matrices (87)-(91).

Observe that from (69), (70), (71), (72), (36), (37), (39) and (35) the following identities are valid:

$$\mathbf{l}_j = Q^*_{2,j}(a)\widehat{H}^{-1}_{2,j}Q_{2,j}(a), \quad \mathbf{m}_j = \Gamma^*_{1,j}(a)\widehat{K}^{-1}_{1,j}\Gamma_{1,j}(a), \tag{92}$$

$$\mathbf{r}_j = \Gamma^{-1}_{1,j}(a)\Theta_{1,j}(a), \qquad \mathbf{t}_j = Q^{-1}_{2,j}(a)P_{2,j}(a). \tag{93}$$

Remark 7 *Let* $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{t}_j$, $\mathbf{l}_j$ *and* $\mathbf{m}_j$ *be as in (87)-(91). Thus, the following equalities hold:*

$$\mathbf{l}_j = \mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_j, \quad j \ge 0, \tag{94}$$

$$\mathbf{m}_j = \mathbf{t}_j - \mathbf{t}_{j-1}, \quad j \ge 1. \tag{95}$$

Moreover, the matrices $\mathbf{l}_j$ *and* $\mathbf{m}_j$ *are positive definite matrices.*

Proof. Equalities (94)-(95) follow by direct calculation from (87)-(91). By the second equality of (41) and the fact that $\widehat{K}_{1,j}$ and $\widehat{H}_{2,j}$ are positive definite matrices, we obtain that $\mathbf{l}_j$ and $\mathbf{m}_j$ are too.

Let us recall DSM parameters $\mathbf{M}_j$ and $\mathbf{L}_j$ first introduced in [3].

Definition 10 *Let* a *be a real number. Let* $H_{1,j}$, $K_{2,j}$, R_j, v_j, $\widetilde{u}_{2,j}$ *be defined by (4), (5), (14), (15) and (17), respectively. Furthermore, let* $H_{1,j}$, $K_{1,j}$ *be positive definite matrices. For* $1 \le j \le n$, *denote by*

$$\mathbf{M}_0(a) := s_0^{-1}, \quad \mathbf{L}_0(a) := \widetilde{u}^*_{2,0}K^{-1}_{2,0}\widetilde{u}_{2,0}, \tag{96}$$

$$\mathbf{M}_j(a) := v^*_j R^*_j(a)H^{-1}_{1,j}R_j(a)v_j - v^*_{j-1}R^*_{j-1}(a)H^{-1}_{1,j-1}R_{j-1}(a)v_{j-1}, \tag{97}$$

$$\mathbf{L}_j(a) := \widetilde{u}^*_{2,j}R^*_j(a)K^{-1}_{2,j}R_j(a)\widetilde{u}_{2,j} - \widetilde{u}^*_{2,j-1}R^*_{j-1}(a)K^{-1}_{2,j-1}R_{j-1}(a)\widetilde{u}_{2,j-1}. \tag{98}$$

The matrices $\mathbf{M}_j(a)$ *and* $\mathbf{L}_j(a)$ *are called Dyukarev-Stieltjes matrix parameters of the THMM problem.*

In the sequel we usually omit the dependence of the DSM parameters $\mathbf{M}_j$ and $\mathbf{L}_j$ on the parameter a.

It should be mentioned that the notion *Dyukarev-Stieltjes parameters* was first introduced by B. Fritzsche, B. Kirstein and C. Mädler in [35] for the TSMM problem, that is, for $\mathbf{M}_j(0)$ and $\mathbf{L}_j(0)$.

In [25, Theorem 7] Dyukarev introduced the Stieltjes parameters for the Stieltjes matrix moment problem which in our notations are given by $\mathbf{M}_0(0)$, $\mathbf{L}_0(0)$, $\mathbf{M}_j(0)$ and $\mathbf{L}_j(0)$. The following Remark gives the interrelation between the aforementioned Stieltjes parameters [25, Theorem 7] and the DSM parameters studied in the present work.

Remark 8 *Let $\mathbf{M}_j$ and $\mathbf{L}_j$ be the DSM parameters as in (96)-(97). Furthermore, let the DSM parameters be as in (89), (90) and (91). Thus, the following relations are valid:*

$$\mathbf{M}_j(0) = \lim_{b\to+\infty} b\,\mathbf{m}_j(0,b), \qquad \mathbf{L}_j(0) = \lim_{b\to+\infty} b^{-1}\mathbf{l}_j(0,b). \tag{99}$$

This Remark can be verified by direct calculations.

We continue considering Hausdorff positive definite sequences $(s_j)_{j=0}^{2n}$ and $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$. The following Theorem shows an explicit representation between the Blaschke-Potapov factors $d^{(2j)}$, $d^{(2j+1)}$ and the matrices $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{t}_j$, $\mathbf{l}_j$ and $\mathbf{m}_j$.

Theorem 2 *Let $d^{(2j)}$, $d^{(2j+1)}$ be as in (73)-(74) and $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{t}_j$, $\mathbf{l}_j$, $\mathbf{m}_j$ be defined by (87)-(91), respectively. The identities (12) and (13) then hold for $0 \le j \le n$.*

Proof. We prove (12). For $j = 0$ the proof can be checked by a direct calculation. Let $1 \le j \le n$. Denote

$$d^{(2j+1)} := \begin{pmatrix} d_j^{11} & d_j^{12} \\ d_j^{21} & d_j^{22} \end{pmatrix}.$$

The relation (12) is equivalent to the following four equalities:

$$d_j^{11} - I_q + (z-a)\mathbf{r}_j\mathbf{m}_j = 0, \tag{100}$$

$$d_j^{12} - (z-a)\mathbf{r}_j\mathbf{m}_j\mathbf{r}_j = 0, \tag{101}$$

$$d_j^{21} + (z-a)\mathbf{m}_j = 0, \tag{102}$$

$$d_j^{22} - I_q - (z-a)\mathbf{m}_j\mathbf{r}_j = 0. \tag{103}$$

Let us now prove (100). By the $(1,1)$ element of $d^{(2j+1)}$, (92) and (93), we have

$$\begin{aligned} & d_j^{11} - I_q + (z-a)\mathbf{r}_j\mathbf{m}_j \\ & = -(z-a)\Theta_{1,j}^*(a)\widehat{K}_{1,j}^{-1}\Gamma_{1,j}(a) + (z-a)\Theta_{1,j}^*(a)\Gamma_{1,j}^{*^{-1}}(a)\Gamma_{1,j}^*(a)\widehat{K}_{1,j}^{-1}\Gamma_{1,j}(a) \\ & = 0. \end{aligned}$$

The equalities (101) and (103) are proved in a similar way. Observe that (102) is verified by definition. To prove (13) one uses (74), the first equality of (92) and the second equality of (93). Thus Theorem 2 is proved. Let $n \in \mathbb{N}_0$, and let $A_0, \ldots, A_n$ be complex $q \times q$ matrices. Let

$$\prod_{j=0}^{\overrightarrow{n}} A_j = A_0 A_1 \cdots A_{n-1} A_n \quad \text{and} \quad \prod_{j=0}^{\overleftarrow{n}} A_j = A_n A_{n-1} \cdots A_1 A_0$$

then denote the right and left product of the matrices $A_0, A_1, \ldots, A_n$, respectively.

The following Corollary readily yields by employing (94), (95), Theorem 2 and Corollary 1.

Corollary 2 *Let $\widehat{U}_2^{(2n-2)}$ and $\widetilde{U}_2^{(2n+1)}$ be as in (29) and (27), respectively. Furthermore, let $\mathbf{m}_k$, $\mathbf{l}_k$, $\mathbf{t}_k$ and $\mathbf{r}_k$ be as in Definition 9. Thus, the equalities*

$$\widehat{U}_2^{(2n-2)} = \prod_{k=0}^{\overrightarrow{n-1}} \left[\begin{pmatrix} I_q & (z-a)\mathbf{l}_{k-1} \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -\mathbf{m}_k & I_q \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} I_q & (z-a)\mathbf{l}_{n-1} \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ \mathbf{t}_{n-1} & I_q \end{pmatrix} \tag{104}$$

and

$$\widetilde{U}_2^{(2n+1)} = \prod_{k=0}^{\overrightarrow{n}} \left[\begin{pmatrix} I_q & \mathbf{l}_{k-1} \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -(z-a)\mathbf{m}_k & I_q \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} I_q & -\mathbf{r}_n \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \tag{105}$$

are valid.

Now we derive a new representation of the RM of the THMM problem via DSM parameters in both cases for odd and even number of moments. We also reproduce an analogue representation given in [8, Corollary 3].

Theorem 3 *Let $P_{k,j}$, $Q_{k,j}$, $\Gamma_{k,j}$ and $\Theta_{k,j}$ be as in Definitions 6 and 7. Let the RM $U^{(2n)}$, $U^{(2n+1)}$ of the THMM problem be as in (6), (7), respectively.*
a) Let $\mathbf{l}_k$, $\mathbf{m}_k$, be as in Definition (89)-(91). Thus, the following representations of the RM in the case of odd and even number of moments hold

$$\begin{aligned} &U^{(2n)}(z,a,b) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{(b-z)(z-a)} I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \prod_{k=0}^{\overrightarrow{n-1}} \left[\begin{pmatrix} I_q & (z-a)\mathbf{l}_{k-1} \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -\mathbf{m}_k & I_q \end{pmatrix} \right] \\ &\cdot \begin{pmatrix} I_q & (z-a)\mathbf{l}_{n-1} \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ Q_{2,n-1}^{-1}(a)P_{2,n-1}(a) + \frac{1}{b-a}\Theta_{2,n}^{-1}(a)\Gamma_{2,n}(a) & I_q \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} (b-a)(z-a)I_q & 0_q \\ 0_q & \frac{b-z}{b-a} I_q \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{106}$$

$$\begin{aligned} &U^{(2n+1)}(z,a,b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{b-z} I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \prod_{k=0}^{\overrightarrow{n}} \left[\begin{pmatrix} I_q & \mathbf{l}_{k-1} \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -(z-a)\mathbf{m}_k & I_q \end{pmatrix} \right] \\ &\cdot \begin{pmatrix} I_q & -\Gamma_{1,n}^{-1}(a)\Theta_{1,n}(a) - (b-a)P_{1,n+1}^{-1}(a)Q_{1,n+1}(a) \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (b-z)I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{107}$$

b) Moreover, let $\mathbf{M}_k$, $\mathbf{L}_k$ be as in (96)-(98). Thus the following representations *hold:*

$$U^{(2n)}(z,a,b)=\overrightarrow{\prod_{k=0}^{n-1}}\left[\begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -(z-a)\mathbf{M}_k & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_q & \mathbf{L}_k \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -(z-a)\mathbf{M}_n & I_q \end{pmatrix}$$
$$\cdot\begin{pmatrix} I_q & Q^*_{1,n}(a)P^{*^{-1}}_{1,n}(a)+\frac{1}{b-a}\Theta^*_{1,n}(a)\Gamma^{*^{-1}}_{1,n}(a) \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \tag{108}$$

and

$$U^{(2n+1)}(z,a,b)=\begin{pmatrix} \frac{1}{z-a}I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}\overrightarrow{\prod_{k=0}^{n}}\left[\begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -\mathbf{M}_k & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_q & (z-a)\mathbf{L}_k \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}\right]$$
$$\cdot\begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -\Gamma^*_{2,n}(a)\Theta^{*^{-1}}_{2,n}(a)-(b-a)P^*_{2,n}(a)Q^{*^{-1}}_{2,n}(a) & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (z-a)I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}. \tag{109}$$

Proof. We prove part a). Equality (106) is proved by using (8), (33), (30) and (104). In a similar manner one proves equality (107) by using (9), (105) and (28). Part b) is proved in [8, Corollary 3]. Observe that $Q_{2,n-1}(a)$, $\Theta_{2,n}(a)$, $\Gamma_{1,n}(a)$, $P_{1,n}(a)$ are invertible matrices due to Remark 3 and the fact that $\widehat{H}_{1,n}$, $\widehat{H}_{2,n-1}$, $\widehat{K}_{1,n}$, $\widehat{K}_{2,n}$ are positive definite matrices.

Let us introduce some additional notation:

$$\mathbb{l}^{(2n)}_k:=\begin{pmatrix} 0_q & I_q \\ I_q & (z-a)\mathbf{l}_k \end{pmatrix},\quad \mathbb{m}^{(2n)}_k:=\begin{pmatrix} 0_q & I_q \\ I_q & -\mathbf{m}_k \end{pmatrix}, \tag{110}$$

$$\mathbb{l}^{(2n+1)}_k:=\begin{pmatrix} 0_q & I_q \\ I_q & \mathbf{l}_k \end{pmatrix},\quad \mathbb{m}^{(2n+1)}_k:=\begin{pmatrix} 0_q & I_q \\ I_q & -(z-a)\mathbf{m}_k \end{pmatrix}, \tag{111}$$

$$\mathbb{L}^{(2n)}_k:=\begin{pmatrix} 0_q & I_q \\ I_q & \mathbf{L}_k \end{pmatrix},\quad \mathbb{M}^{(2n)}_k:=\begin{pmatrix} 0_q & I_q \\ I_q & -(z-a)\mathbf{M}_k \end{pmatrix}, \tag{112}$$

$$\mathbb{L}^{(2n+1)}_k:=\begin{pmatrix} 0_q & I_q \\ I_q & (z-a)\mathbf{L}_k \end{pmatrix},\quad \mathbb{M}^{(2n+1)}_k:=\begin{pmatrix} 0_q & I_q \\ I_q & -\mathbf{M}_k \end{pmatrix} \tag{113}$$

and

$$\mathcal{D}_1 := \begin{pmatrix} 0_q & \frac{1}{(b-z)(z-a)} I_q \\ I_q & 0_q \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_2 := \begin{pmatrix} 0_q & \frac{b-z}{b-a} I_q \\ (b-a)(z-a) I_q & 0_q \end{pmatrix}, \tag{114}$$

$$\mathcal{D}_3 := \begin{pmatrix} 0_q & \frac{1}{b-z} I_q \\ I_q & 0_q \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_4 := \begin{pmatrix} 0_q & I_q \\ (z-a) I_q & 0_q \end{pmatrix}, \tag{115}$$

$$\mathbf{D}_1 := \begin{pmatrix} (b-z) I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{z-a} I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}, \tag{116}$$

$$\mathcal{B}_1^{(2n)} := \begin{pmatrix} 0_q & I_q \\ I_q & Q_{1,n}^*(a) P_{1,n}^{*^{-1}}(a) + \frac{1}{b-a} \Theta_{1,n}^*(a) \Gamma_{1,n}^{*^{-1}}(a) \end{pmatrix}, \tag{117}$$

$$\mathcal{B}_1^{(2n+1)} := \begin{pmatrix} 0_q & I_q \\ I_q & -\Gamma_{2,n}^*(a) \Theta_{2,n}^{*^{-1}}(a) - (b-a) P_{2,n}^*(a) Q_{2,n}^{*^{-1}}(a) \end{pmatrix}, \tag{118}$$

$$\mathcal{B}_2^{(2n)} := \begin{pmatrix} 0_q & I_q \\ I_q & Q_{2,n-1}^{-1}(a) P_{2,n-1}(a) + \frac{1}{b-a} \Theta_{2,n}^{-1}(a) \Gamma_{2,n}(a) \end{pmatrix}, \tag{119}$$

$$\mathcal{B}_2^{(2n+1)} := \begin{pmatrix} 0_q & I_q \\ I_q & -\Gamma_{1,n}^{-1}(a) \Theta_{1,n}(a) - (b-a) P_{1,n+1}^{-1}(a) Q_{1,n+1}(a) \end{pmatrix}. \tag{120}$$

Lemma 1 *Let the RM* $U^{(2n)}$ *and* $U^{(2n+1)}$ *be defined as in (6) and (7). Furthermore, let* $\mathbb{l}_k^{(2n)}$, $\mathbb{m}_k^{(2n)}$, $\mathbb{l}_k^{(2n+1)}$, $\mathbb{m}_k^{(2n+1)}$, $\mathbb{L}_k^{(2n)}$, $\mathbb{M}_k^{(2n)}$, $\mathbb{L}_k^{(2n+1)}$, $\mathbb{M}_k^{(2n+1)}$, $\mathcal{D}_j$, *for* $j = 1, 2, 3, 4$, $\mathcal{B}_j^{(2n)}$, $\mathcal{B}_j^{(2n+1)}$ *for* $j = 1, 2$ *and* $\mathbf{D}_j$ *for* $j = 1, 2$ *be as in (110)-(113), (114)-(115), (119), (120) and (116), respectively. The identities (1), (2),*

$$U^{(2n)} = \mathbb{M}_0^{(2n)} \mathbb{L}_0^{(2n)} \ldots \mathbb{L}_{n-1}^{(2n)} \mathbb{M}_n^{(2n)} \mathcal{B}_1^{(2n)} \tag{121}$$

and

$$U^{(2n+1)} = \mathbf{D}_2 \mathbb{M}_0^{(2n+1)} \mathbb{L}_0^{(2n+1)} \ldots \mathbb{M}_n^{(2n+1)} \mathbb{L}_n^{(2n+1)} \mathcal{B}_1^{(2n+1)} \mathcal{D}_4 \tag{122}$$

hold.

Proof. We prove (1). By using (114), (110) and (119) clearly the following equalities are valid:

$$\mathcal{D}_1 \mathbb{l}_{-1}^{(2n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(b-z)(z-a)} I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & (z-a) \mathbf{l}_{-1} \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{m}_k^{(2n)} \mathbb{l}_k^{(2n)} = \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -\mathbf{m}_k & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & (z-a) \mathbf{l}_k \\ 0_q & I_q \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_2^{(2n)} \mathcal{D}_2 = \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ Q_{2,n-1}^{-1}(a) P_{2,n-1}(a) + \frac{1}{b-a} \Theta_{2,n}^{-1}(a) \Gamma_{2,n}(a) & I_q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (b-a)(z-a) I_q & 0_q \\ 0_q & \frac{b-z}{b-a} I_q \end{pmatrix}.$$

The latter equalities along with (106) imply (1). In a similar manner ones proves (2), (121) and (122).

*

Appendix

In this appendix we reproduce some results from [9] and [8], which are used in the present work.

Definition 11 *[9, Formula (6.2)] Let $H_{2,j}$ be as in (4), and assume that $H_{2,j}$ is a positive definite matrix. Furthermore, let $u_{2,j}$, R_j and v_j be as in (22), (14) and (15). The $2q \times 2q$ matrix polynomial*

$$\widetilde{U}_2^{(2j)}(z,a,b) := \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_2^{(2j)}(z,a,b) & \widetilde{\beta}_2^{(2j)}(z,a,b) \\ \widetilde{\gamma}_2^{(2j)}(z,a,b) & \widetilde{\delta}_2^{(2j)}(z,a,b) \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq j \leq n-1, \quad \text{(A.1)}$$

with

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}_2^{(2j)}(z,a,b) :=& I_q - (z-a)u_{2,j}^* R_j^*(\bar{z}) H_{2,j}^{-1} R_j(a) v_j, \\ \widetilde{\beta}_2^{(2j)}(z,a,b) :=& (z-a)u_{2,j}^* R_j^*(\bar{z}) H_{2,j}^{-1} R_j(a) u_{2,j}, \\ \widetilde{\gamma}_2^{(2j)}(z,a,b) :=& -(z-a)v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_{2,j}^{-1} R_j(a) v_j \end{aligned}$$

and

$$\widetilde{\delta}_2^{(2j)}(z,a,b) := I_q + (z-a) v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_{2,j}^{-1} R_j(a) u_{2,j}$$

is called the second auxiliary matrix of the THMM problem in the case of an odd number of moments.

Remark 9 *[8, Equalities (1.30) and (1.31)] The following identities are valid:*

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,j}^*(\bar{z},a)\Theta_{2,j}^{*^{-1}}(a,a) =& -v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_{1,j}^{-1} R_j(a) v_j, \\ Q_{1,j+1}^*(\bar{z}) P_{1,j+1}^{*^{-1}}(a) =& -\widetilde{u}_{2,j}^* R_j^*(\bar{z}) K_{2,j}^{-1} R_j(a) \widetilde{u}_{2,j}. \end{aligned}$$

Finally, let us recall the following well-known result below.

Lemma 2 *[1, Proposition 8.2.4] Let $A := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}$ be a Hermitian $(n+m) \times (n+m)$ matrix. Therefore, the following statements are equivalent:*

i) $A > 0$.

ii) $A_{11} > 0$ *and* $A_{12}^* A_{11}^{-1} A_{12} < A_{22}$.

iii) $A_{22} > 0$ *and* $A_{12} A_{22}^{-1} A_{12}^* < A_{11}$.

Acknowledgement

The author expresses his gratitude to German Academic Exchange Service (DAAD) for procuring a one-month academic visit to the University of Leipzig in July, 2014

References

1. D.S. Bernstein, Matrix mathematics: theory, facts, and formulas with applications to linear systems theory, 2005. – Princeton University Press. – 1184 p.
2. Choque Rivero A.E., The resolvent matrix for the matricial Hausdorff moment problem expressed by orthogonal matrix polynomials, / Complex Anal. Oper. Theory, 2013. – 7(4). – P. 927–944.
3. Choque Rivero A.E., Decompositions of the Blaschke-Potapov factors of the truncated Hausdorff matrix moment problem. The case of odd number of moments, / Commun. Math. Anal., 2014. – 17(2). – P. 66–81.
4. Choque Rivero A.E., Decompositions of the Blaschke-Potapov factors of the truncated Hausdorff matrix moment problem. The case of even number of moments, / Commun. Math. Anal., – 2014. – 17(2). – P. 82–97.
5. Choque Rivero A.E., From the Potapov to the Krein-Nudel'man representation of the resolvent matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem, / Bol. Soc. Mat. Mexicana, 2015. – 21(2). – P. 233–259.
6. Choque Rivero A.E., On Dyukarev's resolvent matrix for a truncated Stieltjes matrix moment problem under the view of orthogonal matrix polynomials, / Lin. Alg. and Appl., 2015. – 474. – P. 44–109.
7. Choque Rivero A.E., On matrix Hurwitz type polynomials and their interrelations to Stieltjes positive definite sequences and orthogonal matrix polynomials, / Lin. Alg. and Appl., 2015. – 476. – P. 56–84.
8. Choque Rivero A.E., Dyukarev-Stieljtes parameters of the truncated Hausdorff matrix moment problem, / Boletin Soc. Mat. Mexicana, 2016. – P. 1–28. DOI: 10.1007/s40590-015-0083-5.
9. Choque Rivero A.E., Dyukarev Yu.M., Fritzsche B. and Kirstein B., A truncated matricial moment problem on a finite interval. The case of an odd number of prescribed moments, / System Theory, Schur Algorithm and Multidimensional Analysis. Oper. Theory: Adv. Appl., 2007. – 176. – P. 99–174.
10. Choque Rivero A.E., Dyukarev Yu.M., Fritzsche B. and Kirstein B., A truncated matricial moment problem on a finite interval. // Interpolation, Schur Functions and Moment Problems. Oper. Theory: Adv. Appl., 2006. – 165. – P. 121–173.
11. Choque Rivero A.E., Garza L.E, Moment perturbation of matrix polynomials, / Integral Transforms Spec. Funct., 2015. – 26. – P. 177–191.
12. Choque Rivero A.E., Mädler C., On Hankel positive definite perturbations of Hankel positive definite sequences and interrelations to orthogonal matrix polynomials, / Complex Anal. Oper. Theory, 2014. – 8(8). – P. 121–173.
13. Choque Rivero A.E., Mädler C., On resolvent matrix, Dyukarev–Stieltjes parameters and orthogonal matrix polynomials via $[0, +\infty)$-Stieltjes transformed sequences, / Complex Anal. Oper. Theory, 2017. – P. 1–44, DOI 10.1007/s11785-017-0655-7.

14. Choque Rivero A.E., Zagorodnyuk S., An algorithm for the truncated matrix Hausdorff moment problem, / Commun. Math. Anal., 2014. – 17(2). – P. 108–130.
15. Damanik D., Pushnitski A. and Simon B., The analytic theory of matrix orthogonal polynomials, / Surv. Approx. Theory, 2008. – 4. – P. 1–85.
16. Dette H., Studden W.J., Matrix measures, moment spaces and Favard's theorem on the interval $[0, 1]$ and $[0, \infty)$, / Lin. Alg. and Appl., 2002. – 345. – P. 169–193.
17. Duran A., Markov's theorem for orthogonal matrix polynomials, / Can. J. Math., 1996. – 48(6). – P. 1180–1195.
18. Durán A.J., Rodrigues's formulas for orthogonal matrix polynomials satisfying higher-order differential equations, / Exp. Math., 2011. – 20(1). – P. 15–24.
19. Durán A.J., Grünbaum F.A., Matrix differential equations and scalar polynomials satisfying higher order recursions, / J. Math. Anal. Appl., 2009. – 354. – P. 1–11.
20. Durán A.J., De la Iglesia M.D., Some examples of orthogonal matrix polynomials satisfying odd order differential equations, / J. Approx. Theory, 2008. – 150. – P. 153–174.
21. Durán A.J., López–Rodríguez P., Structural formulas for orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations, II, / Constr. Approx., 2007. – 26(1). – P. 29–47.
22. Dym H., On Hermitian block Hankel matrices, matrix polynomials, the Hamburger moment problem, interpolation and maximum entropy, / Integral Equations and Operator Theory, 1989. – 12. – P. 757–812.
23. Dyukarev Yu.M., The multiplicative structure of resolvent matrices of interpolation problems in the Stieltjes class, / Vestnik Kharkov Univ. Ser. Mat. Prikl. Mat. i Mekh., 1999. – 458. – P. 143–153.
24. Dyukarev Yu.M., *Factorization of operator functions of multiplicative Stieltjes class* (Russian), / Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh., 2000. – 9. – P. 23–26.
25. Dyukarev Yu.M., Indeterminacy criteria for the Stieltjes matrix moment problem, / Math. Notes, 2004. – 75(1-2). – P. 66–82.
26. Dyukarev Yu.M., Indeterminacy of interpolation problems in the Stieltjes class, Math. Sb., 2005. – 196(3). – P. 61–88.
27. Dyukarev Yu.M., A Generalized Stieltjes Criterion for the Complete Indeterminacy of Interpolation Problems, / Math. Notes, 2008. – 84(1). – P. 23–39.
28. Dyukarev Yu.M., Criterion for complete indeterminacy of limiting interpolation problem of Stieltjes type in terms of orthonormal matrix functions, / Russian Mathematics (Iz. VUZ), 2015. – 59(4). – P. 61–88.
29. Dyukarev Yu.M., Geometric and operator measures of degeneracy for the set of solutions to the Stieltjes matrix moment problem, Mat. Sb., 2016. – 207(4). – P. 47–64.

30. Dyukarev Yu.M. ,Choque Rivero A.E., Power moment problem on compact intervals, / Mat. Sb., 2001. – 69(1-2). – P. 175–187.
31. Dyukarev Yu.M. ,Choque Rivero A.E., A matrix version of one Hamburger theorem, / Mat. Sb., 2012. – 91(4). – P. 522–529.
32. Dyukarev Yu.M., Serikova I.Yu., Complete indeterminacy of the Nevanlinna-Pick problem in the class S[a,b], / Russian Math. (Iz. VUZ), 2007. – 51(11). – P. 17–29.
33. Dyukarev Yu.M., Serikova I.Yu., Step-by-step solving of ordered interpolational problem for Stieltjes functions, / Russian Math. (Iz. VUZ), 2017. – 6. – P. 18–32.
34. Fritzsche B., Kirstein B., Mädler C., On Hankel nonegative definite sequences, the canonical Hankel parametrization, and orthogonal matrix polynomials, / Compl. Anal. Oper. Theory, 2011. – 5(2). – P. 447–511.
35. Fritzsche B., Kirstein B., Mädler C., Transformations of matricial α-Stieltjes non-negative definite sequences, / Lin. Alg. and Appl., 2013. – 439. – P. 3893–3933.
36. Geronimo J.S., Scattering theory and matrix orthogonal polynomials on the real line, / Circuits Systems Sigmal Process, 1982. – 1(3-4). – P. 471–495.
37. I.V. Kovalishina, New aspects of the classical moment problems. Second doctoral thesis (in Russian), 1986. – Institute of Railway-Transport Engineers.
38. Kovalishina I.V., Analytic theory of a class of interpolation problems, / Izv. Math., 1983. – 47(3). – P. 455–497.
39. Krein M.G., Fundamental aspects of the representation theory of hermitian operators with deficiency (m, m), / Ukrain. Mat. Zh., 1949. – 1(2). – P. 3–66.
40. Krein M.G., Infinite J-matrices and a matrix moment problem, / Dokl. Akad. Nauk, 1949. – 69(2). – P. 125–128.
41. Miranian L., Matrix-valued orthogonal polynomials on the real line: some extensions of the classical theory, / J. Phys. A: Math. Gen., 2005. – 38. – P. 5731–5749.
42. Potapov V.P., The multiplicative structure of J-nonexpansive matrix functions, / Trudy Moskov. Mat. Ob., 1955. – 4. – P. 125–236.
43. Serikova I. Yu., Indeterminacy criteria for the Nevanlinna-Pick interpolation problem in class $R[a, b]$, / Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., 2006. – 3(4). – P. 126–142.
44. Simon B., The classical problem as a self-adjoint finite difference operator, / Adv. Math., 1998. – 137. – P. 82–203.
45. Sinap A., Van Assche W., Orthogonal matrix polynomials and applications, / J. Comput. Appl. Math., 1996. – 66(1-2). – P. 27–52.
46. H. Thiele, Beiträge zu matriziellen Potenzmomentenproblemen, PhD Thesis, 2006. – Leipzig University.
47. Zagorodnyuk S., The truncated matrix Hausdorff moment problem, / Methods Appl. Anal., 2012. – 19(1). – P. 021–042.

Article history: Received: 1 September 2017; Accepted: 9 October 2017.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 85, 2017, с.43–51

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”
Vol. 85, 2017, p. 43–51
DOI: 10.26565/2221-5646-2017-85-03

УДК 512.552

Звичайні вагові функції допустимих сагайдаків

О. В. Зеленський, В. М. Дармосюк

Кам'янець - Подільський національний університет імені Івана Огієнка
вул. Огієнка, 61, 32301, м. Кам'янець - Подільський, Україна
Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського
вул. Нікольська, 24, 54030, м. Миколаїв, Україна
zelik82@mail.ru, darmosiuk@gmail.com

У роботі знайдено класи сагайдаків зі звичайними ваговими функціями та знайдено сагайдаки, для яких не існує звичайних вагових функцій.
Ключові слова: матриця показників, допустимий сагайдак матриці показників, вагова функція допустимого сагайдака.

Зеленский А. В., Дармосюк В. Н. **Обычные весовые функции допустимых колчанов.** В работе найдены классы колчанов с обычными весовыми функциями и найдены колчаны, для которых не существует обычных весовых функций.
Ключевые слова: матрица показателей, допустимый колчан матрицы показателей, весовая функция допустимого колчана.

O. V. Zelenskiy, V. M. Darmosiuk. **The ordinary weight function of admissible quivers.** We found quivers classes with ordinary weight functions and quivers for which there are not ordinary weight functions.
Keywords: exponent matrix,weight function of admissible quiver, rigid quiver.

2000 Mathematics Subject Classification: 16G20, 16G30.

1. Вступ

Одним із аспектів теорії кілець є вивчення властивостей кілець за допомогою теорії графів. Кожний черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем [1]. Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників [2],[3], зокрема, сагайдаки таких кілець [1]. Порівняно недавно матриці показників стали окремим об'єктом вивчення. В [4] доводиться нежорсткість допустимого сагайдака, який має хоча б одну петлю.

В [5] розглядаються вагові функції, які визначають допустимі сагайдаки. З їх появою з'явилося більше можливостей для дослідження допустимих сагайдаків. Опис деяких класів жорстких сагайдаків започатковано в [6]. В [7] знайдено властивості одиничних циклів та одиничних сагайдаків, зокрема знайдено обмеження для елементів матриці показників одиничного сагайдака. В [8] досліджуються цикли допустимих сагайдаків. В роботі знайдені допустимі сагайдаки, для яких не існує звичайних вагових функцій. Показано, що існують допустимі сагайдаки, у яких для довільної допустимої вагової функції вага хоча б однієї стрілки більше ніж одиниця. Також у статті виділено класи сагайдаків зі звичайними ваговими функціями та доведено, що всі допустимі сагайдаки з чотирма вершинами мають звичайні вагові функції.

2. Попередні відомості

Розглянемо матрицю $\mathcal{E}{=}(\alpha_{ij}) \in M_n(\mathcal{Z})(M_n(\mathcal{Z})$ — це кільце матриць $n \times n$ з цілими елементами).

Означення 1.[1, гл.14, с. 353] *Матриця $\mathcal{E}{=}(\alpha_{ij})$, для якої виконуються наступні умови:*

1) $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$ для всіх i, j, $k = 1, \ldots, n$,

2) $\alpha_{ii} = 0$ для всіх $i = 1, \ldots, n$,

називається матрицею показників.

Матриця показників, для якої виконується умова

3) $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geqslant 1$ для всіх $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ $(i \neq j)$

називається зведеною матрицею показників.

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників. Введемо матриці $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij}) = \mathcal{E} + E_n \quad \in M_n(\mathbb{Z})$, де E_n — одинична матриця, та $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$: $\gamma_{ij} = \min\limits_k \{\beta_{ik} + \beta_{kj}\}$.

Означення 2. [1, гл.14, с. 357] *Сагайдаком зведеної матриці показників $Q = Q(\mathcal{E})$ називається сагайдак, матриця суміжності якого задається формулою $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$.*

Означення 3. [1] *Зведені матриці показників $\mathcal{E}_1$ і $\mathcal{E}_2$ називають еквівалентними, якщо одну можна одержати з іншої за допомогою елементарних перетворень двох типів:*

1. Відняти ціле число t від елементів i-го рядка і додати його до елементів i-го стовпця.

2. Поміняти місцями два рядки і два стовпці з такими ж номерами.

Означення 4.[1, гл.14, с. 357] *Сагайдак Q називається допустимим, якщо існує зведена матриця показників $\mathcal{E}$, така що $Q(\mathcal{E}) = Q$.*

Означення 5. [5] *Сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ називають зваженим, якщо визначена функція $\omega \colon AQ \to R$. Функцію ω називають ваговою, а її значення на стрілці – вагою стрілки.*

Вага циклу дорівнює сумі ваг його стрілок та позначається $\omega(i_1, i_2, ..., i_n)$, де $i_1, i_2, ..., i_n$ вершини циклу.

Теорема 1.[3]. Якщо $\mathcal{E}$ - зведена матриця показників, $Q = Q(\mathcal{E})$-сагайдак матриці показників, то матриця $[Q]$ є (0, 1) - матрицею суміжності сильно зв'язного сагайдака.

Теорема 2. [5] Сильно зв'язний сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ допустимий тоді й тільки тоді, коли існує вагова функція $\omega : AQ \to N \cup \emptyset$, яка задовольняє такі умови:

1. Вага стрілки з точки i у точку j менша за вагу шляху з точки i у точку j довжини $l \geq 2$.

2. Вага петлі в точці i менша за вагу будь-якого циклу, що проходить через точку i, довжиною $l \geq 2$.

3. Вага будь-якого циклу більша або дорівнює 1.

4. Вага петлі дорівнює 1.

5. Через кожну точку без петлі проходить цикл довжиною $l \geq 2$, вага якого дорівнює 1.

Зауваження 1. Згідно з умовами (4) та (5) через кожну точку допустимого сагайдака проходить цикл ваги 1.

Означення 6.[5]*Вагову функцію, яка задовольняє всі умови теореми 1, називатимемо допустимою ваговою функцією.*

За сагайдаком Q і допустимою ваговою функцією ω можна побудувати матрицю показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(Z)$ таким чином: якщо сагайдак Q містить стрілку σ_{ij}, то $\alpha_{ij} = \omega(\sigma_{ij})$, у протилежному випадку α_{ij} дорівнює вазі найлегшого шляху із вершини v_i у вершину v_j.

Означення 7.[6]*Допустимий сагайдак Q називають жорстким, якщо існує з точністю до еквівалентності єдина зведена матриця показників $\mathcal{E}$ така, що $Q(\mathcal{E}) = Q$.*

Означення 8. [6]*Простий цикл в сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$, вага якого дорівнює 1, будемо називати одиничним.*

Твердження 1. [7] В допустимому сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$ між вершинами одиничного циклу не існує інших стрілок окрім стрілок цього циклу.

Твердження 2. [7] Допустимий сагайдак Q не може містити двох стрілок σ_{ia} та σ_{ja}, де вершини i, j належать одному одиничному циклу.

Твердження 3. [7] Допустимий сагайдак $Q = (VQ, AQ)$, не може містити стрілки σ_{ai}, σ_{aj}, де вершини i, j належать деякому одиничному циклу.

Означення 9. *Допустима вагова функція називається звичайною, якщо вага всіх стрілок не перевищує одиницю.*

Теорема 3. [8] Нехай Q допустимий сагайдак, σ_{uv} - стрілка сагайдака Q, Q^* - сагайдак, який утворюється з Q видаленням стрілки σ_{uv}. Сагайдак Q^* є допустимим, якщо виконуються умови:

1. В Q існує шлях із вершини u в вершину v, відмінний від стрілки σ_{uv} ;

2. Існує вагова функція ω, для якої Q допустимий сагайдак і стрілка σ_{uv} не належить одиничному циклу.

3. Основні результати

В наступних твердженнях виділимо класи сагайдаків, для яких завжди існують звичайні вагові функції.

Твердження 4. Якщо сагайдак Q має петлі у всіх вершинах, то для сагайдака Q існує звичайна вагова функція.

Доведення. Вагова функція ω з вагою всіх стрілок рівною одиниці задовольняє всі умови теореми 1, оскільки вага всіх циклів не менше двійки. Вага стрілки менше ніж вага шляху, тому вагова функція є звичайною ваговою функцією.

Твердження 5. Якщо сагайдак $Q = Q(\mathcal{E})$, $Q = (VQ, AQ)$ має єдиний одиничний цикл, то для сагайдака Q існує звичайна вагова функція.

Доведення. За твердженням 1 одиничний цикл не містить інших стрілок, окрім стрілок самого циклу. Усі стрілки сагайдака Q поділимо на дві групи: стрілки одиничного циклу та стрілки, які не належать одиничному циклу. Не зменшуючи загальності можна вважати, що одиничний цикл складається з вершин $(12\dots k)$. Для сагайдака побудуємо вагову функцію ω наступним чином:

1) $\omega(\sigma_{12}) = 1$, $\omega(\sigma_{23}) = 0$, ...,$\omega(\sigma_{k-1k}) = 0, \omega(\sigma_{k1}) = 0$;

2) вага інших стрілок сагайдака Q рівна одиниці.

Для вагової функції ω вага циклу $(12\dots k)$ рівна 1, а вага інших циклів більша одиниці, тому умови 2), 3), 5) теореми 1 виконуються. Доведемо, що виконується умова 1) теореми 1: Якщо стрілка $\sigma_{ij} \in AQ$ належить одиничному циклу $(12\dots k)$, то в будь-якому шляху σ_{ii_1},$\sigma_{i_1i_2}$,...,σ_{i_pj} (який починається в вершині "i" та завершується в вершині "j") є мінімум дві стрілки σ_{ii_1},σ_{i_pj}, які не належать одиничному циклу, тому вага такого шляху не менше двійки.

Якщо вершина "i" та вершина "j", не належать одиничному циклу, то очевидно, що довільний шлях, який починається в вершині "i" та завершується в вершині "j" містить мінімум дві стрілки σ_{ii_1}, σ_{i_pj}, які не належать одиничному циклу, тому вага такого шляху не менше двійки.

Якщо вершина "i" належить одиничному циклу та вершина "j" не належить одиничному циклу, то з твердження 2 випливає, що в шляху σ_{ii_1},$\sigma_{i_1i_2}$,...,σ_{i_pj} вершина i_p не належить одиничному циклу, тому $\omega(\sigma_{i_{p-1}i_p}) = 1$, $\omega(\sigma_{i_pj}) = 1$ вага шляху σ_{ii_1},$\sigma_{i_1i_2}$,...,σ_{i_pj} не менше двох. Якщо вершина "i" не належить та вершина "j" належить одиничному циклу, то з твердження 3 випливає, що в шляху σ_{ii_1},$\sigma_{i_1i_2}$,...,σ_{i_pj} вершина i_1 не належить одиничному циклу, тому $\omega(\sigma_{ii_1}) = 1$, $\omega(\sigma_{i_1i_2}) = 1$ вага шляху σ_{ii_1},$\sigma_{i_1i_2}$,...,σ_{i_pj} не менше двох.

Отже, для довільної стрілки $\sigma_{ij} \in AQ$ вага шляху, який починається в вершині "i" та завершується в вершині "j", не менше двох, тому вагова функція

ω задовольняє всім умовам теореми 1. Отже, ω є допустимою ваговою функцією. Оскільки вага всіх стрілок не перевищує одиниці, то ω є звичайною ваговою функцією. Твердження доведено.

Лема 1. В допустимому сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$, $VQ = \{1, 2, 3, 4\}$ без петель, у якого довжина всіх одиничних циклів дорівнює два і не існує вершини, через яку проходять усі одиничні цикли, можна вибрати два одиничні цикли, які складаються з різних вершин.

Доведення. Вершина "1" без петлі, тому вона належить одиничному циклу. Нехай це буде цикл (1 2). Вершина "3" без петлі, тому вона належить одиничному циклу. Якщо це цикл (3 4), то сагайдак Q містить цикли (1 2), (3 4), які складаються з різних вершин. Лему доведено. Розглянемо випадок коли Q не містить цикл (3 4). Якщо через вершину "3" проходить цикл (1 3), (варіант коли проходить цикл (2 3) розглядається аналогічно), то сагайдак Q не містить (1 4) (інакше всі одиничні цикли проходять через вершину "1"), не містить (3 4), тому містить (2 4). Одержали, що сагайдак Q містить цикли (1 3), (2 4), які складаються з різних вершин. Лему доведено.

Лема 2. Для допустимого сагайдака з чотирма вершинами без петель існує звичайна вагова функція.

Доведення. Нехай $Q = (VQ, AQ)$, $VQ = \{1, 2, 3, 4\}$ допустимий сагайдак з чотирма вершинами без петель. Якщо сагайдак Q містить одиничний цикл з чотирма вершинами, то він не містить інших стрілок, крім стрілок самого циклу, тому його довільна допустима вагова функція є звичайною. Якщо сагайдак Q містить одиничний цикл з трьома вершинами, то через четверту вершину може проходити одиничний цикл з двома або з трьома вершинами, тому з точністю до ізоморфізму таких сагайдаків є тільки два: $[Q_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $[Q_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Усі стрілки цих сагайдаків належать одиничним циклам, тому допустимі вагові функції є звичайними. Розглянемо випадок, коли довжина всіх одиничних циклів дорівнює два. Можливі два випадки:

Випадок 1. Усі одиничні цикли проходять через одну вершину, наприклад, через вершину "1", тоді сагайдак Q містить цикли (1 2), (1 3), (1 4) і з тверджень 2, 3 випливає, що він не містить інших стрілок, які не належать цим циклам, тому для сагайдака Q існує звичайна вагова функція.

Випадок 2. У сагайдаку Q не існує вершини через яку проходять усі одиничні цикли.

Доведемо, що в сагайдаку Q можна вибрати два одиничні цикли, які складаються з різних вершин.

Не зменшуючи загальності можна вважати, що сагайдак Q містить одиничні цикли (1 2), (3 4). Оскільки Q сильнозв'язний, то він містить стрілку по якій можна потрапити з циклу (1 2) до циклу (3 4). З точністю до ізоморфізму можна вважати, що Q містить стрілку σ_{13}. З тверджень 2,3 випливає, що сагайдак Q не містить стрілок σ_{23}, σ_{14}. Оскільки Q сильнозв'язний, то він містить стрілку по якій можна потрапити з циклу (3 4) до циклу (1 2). Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Q містить стрілку σ_{31}, або σ_{42}, або обидві стрілки. З тверджень 2,3 випливає, що сагайдак Q не містить стрілок σ_{23}, σ_{14}, σ_{32}, σ_{41}. Якщо Q містить обидві стрілки σ_{31}, σ_{42} та містить стрілку σ_{24}, то ми одержали сагайдак Q_1 з матрицею суміжності $[Q_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Побудуємо звичайну вагову функцію для Q_1 наступним чином: вага стрілок σ_{21}, σ_{43} дорівнює нулю, а вага інших стрілок дорівнює одиниці.

Тобто $Q_1 = Q(\mathcal{E}_1)$, $\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Очевидно, що вагова функція задовольняє всім вимогам теореми 1. Якщо в Q_1 видалити стрілку σ_{24} та одну з стрілок σ_{31} або σ_{42}, то сильнозв'язність сагайдака не порушиться. Крім того видалені стрілки одиничним циклам не належать, тому за теоремою 2 сагайдак залишиться допустимим з тією ж вагою стрілок. Отже, для довільного сагайдака Q, який належить до випадку 1, існує звичайна вагова функція.

Випадок 2. Q містить стрілку σ_{32} , або σ_{41}, або обидві стрілки. З тверджень 2,3 випливає, що сагайдак Q не містить стрілок σ_{23}, σ_{14}, σ_{31}, σ_{42}. Аналогічно до попереднього випадку розглянемо допустимий сагайдак Q_2 з матрицею суміжності $[Q_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q_2 = Q(\mathcal{E}_2)$, $\mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Очевидно, що вага всіх стрілок не перевищує одиниці, тому допустима вагова функція є звичайною. Якщо з Q_2 видалити стрілку σ_{24} та одну з стрілок σ_{32} або σ_{41}, то за теоремою 2 сагайдак залишиться допустимим з тією ж вагою стрілок. Отже, для довільного сагайдака Q, який належить до випадку 2, існує звичайна вагова функція. Лему доведено.

Теорема 4. Для довільного допустимого сагайдака Q з чотирма вершинами існує звичайна вагова функція.

Доведення. Нехай $Q = (VQ, AQ)$, $VQ = \{1, 2, 3, 4\}$. Якщо сагайдак Q має чотири петлі, то за твердженням 4 сагайдак Q має звичайну вагову функцію з вагою всіх стрілок рівною одиниці.

Сагайдак Q не може мати три петлі, оскільки з того що в сагайдаку є вершина без петлі, випливає існування в сагайдаку одиничного циклу, який містить принаймні дві вершини, тому в Q не менше двох вершин без петель.

Якщо сагайдак Q має дві петлі, то в сагайдаку є один одиничний цикл з двох вершин, тому за твердженням 5 сагайдак Q має звичайну вагову функцію.

Якщо сагайдак Q має одну петлю, то або в сагайдака Q є одиничний цикл з трьох вершин, або два одиничні цикли, які складаються з двох вершин кожен та мають спільну вершину. У першому випадку з твердження 5 випливає існування звичайної вагової функції. Розглянемо другий випадок. Нехай (1 2) та (2 3) одиничні цикли. Зауважимо, що з тверджень 2 та 3 випливає, що сагайдак Q не містить стрілку σ_{13} та стрілку σ_{31}. Розглянемо вагову функцію ω: $\omega(\sigma_{12}) = \omega(\sigma_{32}) = 1$, $\omega(\sigma_{21}) = \omega(\sigma_{23}) = 0$, вага інших стрілок сагайдака Q дорівнює одиниці. Доведемо, що в Q виконується нерівність: вага шляху із вершини "i" у вершину "j" більше ніж $\omega(\sigma_{ij})$. Якщо стрілка σ_{ij} належить одиничному циклу, то інший шлях із вершини "i" у вершину "j" проходить через вершину "4", тому його вага не менше двох. Нерівність виконується. Якщо сагайдак Q містить стрілку σ_{24}, то іншого шляху із вершини "2" у вершину "4" не існує, оскільки з твердження 2 випливає, що сагайдак Q не містить стрілки σ_{14} та σ_{34}. Аналогічно з твердження 3 випливає, що якщо сагайдак Q містить стрілку σ_{42}, то іншого шляху із вершини "4" у вершину "2" не існує. Якщо сагайдак містить стрілку σ_{14}, то з твердження 3 випливає, що він не містить стрілку σ_{24} тому, якщо інший шлях із вершини "1" у вершину "4" існує, то він проходить через стрілку σ_{34} і його вага не менше двох. Отже, нерівність виконується. З аналогічних міркувань випливає, що якщо сагайдак Q містить стрілку σ_{34}, або стрілку σ_{41}, або стрілку σ_{43}, то для цих стрілок нерівність виконується. Отже, нерівність, згідно з якою вага шляху більше ніж вага стрілки, виконується для будь-якої стрілки сагайдака Q з однією петлею. В лемі 2 доведено, що для допустимого сагайдака з чотирма вершинами без петель існує звичайна вагова функція.

Отже, для довільного допустимого сагайдака з чотирма вершинами існує звичайна вагова функція. Теорему доведено.

Теорема 5. Існують допустимі сагайдаки, для яких не існує звичайних вагових функцій.

Доведення. Розглянемо допустимий сагайдак з матрицею суміжності $[Q] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, який одержується з матриці показників $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

В сагайдаку Q через вершину "1" проходить тільки один простий цикл (1 3 2) з вершинами без петель, тому цикл (1 3 2) одиничний. Аналогічно одиничними є цикли (4 2 5) та (3 6 5). Всередині циклу (1 3 6 5 4 2 1) є стрілки (наприклад σ_{32}), тому за твердженням 1 цикл (1 3 6 5 4 2 1) не є одиничним тобто його вага не менше двох. Тобто

$$\omega(1365421) \geq 2 \qquad (1).$$

$$\omega(1365421) = \omega(132) + \omega(425) + \omega(365) - \omega(253);$$

$$\omega(1365421) = 3 - \omega(253) \geq 2. \qquad (2).$$

З (1) та (2) випливає, що $\omega(1365421)$ дорівнює 2. Тому $\omega(136) + \omega(654) + \omega(421) = 2$. Ліва частина рівності складається з трьох доданків, один з яких рівний нулю. Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\omega(654) = 0$ (інші випадки розглядаються аналогічно). Оскільки вага шляху більше ніж вага стрілки, ми одержуємо нерівності:

$$\omega(\sigma_{76}) + \omega(\sigma_{65}) + \omega(\sigma_{54}) > \omega(\sigma_{74}) \leftrightarrow \omega(\sigma_{76}) > \omega(\sigma_{74}). \qquad (3).$$

Оскільки вершина "7" з петлею, то за теоремою 1 довільний цикл, який проходить через вершину "7", не менше двох, тобто

$$\omega(\sigma_{74}) + \omega(\sigma_{47}) \geq 2 \qquad (4).$$

Якщо $\omega(\sigma_{74}) = 0$, то з (4) випливає, що $\omega(\sigma_{47}) \geq 2$. Якщо $\omega(\sigma_{74}) \geq 2$, то з (3) випливає, що $\omega(\sigma_{74}) \geq 2$.

Отже, ми довели, що не існує допустимої вагової функції сагайдака Q з вагою стрілок не більше ніж одиниця, тобто для сагайдака Q не існує звичайної вагової функції. Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Hazewinkel M. Algebras Rings and Modules: vol. 1 /M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko/ Kluwer Academic Publisheers, 2004. – 380 p.

2. Hazewinkel M. Algebras Rings and Modules: vol 2. /M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko / Kluwer Academic Publisheers, 2007. – 400 p.

3. Kirichenko, V. V. Exponent Matrices and Tiled Order over Discrete Valuation Rings/ V. V. Kirichenko , O. V. Zelenskiy, V. N. Zhuravlev// International J. of Algebra and Computation, 2005. – Vol. 15, N. **5–6**. – P. 1–16.

4. Зеленський, О. В. Жорсткi сагайдаки зведених матриць показникiв/ О.В. Зеленський// Вiсн. Київ. ун-ту. Сер: Фiз.-мат. науки, 2007. – № **3**. – С. 27-31.

5. Журавлев, В. Н. Допустимые колчаны/ В. Н. Журавлев// Фундамент. и прикл. математика, 2008. – Т. 14, вып.7. – С. 121–128.

6. Кириченко, В.В. О жестких колчанах/В.В Кириченко, В.Н. Журавлёв, И.Н. Цыгановская/ Фундамент. и прикл. математика, 2006. – Т.**12**, вып. 8. – С. 105–120.

7. Журавльов В. М. Одиничнi сагайдаки матриць показникiв./Журавльов В. М., Зеленський О. В., Дармосюк В. М. / Вiсник Київського унiверситету. Серiя: фiзико-математичнi науки, 2012. – № **4**. – С. 27-31.

8. Зеленський О. В. Цикли допустимих сагайдакiв. /Зеленський О.В.// Математисні студiї., 2014. – № **42**. – С. 3–8.

Стаття одержана: 21 лютого 2017; перероблений вариант: 1 жовтня 2017; прийнята: 12 жовтня 2017.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 85, 2017, с.52–61

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”
Vol. 85, 2017, p. 52–61
DOI: 10.26565/2221-5646-2017-85-04

УДК 513.88

Almost automorphic derivative of an almost automorphic function

Svetlana D. Dimitrova-Burlayenko

Department of Higher Mathematics
National Technical University Kharkiv Polytechnic Institute, Kharkiv, Ukraine
s.dimitrovaburlayenko@gmail.com

In this article are obtained conditions when the derivative of a continuous almost automorphic (an asymptotically almost automorphic, an almost periodic, an asymptotically almost periodic) function remains a continuous almost automorphic (an asymptotically almost automorphic, an almost periodic, an asymptotically almost periodic) function, respectively.
Keywords: derivative, an almost automorphic, an asymptotically almost automorphic function.

Дімітрова-Бурлаєнко С. Д. **Майже автоморфна похідна майже автоморфної функції.** У цій статті отримані умови, в яких похідна неперервної майже автоморфної (асимптотично майже автоморфної, майже періодичної, асимптотично майже періодичної) функції залишається неперервною майже автоморфною (асимптотично майже автоморфною, майже періодичною, асимптотично майже періодичною) функцією, відповідно.
Ключові слова: похідна, майже автоморфна, асимптотично майже автоморфна функція.

Димитрова-Бурлаенко С. Д. **Почти автоморфная производная почти автоморфной функции.** В этой статье получены условия, при которых производная непрерывной почти автоморфной (асимптотически почти автоморфной, почти периодической, асимптотически почти периодической) функции остается непрерывной почти автоморфной (асимптотически почти автоморфной, почти периодической, асимптотически почти периодической) функцией, соответственно.
Ключевые слова: производная, почти автоморфная, асимптотически почти автоморфная функция.

2010 Mathematics Subject Classification: 43A60.

1. Introduction

In papers published earlier ([4],[5]) in proofs of almost automorphy of the derivative of almost automorphic function used its uniform continuity. In this paper, we consider an alternative, weaker conditions in which almost automorphic preserved under differentiation.

In this article some results are obtained for the almost automorphic (a.a), almost periodic (a.p.), respectively asymptotically almost automorphic (a.a.a.) asymptotically almost periodic (a.a.p) function. The results can be divided into two groups: The first is based on the condition $[f_a(t)]\prime = [f\prime]_a(t)$, and the second on the uniform continuity of the derivative in a neighborhood, it generated an almost periodic function. Just it shows that differentiation does not change the structure of the asymptotic functions. Derivative asymptotically almost periodic (almost automorphic) function, as well as the original function of the sum of the derivative is almost periodic (almost automorphic) function and the derivative term, converging to zero at infinity.

Questions about the differentiation of Levitan almost periodic functions are described earlier in [9]. They are based on the proposition 4, below.

2. Basic definitions

All studied functions are defined on the real axis and take values in a separable Freshet space Y. Topology of the space is given by increasing the counting system of semi-norms $p_s(y)$, $p_s(y) \leq p_{s+1}(y)$,$s = 1, 2, 3, ...$,$y \in Y$. The metric is specified using quasi-norm

$$\| y - z \| = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{p_s(y - z)}{[1 + p_s(y - z)]2^s}, y, z \in Y.$$

We will give some definitions for better clarity of the presentation. Many of them were introduced for numerical functions, generalized for abstract functions with values in Banach spaces. In the article all definitions are given for the Freshet spaces.

Let given a number sequence $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. We extract a subsequence $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \in \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ for which the sequence $\{f(t + a_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ converges pointwise to a function, i.e. $\lim_{k\to\infty} f(t + a_{n_k}) = f_a(t)$. In the future, we will assume that from the equality $f_a(t) = g_a(t)$, follows the equality $\lim_{k\to\infty} f(t + a_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} g(t+a_{n_k})$, $\forall t \in \mathbb{R}$. That is, the equality achieved for the same subsequence $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \in \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

The function $f(t)$ is compact if the closure of the set of values of the function $f(t)$ is compact in Y.

Definition 1.([1],[2]) The sequence of functions $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n(t) : \mathbb{R} \to Y$ converges quasi uniformly to the function $f(t) : \mathbb{R} \to Y$, if it converges pointwise to the function $f(t)$ and for each $\varepsilon > 0$ and for each index K exist an index M $(K \leq M)$, such that

$$\min_{K \leq n \leq M} \| f_n(t) - f(t) \| < \varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Definition 2.([3],[6]) The sequence of functions $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ converges to $f(t)$ almost uniformly, if it quasi uniformly converges to $f(t)$ on $\mathbb{R}$ with each of its subsequences.

The term "almost uniformly"is proposed by G. Fichtenholz. For almost periodic functions will use the criterion of Bochner.

Definition 3.[5] A continuous function $f(t)$ is called almost periodic if the family of functions $\{f(t+h_i)\}_{i=1}^{\infty}$ $(-\infty < h_i < \infty)$ is compact in the sense of uniform convergence on the whole real axis.

Definition 4.([11],[12],[4],[7]) A continuous function $f(t) : \mathbb{R} \to Y$ is called (continuous) almost automorphic if for any sequence $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$ is an subsequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ and exist a (continuous) function $g(t)$, so that

$$\lim_n f(t+x_n) = g(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\lim_m g(t-x_m) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Definition 5.[4] A continuous function $f(t) : [0;+\infty) \to Y$ is called asymptotically almost automorphic /asymptotically almost periodic/, if it can be represented in the form $f(t) = g(t) + w(t)$, where $g(t)$ is a.a. /a.p./ function on the line,$w(t) : [0;+\infty) \to Y$ - a continuous function, which has a limit $\lim_{t\to\infty} w(t) = 0$.

Definition 6.([8],[11],[12]) The set E is relatively dense on the group $\mathbb{R}$, if there are q elements $c_1, c_2, ..., c_q$ such that

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{q}(c_i + E).$$

For a more clear understanding of the reasoning we formulate some results, on which we base the presentation.

Proposition 1. ([8]) A continuous function $f(t) : \mathbb{R} \to Y$ is almost periodic, if and only if for any $\varepsilon > 0$ the set

$$U_\varepsilon = \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R}} \parallel f(t+\tau) - f(t) \parallel < \varepsilon\}$$

is relatively dense.

Proposition 1 makes it possible to introduce a topology on the group by the set $U_\varepsilon(f)$. On the other hand, any continuous function in this topology is an a.p. function.

Proposition 2. ([11]) Each a.a. function $f(t) : \mathbb{R} \to Y$ is continuous in the topology $\Im_f$, defined by the sets

$$B_{N,\varepsilon} = \{\tau \in \mathbb{R} : \max_{t\in N} \parallel f(t+\tau) - f(t) \parallel < \varepsilon\}$$

where N,a compact set of numbers, $\varepsilon > 0$.

Proposition 3. ([11]) Let it is given an a.a. function $f(t) : \mathbb{R} \to Y$ and with its help is introduced the topology $\Im_f$ on $\mathbb{R}$. Any compact function $g(t)$, defined on the group $\mathbb{R}$,which is continuous in the topology $\Im_f$, is an a.a. function.

Propositions 2 and 3 do the same work as a proposition 1, but only for the a.a. functions.

Proposition 4. ([9],[10]) Let $f(t) : \mathbb{R} \to Y$ be differentiable function in the natural topology $\Im_0$ on the axis $\mathbb{R}$ and $f(t)$ is continuous in a weaker topology $\Im$ ($\Im \prec \Im_0$). The derivative $f'(t)$ is continuous in the weak topology $\Im$ if and only if for any $\varepsilon > 0$ and $x \in (-\infty; \infty)$ there was a neigborhood U in the topology $\Im$ and interval $(-\delta; \delta)$ so that

$$\sup_{t \in x+U} \parallel f'(t+h) - f'(t) \parallel < \varepsilon, \forall h \in (-\delta; \delta).$$

3. Main parts

Criterion for almost uniform convergence of numerical functions is given by G. Sirvint ([6], lemma 1.2).For functions with values in a Banach space it can be found in ([3], theorem 5.8).This criterion holds for abstract functions with values in a Freshet space, namely:

Theorem 1. The sequence $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}, f_n(t) : \mathbb{R} \to Y$ converges almost uniformly to the function $f(t) : \mathbb{R} \to Y$ if and only if:

$$\lim_n \underline{\lim}_m \parallel f_n(x_m) - f(x_m) \parallel = 0$$

for any set of numbers $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}, x_m \in \mathbb{R}$.

Theorem 2. Let the function $f(t) : \mathbb{R} \to Y$ and its derivative $f'(t)$ are continuous a.a. functions. Then each of the functions $f_a(t)$ is differentiable and

$$[f_a(t)]' = [f']_a(t).$$

Proof. The function $f(t)$ and its derivative $f'(t)$ are almost automorphic. Then the function $f(t)$ and its derivative $f'(t)$ are uniformly continuous in the natural topology $\Im_0$ from ([7], lemma 4.1.1).On the axis we introduce the topology $\Im$ using the neighborhoods of the form:

$$B_{N,\varepsilon} = \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t \in N} \parallel f(t+\tau) - f(t) \parallel < \varepsilon\},$$

$$B'_{M,\varepsilon} = \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t \in M} \parallel f'(t+\tau) - f'(t) \parallel < \varepsilon\},$$

where N and M are compact sets, $\varepsilon > 0$.The function $f(t)$ and its derivative $f'(t)$ are continuous in the topology $\Im$. This is possible because the two functions are almost automorphic. We introduce the functions

$$\varphi_n(t) = n[f(t + \frac{1}{n}) - f(t)], \varphi_{n,a}(t) = n[f_a(t + \frac{1}{n}) - f_a(t)], n = 1, 2, 3, ...$$

The uniform continuity of the derivative $f'(t)$ implies that the sequence $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, 3, ...$ converges uniformly on the axis to the function $f'(t)$.This means that the sequence $\{\varphi_n(t) - f'(t)\}_{n=1}^{\infty}$ converges to zero almost uniformly. Functions $\varphi_n(t)$ and $f'(t)$ are continuous on the axis in the topology $\Im$ and uniformly continuous in the topology $\Im_0$ and relatively compact. Applying theorem 1 to the sequence $\{\varphi_n(t) - f'(t)\}_{n=1}^{\infty}$ to an arbitrary numerical sequence $a = \{t + a_n\}_{n=1}^{\infty}$ for which

$$\lim_n \lim_k \parallel \varphi_n(t + a_{m_k}) - f'(t + a_{m_k}) \parallel$$

$$= \lim_n \underline{\lim}_m \parallel \varphi_n(t + a_m) - f'(t + a_m) \parallel = 0.$$

Equality

$$\lim_k \lim_n \parallel \varphi_n(t + a_{m_k}) - f'(t + a_{m_k}) \parallel = 0$$

follows from the pointwise convergence of the sequence $\varphi_n(t)$ to the function $f'(t)$. Using the relative compactness of the set values of the derivative we can find a sequence $\{\bar{a_k}\}_{k=1}^{\infty} \in \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ for which the sequence $f'(t + \bar{a_k})\}_{k=1}^{\infty}$ converges pointwise. Its limit is denoted by $f'_a(t)$, $f'_a(t) = \lim_k f'(t + \bar{a_k})$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Then

$$f'_a(t) = \lim_k f'(t + \bar{a_k}) = \lim_k \lim_n \varphi_n(t + \bar{a_k}) = \lim_n \varphi_{n,a}(t) = (f_a(t))'.$$

The theorem is proved.

Theorem 3. Let the function $f(t) : \mathbb{R} \to Y$ be a. a., $\forall a$ $f_a(t)$ is differentiable and the derivative is compact. If each function $f_a(t)$ satisfies

$$[f_a(t)]' = [f']_a(t)$$

then the derivative $f'(t)$ is almost automorphic function.

Proof. For the sequence $a = \{a_m\}_{m=1}^{\infty}$, using the relatively compact range of the function $f(t)$ and the derivative $f'(t)$, we found a subsequence $\{\bar{a_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ for which there are all limits:$\lim_n \varphi_{n,a}(t)$, $\lim_k f'(t + \bar{a_n})$. Then

$$\lim_k \lim_n \varphi_n(t + \bar{a_k}) = \lim_k f'(t + \bar{a_k}) = [f']_a(t) = [f_a(t)]' =$$

$$= \lim_n \varphi_{n,a}(t) = \lim_n \lim_k \varphi_n(t + \bar{a_k})$$

or

$$\lim_n \underline{\lim}_k \parallel \varphi_n(t + \bar{a_k}) - f'(t + \bar{a_k} \parallel \leq \lim_n \lim_k \parallel \varphi_n(t + \bar{a_k}) - f'(t + \bar{a_k} \parallel =$$

$$= \lim_n \parallel \varphi_{n,a}(t) - (f'(t))_a \parallel = \lim_n \parallel \varphi_{n,a}(t) - (f_a(t))' \parallel = 0.$$

According to theorem 1 the sequence of functions $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ converges to $f'(t)$ almost uniformly. All functions $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ are almost automorphic. Then the limit function $f'(t)$ according to [12] is almost automorphic. □

Remark. If the function $f(t)$ is continuous almost automorphic then functions $\varphi_n(t)$ are continuous almost automorphic function also. According to [12]

(Corollary 2) it follows that the limit is a continuous almost automorphic function, that is, the derivative $f'(t)$ is a continuous almost automorphic function.

Theorem 4. Let the function $f(t) : \mathbb{R} \to Y$ is almost periodic and it has a relatively compact derivative $f'(t)$. The derivative $f'(t)$ is almost periodic if /and only if/any function $f_a(t)$ satisfy the conditions of theorem 2 /respectively theorem 3/.

Proof of necessity. If the derivative is almost periodic, it is relatively compact and uniformly continuous. Any slight shift $f'_a(t)$ of the derivative $f'(t)$ is almost periodic, and therefore it is almost automorphic. The function $f_a(t)$ satisfies the conditions of theorem 2. From theorem 2 it follows $[f_a(t)]' = [f']_a(t)$. □

Proof of sufficiency. Applying theorem 3 we receive that $f'_a(t)$ is an almost automorphic function. Applying Veech theorem [7] to the numerical almost automorphic functions $< y^*, f'_a(t) >$, $y^* \in Y^*$, we find that the function $f'(t)$ is weakly almost periodic. Using relatively compact range of the derivate $f'(t)$, we see that it was strongly almost periodic. □

Theorem 5. Let $f(t) : [0, \infty) \to Y$, $f(t) = g(t) + w(t)$ is an asymptotically almost automorphic function, where $g(t)$ is a continuous almost automorphic function on the line, $w(t)$ - a function that has a limit $\lim_{t\to\infty} w(t) = 0$. Let the derivative $w'(t)$ is uniformly continuous on $[0, \infty)$.The derivative function $f'(t)$ is asymptotically almost automorphic function if and only if for any $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ it satisfies the conditions $[f_a(t)]' = [f']_a(t)$, where all derivatives exist.

Proof of necessity. If the derivative $f'(t) = g'(t) + w'(t)$ is asymptotically almost automorphic function, the continuity $w'(t)$ and the limit 0 at infinity ensure its uniform continuity. Therefore $[w_a(t)]' = [w']_a(t)$. Then, according to theorem 2 follows that the function $g(t) = f(t) - w(t)$ satisfies the condition $[g_a(t)]' = [g']_a(t)$. Consequently

$$[f_a(t)]' = [g_a(t)]' + [w_a(t)]' = [g']_a(t) + [w']_a(t) = [f']_a(t).$$

The conditions for the function $f(t)$ are necessary. □

Proof of sufficiency. Let us consider the sequence $\varphi_{\Delta t}(t)$, $\Delta t \to 0$

$$\varphi_{\Delta t}(t) = \frac{w(t + \Delta t) - w(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} w'(\tau) d\tau.$$

It consists of uniformly continuous functions $\varphi_{\Delta t}(t)$ with the limit of zero to infinity, and it converges uniformly to $w'(t)$. The limit $w'(t)$ is a uniformly continuous function on $[0, \infty)$, and has a limit $\lim_{t\to\infty} w(t) = 0$. Therefore

$$[w_a(t)]' = [w']_a(t).$$

Then the almost automorphic function $g(t) = f(t) - w(t)$ satisfies the condition

$$[g_a(t)]' = [g']_a(t).$$

According to theorem 3 $g'(t)$ is almost automorphic function. Thus, the derivative $f'(t) = g'(t) + w'(t)$ is asymptotically almost automorphic function. □

Theorem 6. Let the function $f(t) : \mathbb{R} \to Y$ be almost periodic and has a continuous derivative. Its derivative $f'(t)$ is almost periodic if and only if for any $\varepsilon > 0$ and for any point $x \in (-\infty; \infty)$ there exists a neighborhood of zero U_α

$$U_\alpha = \{\tau : \sup_{t\in\mathbb{R}} \parallel f(t+\tau) - f(t) \parallel < \alpha\}, \alpha > 0$$

interval $(-\delta; +\delta)$ such that:

$$\sup_{t\in x+U_\alpha} \parallel f'(t+h) - f'(t) \parallel < \varepsilon, \forall h \in (-\delta; +\delta).$$

Proof of necessity. On the axis is entered topology $\Im_U$ with the help of the neighborhoods

$$U_\alpha = \{\tau : \max\{\sup_{t\in R} \parallel f(t+\tau) - f(t) \parallel, \sup_{t\in R} \parallel f'(t+\tau) - f'(t) \parallel\} < \alpha\},$$

where $\alpha > 0$.

It is weaker than the natural topology $\Im_0$. The function $f(t)$ and its derivative $f'(t)$ are continuous in this topology $\Im_U$, and even uniformly continuous. Let it is given $\varepsilon > 0$. From the uniform continuity of the derivative in the natural topology $\Im_0$ there exist $\delta > 0$ such that

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \parallel f'(t+h) - f'(t) \parallel < \varepsilon, \forall h < \delta.$$

Then $\forall h \in (-\delta; +\delta)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sup_{t\in x+U_\alpha} \parallel f'(t+h) - f'(t) \parallel < \sup_{t\in\mathbb{R}} \parallel f'(t+h) - f'(t) \parallel < \varepsilon.$$

□

Proof of sufficiency. On the axis is entered the topology $\Im_U$ using the neighborhoods for $\alpha > 0$

$$U_\alpha = \{\tau : \sup_{t\in\mathbb{R}} \parallel f(t+\tau) - f(t) \parallel < \alpha\}.$$

In this topology, the function $f(t)$ is continuous. Applying proposition 4, we see that the derivative $f'(t)$ is continuous in the topology $\Im_U$. For the almost periodicity of the derivative according to proposition 1 is sufficient to prove that the set

$$V_\beta = \{\tau : \sup_{t\in\mathbb{R}} \parallel f'(t+\tau) - f'(t) \parallel < \beta\}, \forall \beta > 0$$

is relatively dense. Assume the contrary, that for some $\varepsilon_0 > 0$ the set V_{ε_0} is not relatively dense. Using that the set is not relatively dense, we construct a numerical sequence $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$z_1 \in \mathbb{R}, z_2 \notin z_1 + V_{\varepsilon_0}, z_3 \notin (z_1 + V_{\varepsilon_0}) \cup (z_2 + V_{\varepsilon_0}), ...$$

or

$$z_n - z_k \notin V_{\varepsilon_0}, \forall k < n.$$

Applying definition 3 (Bochner criterion) to almost periodic function $f(t)$ we select the subsequence , which is uniformly convergent $\{f(t+y_n)\}_{n=1}^{\infty}$,i.e.

$$\lim_{n>m,m\to\infty} \sup_t \| f(t+y_n) - f(t+y_m) \| = 0$$

or

$$\lim_{n>m,m\to\infty} \sup_x \| f(x+y_n-y_m) - f(x) \| = 0.$$

Hence the sequence $\{y_n - y_m\}_{n>m,m=1}^{\infty}$ converges to zero in the topology $\Im_U$. Since the function $f'(t)$ is continuous in the topology $\Im_U$ a number N can be found, so that

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \| f'(t+y_n-y_m) - f'(t) \| < \varepsilon_0, m < n, m > N$$

i.e. $y_n - y_m \in V_{\varepsilon_0}$. This contradicts the choice of the sequence $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Hence the set V_ε is relatively dense and according to the proposition 1 derivative $f'(t)$ is almost periodic.□

Theorem 7. Let it is given an asymptotically almost periodic function $f(t) : [0;\infty) \to Y$, $f(t) = g(t) + w(t)$ where $g(t)$ is almost periodic function on the line, $w(t)$ - a function with a limit $\lim_{t\to\infty} w(t) = 0$. Let there exist continuous derivatives $g'(t)$, $w'(t)$ and the derivative $w'(t)$ is uniformly continuous on $[0;\infty)$. The derivative $f'(t)$ is asymptotically almost periodic function if and only if for any $\varepsilon > 0$ and for any point $x \in (-\infty;+\infty)$ there exists a neighborhood of zero U_α:

$$U_\alpha = \{\tau : \sup_{t\in\mathbb{R}} \| g(t+\tau) - g(t) \| < \alpha\}$$

interval $(-\delta;+\delta)$ such that

$$\sup_{t\in x+U_\alpha} \| f'(t+h) - f'(t) \| < \varepsilon, \forall h \in (-\delta;+\delta).$$

Proof of necessity. Since $f'(t) = g'(t) + w'(t)$ is an asymptotically almost periodic function, $w'(t)$ has a limit of 0 to infinity, and is an uniformly continuous function on $[0;\infty)$. The function $g'(t)$ is an almost periodic function. It is easy to see that the conditions of the theorem follow from theorem 5 and the uniform continuity of the function $w'(t)$. □

Proof of sufficiency. Given a point $x \in (-\infty;+\infty)$ and a number $\varepsilon > 0$, as in the proof of theorem 5 we can show that the derivative $w'(t)$ is uniformly continuous on the axis and has a limit of zero to infinity. Then there exists a number $\delta_1 > 0$ corresponding to $\frac{\varepsilon}{2}$ such that

$$\sup_{t\in R} \| w'(t+h) - w'(t) \| < \frac{\varepsilon}{2}, h < \delta_1.$$

Using the number $\frac{\varepsilon}{2}$ the point $x \in (-\infty; +\infty)$ and the condition of the theorem we find a neighborhood U_α and the interval $(-\delta, \delta)$ so that

$$\sup_{t \in x+U_\alpha} \| f'(t+h) - f'(t) \| < \frac{\varepsilon}{2}, h < \delta_2.$$

Then for the number $\varepsilon > 0$, the point $x \in (-\infty; +\infty)$ there is a neighborhood U_α and the interval $(-\delta; +\delta)$, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ so that

$$\sup_{t \in x+U_\alpha} \| g'(t+h) - g'(t) \| \leq \sup_{t \in x+U_\alpha} \| f'(t+h) - f'(t) \| +$$

$$+ \sup_{t \in R} \| w'(t+h) - w'(t) \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall h \in (-\delta; +\delta).$$

According to theorem 6 derivative $g'(t)$ is an almost periodic function, i.e., $f'(t) = g'(t) + w'(t)$ is an asymptotically almost periodic function.$\square$

4. Conclusions

Earlier to prove almost periodicity (almost automorphy) of an almost periodic (almost automorphic) function, an obligatory condition on uniform continuity of the derivative was to be exploited. In this paper a variety of conditions providing the preservation of type of a function for differentiating are presented. In this regard the results of the theorems 6 and 7 are especially important. The theorems show that the uniform continuity of derivative of an almost periodic (asymptotically almost periodic) function in only the relatively dense neighborhood of zero (each point has its own neighborhood) results in almost periodicity (asymptotic almost periodicity) and, moreover, it results in the uniform continuity of the derivative in the whole axis as well. For almost automorphic (asymptotically almost automorphic) functions instead of the uniform continuity of the derivative their compactness and fulfilling the equality $[f_a(t)]' = [f']_a(t)$ is required. In these conditions the derivative is an almost automorphic (asymptotically almost automorphic) function. It should be noted that the derived results are both sufficient and necessary.

The results obtained in the paper are new even in the case of Banach space.

REFERENCES

1. Arzela C. Intorno alla continuita della somma di 'infinit di funzioni continue / Rend. R. Accad. Sci. Istit. Bologna, 1883-1884. – P. 79–84.

2. Arzela C. Sulle serie di funzioni / Mem. R. Accad. Sci. Ist. Bologna, serie 5, 1899-1900. – (**8**). – P. 131–186 and 701–744.

3. Brace J. W. The topology of almost uniform convergence / Pacific J. Math., 1959. – v.9, No. **3** July. – P. 643–652.

4. N'Guerekata G.M. Almost Automorphic and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces / Kluwer Academic, Plenum Publishers, New York, 2001.

5. Levitan B.M., Zhikov V.V. Almost periodic functions and differential equations / Cambridge University Press, New York, 1983. – 211 p.

6. Sirvint G. Weak compactness in Banach spaces / Studia Mathematica, 1957. – **6**. – P. 71–94.

7. Veech W.A. Almost automorphic functions on groups / Amer. J. Math., 1965. – **87**(3). – P. 719–751.

8. Dimitrova-Burlayenko S.D. On continuity properties of almost-periodic functions / Euromech 498 Colloquium Book of Abstracts, P. 1–4, 2008, Lublin University of Technology.

9. Dimitrova-Burlayenko S.D. The continuity of the derivative in a weaker topology. / Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences. Book of Abstracts. – P. 249–250, – Kharkov (2011) (in Russian).

10. Dimitrova-Burlayenko S.D. The conditions for saving continuity for differentiating functions. / Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences. N.N. Kizilova, G.N. Zholtkevych (eds). Kharkov (2011). – P. 332–338 (in Russian).

11. Dimitrova-Burlayenko S.D. Almost automorphic functions as compact continuous functions on the group / Bulletin of National Technical University 'KhPI'. Series: Mathematical modeling in engineering and technologies, 2012. – **27**. – P. 82–85 (in Russian).

12. Dimitrova-Burlayenko S.D. Quasiuniform limit Levitan's almost periodic functions / Bulletin of National Technical University 'KhPI', Series: Mathematical modeling in engineering and technologies 54'2013, Kharkiv. – P. 111–117 (in Russian).

Article history: Received: 25 August 2017; Final form: 4 November 2017; Accepted: 6 November 2017.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 85, 2017, с.62–68

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 85, 2017, p. 62–68
DOI: 10.26565/2221-5646-2017-85-05

УДК 517.9

To the generalization of the Newton-Kantorovich theorem

S. M. Chuiko

Donbass State Pedagogical University,
Slavyansk, 84116, Generala-Batuka str., 19, Ukraine
E-mail: chujko-slav@inbox.ru

Constructive conditions for solvability are obtained, as well as an iterative scheme for finding solutions of the nonlinear equation that generalize the well-known Newton-Kantorovich theorem. The case of a nonlinear equation whose dimension does not coincide with the dimension of the unknown has been researched.
Keywords: Newton-Kantorovich method; iterative scheme; nonlinear equation; pseudoinverse matrices.

Чуйко С. М. **Про узагальнення теореми Ньютона-Канторовича.** Отримано конструктивні умови розв'язності, а також ітераційну схему, для знаходження розв'язків нелінійного рівняння, які узагальнюють відому теорему Ньютона-Канторовича. Досліджено випадок нелінійного рівняння, розмірність якого, не збігається з розмірністю невідомої.
Ключові слова: метод Ньютона-Канторовича; ітераційна схема; нелінійне рівняння; псевдообернена матриця.

Чуйко С. М. **К обобщению теоремы Ньютона-Канторовича.** Получены конструктивные условия разрешимости, а также итерационная схема, применимая для нахождения решений нелинейного уравнения, обобщающие известную теорему Ньютона-Канторовича. Исследован случай нелинейного уравнения, размерность которого, не совпадает с размерностью неизвестной.
Ключевые слова: метод Ньютона-Канторовича; итерационная схема; нелинейное уравнение; псевдобратная матрица.

2000 Mathematics Subject Classification: 15A24; 34B15; 34C25.

1. Formulation of the problem

We investigate the problem of finding the solution $z \in \mathbb{R}^n$ of the nonlinear equation

$$\varphi(z) = 0. \tag{1}$$

We assume that the function

$$\varphi(z) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad m \neq n$$

is twice continuously differentiable with respect to z in some domain $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. To construct an iteration scheme $\{z_k\}$, that converges to the solution $\tilde{z} \in \mathbb{R}^n$, we use the Newton method [1, 2, 3].

Interest in the use of the Newton method is associated with its effective application in solving nonlinear equations, as well as in the theory of nonlinear oscillations [1, 2, 3, 4], including in the theory of non-linear Noetherian boundary value problems [5, 6, 7, 8].

2. The main result

Suppose an approximation z_k is found that is sufficiently close to an exact solution $\tilde{z}$ of the equation (1). We expand the function $\varphi(z)$ in a neighborhood of the exact solution

$$\varphi(\tilde{z}) = \varphi(z_k) + \varphi'(z_k, \varepsilon)\Big(\tilde{z} - z_k\Big) + R(\xi_k,\, \tilde{z} - z_k), \tag{2}$$

where

$$R(\xi_k,\, \tilde{z} - z_k) := \int_0^1 (1-s)\, d^2\varphi(\xi_k\,; \tilde{z} - z_k)\, ds.$$

Here ξ_k is a point lying between the points $\tilde{z}$ and z_k. In a small neighborhood of the exact solution we have the approximate equality

$$\varphi(z_k) + \varphi'(z_k)\Big(\tilde{z} - z_k\Big) \approx 0,$$

therefore, in order to find the next approximation of z_{k+1} to the exact solution, it is natural to put

$$\varphi(z_k) + \varphi'(z_k)\Big(z_{k+1} - z_k\Big) = 0, \tag{3}$$

whence under the condition

$$P_{J_k^*} = 0, \quad J_k := \varphi'(z_k) \in \mathbb{R}^{m \times n} \tag{4}$$

we find

$$z_{k+1} = z_k - J_k^+\, \varphi(z_k). \tag{5}$$

Here $P_{J_k^*} : \ \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(J_k^*)$ is an orthogonal projector of the matrix $J_k^* \in \mathbb{R}^{n \times m}$ and J_k^+ is the pseudoinverse Moore-Penrose matrix [5, 9]. Note that condition (4) is equivalent to the requirement of completeness of the rank matrix J_k and is possible only in case $m \leq n$. We show that the iteration scheme (5) converges to the exact solution $\tilde{z}$. Suppose that in the neighborhood of the exact solution $\tilde{z}$ there are inequalities

$$\left|\left|J_k^+\right|\right| \leq \sigma_1(k), \quad \left|\left|d^2\varphi(\xi_k\,;\tilde{z}-z_k)\right|\right| \leq \sigma_2(k)\cdot||\tilde{z}-z_k||^2$$

and note that it follows from the equalities (2) and (3) that

$$\varphi'(z_k,\varepsilon)\Big(\tilde{z}-z_k\Big) = -R(\xi_k,\,\tilde{z}-z_k),$$

so

$$||\tilde{z}-z_{k+1}|| \leq \left|\left|J_k^+\right|\right|\cdot\left|\left|R(\xi_k,\,\tilde{z}-z_k)\right|\right| \leq \frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2}\cdot||\tilde{z}-z_k||^2.$$

Let there be a constant

$$\theta := \sup_{k\in N}\left\{\frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2}\right\}.$$

In this case, there is an estimate

$$|\tilde{z}-z_{k+1}| \leq \theta\cdot|\tilde{z}-z_k|^2,$$

which holds that if the iteration scheme (5) converges to the exact solution $\tilde{z}$ of the equation (1), then this convergence is quadratic. Let us find the condition for the convergence of the iteration scheme (5) to the exact solution $\tilde{z}$ of the equation (1). To do this, we make estimates

$$|\tilde{z}-z_1| \leq \theta\cdot|\tilde{z}-z_0|^2,$$

$$|\tilde{z}-z_2| \leq \theta\cdot|\tilde{z}-z_1|^2 \leq \theta^{1+2}\cdot|\tilde{z}-z_0|^{2^2},$$

$$|\tilde{z}-z_3| \leq \theta\cdot|\tilde{z}-z_2|^2 \leq \theta^{1+2+2^2}\cdot|\tilde{z}-z_0|^{2^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$|\tilde{z}-z_k| \leq \theta\cdot|\tilde{z}-z_{k-1}|^2 \leq \theta^{1+2+2^2+\,\ldots\,+2^{k-1}}\cdot|\tilde{z}-z_0|^{2^k},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

So there's an inequality [3]

$$|\tilde{z}-z_k| \leq \theta^{\frac{2^k-1}{2-1}}\cdot|\tilde{z}-z_0|^{2^k} = \frac{1}{\theta}\cdot\Big(\theta\cdot|\tilde{z}-z_0|\Big)^{2^k},$$

indicating the convergence of the iterative process (5) to an exact solution $\tilde{z}$ of the equation (1) under condition

$$\theta\cdot|\tilde{z}-z_0| < 1. \tag{6}$$

In practice, the last inequality can be replaced by the following one:

$$\theta\cdot|z_k-z_0| < 1.$$

Theorem 0.1 *Suppose that for the equation (1) the following conditions are satisfied:*

1. *A non-linear vector-function $f(z) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, twice continuously differentiable with respect to z in some region $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, in a neighborhood of the point z_0 has a root z^*.*
2. *In the neighborhood of the zeroth approximation $z_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ there are inequalities*

$$\left|\left|J_k^+\right|\right| \leq \sigma_1(k), \left|\left|d^2\varphi(\xi_k\,; \tilde{z} - z_k)\right|\right| \leq \sigma_2(k) \cdot ||\tilde{z} - z_k||. \tag{7}$$

3. *The folowing constant exists*

$$\theta := \sup_{k\in N} \left\{ \frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2} \right\}.$$

Then, under conditions (4) and (6), to find the solution z^* of equation (1) the iteration scheme (5) is applicable, and the rate of convergence of the sequence $\{z_k\}$ to the solution z^* of equation (1) is quadratic.

Example 0.1 *The iterative scheme (5) is approximate for finding the solution of the non-linear equation (1), where the vector-function is as follows:*

$$\varphi(u) := \begin{pmatrix} x + \sin y + \cos z \\ y + \sin z + \cos x \end{pmatrix}, \quad u := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

This vector-function $\varphi(u) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ is defined in any open domain $D \subset \mathbb{R}^3$ and is twice continuously differentiable with respect to z in the neighborhood $\Omega \subseteq D \subset \mathbb{R}^3$. We set

$$u_0 := \begin{pmatrix} -0,45 & -0,45 & -0,45 \end{pmatrix},$$

wherein

$$\operatorname{rank}\left[\varphi'(u_0)\right] = 2,$$

besides

$$u_1 \approx \begin{pmatrix} -0,455\ 961 & -0,457\ 894 & -0,455\ 547 \end{pmatrix}^*,$$

and

$$\operatorname{rank}\left[\varphi'(u_1)\right] = 2,$$

Then

$$\left|\left| \left[\varphi'(u_1)\right]^+ \right|\right|_\infty := \sigma_1(1) \approx 2,09\ 903, \quad \left|\left|d^2\varphi(u_1)\right|\right|_\infty := \sigma_2(1) \approx 0,897\ 838.$$

In this case, the weakened condition (6)

$$\theta_1 \cdot ||u_1 - u_0||_\infty \approx 0,00743\ 856 \ll 1, \quad \theta_1 := \frac{\sigma_1(1)\sigma_2(1)}{2} \approx 0,942\ 293$$

is satisfied. Since the condition (6) is satisfied for the first step of the iteration scheme (5), we find

$$u_2 \approx \begin{pmatrix} -0,455\ 968\ 239\ 769\ 595 \\ -0,457\ 889\ 951\ 795\ 185 \\ -0,455\ 537\ 594\ 550\ 856 \end{pmatrix}.$$

Then

$$\text{rank}\left[\varphi'(u_2)\right] = 2,$$

besides

$$\left|\left|\ \left[\varphi'(u_2)\right]^+\ \right|\right|_\infty := \sigma_1(2) \approx 2,099, \quad \left|\left|d^2\varphi(u_2)\right|\right|_\infty := \sigma_2(2) \approx 0,897\ 835.$$

In this case, the weakened condition (6)

$$\theta_2 \cdot ||u_2 - u_0||_\infty \approx 0,00743\ 453 \ll 1,$$

is satisfied, where

$$\theta_2 := \frac{\sigma_1(2)\,\sigma_2(2)}{2} \approx 0,00743\ 453.$$

For the second step of the iteration scheme (5) the discrepancy of the obtained approximation

$$||\varphi(u_2)||_\infty \approx 3,69\ 679 \times 10^{-11}$$

is sufficiently big, so we find

$$u_3 \approx \begin{pmatrix} 0,455\ 968\ 239\ 730\ 150 \\ 0,457\ 889\ 951\ 789\ 936 \\ 0,455\ 537\ 594\ 568\ 580 \end{pmatrix}.$$

Then

$$\text{rank}\left[\varphi'(u_3)\right] = 2,$$

besides

$$\left|\left|\ \left[\varphi'(u_3)\right]^+\ \right|\right|_\infty := \sigma_1(3) \approx 2,099, \quad \left|\left|d^2\varphi(u_3)\right|\right|_\infty := \sigma_2(3) \approx 0,897\ 835.$$

In this case, the weakened condition (6)

$$\theta_3 \cdot ||u_3 - u_0||_\infty \approx 0,00743\ 453 \ll 1$$

is satisfied, where

$$\theta_3 := \frac{\sigma_1(3)\,\sigma_2(3)}{2} \approx 0,942\ 278.$$

For the third step of the iteration scheme (5) the discrepancy of the obtained approximation is

$$||\varphi(u_3)||_\infty \approx 0,$$

so it's natural to confine with this approximation.

The theorem just proved generalizes the corresponding results [2, 3, 4, 6, 7, 8] to the case of matrix J_k irreversibility and can be used in the theory of non-linear Noetherian boundary-value problems [5, 6, 7, 8], in the theory of stability of motion [10, 11], in the theory of matrix boundary-value problems [12], and also in the theory of matrix linear differential-algebraic boundary value problem [13, 14, 15, 16].

Acknowledgement. The work is done with the financial support of the State Fund for Fundamental Research. Number of state registration is 0115U003182.

REFERENCES

1. Bogolyubov N.N., Mitropolsky J.A., Samoilenko A.M. The method of accelerated convergence in nonlinear mechanics. — Kiev: Scientific thought, 1969. — 248 pp.

2. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Functional analysis. — Moscow: Nauka. — 1977. — 744 pp.

3. Dennis J. Schnabel R. Numerical methods of unconditional optimization and solving nonlinear equations. — Moscow: Mir. — 1988. — 440 pp.

4. Polyak B.T. The Newton method and its role in optimization and computational mathematics // Trudy ICA RAN. — 2006. — **28**. — P. 48 — 66.

5. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). — Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. — 298 pp.

6. Chuiko S.M., Boichuk I.A. An autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case // Nonlinear Oscillations (N.Y.) — **12**. — 2009. № 3, P. 405 — 416.

7. Chuiko S.M., Boichuk I.A., Pirus O.E. On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem the Newton - Kantorovich method // Journal of Mathematical Sciences — 2013. — **189**, № 5. — P. 867 — 881.

8. Chuiko S.M., Pirus O.E. On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the Newton method // Journal of Mathematical Sciences — 2013. — **191**, № 3. — P. 449 — 464.

9. Gantmakher F.R. Matrix theory. — Moscow: Nauka. — 1988. — 552 pp.

10. Korobov V.I. Bebiya M.O. Stabilization of one class of nonlinear systems // Avtomat. i Telemekh. — 2017. — № 1. — P. 3 — 18.

11. Bebiya M.O. Stabilization of systems with power nonlinearity // Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. — 2014, № 1120. — Issue 69. — P. 75 — 84.

12. Chuiko S. Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation // Miskolc Mathematical Notes. — 2016. — **17**, № 1. — P. 139 — 150.

13. Campbell S.L. Singular Systems of differential equations. — San Francisco – London – Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. — 1980. — 178 p.

14. Chuiko S.M. The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Siberian Mathematical Journal. — 2015. —**56**, № 4. — P. 752 — 760.

15. Chuiko S.M. A generalized matrix differential-algebraic equation // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). – 2015. – **210**, № 1. – P. 9 – 21.

16. Chuiko S.M. To the issue of a generalization of the matrix differential-algebraic boundary-value problem // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — **227**, № 1. — P. 16 — 32.

Article history: Received: 30 August 2017; Final form: 18 November 2017; Accepted: 21 November 2017.

Правила для авторів
«Вісника Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна, Серія «Математика, прикладная математика і механіка»

Редакція просить авторів при направленні статей керуватися наступними правилами.

1. В журналі публикуються статті, що мають результати математичних досліджень.

2. Представленням статті вважається отримання редакцією файлів статті, анотацій, відомостей про авторів та архіва, що включає LATEX та PDF файли статті та файли малюнків.

3. Редакція приймає статті українською, російскою або англійською мовами. Стаття має бути оформлена у редакторі LATEX (версія 2e). Файл-зразок оформлення статті можно знайти в редакції журналу та на веб-сторінці (http://vestnik-math.univer.kharkov.ua). Стаття повинна починатися з коротких анотацій (не більше 10 строк), в яких повинні бути чітко сформульовані ціль та результати роботи. Анотації повинні бути трьома мовами (українською, російскою та англійською): першою повинна стояти анотація тією мовоюн, якою є основний текст статті. В анотації повинні бути призвища, ініціали авторів, назва роботи, ключові слова, міжнародна математична класифікація (Mathematics Subject Classification 2010). Анотація не повинна мати посилання на літературу та малюнки.

4. Приклади оформлення списка літератури:

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. - Харьков: Харьковское Математическое Общество, 1892. - 251 с.
2. Ляпунов А.М. Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Сообщения Харьковского мат. общества. Сер. 2. – 1894. – Т. **4**. № 3. – С. 123–140.

5. Кожний малюнок повинен бути пронумерований та представлений окремим файлом в одному з форматів: EPS, BMP, JPG. В файлі статті малюнок повинен бути вставлений автором. Під малюнком повинен бути підпис.

6. Відомості про авторів повинні містити: прізвища, ім'я, по батькові, службова адреса та номера телефонів, адреса електронної пошти. Прохання також повідомити прізвище автора, з яким треба вести переписку.

7. Рекомендуємо використовувати останні випуски журналу (vestnik-math.univer.kharkov.ua/currentv.htm) в якості зразка оформлення.

8. У випадку порушення правил оформлення редакція не буде розглядати статтю.

Електронна скринька: vestnik-khnu@ukr.net

Електронна адреса в Інтернеті: **http://vestnik-math.univer.kharkov.ua**

Visit our Web-page

http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/

to find

- **Information for Manuscript Preparation**
- **Editorial Board**
- **Abstracts**
- **Full-texts available (PDF)**

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна,
Серія "Математика, прикладна математика і механіка", Том 85

Збірник наукових праць

Російською, українською, англійською мовами

Підписано до друку 29. 11. 2017 р.
Формат $70 \times 108/16$. Папір офсетний. Друк ризограф.
Ум. друк. арк. 4,3
Обл.– вид. арк. 5,0
Наклад 100 пр.   Зам. №
Ціна договірна

61022, м.Харків, майдан Свободи, 4, Харківський національний університет
імені В.Н.Каразіна. Видавництво.
Надруковано: ХНУ імені В.Н.Каразіна
61022, м.Харків, майдан Свободи, 4, тел. 705-24-32

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09