ISSN 2221-5646

Міністерство освіти і науки України

# ВІСНИК

## Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна

**Серія**

«Математика, прикладна математика і механіка»

Серія започаткована 1965 р.

Том 84

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University

Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"

**Vol. 84**

Харків

2016

До Віснику включено статті з математичного аналізу, математичної фізики, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних наук
(Наказ МОН України №1328 від 21.12.2015 р.)

*Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (протокол №17 від 26 грудня 2016 р.).*



**Адреса редакційної колегії:** 61022, Харків, майдан Свободи, 4,
ХНУ імені В.Н. Каразіна, факультет математики і інформатики, к.7-27.
Тел. 7075240, 7075135, Email: vestnik@univer.kharkov.ua
Интернет:
http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/
http://periodicals.karazin.ua/mech_math/

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21568-11468 Р від 21.08.2015

# ЗМІСТ



# CONTENTS

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 84, 2016, с.4–8

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”
Vol. 84, 2016, p. 4–8
DOI: 10.26565/2221-5646-2016-84-01

УДК 515.12

# Statistical convergence cannot be generated by a single statistical measure

V. Kadets

*Department of Mathematics and Informatics*
*V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine*
*v.kateds@karazin.ua*

We demonstrate that statistical convergence cannot be generated by a single statistical measure, thus solving in negative a question from recent paper by Li Xin Cheng, Li Hua Lin, and Xian Geng Zhou.
*Keywords:* filter convergence; statistical convergence; statistical measure.

Кадець В. **Статистичну збіжність не можна задати однією статистичною мірою.** Ми доводимо, що статистичну збіжність не можна задати однією статистичною мірою, відповідаючи таким чином на питання з нещодавної статті Лісіна Ченга, Ліхуа Лін та Сянгенга Чжоу.
*Ключові слова:* збіжність за фільтром; статистична збіжність; статистична міра.

Кадец В. **Статистическую сходимость нельзя задать одной статистической мерой.** Мы доказываем, что статистическую сходимость нельзя задать одной статистической мерой, отвечая таким образом на вопрос из недавней статьи Лисина Ченга, Лихуа Лин и Сянгенга Чжоу.
*Ключевые слова:* сходимость по фильтру; статистическая сходимость; статистическая мера.
*2000 Mathematics Subject Classification* 40A35, 54A20.

## Introduction

This short note is a follow-up of [2], where the reader can find an extensive list of references related to the subject. We do not repeat historic remarks, connections with other mathematical concepts and motivation presented in [2], but for the reader's convenience we give below precisely those definitions and explanations that are necessary to understand our article.

Recall that a *filter* $\mathcal{F}$ on the set $\mathbb{N}$ of all naturals is a non-empty collection of subsets of $\mathbb{N}$ satisfying the following axioms: $\emptyset \notin \mathcal{F}$; if $A, B \in \mathcal{F}$ then $A \cap B \in \mathcal{F}$; and for every $A \in \mathcal{F}$ if $B \supset A$ then $B \in \mathcal{F}$.

A sequence $(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ in a topological space $X$ is said to be $\mathcal{F}$-*convergent* to $x$ if for every neighborhood $U$ of $x$ the set $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$ belongs to $\mathcal{F}$. In particular if one takes as $\mathcal{F}$ the filter of those sets whose complements are finite (the *Fréchet filter*), then $\mathcal{F}$-convergence coincides with the ordinary one.

The natural ordering on the set of filters on $\mathbb{N}$ is defined as follows: $\mathcal{F}_1 \succ \mathcal{F}_2$ if $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$. Maximal in this ordering filters are called *ultrafilters*. For an ultrafilter $\mathcal{U}$ on $\mathbb{N}$ the following is true: for every subset $A \subset \mathbb{N}$ that does not belong to $\mathcal{U}$, the complement $\mathbb{N} \setminus A$ belongs to $\mathcal{U}$.

A filter $\mathcal{F}$ on $\mathbb{N}$ is said to be *free* if it dominates the Fréchet filter. In this case every ordinary convergent sequence is automatically $\mathcal{F}$-convergent.

For a subset $A$ of naturals its *lower density* is defined as

$$\delta_*(A) := \liminf_n \frac{\#\{k \leq n : k \in A\}}{n}, \tag{1}$$

where $\#$ stands for the number of elements of the set. The *upper density* $\delta^*(A)$ is defined in a similar way by substituting $\liminf$ by $\limsup$ in (1). If the ordinary limit in (1) exists, i.e., upper and lower densities coincide, this limit is called *natural density* and is denoted by $\delta(A)$. Remark, that $\delta_*(A) = 1$ if and only if $\delta(A) = 1$, and $\delta^*(A) = 0$ if and only if $\delta(A) = 0$.

A sequence $(x_k)$ in a topological space $X$ is *statistically convergent to* $x$ if for every neighborhood $U$ of $x$ the set $\{k : x_k \in U\}$ has natural density 1. In other words, statistical convergence is the same as convergence with respect to the filter $\mathcal{F}_{st} = \{A \in 2^{\mathbb{N}} : \delta_*(A) = 1\}$.

A non-negative finitely additive measure $\mu$ defined on the collection of all subsets of $\mathbb{N}$ is said to be a *statistical measure* if $\mu(\mathbb{N}) = 1$ and $\mu(\{k\}) = 0$ for all $k \in \mathbb{N}$. Evidently, a statistical measure cannot be countably additive. An example of statistical measure is the characteristic function $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}$ of a free ultrafilter $\mathcal{U}$ on $\mathbb{N}$: $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}(A) = 1$ if $A \in \mathcal{U}$, and $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}(A) = 0$ if $A \in 2^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{U}$. More examples can be easily given by combining several statistical measures of above-mentioned type, like $\frac{1}{2}(\mathbf{1}_{\mathcal{U}} + \mathbf{1}_{\mathcal{V}})$, where $\mathcal{U}$ and $\mathcal{V}$ are two different free ultrafilters.

For a given statistical measure $\mu$, a sequence $(x_n)$ in a topological space $X$ is said to be $\mu$-*convergent* to $x \in X$, if $\mu(\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}) = 1$ for every neighborhood $U$ of $x$.

For a given non-empty family $\mathcal{S}$ of statistical measures, a sequence $(x_n)$ in a topological space $X$ is said to be $\mathcal{S}$-*convergent* to $x \in X$, if $(x_n)$ is $\mu$-convergent to $x$ for all $\mu \in \mathcal{S}$.

Lingxin Bao and Lixin Cheng [1] remarked that for every free filter $\mathcal{F}$ there is a non-empty family $\mathcal{S}$ of statistical measures such that $\mathcal{S}$-convergence is equivalent to convergence with respect to $\mathcal{F}$ (one can take $\mathcal{S} = \{\mathbf{1}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \succ \mathcal{F}, \mathcal{U}$ is an ultrafilter$\}$).

In their recent paper [2], Li Xin Cheng, Li Hua Lin, and Xian Geng Zhou performed an extensive study of $\mu$-convergence generated by a single statistical measure $\mu$ and presented a number of nice characterizations. But, as they mention in [2, Remark 5.4], for the classical statistical convergence (which was one of motivations of the study) they were not able to determine whether it is equivalent to $\mu$-convergence for a single statistical measure $\mu$. In other words, the question whether there exists a statistical measure $\mu$ such that

$$\left\{A \in 2^{\mathbb{N}} : \mu(A) = 1\right\} = \left\{A \in 2^{\mathbb{N}} : \delta_*(A) = 1\right\}$$

remains unsolved. Passing to complements, one reduces the problem to the following one:

**Question 1**. Does there exist a statistical measure $\mu$ such that

$$\left\{A \in 2^{\mathbb{N}} : \mu(A) = 0\right\} = \left\{A \in 2^{\mathbb{N}} : \delta^*(A) = 0\right\}? \tag{2}$$

The aim of this article is to give the negative answer to Question 1.

## Some elementary lemmas

**Lemma 1** *Let $A \subset \mathbb{N}$ be a set with $\delta^*(A) = 1$. Then, for every $n \in \mathbb{N}$ and $\varepsilon > 0$ there is an $m > n$ such that for $B = A \cap \{n+1, n+2, \ldots, m\}$ we have $\frac{\#B}{m} > 1-\varepsilon$.*

*Proof.* Due to the definition of $\delta^*(A)$, there is a sequence $m_1 < m_2 < \ldots$ such that

$$\lim_k \frac{\#\{j \le m_k : j \in A\}}{m_k} = 1.$$

Then, denoting $B_k = A \cap \{n+1, n+2, \ldots, m_k\}$ we obtain that

$$\frac{\#B_k}{m_k} \ge \frac{\#\{j \le m_k : j \in A\}}{m_k} - \frac{n}{m_k} \quad \xrightarrow[k\to\infty]{} \quad 1.$$

Consequently, when $k$ is large enough, $m_k$ and $B_k$ can serve as our $m$ and $B$ respectively.

**Lemma 2** *Every set $A \subset \mathbb{N}$ of $\delta^*(A) = 1$ can be represented as a disjoint union of two sets of upper density 1. In other words, there are $A_1, A_2 \subset \mathbb{N}$ with $\delta^*(A_1) = \delta^*(A_2) = 1$ such that $A = A_1 \sqcup A_2$.*

*Proof.* Using repetitively Lemma 1 we can find $0 = m_1 < m_2 <$ ... and $B_j = A \cap \{m_j + 1, m_j + 2, \ldots, m_{j+1}\}$, $j = 1, 2, \ldots$ such that $\frac{\#B_j}{m_{j+1}} > 1 - \frac{1}{j}$. It remains to take $A_1 = B_1 \cup B_3 \cup B_5 \cup \ldots$, $A_2 = B_2 \cup B_4 \cup B_6 \cup \ldots$ Indeed,

$$\delta^*(A_1) \ge \lim_{j\to\infty} \frac{\#\{k \le m_{2j+2} : k \in A_1\}}{m_{2j+2}} \ge \lim_{j\to\infty} \frac{\#B_{2j+1}}{m_{2j+2}} = 1,$$

$$\delta^*(A_2) \ge \lim_{j\to\infty} \frac{\#\{k \le m_{2j+1} : k \in A_2\}}{m_{2j+1}} \ge \lim_{j\to\infty} \frac{\#B_{2j}}{m_{2j+1}} = 1.$$

**Lemma 3** *Let $A_n \subset \mathbb{N}$ form a decreasing sequence of sets $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ with $\delta^*(A_n) = 1$. Then there is a set $B \subset \mathbb{N}$ with $\delta^*(B) = 1$ such that $\#(B \setminus A_n) < \infty$ for every $n \in \mathbb{N}$.*

*Proof.* Again, using repetitively Lemma 1 we can find $m_1 < m_2 < \dots$ and $B_j = A_j \cap \{m_j + 1, m_j + 2, \dots, m_{j+1}\}$, $j = 1, 2, \dots$ such that $\frac{\#B_j}{m_{j+1}} > 1 - \frac{1}{j}$. Then $B = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ is the set we are looking for.

Two sets $A, B \subset \mathbb{N}$ are said to be *almost disjoint*, if $\#(A \cap B) < \infty$.

**Lemma 4** *Let $\mu$ be a statistical measure, and let $A_\gamma \subset \mathbb{N}$, $\gamma \in \Gamma$ be a collection of pairwise almost disjoint subsets with $\mu(A_\gamma) > 0$ for all $\gamma \in \Gamma$. Then $\Gamma$ is at most countable.*

*Proof.* First, remark that since $\mu(A) = 0$ for every finite set $A$, the finite-additivity formula $\mu\left(\bigcup_{k=1}^n D_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(D_k)$ remains true for every finite collection of pairwise almost disjoint subsets. Now, for every $n \in \mathbb{N}$ denote $\Gamma_n = \{\gamma \in \Gamma : \mu(A_\gamma) > \frac{1}{n}\}$. Then for every finite subset $E \subset \Gamma_n$ we have

$$\#E < n \sum_{\gamma \in E} \mu(A_\gamma) = n\mu\Big(\bigcup_{\gamma \in E} A_\gamma\Big) \le n\mu(\mathbb{N}) = n.$$

Consequently, $\#\Gamma_n < n$. Since $\Gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$, $\Gamma$ is at most countable.

## The main result

**Theorem 1** *For any statistical measure $\mu$, $\mu$-convergence is not equivalent to the standard statistical convergence.*

*Proof.* Assume contrary that there is a statistical measure $\mu$ such that the identity (2) holds true. Then, every subset $A \subset \mathbb{N}$ with $\delta^*(A) > 0$ has $\mu(A) > 0$. Consequently, according to Lemma 4, there is no uncountable pairwise almost disjoint collection of sets of positive upper density. So, in order to get the desired contradiction, it is sufficient to build an uncountable collection of pairwise almost disjoint subsets of $\mathbb{N}$ of positive upper density. We will do this even with $\delta^*(B_\theta) = 1$ for all members $B_\theta$ of that uncountable collection.

In order to do this, let us construct a tree of subsets of upper density one $A_1$, $A_2$, $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, $A_{2,1}$, $A_{2,2}$, $A_{1,1,1}$, etc. as follows. At first, using Lemma 2 split $\mathbb{N} = A_1 \sqcup A_2$ in such a way that $\delta^*(A_1) = \delta^*(A_2) = 1$. Then, using the same lemma, split each of them: $A_1 = A_{1,1} \sqcup A_{1,2}$, $A_2 = A_{2,1} \sqcup A_{2,2}$ with $\delta^*(A_{1,1}) = \delta^*(A_{1,2}) = \delta^*(A_{2,1}) = \delta^*(A_{2,2}) = 1$. Next, split each of these four sets in two new sets, etc.

For every sequence $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots) \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ the corresponding branch

$$A_{\theta_1}, A_{\theta_1,\theta_2}, A_{\theta_1,\theta_2,\theta_3}, \dots$$

is a decreasing sequence of sets of upper density one, hence Lemma 3 comes in play. Namely, there is a set $B_\theta \subset \mathbb{N}$ with $\delta^*(B_\theta) = 1$ such that $\#(B_\theta \setminus A_{\theta_1,\dots,\theta_n}) < \infty$ for every $n \in \mathbb{N}$. This collection $\{B_\theta : \theta \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}\}$ is uncountable (in fact, of continuum cardinality) and pairwise almost disjoint, which completes the proof.

**Acknowledgement.** The research is done in frames of Ukrainian Ministry of Science and Education Research Program 0115U000481.

REFERENCES

1. Bao, Lingxin; Cheng, Lixin. On statistical measure theory. // J. Math. Anal. Appl., 2013. – **407**, No. 2. – P. 413–424.

2. Cheng, Li Xin; Lin, Li Hua; Zhou, Xian Geng. Statistical convergence and measure convergence generated by a single statistical measure. // Acta Math. Sin., Engl. Ser., 2016. – **32**, No. 6. – P. 668–682.

Article history: Received: 7 December 2016; Final form: 12 December 2016; Accepted: 16 December 2016.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 84, 2016, с.9–21

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”
Vol. 84, 2016, p. 9–21
DOI: 10.26565/2221-5646-2016-84-02

УДК 517.977

# Approximation of autonomous affine control systems in the sense of time optimality and algebraic approximation

S. Yu. Ignatovich

*V. N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine*
*ignatovich@ukr.net*

In the paper conditions are given under which, for autonomous affine control systems, approximation in the sense of time optimality implies the algebraic approximation.
*Keywords:* nonlinear affine control system, problem of time optimality, algebraic approximation.

Ігнатович С. Ю. **Апроксимація автономних афінних керованих систем у сенсі швидкодії та алгебраїчна апроксимація.** У роботі даються умови, за яких для автономних афінних систем з апроксимації у сенсі швидкодії випливає алгебраїчна апроксимація.
*Ключові слова:* нелінійні керовані системи, задача швидкодії, алгебраїчна апроксимація.

Игнатович С. Ю. **Аппроксимация автономных аффинных управляемых систем в смысле быстродействия и алгебраическая аппроксимация.** В работе даются условия, при которых для автономных аффинных управляемых систем из аппроксимации в смысле быстродействия вытекает алгебраическая аппроксимация.
*Ключевые слова:* нелинейные управляемые системы, задача быстродействия, алгебраическая аппроксимация.
*2000 Mathematics Subject Classification* 93B10, 93B25.

## 1. Background and statement of the problem

In this paper we deal with the time-optimal control problem for autonomous nonlinear affine systems of the form

$$\dot{x} = a(x) + ub(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}, \ a(0) = 0, \tag{1}$$

$$|u(t)| \le 1, \ x(0) = x^0, \ x(\theta) = 0, \ \theta \to \min, \tag{2}$$

where $a(x)$ and $b(x)$ are real analytic vector fields in a neighborhood of the origin. The requirement $a(0) = 0$ means that the origin is a rest point for this system. For brevity, we denote the system (1) by $\{a, b\}$.

Now we briefly recall some results obtained in [1, 2]. Below, $S_{a,b} = S_{a,b}(\theta, u)$ denotes the map taking a pair $(\theta, u)$ to the initial point $x^0$ which is steered to the origin by the control $u = u(t)$ in the time $\theta$. This map can be expressed as a series

$$x^0 = S_{a,b}(\theta, u) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m_1+\cdots+m_k+k=m} v_{i_1\ldots i_k} \xi_{m_1\ldots m_k}(\theta, u),$$

where $\xi_{i_1\ldots i_k}(\theta, u)$ are *nonlinear power moments* of the form

$$\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta, u) = \int_0^{\theta} \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} \prod_{j=1}^{k} \tau_j^{m_j} u(\tau_j) d\tau_k \cdots d\tau_1,$$

and $v_{m_1\ldots m_k}$ are constant vector coefficients which can be found by the formula

$$v_{m_1\ldots m_k} = \frac{(-1)^k}{m_1! \ldots m_k!} \mathrm{ad}_{R_a}^{m_1} R_b \circ \cdots \circ \mathrm{ad}_{R_a}^{m_k} R_b E(x)|_{x=0}, \tag{3}$$

where the operators $R_a$ and $R_b$ are defined as $R_a\phi(x) = \phi_x(x)a(x)$ and $R_b\phi(x) = \phi_x(x)b(x)$, operator brackets $\mathrm{ad}_{R_a}^m R_b$ are defined as $\mathrm{ad}_{R_a}^0 R_b = R_b$, $\mathrm{ad}_{R_a}^{m+1} R_b = [R_a, \mathrm{ad}_{R_a}^m R_b]$, $m \geq 0$ ($[\cdot,\cdot]$ means the operator commutator), and $E(x) \equiv x$. Since $a(x)$ and $b(x)$ are real analytic, there exist $C_1, C_2 > 0$ such that $\|v_{m_1\ldots m_k}\| \leq k! C_1 C_2^{m_1+\cdots+m_k+k}$ for all $k \geq 1$ and $m_1, \ldots, m_k \geq 0$ [3].

For any fixed $\theta > 0$, let us consider nonlinear power moments as functionals defined on the unit ball of the space $L_\infty[0, \theta]$, i.e., on the set $B^\theta = \{u \in L_\infty[0, \theta] : \|u(t)\| \leq 1\}$. The linear span (over $\mathbb{R}$) of all such functionals form an associative algebra $\mathcal{A}^\theta$ with the concatenation product

$$\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta, \cdot) \vee \xi_{j_1\ldots j_q}(\theta, \cdot) = \xi_{m_1\ldots m_k j_1\ldots j_q}(\theta, \cdot).$$

One can show that the algebra $\mathcal{A}^\theta$ is *free* for any $\theta > 0$. On the other hand, since $\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta, u) = \theta^{m_1+\cdots+m_k+k} \xi_{m_1\ldots m_k}(1, \widehat{u})$ where $\widehat{u}(t) = u(t\theta)$, $t \in [0, 1]$, we can regard the number $\mathrm{ord}(\xi_{m_1\ldots m_k}) = m_1 + \cdots + m_k + k$ as the *order* of the functional $\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta, \cdot)$. This concept allows us to introduce a graded structure in $\mathcal{A}^\theta$.

Notice that algebras $\mathcal{A}^\theta$ with different $\theta > 0$ are isomorphic to each other. Therefore, it is convenient to deal with more abstract object. Namely, let us consider the set of abstract free elements (letters) $\xi_m$, $m \geq 0$. Strings of letters (words) $\xi_{m_1} \cdots \xi_{m_k}$ are denoted by $\xi_{m_1\ldots m_k}$. In the set of words, the concatenation is defined: $\xi_{m_1\ldots m_k} \vee \xi_{j_1\ldots j_q} = \xi_{m_1\ldots m_k j_1\ldots j_q}$. All finite linear combinations of words (over $\mathbb{R}$) form a graded free associative algebra $\mathcal{A} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{A}^m$, where homogeneous subspaces $\mathcal{A}^m$ are defined as follows,

$$\mathcal{A}^m = \mathrm{Lin}\{\xi_{m_1\ldots m_k} : m_1 + \cdots + m_k + k = m\}, \ m \geq 1.$$

This algebra is isomorphic to $\mathcal{A}^\theta$ for any $\theta > 0$; we call it *the algebra of nonlinear power moments*. Below we identify $\mathcal{A}^\theta$ and $\mathcal{A}$.

We say that an element $z \in \mathcal{A}^m$ is homogeneous and the number $\mathrm{ord}(z) = m$ is its order. It is convenient to supplement $\mathcal{A}$ with the unity element 1 (which can be thought of as the empty word) and consider the algebra $\mathcal{A}^e = \mathcal{A} + \mathbb{R}$. Throughout the paper we assume $\xi_{m_p \dots m_q} = 1$ if $p > q$. We also use the notation $\ell^{\vee q} = \ell \vee \dots \vee \ell$ ($q$ times).

In $\mathcal{A}$ we consider the free graded Lie algebra $\mathcal{L} = \sum_{m=1}^\infty \mathcal{L}^m$ generated by the letters $\xi_m$, $m \ge 0$, with the Lie brackets $[\ell_1, \ell_2] = \ell_1 \vee \ell_2 - \ell_2 \vee \ell_1$; then $\mathcal{A}$ is its universal enveloping algebra. We also use *the shuffle product* operation in $\mathcal{A}$ defined by the following recurrent formula

$$\xi_{i_1 \dots i_k} ш\, \xi_{j_1 \dots j_q} = \xi_{i_1} \vee (\xi_{i_2 \dots i_k} ш\, \xi_{j_1 \dots j_q}) + \xi_{j_1} \vee (\xi_{i_1 \dots i_k} ш\, \xi_{j_2 \dots j_q}),$$

and such that $1 \,ш\, z = z \,ш\, 1 = z$ for any $z \in \mathcal{A}^e$. Below we also use the notation $z^{ш q} = z ш \cdots ш z$ ($q$ times). We say that $P(z_1, \dots, z_k)$ is *a homogeneous shuffle polynomial* of order $m$ if $P(z_1, \dots, z_k) = \sum \alpha_{q_1 \dots q_k} z_1^{ш q_1} ш \cdots ш z_k^{ш q_k}$ where $\alpha_{q_1 \dots q_k} \in \mathbb{R}$ and the sum is taken over all $q_1, \dots, q_n$ such that $\sum_{i=1}^k q_i \mathrm{ord}(z_i) = m$.

Finally, we introduce the inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in $\mathcal{A}$ so that the basis $\xi_{i_1 \dots i_k}$ becomes orthonormal.

Let us now consider the set of vector coefficients (3). They generate the linear map $v : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ defined as $v(\xi_{m_1 \dots m_k}) = v_{m_1 \dots m_k}$. The important role is played by the restriction of this map to the Lie algebra $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$. Namely, let us suppose that the Rashevsky-Chow condition holds,

$$v(\mathcal{L}) = \mathbb{R}^n \tag{4}$$

and consider the following subspaces

$$\mathcal{P}^1 = \{\ell \in \mathcal{L}^1 : v(\ell) = 0\}, \quad \mathcal{P}^k = \{\ell \in \mathcal{L}^k : v(\ell) \in v(\mathcal{L}^1 + \dots + \mathcal{L}^{k-1})\}, \ k \ge 2.$$

We say that

$$\mathcal{L}_{a,b} = \sum_{k=1}^\infty \mathcal{P}^k$$

is *a core Lie subalgebra* corresponding to the system $\{a, b\}$. We say that

$$\mathcal{J}_{a,b} = \mathrm{Lin}\{\ell \vee z : \ell \in \mathcal{L}_{a,b}, z \in \mathcal{A}\}$$

is *a right ideal* corresponding to the system $\{a, b\}$. Due to properties of the map $v$, if $z \in \mathcal{J}_{a,b} \cap \mathcal{A}^m$ then $v(z) \in v(\mathcal{A}^1 + \dots + \mathcal{A}^{m-1})$. One can show that $\mathcal{L}_{a,b} = \mathcal{J}_{a,b} \cap \mathcal{L}$, hence, $\mathcal{L}_{a,b}$ and $\mathcal{J}_{a,b}$ define each other.

We notice that the Rashevsky-Chow condition (4) implies the *attainability* for the system $\{a, b\}$. This means that the set of all initial vectors $x^0$ which can be steered to the origin has nonempty interior and the origin belongs to the closure of this interior.

Suppose $\ell_1, \dots, \ell_n$ are homogeneous Lie elements such that

$$\mathcal{L} = \mathrm{Lin}\{\ell_1, \dots, \ell_n\} + \mathcal{L}_{a,b},$$

and $\{\ell_j\}_{j=n+1}^{\infty}$ is a homogeneous basis of $\mathcal{L}_{a,b}$. As is well known [4], the set

$$\{\ell_{i_1}^{\vee q_1} \vee \cdots \vee \ell_{i_k}^{\vee q_k} : i_1 < \ldots < i_k, k \geq 1\}$$

forms a basis of the algebra $\mathcal{A}$; we call it a Poincaré-Birkhoff-Witt basis.

Suppose $\{d_{i_1 \ldots i_k}^{q_1 \cdots q_k}\}$ is a dual basis, that is,

$$\langle d_{i_1 \ldots i_k}^{q_1 \cdots q_k}, \ell_{j_1}^{\vee r_1} \vee \cdots \vee \ell_{j_s}^{\vee r_s} \rangle = 1 \text{ iff } \ s = k, \ i_m = j_m, \ q_m = r_m.$$

Then [5] it can be expressed as

$$d_{i_1 \ldots i_k}^{q_1 \cdots q_k} = \frac{1}{q_1! \cdots q_k!} d_{i_1}^{ш q_1} ш \cdots ш d_{i_k}^{ш q_k},$$

where $d_i = d_i^1$. In other words, the sequence $\{d_j\}_{j=1}^{\infty}$ defines all other elements of the dual basis. Hence, the map $S_{a,b}$ can be expressed as a series w.r.t. the dual basis,

$$S_{a,b}(\theta, u) = \sum_{k \geq 1, \ i_1 < \cdots < i_k, \ q_j \geq 1} \frac{1}{q_1! \cdots q_k!} v(\ell_{i_1}^{\vee q_1} \vee \cdots \vee \ell_{i_k}^{\vee q_k}) d_{i_1}^{ш q_1} ш \cdots ш d_{i_k}^{ш q_k}.$$

Moreover, if $i_1 \geq n+1$ then $\ell_{i_1} \in \mathcal{L}_{a,b}$ and therefore $\ell_{i_1}^{\vee q_1} \vee \cdots \vee \ell_{i_k}^{\vee q_k} \in \mathcal{J}_{a,b}$. This representation justifies the result which was obtained in [2]: for any system $\{a, b\}$ satisfying condition (4) there exists (polynomial) nonsingular change of variables $y = \Phi(x)$ ($\Phi(0) = 0$) such that

$$y_k^0 = (\Phi(x^0))_k = d_k(\theta, u) + \rho_k(\theta, u), \ k = 1, \dots, n,$$

where $\rho_k \in \sum_{i=\mathrm{ord}(d_k)+1}^{\infty} \mathcal{A}_i$. It turns out that there exists a (autonomous) system $\{a^*, b^*\}$ such that

$$(S_{a^*,b^*})_k = d_k(\theta, u), \ k = 1, \dots, n.$$

Let us notice that the components of the series of this system are homogeneous as elements of $\mathcal{A}$. In such a case we say that the system $\{a^*, b^*\}$ is *homogeneous*. It can be shown that if $v(\mathcal{J}_{a^*,b^*}) = 0$ then there exists such a change of coordinates that $(F(S_{a^*,b^*}))_k = d_k^*(\theta, u)$, $k = 1, \dots, n$, where $d_k^*$ are homogeneous elements (of dual basis). In other words, the algebraic representation becomes homogeneous after a change of coordinates $y = F(x)$. Then we also say that the system is homogeneous and the coordinates $y$ are *privileged* for the system $\{a^*, b^*\}$.

**Definition 1** *Suppose a homogeneous system $\{a^*, b^*\}$ is such that $\mathcal{J}_{a^*,b^*} = \mathcal{J}_{a,b}$ (or, what is the same, $\mathcal{L}_{a^*,b^*} = \mathcal{L}_{a,b}$). Then we say that $\{a^*, b^*\}$ is an algebraic approximation of $\{a, b\}$.*

It can be shown that if $\{a,b\}$ is autonomous then its algebraic approximation $\{a^*,b^*\}$ can be chosen as autonomous.

In [2] we propose the connection of such approximation with time optimality. Let us adopt the following definition of equivalence in the sense of time optimality. Consider two time-optimal control problems of the form (1), (2) for systems $\{a^*,b^*\}$ and $\{a,b\}$. Suppose there exists an open domain $\Omega\subset\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $0\in\overline{\Omega}$, such that the time-optimal control problem for the system $\{a^*,b^*\}$ has a unique solution $(\theta^*_{x^0},u^*_{x^0})$ for any $x^0\in\Omega$. Denote by $U_{x^0}(\theta)\subset B^\theta$ the set of all controls which steer the point $x^0$ to the origin by virtue of the system $\{a,b\}$ in the time $\theta$, then the optimal time for this system equals $\theta_{x^0}=\min\{\theta : U_{x^0}(\theta)\neq\varnothing\}$.

**Definition 2** *We say that the system $\{a^*,b^*\}$ approximates the system $\{a,b\}$ in the sense of time optimality in the domain $\Omega$ if there exists a (real analytic) nonsingular map $\Phi(x)$ of the neighborhood of the origin ($\Phi(0)=0$) and a set of pairs $(\widetilde{\theta}_{x^0},\widetilde{u}_{x^0})$, $x^0\in\Omega$, such that $\widetilde{u}_{x^0}\in U_{\Phi(x^0)}(\widetilde{\theta}_{x^0})$ and*

$$\frac{\theta_{\Phi(x^0)}}{\theta^*_{x^0}}\to 1,\quad \frac{\widetilde{\theta}_{x^0}}{\theta^*_{x^0}}\to 1,\quad \frac{1}{\theta}\int_0^\theta\left|u^*_{x^0}(t)-\widetilde{u}_{x^0}(t)\right|dt\to 0\quad \text{as } x^0\to 0,\ x^0\in\Omega,$$

*where $\theta=\min\{\theta^*_{x^0},\widetilde{\theta}_{x^0}\}$.*

Controls $\widetilde{u}_{x^0}(t)$ can be regarded as "almost optimal" controls for the system $\{a,b\}$ which steer the point $\Phi(x^0)$ to the origin in the "almost optimal" time $\widetilde{\theta}_{x^0}$.

In [2] the following result was obtained. Suppose the system $\{a^*,b^*\}$ is an algebraic approximation of the system $\{a,b\}$. Suppose also that there exists an open domain $\Omega\subset\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $0\in\overline{\Omega}$, such that

(i) the time-optimal control problem for the system $\{a^*,b^*\}$ has a unique solution $(\theta^*_{x^0},u^*_{x^0})$ for any $x^0\in\Omega$;

(ii) the function $\theta^*_{x^0}$ is continuous w.r.t. $x^0\in\Omega$;

(iii) for the set $K=\{u^*_{x^0}(t\theta^*_{x^0}) : x^0\in\Omega\}\subset L_2[0,1]$, the weak convergence implies the strong convergence.

Then there exists a set $\{\Omega(\delta)\}_{\delta>0}$ of domains, $\Omega(\delta_1)\subset\Omega(\delta_2)$ if $\delta_1>\delta_2$, $\bigcup_{\delta>0}\Omega(\delta)=\Omega$, such that $\{a^*,b^*\}$ approximates $\{a,b\}$ in the sense of time optimality in each domain $\Omega(\delta)$.

In other words, if the system $\{a^*,b^*\}$ approximates $\{a,b\}$ in the algebraic sense then, under some conditions, it approximates $\{a,b\}$ in the sense of time optimality.

In [1] we considered a subclass of systems $\{a,b\}$ whose approximation $\{a^*,b^*\}$ is linear. In this case we proved also the converse implication. Roughly speaking, the result is as follows: if the system $\{a,b\}$ is approximated by a linear system in the sense of time optimality then its algebraic approximation is linear, i.e., $d_i=\xi_{m_i}$, $i=1,\ldots,n$. The proof used essentially the fact that optimal controls for linear systems are piecewise constant and, for a set of initial points of nonzero measure, have $n-1$ switchings.

The question remains whether this statement can be proved for more general class of approximating systems. In [6] we partially answered this question. The main idea was to consider those systems $\{a^*, b^*\}$ whose optimal controls are piecewise constant with $n-1$ switchings for a set of initial points with nonempty interior.

In the present paper we develop the idea proposed in [6] and prove analogous statement for autonomous systems under much weaker assumptions concerning optimal controls. Preliminary lemmas are given in Section 2. The main result (Theorem 1) is proved in Section 3.

## 2. Preliminary results

**Notation.** (a) Denote by $\varphi : \mathcal{A} + \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ and $\varphi' : \mathcal{A} \to \mathcal{A} + \mathbb{R}$ differentiations in $\mathcal{A}$ defined by

$$\varphi(\xi_m) = (m+1)\xi_{m+1}, \quad \varphi(1) = 0,$$
$$\varphi'(\xi_0) = 0, \quad \varphi'(\xi_m) = m\xi_{m-1},\ m \geq 1,$$

then

$$\varphi(\xi_{m_1\ldots m_k}) = \sum_{i=1}^{k}(m_i+1)\xi_{m_1\ldots(m_i+1)\ldots m_k}, \quad \varphi'(\xi_{m_1\ldots m_k}) = \sum_{i=1}^{k} m_i \xi_{m_1\ldots(m_i-1)\ldots m_k}.$$

(b) Denote by $\psi_0 : \mathcal{A} + \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ and $\psi_0' : \mathcal{A} \to \mathcal{A} + \mathbb{R}$ linear mappings defined by

$$\psi_0(\xi_{m_1\ldots m_k}) = \xi_{m_1\ldots m_k} \vee \xi_0, \quad \psi_0(1) = \xi_0,$$
$$\psi_0'(\xi_0) = 1, \quad \psi_0'(\xi_{m_1\ldots m_k}) = \begin{cases} 0, & m_k \neq 0, \\ \xi_{m_1\ldots m_{k-1}}, & m_k = 0. \end{cases}$$

**Lemma 1** *(a) Mappings $\varphi$ and $\varphi'$ are transpose to each other, i.e., for any $y_1 \in \mathcal{A} + \mathbb{R}$ and any $y_2 \in \mathcal{A}$*

$$\langle \varphi(y_1), y_2\rangle = \langle y_1, \varphi'(y_2)\rangle.$$

*(b) Mappings $\psi_0$ and $\psi_0'$ are transpose to each other, i.e., for any $y_1 \in \mathcal{A} + \mathbb{R}$ and any $y_2 \in \mathcal{A}$*

$$\langle \psi_0(y_1), y_2\rangle = \langle y_1, \psi_0'(y_2)\rangle.$$

*Proof.* (a) Notice that $\langle \varphi(\xi_{i_1\ldots i_s}), \xi_{m_1\ldots m_k}\rangle = 0$ and $\langle \xi_{i_1\ldots i_s}, \varphi'(\xi_{m_1\ldots m_k})\rangle = 0$ if $s \neq k$. Hence, suppose $s = k$. For any $q = 1, \ldots, k$

$$\langle \xi_{i_1\ldots(i_q+1)\ldots i_k}, \xi_{m_1\ldots m_q\ldots m_k}\rangle = \langle \xi_{i_1\ldots i_q\ldots i_k}, \xi_{m_1\ldots(m_q-1)\ldots m_k}\rangle,$$
$$\langle \xi_{i_1\ldots i_q\ldots i_k}, \xi_{m_1\ldots(m_q-1)\ldots m_k}\rangle = 0 \ \text{ if } \ i_q + 1 \neq m_q.$$

Hence, for any $\xi_{m_1\ldots m_k} \in \mathcal{A}$ and any $\xi_{i_1\ldots i_k} \in \mathcal{A} + \mathbb{R}$

$$\langle \varphi(\xi_{i_1\ldots i_k}), \xi_{m_1\ldots m_k}\rangle = \sum_{q=1}^{k}(i_q+1)\langle \xi_{i_1\ldots(i_q+1)\ldots i_k}, \xi_{m_1\ldots m_q\ldots m_k}\rangle =$$
$$= \sum_{q=1}^{k} m_q \langle \xi_{i_1\ldots i_q\ldots i_k}, \xi_{m_1\ldots(m_q-1)\ldots m_k}\rangle = \langle \xi_{i_1\ldots i_k}, \varphi'(\xi_{m_1\ldots m_k})\rangle.$$

(b) For any $\xi_{m_1\ldots m_k} \in \mathcal{A}$ and any $\xi_{i_1\ldots i_s} \in \mathcal{A}+\mathbb{R}$

$$\langle \psi_0(\xi_{i_1\ldots i_s}), \xi_{m_1\ldots m_k}\rangle = \langle \xi_{i_1\ldots i_s} \vee \xi_0, \xi_{m_1\ldots m_k}\rangle = \begin{cases} \langle \xi_{i_1\ldots i_s}, \xi_{m_1\ldots m_{k-1}}\rangle & \text{if } m_k = 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

which, obviously, equals $\langle \xi_{i_1\ldots i_s}, \psi_0'(\xi_{m_1\ldots m_k})\rangle$.

**Lemma 2** *(a)* $\mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Im}(\psi_0) = \mathcal{A}$; *(b)* $\ker(\varphi') \cap \ker(\psi_0') = \{0\}$.

*Proof.* (a) First, let us show that any $\xi_{m_1\ldots m_k} \in \mathcal{A}$ belongs to $\mathrm{Im}(\varphi)+\mathrm{Im}(\psi_0)$. We use the induction w.r.t. $m_k$.

If $m_k = 0$ then $\xi_{m_1\ldots m_k} = \psi_0(\xi_{m_1\ldots m_{k-1}}) \in \mathrm{Im}(\psi_0)$ for any $m_1, \ldots, m_{k-1}$.

Suppose $p \geq 0$ and $\xi_{m_1\ldots m_{k-1}p} \in \mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Im}(\psi_0)$ for any $m_1, \ldots, m_{k-1}$. Then

$$\varphi(\xi_{m_1\ldots m_{k-1}p}) = \varphi(\xi_{m_1\ldots m_{k-1}} \vee \xi_p) = (p+1)\xi_{m_1\ldots m_{k-1}(p+1)} + \varphi(\xi_{m_1\ldots m_{k-1}}) \vee \xi_p.$$

By the induction supposition, $\varphi(\xi_{m_1\ldots m_{k-1}}) \vee \xi_p \in \mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Im}(\psi_0)$. Hence,

$$\xi_{m_1\ldots m_{k-1}(p+1)} = \tfrac{1}{p+1}\left(\varphi(\xi_{m_1\ldots m_{k-1}p}) - \varphi(\xi_{m_1\ldots m_{k-1}}) \vee \xi_p\right) \in \mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Im}(\psi_0).$$

The induction arguments complete the proof.

(b) Now, let $y_1 \in \ker(\varphi') \cap \ker(\psi_0')$. Then Lemma 1 implies that for any $y_2 \in \mathcal{A}+\mathbb{R}$

$$\langle \varphi(y_2), y_1\rangle = \langle y_2, \varphi'(y_1)\rangle = 0, \quad \langle \psi_0(y_2), y_1\rangle = \langle y_2, \psi_0'(y_1)\rangle = 0.$$

Hence, $y_1$ is orthogonal to $\mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Im}(\psi_0) = \mathcal{A}$, therefore, $y_1 = 0$.

**Remark.** It follows from [3] that if $\mathcal{J}_{a,b}$ is a right ideal corresponding to the system $\{a, b\}$ then $\varphi$ and $\psi_0$ are $\mathcal{J}_{a,b}$-invariant, i.e.,

$$\varphi(\mathcal{J}_{a,b}) \subset \mathcal{J}_{a,b}, \qquad \psi_0(\mathcal{J}_{a,b}) \subset \mathcal{J}_{a,b}. \tag{5}$$

Relation (5) is necessary and sufficient for the ideal $\mathcal{J}_{a,b}$ to be a right ideal of an *autonomous* control system.

**Corollary 1** *Suppose $\mathcal{J}_{a,b}$ is a right ideal corresponding to the system $\{a, b\}$. Then $\varphi'$ and $\psi_0'$ are $\mathcal{J}_{a,b}^{\perp}$-invariant, i.e., $\varphi'(\mathcal{J}_{a,b}^{\perp}) \subset \mathcal{J}_{a,b}^{\perp}$ and $\psi_0'(\mathcal{J}_{a,b}^{\perp}) \subset \mathcal{J}_{a,b}^{\perp}$.*

**Remark.** Formally, Corollary 1 requires the system $\{a, b\}$ to be autonomous. However, one can weaken this condition by assuming that *the algebraic approximation* of $\{a, b\}$ is autonomous. On this way, Theorem 1 (which uses Corollary 1) can be slightly generalized.

**Lemma 3** *Let us fix $\theta > 0$ and consider $u(t)$, $t \in [0, \theta]$, such that there exists $u(0) = \lim_{t\to+0} u(t)$. Let us consider $\theta_\delta = \theta - \delta$ and $u_\delta(t) = u(t+\delta)$, $t \in [0, \theta_\delta]$ for $0 < \delta < \delta_0 < \theta$. Then for any $z \in \mathcal{A}$*

$$\frac{d}{d\delta} z(\theta_\delta, u_\delta)|_{\delta=+0} = -\varphi'(z)(\theta, u) - u(0)\psi_0'(z)(\theta, u).$$

*Proof.* It suffices to consider $z=\xi_{m_1\dots m_k}$. We have

$$\xi_{m_1\dots m_k}(\theta_\delta,u_\delta)=\int_0^{\theta-\delta}\int_{\tau_k}^{\theta-\delta}\cdots\int_{\tau_2}^{\theta-\delta}\prod_{j=1}^k\tau_j^{m_j}u(\tau_j+\delta)d\tau_1\cdots d\tau_k=$$

$$=\int_\delta^{\theta}\int_{\tau_k}^{\theta}\cdots\int_{\tau_2}^{\theta}\prod_{j=1}^k(\tau_j-\delta)^{m_j}u(\tau_j)d\tau_1\cdots d\tau_k.$$

Then

$$\frac{d}{d\delta}\xi_{m_1\dots m_k}(\theta_\delta,u_\delta)=$$

$$=-(\tau_k-\delta)^{m_k}u(\tau_k)\int_{\tau_k}^{\theta}\int_{\tau_{k-1}}^{\theta}\cdots\int_{\tau_2}^{\theta}\prod_{j=1}^{k-1}(\tau_j-\delta)^{m_j}u(\tau_j)d\tau_1\cdots d\tau_{k-1}|_{\tau_k=\delta}-$$

$$-\sum_{i=1}^k m_i\int_\delta^{\theta}\int_{\tau_k}^{\theta}\cdots\int_{\tau_2}^{\theta}\prod_{j\neq i}(\tau_j-\delta)^{m_j}(\tau_i-\delta)^{m_i-1}\prod_{j=1}^k u(\tau_j)d\tau_1\cdots d\tau_k.$$

Hence, when $\delta\to+0$ we get

$$\frac{d}{d\delta}\xi_{m_1\dots m_k}(\theta_\delta,u_\delta)|_{\delta=+0}=\begin{cases}-\sum\limits_{i=1}^k m_i\xi_{m_1\dots(m_i-1)\dots m_k}(\theta,u)-u(0)\xi_{m_1\dots m_{k-1}}(\theta,u)\\ \qquad\qquad\qquad\text{if } m_k=0,\\ -\sum\limits_{i=1}^k m_i\xi_{m_1\dots(m_i-1)\dots m_k}(\theta,u)\\ \qquad\qquad\qquad\text{if } m_k\neq0\end{cases}$$

which completes the proof.

### 3. Equivalence of autonomous homogeneous systems

In this section, a system $\{a^*,b^*\}$ is supposed to be homogeneous. Then in privileged coordinates we get $(S_{a^*,b^*})_k=d_k^*$, where $\operatorname{ord}(d_k^*)=w_k^*$, $k=1,\dots,n$. For such a system we introduce a dilation $H_\varepsilon(x)$ acting as $(H_\varepsilon(x))_k=\varepsilon^{w_k^*}x_k$, $k=1,\dots,n$. Notice that

$$\theta^*_{H_\varepsilon(x^0)}=\varepsilon\theta^*_{x^0}\quad\text{and}\quad u^*_{H_\varepsilon(x^0)}(t)=u^*_{x^0}(\tfrac{t}{\varepsilon}),\ t\in[0,\varepsilon\theta^*_{x^0}].\tag{6}$$

Let us suppose that an open domain $\Omega\subset\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $0\in\overline{\Omega}$, is such that the time-optimal control problem for the (homogeneous) system $\{a^*,b^*\}$ has a unique solution $(\theta^*_{x^0},u^*_{x^0})$ for any $x^0\in\Omega$. We assume that in $\Omega$ optimal controls are continuous from the right at $t=0$, i.e., there exists $u^*_{x^0}(0)=\lim_{t\to+0}u^*_{x^0}(t)$ for any $x^0\in\Omega$. Without loss of generality we may assume that the domain $\Omega$ is *pseudo-conic* w.r.t. $\{a^*,b^*\}$, i.e., if $x\in\Omega$ then $H_\varepsilon(x)\in\Omega$ for any $0<\varepsilon<\varepsilon_0$.

Now let us denote by $x^*(t)$, $t\in[0,\theta^*_{x^0}]$ the optimal trajectory corresponding to an optimal control $u^*_{x^0}(t)$ (here $x^*(0)=x^0$ and $x^*(\theta^*_{x^0})=0$). Then obviously

$$\theta^*_{x^*(\delta)}=\theta^*_{x^0}-\delta\quad\text{and}\quad u^*_{x^*(\delta)}(t)=u^*_{x^0}(t+\delta),\ t\in[0,\theta^*_{x^*(\delta)}],\quad\text{for }\delta\in(0,\theta^*_{x^0}).\tag{7}$$

We assume that $\Omega$ is open, hence, for any $x^0 \in \Omega$ some segment of the optimal trajectory starting at $x^0$ belongs to $\Omega$, i.e., there exists $\delta_0 > 0$ such that $x^*(\delta) \in \Omega$ for $0 < \delta < \delta_0 < \theta^*_{x^0}$.

Finally, we call the set $L = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1, \dots, x_{n-1} \text{ are fixed}, \ x_n \in \mathbb{R}\}$ *a vertical line.*

**Theorem 1** *Suppose a homogeneous autonomous system $\{a^*, b^*\}$ approximates the autonomous system $\{a, b\}$ in the sense of time optimality in any of (pseudo-conic) domains $\Omega_i$, $i \in I$, with the same map $\Phi(x)$ (where $I$ may be finite or infinite set of indices) and for all $x^0 \in \bigcup_{i\in I} \Omega_i$ the time-optimal control problem for $\{a^*, b^*\}$ has a unique solution $(\theta^*_{x^0}, u^*_{x^0})$ such that $u^*_{x^0}(t)$ is continuous from the right at $t = 0$. Suppose there exists an open subset $\Omega' \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$ which satisfies the following condition in privileged coordinates for the system $\{a^*, b^*\}$:*

> *For any vertical line $L$, if the intersection $M = \Omega' \cap L$ is nonempty then the function $f(x) = u^*_x(0)$, $x \in M$, is not constant.* $(L)$

*Then $\{a^*, b^*\}$ is an algebraic approximation of $\{a, b\}$.*

*Proof.* Let $\mathcal{L}_{a^*,b^*}$ and $\mathcal{L}_{a,b}$ be core Lie subalgebras corresponding to the systems $\{a^*, b^*\}$, $\{a, b\}$ and let $\{\ell^*_k\}_{k=1}^n$, $\{\ell_k\}_{k=1}^n$ be homogeneous Lie elements such that

$$\mathcal{L} = \mathrm{Lin}\{\ell^*_1, \dots, \ell^*_n\} + \mathcal{L}_{a^*,b^*} = \mathrm{Lin}\{\ell_1, \dots, \ell_n\} + \mathcal{L}_{a,b}.$$

Suppose $\{d^*_k\}_{k=1}^n$ and $\{d_k\}_{k=1}^n$ are the corresponding elements of dual basis and $w_k = \mathrm{ord}(d_k)$, $w^*_k = \mathrm{ord}(d^*_k)$, where $w^*_1 \le \dots \le w^*_n$ and $w_1 \le \dots \le w_n$. We notice that for autonomous systems without loss of generality we may assume $\ell_1 = \ell^*_1 = d_1 = d^*_1 = \xi_0$.

We suppose the coordinates are privileged for the system $\{a^*, b^*\}$, then

$$(S_{a^*,b^*})_k = d^*_k(\theta, u), \quad k = 1, \dots, n,$$

and

$$x^0_k = d^*_k(\theta^*_{x^0}, u^*_{x^0}), \quad k = 1, \dots, n. \tag{8}$$

Also, without loss of generality we assume

$$(S_{a,b})_k = d_k(\theta, u) + \rho_k(\theta, u), \quad k = 1, \dots, n.$$

and $\rho_k \in \sum_{m=w_k+1}^{\infty} \mathcal{A}^m$. By the supposition, the system $\{a^*, b^*\}$ approximates $\{a, b\}$ in the sense of time optimality. Taking into account Definition 2 we suppose $\widetilde{u}_{x^0} \in U_{\Phi(x^0)}(\widetilde{\theta}_{x^0})$, then

$$(\Phi(x^0))_k = d_k(\widetilde{\theta}_{x^0}, \widetilde{u}_{x^0}) + \rho_k(\widetilde{\theta}_{x^0}, \widetilde{u}_{x^0}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Therefore,

$$\begin{aligned} d_k(\widetilde{\theta}_{x^0}, \widetilde{u}_{x^0}) + \rho_k(\widetilde{\theta}_{x^0}, \widetilde{u}_{x^0}) &= (\Phi(d^*_1(\theta^*_{x^0}, u^*_{x^0}), \dots, d^*_n(\theta^*_{x^0}, u^*_{x^0})))_k = \\ = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} d^*_i(\theta^*_{x^0}, u^*_{x^0}) &+ \sum_{m=1}^{w_k} p_{mk}(d^*_1, \dots, d^*_n)(\theta^*_{x^0}, u^*_{x^0}) + R_k(\theta^*_{x^0}, u^*_{x^0}), \end{aligned} \tag{9}$$

where the matrix $\{\alpha_{ik}\}$ is nonsingular (it equals $\Phi'(0)$), $p_{mk}$ are shuffle polynomial without linear terms, $\mathrm{ord}(p_{mk}(d_1^*,\ldots,d_n^*)) = m$, and $R_k \in \sum_{m=w_k+1}^{\infty}\mathcal{A}^m$. Without loss of generality we assume that the elements $\{\ell_k^*\}_{k=1}^n$ are chosen so that $\Phi'(0)$ equals the identical matrix.

Due to Definition 2 for any $z\in\mathcal{A}^m$ and any $i\in I$ we have

$$z(\widetilde{\theta}_{x^0},\widetilde{u}_{x^0}) = z(\theta^*_{x^0},u^*_{x^0}) + \bar{o}((\theta^*_{x^0})^m) \ \text{ as } \ x^0\to 0,\ x^0\in\Omega_i.$$

Then (9) implies for any $x^0\in\Omega_i$

$$d_k(\theta^*_{x^0},u^*_{x^0}) = d_k^*(\theta^*_{x^0},u^*_{x^0}) + \sum_{m=1}^{w_k} p_{mk}(d_1^*,\ldots,d_n^*)(\theta^*_{x^0},u^*_{x^0}) + \bar{o}((\theta^*_{x^0})^{w_k}), \tag{10}$$

$k=1,\ldots,n$. Let us denote

$$P_{mk}(d_1^*,\ldots,d_n^*) = \begin{cases} d_k^* + p_{mk}(d_1^*,\ldots,d_n^*) & \text{if } \ m = w_k^*,\\ p_{mk}(d_1^*,\ldots,d_n^*) & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{11}$$

Considering (10) for $x^0_\varepsilon = H_\varepsilon(x^0)\in\Omega_i$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, instead of $x^0$, we get

$$\varepsilon^{w_k} d_k(\theta^*_{x^0},u^*_{x^0}) = \sum_{m=1}^{w_k}\varepsilon^m P_{mk}(d_1^*,\ldots,d_n^*)(\theta^*_{x^0},u^*_{x^0}) + \bar{o}(\varepsilon^{w_k})$$

as $\varepsilon\to 0$, which implies

$$P_{mk}(d_1^*,\ldots,d_n^*)(\theta^*_{x^0},u^*_{x^0}) = 0,\ m\le w_k-1, \tag{12}$$

$$d_k(\theta^*_{x^0},u^*_{x^0}) = P_{w_k k}(d_1^*,\ldots,d_n^*)(\theta^*_{x^0},u^*_{x^0}),\quad k=1,\ldots,n, \tag{13}$$

for any $x^0\in\Omega_i$. Using (8) we get from (12)

$$P_{mk}(x_1^0,\ldots,x_n^0) = 0,\ m\le w_k-1,$$

for any $x^0\in\bigcup_{i\in I}\Omega_i$, which implies that polynomials $P_{mk}$ are zero, $P_{mk}\equiv 0$. In particular, (11) gives $w_k^*\ge w_k$.

Now we consider (13) and use the induction arguments. Assume

$$\begin{aligned}&w_j = \cdots = w_{j+q} = c,\\ &w_s < c \ \text{ if } \ s\le j-1 \ \text{ and } w_s > c \ \text{ if } \ s\ge j+q+1.\end{aligned}$$

Suppose $j=1$ or

$$d_k^* = d_k,\quad k=1,\ldots,j-1. \tag{14}$$

As is shown above, $w_j^*\ge w_j$. Hence, if $j\ge 2$ then, due to the induction supposition,

$$\mathcal{J}_{a,b}^{\perp}\cap\mathcal{A}^m = \mathcal{J}_{a^*,b^*}^{\perp}\cap\mathcal{A}^m,\quad m=1,\ldots,c-1. \tag{15}$$

Since $\mathrm{ord}(P_{c(j+r)}(d_1^*,\ldots,d_n^*)) = c$ and $w_r^*\ge w_s > c$ for $s>j+q$, we get $P_{c(j+r)}(d_1^*,\ldots,d_n^*) = P_{c(j+r)}(d_1^*,\ldots,d_{j+q}^*)$. For brevity, we temporarily denote $f_{j+r} = P_{c(j+r)}(d_1^*,\ldots,d_{j+q}^*)$.

Since $\Omega_i$ is open then $x^*(\delta) \in \Omega_i$ for $0 < \delta < \delta_0$. Therefore, considering (13) for $x^*(\delta)$ instead of $x^0$, we get

$$d_{j+r}(\theta_\delta, u_\delta) = f_{j+r}(\theta_\delta, u_\delta),\ r = 0, \ldots, q,\ 0 < \delta < \delta_0,$$

where $\theta_\delta = \theta^*_{x^0} - \delta$, $u_\delta(t) = u^*_{x^*(\delta)}(t) = u^*_{x^0}(t+\delta)$, $t \in [0, \theta_\delta]$. Hence, Lemma 3 gives

$$\varphi'(d_{j+r})(\theta, u) + u(0)\psi'(d_{j+r})(\theta, u) = \varphi'(f_{j+r})(\theta, u) + u(0)\psi'(f_{j+r})(\theta, u), \quad (16)$$

where $\theta = \theta^*_{x^0}$, $u = u^*_{x^0}$. By construction, $d_{j+r} \in \mathcal{J}^\perp_{a,b}$ and $f_{j+r} \in \mathcal{J}^\perp_{a^*,b^*}$, hence, applying Corollary 1 and using (15) we have

$$\varphi'(d_{j+r}), \psi'_0(d_{j+r}) \in \mathcal{J}^\perp_{a,b} \cap \mathcal{A}^{c-1} = \mathcal{J}^\perp_{a^*,b^*} \cap \mathcal{A}^{c-1},\ \varphi'(f_{j+r}), \psi'_0(f_{j+r}) \in \mathcal{J}^\perp_{a^*,b^*} \cap \mathcal{A}^{c-1},$$

therefore, for any $r = 0, \ldots, q$

$$\varphi'(d_{j+r} - f_{j+r}) \in \mathcal{J}^\perp_{a^*,b^*} \cap \mathcal{A}^{c-1}, \quad \psi'_0(d_{j+r} - f_{j+r}) \in \mathcal{J}^\perp_{a^*,b^*} \cap \mathcal{A}^{c-1}.$$

However, a basis of $\mathcal{J}^\perp_{a^*,b^*}$ is formed by polynomials of $\{d^*_1, \ldots, d^*_n\}$. Let us take into account that $\mathrm{ord}(d_{j+r}) = \mathrm{ord}(f_{j+r}) = c \le w^*_j$. Hence, for some polynomials $P_{1r}$ and $P_{2r}$

$$\varphi'(d_{j+r} - f_{j+r}) = P_{1r}(d^*_1, \ldots, d^*_{j-1}), \quad \psi'_0(d_{j+r} - f_{j+r}) = P_{2r}(d^*_1, \ldots, d^*_{j-1}). \ (17)$$

Hence, (16) implies

$$P_{1r}(d^*_1, \ldots, d^*_{j-1})(\theta, u) + u(0)P_{2r}(d^*_1, \ldots, d^*_{j-1})(\theta, u) = 0$$

where $\theta = \theta^*_{x^0}$, $u = u^*_{x^0}$. Now recalling (8) we get

$$P_{1r}(x^0_1, \ldots, x^0_{j-1}) + u(0)P_{2r}(x^0_1, \ldots, x^0_{j-1}) = 0 \quad (18)$$

for any $x^0 \in \bigcup_{i\in I} \Omega_i$, where $u(0) = u^*_{x^0}(0)$.

Suppose the polynomial $P_{2r}$ is not identically zero. Let us apply condition (L). Namely, let us consider the set $\Omega'' = \{x \in \Omega' : P_{2r}(x_1, \ldots, x_{j-1}) \ne 0\}$ which is nonempty since the nonempty set $\Omega'$ is open. For any $x \in \Omega''$ the optimal control equals $u(x) = -\frac{P_{1r}(x_1,\ldots,x_{j-1})}{P_{2r}(x_1,\ldots,x_{j-1})}$, hence, it depends only on the first $j-1$ coordinates of the point $x$ (where $j - 1 \le n - 1$). Hence, the optimal control is constant on the intersection of $\Omega''$ with any vertical line, what contradicts condition (L).

Hence, the polynomial $P_{2r}$ is zero, therefore, $P_{1r}$ also is zero. Then (17) implies $d_{j+r} - f_{j+r} \in \ker(\varphi') \cap \ker(\psi'_0)$. Now, Lemma 2 gives $d_{j+r} = f_{j+r}$. Thus,

$$d_{j+r} = P_{c(j+r)}(d^*_1, \ldots, d^*_{j+q}). \quad (19)$$

If $w^*_{j+r} > w_{j+r} = c$ then, by (11), $P_{c(j+r)}(d^*_1, \ldots, d^*_{j+q}) = p_{c(j+r)}(d^*_1, \ldots, d^*_{j-1})$ is a shuffle polynomial without linear term, hence, $P_{c(j+r)}(d^*_1, \ldots, d^*_{j+q}) \in \mathcal{L}^\perp$. However, $d_{j+r} \notin \mathcal{L}^\perp$, therefore, (19) leads to contradiction.

Hence, $w^*_{j+r} = w_{j+r} = c$ for all $r = 0, \ldots, q$. Then (11) and (19) give

$$d_{j+r} = d^*_{j+r} + p_{c(j+r)}(d^*_1, \ldots, d^*_{j-1}), \quad r = 0, \ldots, q. \tag{20}$$

We recall that monomials of $p_{c(j+r)}$ are elements of the dual basis. So, if $p_{c(j+r)}$ contains the monomial $(d^*_1)^{\sqcup\!\sqcup q_1} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup (d^*_{j-1})^{\sqcup\!\sqcup q_{j-1}}$ with nonzero coefficient then $p_{c(j+r)}(d^*_1, \ldots, d^*_{j-1})$ is not orthogonal to the element $(\ell^*_1)^{\vee q_1} \vee \cdots \vee (\ell^*_{j-1})^{\vee q_{j-1}}$. However, the induction supposition (14) implies $\ell^*_k = \ell_k$, $k = 1, \ldots, j-1$, hence, both $d_{j+r}$ and $d^*_{j+r}$ are orthogonal to this element. Then (20) implies that the polynomial $p_{c(j+r)}$ is zero, $p_{c(j+r)}(d^*_1, \ldots, d^*_{j-1}) \equiv 0$, and therefore,

$$d_{j+r} = d^*_{j+r}, \quad r = 0, \ldots, q.$$

Using the induction arguments we get that $d_k = d^*_k$ for $k = 1, \ldots, n$. Therefore, $\mathcal{J}^\perp_{a,b} = \mathcal{J}^\perp_{a^*,b^*}$, which implies $\mathcal{J}_{a,b} = \mathcal{J}_{a^*,b^*}$. The theorem is proved.

**Remark.** In Theorem 1, the controls $u^*_{x^0}$ are time-optimal. However, the optimality itself is not used in the proof. Instead, the following two properties of controls $u^*_{x^0}$ are applied: the requirement (6) connected with the homogeneity, and the property (7) which is justified by the autonomy of the system. One can generalize the theorem assuming that for any point $x^0 \in \Omega$ a control $u^*_{x^0}$ is chosen which steers the point $x^0$ to the origin by virtue of the system $\{a^*, b^*\}$ and steers the point $\Phi(x^0)$ to the origin by virtue of the system $\{a, b\}$ and, in addition, satisfies (6), (7), and condition (L). Then equality (10) holds and, as one can obtain by repeating the rest of the proof of the theorem, the systems $\{a^*, b^*\}$ and $\{a, b\}$ have the same right ideals.

**Remark.** Let us also notice that condition (L), which is used in the proof in order to conclude the identities $P_{1r} = P_{2r} = 0$ from equality (18), can be replaced by some other condition. For example, one can require the existence of $\alpha \in \mathbb{R}$ and two open sets $M_1, M_2 \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$ such that $\widehat{u}^*_{x^0}(0) = \alpha$ for any $x^0 \in M_1$ and $\widehat{u}^*_{x^0}(0) \neq \alpha$ for any $x^0 \in M_2$.

**Example.** As $\{a^*, b^*\}$, let us consider the nonlinear homogeneous system of the form

$$\dot{x}_1 = u, \ \dot{x}_2 = x_1, \ \dot{x}_3 = x_1^3.$$

As was shown in [7], for any $x^0$ the optimal control $u^*_{x^0}(t)$ equals $\pm 1$ or 0 and has finite number of switchings. In [8] domains where the time-optimal control problem for this system has a unique solution were described. In particular, it turns out that conditions (i)–(iii) mentioned in Section 1 are satisfied in several open domains. Hence, if $\{a^*, b^*\}$ is an algebraic approximation of $\{a, b\}$ then $\{a^*, b^*\}$ approximates $\{a, b\}$ in the sense of time optimality in these domains. Moreover, there exists a domain $\Omega'$ satisfying the conditions of Theorem 1; for example, one can choose $\Omega' = \{x : x_1 > 1, -x_1^2 < x_2 < 0\}$. Therefore, if $\{a^*, b^*\}$ approximates $\{a, b\}$ in the sense of time optimality in some domains $\Omega_i$ such that $\Omega' \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$ then $\{a^*, b^*\}$ is an algebraic approximation of $\{a, b\}$.

REFERENCES

1. Sklyar G. M., Ignatovich S. Yu. Moment approach to nonlinear time optimality, SIAM J. Control Optim, 2000. – V. 38. – P. 1707–1728.

2. Sklyar G. M., Ignatovich S. Yu. Approximation of time-optimal control problems via nonlinear power moment min-problems // SIAM J. Control Optim, 2003. – V. 42. – P. 1325–1346.

3. Sklyar G. M., Ignatovich S. Yu. Representations of control systems in the Fliess algebra and in the algebra of nonlinear power moments // Systems Control Lett, 2002. – V. 47. – P. 227–235.

4. Reutenauer C. Free Lie Algebras. – Clarendon Press, Oxford, 1993.

5. Melançon G., Reutenauer C. Lyndon words, free algebras and shuffes // Canad. J. Math., 1989. – V. 41. – P. 577–591.

6. Ignatovich, S. Yu. On a connection between approximation of nonlinear systems in the sense of time optimality and their algebraic approximation // Mat. Fiz. Anal. Geom., 2005. – V. 12, no. 2. – P. 158–172.

7. Sklyar G. M., Ignatovich S. Yu., Shugaryov S. E. Time-optimal control problem for a special class of control systems: optimal controls and approximation in the sense of time optimality // J. Optim. Theory Appl., 2015. – Vol. 165. – P. 62–77.

8. Ignatovich, S. Yu. Explicit solution of the time-optimal control problem for one nonlinear three-dimensional system // Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, 2016. – Vol. 83. – P. 21-46.

Article history: Received: 8 December 2016; Final form:12 December 2016; Accepted: 16 December 2016.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 84, 2016, с.22–30

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 84, 2016, p. 22–30
DOI: 10.26565/2221-5646-2016-84-03

УДК 519.7

# Идентификация характеристик осцилляторных сетей.

Н. В. Жоголева, В. Ф. Щербак.

*Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Украина.*
*zhogoleva.nadia@gmail.com, scherbakvf@ukr.net.*

Рассмотрена задача наблюдения состояния и идентификации параметров математической модели, представленной системой взаимосвязанных осцилляторов Ван дер Поля. Такие системы возникают при моделировании многих биологических процессов, имеющих циклический характер. Для решения использован метод синтеза инвариантных соотношений, разработанный для решения обратных задач теории управления. Метод позволяет формировать конечные соотношения, определяющие искомые неизвестные как функции от известных величин.
*Ключевые слова:* наблюдатель, идентификация параметров, инвариантные соотношения, осциллятор Ван дер Поля.

Жоголева Н. В., Щербак В. Ф. **Ідентифікація характеристик осциляторних мереж.** Розглянуто задачу спостереження стану та ідентифікації параметрів математичної моделі, яка представлена у вигляді системи взаємозалежних осциляторів Ван дер Поля. Такі системи виникають при моделюванні багатьох біологічних процесів, що мають циклічний характер. Використано метод синтезу інваріантних співвідношень, який розроблено для обернених задач теорії управління. Метод дозволяє синтезувати кінцеві співвідношення, що визначають шукані невідомі як функції від відомих величин.
*Ключові слова:* спостерігач, ідентифікація параметрів, інваріантні співвідношення, осцилятор Ван дер Поля.

N. V. Zhogoleva, V. F. Shcherbak. **Identification of characteristics of coupled oscillators.** The observation and identification problem for mathematical model of coupled Van der Pol oscillators is considered. Such systems arise under modeling of many cyclical biological processes. The synthesis of invariant relationships method is used developed for the solution of inverse control problems. The method allows to synthesize additional relations between the known and unknown quantities of the mathematical model of the object.
*Keywords:* observer, identification of parameters, invariant relations, Van der Pol oscillator.
*2000 Mathematics Subject Classification* 34C15, 93B07.

## Введение.

Во многих приложениях физики, биологии в качестве модели нелинейных циклических процессов, имеющих устойчивый предельный цикл, используют систему, состоящую из одного или нескольких связанных между собой осцилляторов Ван дер Поля [1]. Одной из задач, возникающих при исследовании и моделировании биологических функций организма, таких как сердечная деятельность, дыхание, локомоторная активность, является задача определения полного вектора состояния и параметров таких систем по результатам измерения выходных сигналов в реальном масштабе времени [2], [3]. В работе предлагается способ получения асимптотических оценок скоростей и параметров, характеризующих частоты колебаний системы осцилляторов Ван дер Поля, по информации об их движении. Используется разработанный в аналитической механике метод инвариантных соотношений [4], который в задачах управления позволяет синтезировать дополнительные связи между известными и неизвестными величинами [5], [6]. В первой части работы соответствующая задача наблюдения и одновременной идентификации рассмотрена для одного осциллятора Ван дер Поля. Далее, полученные алгоритмы оценки распространены на систему связанных между собой нелинейных осцилляторов.

**Задача определения характеристик осциллятора Ван Дер Поля.** Рассмотрим уравнение Ван Дер Поля, описывающее процесс релаксационных колебаний [7]

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{1}$$

Здесь $x$ — отклонение точки от положения равновесия, $\mu$ — коэффициент при нелинейном слагаемом, который характеризует величину демпфирования, $\mu \geqslant 0$. Режим $\mu = 0$ соответствует колебаниям без трения и описывается уравнением гармонического осциллятора с собственной частотой $\omega$. Одной из задач, возникающих при изучении и моделировании биологических процессов с помощью осцилляторных систем, является задача определения скорости точки $x$ и параметра $\omega$ в предположении, что значения функции времени $x(t)$ доступны измерению.

Обозначив $x_1 = x,\ x_2 = dx/dt$, перепишем (1) в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= -\omega^2 x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2, \\ y &= x_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим задачу нахождения $x_2(t)$ и $\omega$ как задачу наблюдения и одновременной идентификации системы (2) по известной информации о движении. Такой информацией является выход – функция $y(t)$, а также те величины, которые могут быть получены с использованием только лишь значений выхода. В частности, далее известным будем считать любое решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi} = U(\xi, x_1(t)),\ \xi(0) = \xi_0 \in R^p,\ p \geqslant 1, \tag{3}$$

в которой функции $U(\xi, x_1)$ удовлетворяют достаточным условиям теорем существования и единственности решений для $t \in [0, \infty)$.

Для решения исходной задачи наблюдения и идентификации используем метод синтеза инвариантных соотношений, который позволяет получать в процессе функционирования системы асимптотические оценки неизвестных [6].

**Задача 1.** Найти асимптотически точные оценки переменной $x_2(t)$ и параметра $\omega$ системы (2) по известным значениям выхода $x_1(t)$.

**Замечание.** Достаточным условием локальной наблюдаемости и идентифицируемости [8] системы (2) является невырожденность якобиевой матрицы $J = \partial(y, \dot{y})/\partial(x_2, \omega)$, где производные от измеряемой функции $y(t) = x_1(t)$ взяты в силу системы (2). Так как $\det J = -2\omega x_1$, то система становится неидентифицируемой при $x_1(t) = 0$.

Используемый подход предполагает получение асимптотических оценок. В связи с тем, что условия идентифицируемости нарушаются на дискретном множестве моментов времени, предлагаемый ниже алгоритм оценивания будет использован для последовательного улучшения оценок неизвестных на интервалах знакопостоянства выхода $x_1(t)$.

**Синтез дополнительных соотношений в задаче определения характеристик осцилятора Ван Дер Поля.** Для решение задачи наблюдения и идентификации используем метод синтеза инвариантных соотношений, позволяющего получать в процессе функционирования системы асимптотические оценки неизвестных. Суть данного подхода состоит в динамическом расширении исходной системы дифференциальных уравнений (2) уравнениями (3), где $p$ равно 2 – числу неизвестных: функции $x_2(t)$ и постоянной $\omega$. При этом правые части $U(\xi, x_1)$ подбираются таким образом, чтобы полученная расширенная система дифференциальных уравнений (2),(3) допускала семейство инвариантных соотношений

$$F_i(x_1, x_2, \xi, \omega) = 0,\ i = 1, 2, \tag{4}$$

со следующими свойствами:

1) Соотношения (4) формируют дополнительные независимые уравнения для неизвестных, т.е. $rank \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x_2, \omega)} = 2$;

2) Соответствующее (4) инвариантное многообразие $M = \{(x_1, x_2, \xi, \omega) \subseteq R^4 :\ F_i(x_1, x_2, \xi, \omega) = 0,\ i = 1, 2\}$ обладает свойством глобального притяжения для любых решений расширенной системы (2),(3). Иными словами на любых решениях

$$\lim_{t \to \infty} F_i(x_1(t), x_2(t), \xi(t), \omega) = 0,\ i = 1, 2.$$

**Синтез дополнительных соотношений.** Покажем, что для рассматриваемой задачи соотношения вида (4) существуют.

Чтобы свойство 1) было выполнено во всей рассматриваемой области будем искать их в виде

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \xi, \omega) &= x_2 - \xi_1 - \Psi_1(x_1) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \xi, \omega) &= \omega^2 - \xi_2 - \Psi_2(x_1) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где переменные $\xi_1(t), \xi_2(t)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений (3). На функции $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1), U_1(\xi_1, \xi_2, x_1), U_2(\xi_1, \xi_2, x_1)$ пока не накладываем никаких ограничений, кроме требования непрерывной дифференцируемости по своим аргументам. Если эти функции выбраны так, что соотношения (5) становится инвариантными на рассматриваемом решении, то тогда неизвестные $x_2(t), \omega$ могут быть найдены непосредственно из равенств (5).

**Утверждение 1**. Для любых дифференцируемых функций $\Psi_1(x_1),\ \Psi_2(x_1)$ существуют управления $U_1(\xi_1, \xi_2, x_1), U_2(\xi_1, \xi_2, x_1)$ такие, что равенства (5) выполняются тождественно на некоторых решениях расширенной системы дифференциальных уравнений (2),(3).

*Доказательство.*Введем переменные $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, которые характеризуют невязку в формулах (5) на решениях системы (2),(3).

$$x_2(t) - \xi_1(t) - \Psi_1(x_1(t)) = \varepsilon_1, \quad \omega^2 - \xi_2(t) - \Psi_2(x_1(t)) = \varepsilon_2. \tag{6}$$

Сделаем в уравнениях (2) замену переменных. Перейдем по формулам (6) от переменных $x_2, \omega^2$ к переменным $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ соответственно. Дифференцируя (6) в силу системы (2),(3), получаем дифференциальные уравнения для отклонений

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon_1} &= -U_1 + (\varepsilon_1 + \xi_1 + \Psi_1(x_1)) \left[(\mu(1 - x_1^2) - \Psi_1'\right] - x_1(\varepsilon_2 + \xi_2 + \Psi_2(x_1)), \\ \dot{\varepsilon_2} &= -U_2 - \Psi_2'(\xi_1 + \varepsilon_1 + \Psi_1(x_1)), \end{aligned} \tag{7}$$

где знак $'$ означает дифференцирование по переменной $x_1$.

Чтобы равенства (5) выполнялись тождественно на некоторых решениях системы дифференциальных уравнений (2),(3), достаточно показать, что система дифференциальных уравнений (7) допускает тривиальное решение $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) \equiv 0$.

Для этого фиксируем вид правых частей (3), а именно: для любых $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ положим

$$\begin{aligned} U_1(\xi_1, \xi_2, x_1) &= [\mu(1 - x_1^2) - {\Psi_1}'(x_1)](\xi_1 + \Psi_1(x_1)) - (\xi_2 + \Psi_2(x_1))x_1, \\ U_2(\xi_1, \xi_2, x_1) &= -{\Psi_2}'(x_1)(\xi_1 + \Psi_1(x_1)). \end{aligned} \tag{8}$$

В результате система дифференциальных уравнений для отклонений $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ становится однородной

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon_1} &= [\mu(1 - x_1^2) - {\Psi_1}'(x_1)]\varepsilon_1 - x_1\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon_2} &= -{\Psi_2}'(x_1)\varepsilon_1, \end{aligned} \tag{9}$$

а значит допускает тривиальное решение. Утверждение доказано.

Таким образом, можно утверждать, что для любых дифференцируемых функций $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ начальные значения $\xi_1(0), \xi_2(0)$ в задаче Коши для дифференциальных уравнений (4) могут быть выбраны таким образом, что в момент $t = 0$ формулы (5) становятся верными равенствами. В частности, это означает, что начальные значения для отклонений $\varepsilon_1(0) = \varepsilon_2(0) = 0$. В этом случае равенства (5) на траектории расширенной системы (2),(3) выполняются тождественно, образуя, тем самым, систему дополнительных соотношений, в которых единственными неизвестными остаются $x_2(t), \omega$.

В общем случае осуществить такой выбор $\xi_1(0), \xi_2(0)$ не удается, поскольку для этого необходимо знать значения $x_2(0), \omega$, которые, собственно, и являются искомыми величинами. Для того, чтобы использовать формулы (5) для оценки $x_2(t), \omega$ на любом решении системы (2),(3) требуется из множества функций $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ выбрать такие, при которых тривиальное решение системы (9) обладало бы свойством глобальной асимптотической устойчивости.

**Стабилизация отклонений от инвариантного соотношения.** Рассмотрим задачу подбора функций $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$, остающихся пока свободными, с целью стабилизации решений системы (9). Введем обозначения:

$$V_1(x_1) = \mu(1 - x_1^2) - {\Psi_1}'(x_1), \quad V_2(x_1) = -{\Psi_2}'(x_1), \tag{10}$$

и перепишем систему (9) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon_1} &= V_1(x_1)\varepsilon_1 - x_1\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon_2} &= V_2(x_1)\varepsilon_1. \end{aligned} \tag{11}$$

Будем рассматривать функции $V_1(x_1), V_2(x_1)$ как управления, с помощью которых необходимо обеспечить глобальную асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (11).

При построении схемы решения исходной задачи будет учитывать тот факт, что положение $x_1(t)$ колеблющейся точки осциллятора Ван дер Поля принимает нулевые значения лишь на дискретном множестве изолированных моментов времени $t_i, i = 1, 2, ...$, которое не имеет предельной точки. Согласно сделаному замечанию к задаче 1, будем проводить последовательное улучшение оценок неизвестных на открытых интервалах $(0, t_1), (t_1, t_2), ...$, на каждом из которых выход отличен от нуля.

Опишем схему построения на отдельно взятом интервале. Пусть $t \in T_i = (t_i, t_{i+1})$, обозначим $k = \operatorname{sign} x_1(t),\ t \in T_i$. В качестве стабилизирующих управлений возьмем функции

$$V_1(x_1) = \alpha|x_1|,\ V_2(x_1) = \beta|x_1|, \tag{12}$$

где $\alpha, \beta$ – некоторые постоянные. При этих управлениях система (9) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon_1} &= |x_1|(\alpha\varepsilon_1 - k\varepsilon_2), \\ \dot{\varepsilon_2} &= |x_1|\beta\varepsilon_1. \end{aligned} \tag{13}$$

Поскольку положительная величина $|x_1(t)|$ является скалярным множителем при правых частях системы (13), то ее траектории и направление движения совпадают с соответствующими траекториями и направлением поля соростей системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \dot{\eta_1} &= \alpha\eta_1 - k\eta_2, \\ \dot{\eta_2} &= \beta\eta_1. \end{aligned} \tag{14}$$

Пусть $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ – корни характеристического уравнения системы (14), тогда, по теореме Виета, $\alpha = \lambda_1 + \lambda_2$, $\beta = k\lambda_1\lambda_2$. Обозначив $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, получаем, что решения системы (14) стремятся к нулю с показателем затухания, равным $\lambda$:

$$\sqrt{{\eta_1}^2 + {\eta_2}^2} = O(e^{\lambda t}).$$

Такой же характер будут иметь и решения системы (13).

Поскольку $V_1(x_1), V_2(x_1)$ определены, то равенства (10) можем рассматривать как дифференциальные уравнения для искомых функций $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$, формирующих инвариантные соотношения (5). Эти уравнения имеют вид

$${\Psi_1}' = \mu(1 - x_1^2) - \alpha k x_1, \quad {\Psi_2}' = -\beta k x_1, \tag{15}$$

Чтобы в момент смены знака $x_1(t)$ правые части формул (5) оставались непрерывными, частное решение (15) выберем в соответствии с условием $\Psi_1(0) = \Psi_2(0) = 0$. Тогда

$$\Psi_1(x_1) = x_1\left[\mu(1 - \frac{{x_1}^2}{3}) - \frac{\alpha|x_1|}{2}\right], \quad \Psi_2(x_1) = \frac{-\beta k x_1^2}{2}, \tag{16}$$

Окончательно получаем, что формулы (5), предназначенные для оценки искомых неизвестных, принимают вид

$$\begin{aligned} x_2 &= \xi_1 + x_1\left[\mu(1 - \frac{{x_1}^2}{3}) - \frac{\alpha|x_1|}{2}\right] + O(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2), \\ \omega^2 &= \xi_2 - \frac{\beta k x_1^2}{2} + O(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2), \end{aligned} \tag{17}$$

где функции $\xi_1(t), \xi_2(t)$ являются решением задачи Коши для вспомогательной системы дифференциальных уравнений (3), которую, с учетом (8),(16), можем записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi_1} &= \alpha|x_1|\left[\xi_1 + \mu x_1(1 - \frac{x_1^2}{3}) - \frac{\alpha k x_1^2}{2}\right] - (\xi_2 - \frac{\beta k x_1^2}{2})x_1, \\ \dot{\xi_2} &= \beta|x_1|\left[\xi_1 + \mu x_1(1 - \frac{x_1^2}{3}) - \frac{\alpha k x_1^2}{2}\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

Уравнения (17),(18), определяют семейство наблюдателей, параметризованное постоянными $\alpha = \lambda_1 + \lambda_2$, $\beta = k\lambda_1\lambda_2$ и начальными условиями $\xi_1(0), \xi_2(0)$. При этом каждый из этих наблюдателей, при отрицательных $\lambda_1, \lambda_2$, обеспечивает асимптотическое оценивание искомых неизвестных: переменной $x_2(t)$ и параметра $\omega$.

**Система связанных осцилляторов.** Рассмотрим теперь механическую модель системы, составленную из $n$ осцилляторов Ван дер Поля. Предполагается, что положение каждого из осцилляторов доступно измерению $y_i(t) = x_{1i}(t)$ и они соединены между собой упругими связями с линейными жёсткостями $k_{ij},\ i,j = \overline{1,n}$. Системы такого рода используются в медико-биологических исследованиях. В частности, случай $n = 2$ описывает распространенную модель сердечной деятельности, а $n = 3$ модель ходьбы человека [1]. Уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{x_{i1}} = x_{i2}, \\ &\dot{x_{i2}} = -{\omega_i}^2 x_{i1} + \mu_i(1 - x_{i1}^2)x_{i2} + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x_{j1} - x_{i1}), \\ &\ y_i = x_{i1}, \quad i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{19}$$

**Задача 2.** Найти асимптотически точные оценки переменных $x_{i2}(t)$ и параметров $\omega_i$ системы (19) по известным значениям выхода $x_{i1}(t),\ i = \overline{1,n}$.

Решение задачи 2 проведем по описанной выше схеме. Представим неизвестные в виде суммы неопределенных величин

$$\begin{aligned} x_{i2}(t) &= \xi_{i1}(t) + \Psi_{i1}(x_{i1}(t)) + \varepsilon_{i1}(t), \\ \omega_i^2 &= \xi_{i2}(t) + \Psi_{i2}(x_{i1}(t)) + \varepsilon_{i2}(t), \end{aligned} \tag{20}$$

где $\varepsilon_{ij}(t)$ – соответствующие отклонения, $\xi_{ij}(t)$ – решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi_{ij}} = U_{ij}(\xi_{ij}, x_{11}, x_{21}, ..., x_{n1}),\ \xi_{ij}(0) = \xi_{ij_0} \in R,\ i = \overline{1,n},\ j = 1,2. \tag{21}$$

Правые части системы (21) должны зависеть только лишь от известных величин. В качестве управлений $U_i(\xi_i, x_{11}, x_{21}, ..., x_{n1})$ возьмем функции

$$\begin{aligned} &U_{i1} = \left[\mu_i(1 - x_{i1}^2) - {\Psi_{i1}}'\right](\xi_{i1} + \Psi_{i1}) - (\xi_{i2} + \Psi_{i2})x_{i1} + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x_{j1} - x_{i1}), \\ &U_{i2} = -{\Psi_{i2}}'(\xi_{i1} + \Psi_{i1})\ i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{22}$$

В результате получаем для отклонений $n$ однотипных систем дифференциальных уравнений вида (9)

$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon_{i1}} = [\mu_i(1 - x_{i1}^2) - {\Psi_{i1}}']\varepsilon_{i1} - x_{i1}\varepsilon_{i2}, \\ &\dot{\varepsilon_{i2}} = -{\Psi_{i2}}'\varepsilon_{i1}, \quad i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{23}$$

Используя найденные ранее решения (11), запишем уравнения наблюдателя скоростей системы $n$ осцилляторов Ван дер Поля

$$
\begin{aligned}
&x_{i2} = \xi_{i1} + x_{i1}\left[\mu(1 - \frac{x_{i1}^2}{3}) - \frac{\alpha|x_{i1}|}{2}\right],\\
&{\omega_i}^2 = \xi_{i2} - \frac{\beta k x_{i1}^2}{2}, \quad i = \overline{1,n},
\end{aligned}
\tag{24}
$$

где функции $\xi_{i1}(t), \xi_{i2}(t)$ являются решением задачи Коши для вспомогательной системы дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\dot{\xi_{i1}} = \alpha|x_{i1}|\left[\xi_{i1} + \mu_i x_{i1}(1 - \frac{x_{i1}^2}{3}) - \frac{\alpha k x_{i1}^2}{2}\right] - x_{i1}(\xi_{i2} - \frac{\beta k x_{i1}^2}{2}) + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x_{j1} - x_{i1}),\\
&\dot{\xi_{i2}} = \beta|x_{i1}|\left[\xi_{i1} + \mu_i x_{i1}(1 - \frac{x_{i1}^2}{3}) - \frac{\alpha k x_{i1}^2}{2}\right], \quad i = \overline{1,n}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

**Численное моделирование.** Предложенная в работе схема была численно промоделирована для широкого спектра начальных условий и параметров системы (1). Результаты одного из вариантов счета для отдельно взятого осциллятора Ван Дер Поля приведены на рисунке. В качестве известного выхода системы (2) взята координата $x_1(t)$ – численное решение системы (2) с начальными условиями $x_1(0) = 2.5$; $x_2(0) = -5.0$ и параметрами $\omega = 2.0$; $\mu = 1.5$. Начальные условия для решений вспомогательной системы (18) равны $\xi_{10} = -1.0$; $\xi_{20} = 2.0$. Параметры, регулирующие скорость сходимости: $\lambda_1 = -1.0$; $\lambda_2 = -1.3$.

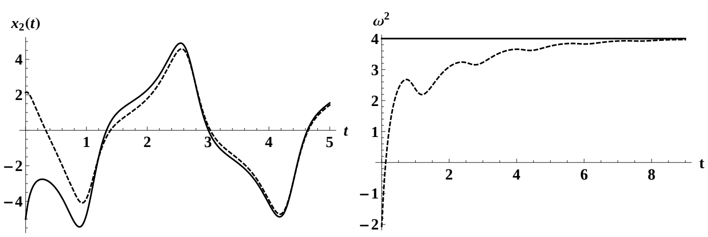


Рис. Асимптотическое оценивание переменной $x_2(t)$ и параметра $\omega^2$

На рисунке искомые величины: координата $x_2(t)$, найденная в результате численного интегрирования уравнения Ван дер Поля и параметр $\omega^2$ (изображены непрерывными линиями) сопоставлены с их оценками (точечные кривые), полученными по формулам (17).

Результаты численного моделирования показывают работоспособность предложенного способа решения задачи наблюдения скорости и идентификации параметра, характеризующего частоту колебаний осциллятора Ван дер Поля. В силу того, что решение соответствующей задачи 2 сводится к системе из $n$ систем (24),(25), аналогичных (17),(18), подобное утверждение верно и для ансамбля связанных между собой осцилляторов.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (№ гос. регистр. 0116U007161).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С., Трубецков Д.И., Тюрюкина Л.В. Феномен уравнения ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2014. – Т. 22, № 4. – С. 3-42.

2. Grudzinski K., Zebrowski J.J. Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators // Physica A 336, 2003. – pp 153-162.

3. Булдаков Н.С., Самочетова Н.С., Ситников А.В., Суятинов С.И. Моделирование связей в системе «сердце-сосуды» // Наука и образование, Электронный научно-технический журнал, 2013. – С. 123.

4. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела, 1974. -– Вып. 6.

5. В.Ф.Щербак. Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения // Механика тведого тела, 2004. – **33**, – С. 197 -216.

6. Жоголева Н.В., Щербак В.Ф. Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины, 2015. – т.29.– С. 69-76.

7. Van der Pol B. On relaxation oscillations // The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. and J. of Sci., 1927. – V.2(7).– pp. 978–992.

8. Ковалев А.М., Щербак В.Ф. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993.

Статья получена: 11 ноября 2016; принята: 12 декабря 2016.

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
Том 84, 2016, с.31–45

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics"
Vol. 84, 2016, p. 31–45
DOI: 10.26565/2221-5646-2016-84-04

УДК 515.12

# Semi-classical analysis for proof extinction-property in finite time of solutions for parabolic equations with homogeneous main part and degenerate absorption potential

K. Stiepanova

*Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics (KhNUE)*
*ave. Science, 9-a, Kharkiv, 61166, Ukraine*
*stepanova.ekaterina@hneu.net*

We study the behavior of solutions of parabolic equation with double nonlinearity and a degenerate absorption term.
The main topic of interest is the property of finite time extinction, i.e., the solution vanish after finite time.
*Keywords:* degenerate nonlinear parabolic equation, diffusion–absorption, extinction-property of solutions, semi-classical analysis.

Степанова Е. В. **Полуклассический анализ при доказательстве свойства затухания решения за конечное время для параболических уравнений с однородной главной частью и вырождающимся абсорбционным потенциалом.** Изучается поведение решений параболического уравнения с двойной нелинейностью и вырождающимся потенциалом.
Основной интерес представляет собой свойство затухания решения за конечное время, то есть, зануление решения по истечению конечного времени.
*Ключевые слова:* вырожденное нелинейное параболическое уравнение, диффузия–абсорбция, свойство затухания решений, полуклассический анализ.
Стєпанова К. В. **Напівкласичний аналіз при доведенні властивості згасання розв'язків за скінчений час для параболічних рівнянь з однорідною головною частиною та вироджуваним абсорбційним потенціалом.** Вивчається поведінка розв'язків параболічних рівнянь з подвійною нелінійністю та вироджуваним потенціалом.
Основний інтерес являє собою властивість згасання розв'зку за скінчений час, тобто, занулення розв'язку за скінчений час.
*Ключові слова:* вироджене нелінійне параболічне рівняння, дифузія–абсорбція, властивість згасання розв'язків, напівкласичний аналіз.
*2000 Mathematics Subject Classification* 35A25, 35B40.

## 1. Introduction

The theory of quasilinear parabolic equations has been developed since the 50-s of the 19th century. The properties of these equations differ greatly from those of linear equations. These differences were revealed in the scientific papers of the mathematicians: Barenblatt G. I., Oleinic O. A., Kalashnikov A. S., Zhou Yu Lin and others. The properties under consideration are the final velocity of propagation of the support of the solutions, time compact support property and long-time extinction of solutions in finite time and so on. Hundreds of outstanding scientists all over the world closely scrutinize these properties (V. A. Kondratiev, G. A. Iosif'yan, E. V. Radkevich, J. I. Diaz, L. Veron, A. E. Shishkov, B. Helffer, Y. Belaud, M. Fila, D. Andreucci, V. Vespri, A.F. Tedeev and others). The most important aspect of such investigations is the description of structural conditions affecting the appearance and disappearance of various non-linear phenomena.

Our investigations are devoted to the study of the extinction of solutions in finite time to initial-boundary value problems for a wide classes of nonlinear parabolic equations of the second orders with a degenerate absorption potential, whose presence plays a significant role for the mentioned nonlinear phenomenon.

This paper is organized as follows:
(1) Introduction.
(2) Brief history of the problem.
(3) The problem statement.
(4) Main Result.
(5) The proof of main result.
(6) Appendix.
Acknowledgements.
References.

## 2. Brief history of the problem

As well known the extinction property means that any solution of the mentioned equation vanishes in $\Omega$ in a finite time.

The questions of a detailed characterization of the effect of extinction of a solution (estimates of the extinction time, asymptotic behavior near the extinction time, etc.) for various classes of semilinear parabolic equations of the diffusion–absorption type were studied in many works (see, e.g., [1]–[6] and references therein). For example, for the following equation

$$\partial_t u - \Delta u + a_0(x)u^\lambda = 0,$$

the extinction property in a finite time was studied by several authors. In fact this type of equation is a simple model to understand some phenomelogical properties of nonlinear heat conduction.

- It is well-known that in case of non-degenerate absorption potential, i.e.,

$$\text{when} \quad a_0(x) \geq c = const > 0$$

the solution $u(t,x)$ of parabolic equation of non-stationary diffusion with double nonlinearity and a degenerate absorption term vanishes for

$$t \geq T_0 = \frac{\|u_0\|_{L_\infty}^{1-\lambda}}{c(1-\lambda)},$$

where $u_0$ is initial data from Cauchy condition. This fact was proved by J. Diaz, L. Veron, S. Antontsev, S.I. Shmarev (see, for example, works [7] and [8]).

It is very important to note here, that on the opposite (see papers of M. Cwikel [9], L. Evans, B. Gidas), if we assume that absorption potential is identically equal to zero: $a_0(x) \equiv 0$ for any $x$ from some connected open subset $\omega \subset \Omega$, then there exists solution which never vanish on whole $\Omega$, as any solution $u(x,t)$ of corresponding equation

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \ \text{ in } \ \omega \times (0, \infty)$$

is bounded from below by

$$\sigma \exp(-t\lambda_\omega)\varphi_\omega(x) \ \text{ on } \ \omega \times (0, \infty),$$

where

$$\sigma = \operatorname{ess}\inf_{\omega} u_0 > 0,$$

$\lambda_\omega$ and $\varphi_\omega$ are first eigenvalue and corresponding eigenfunction of $-\Delta$ in $W_0^{1,2}(\omega)$.

Obviously, that between those two cases there exists a wide class of situations. Thus, an open problem is to find sharp border which distinguish two different properties.

- The paper [10] V.A. Kondratiev and L. Veron must be considered as the first one where the extinction-property in a finite time was systematically investigated for a semilinear parabolic equation in the case of a non-constant strong absorption term, depending both on the media and the temperature

$u$ (i.e. in the case of general potential $a_0 \geq 0$)). They used the fundamental states of the associated Schrödinger operator

$$\mu_n = \inf \left\{ \int_\Omega (|\nabla\psi|^2 + 2^n a_0(x)\psi^2)\, dx \ : \right.$$
$$\left. \psi \in W^{1,2}(\Omega), \quad \int_\Omega \psi^2 dx = 1 \right\}, \quad n \in N,$$

and proved that, if

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^{-1} \ln(\mu_n) < \infty,$$

then Cauchy-Neumann problem for non-stationary diffusion with absorption term with possesses the extinction property.

But, unfortunately, under this form obtained result is not easy to apply.

- Y. Belaud, B. Helffer and L. Veron [11] obtained an explicit sufficient condition in the term of potential $a_0(x)$ which imply that any solution of above equations (with $0 \leq \lambda < 1$) vanishes in finite time. In the work [11] also establish a series of sufficient conditions on $a_0(x)$ which imply that any supersolution with positive initial data does not to vanish identically for any positive t. The method in [11] was based on the so-called semiclassical analysis [12], which uses sharp estimates of the spectrum of some Shrödinger operators and it was also assumed that solution has a certain regularity (as, in particular, in their approach the exact upper estimates of $\|u(t,x)\|_{L_\infty(\Omega)}$) were used). Unfortunately, such an estimate is difficult to obtain or just is unknown for solutions of equations of more general structure than we considered above.
- A. Shishkov and Y. Belaud (see the paper [13]) were the first who investigated the initial-boundary-value problem to mentioned above equation with degenerated absorption potential with the help of two different methods. The first one is a variant of a local energy method (for a radial potential), which uses no "additional" properties of regularity of solutions. And the second one is derive from semiclassical limits of some Shrödinger operators (for any degenerate potential).

So, in this article we consider the behavior of solutions for a much more general class of nonlinear equations which need not satisfy any comparison principle between solutions, namely we study the parabolic equation of non-stationary diffusion with double nonlinearity and a degenerate absorption term:

$$\left(|u|^{q-1}u\right)_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla_x u|^{q-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a_0(x)|u|^{\lambda-1}u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T),$$

where $\Omega$ is bounded domain in $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, $0 \in \Omega$, $a_0(x) \geq d_0 \exp\Big(-\frac{\omega(|x|)}{|x|^{q+1}}\Big)$, $x \in \Omega \setminus \{0\}$, $d_0 = const > 0$, $0 \leq \lambda < q$, $\omega(\cdot) \in C([0,+\infty))$, $\omega(0) = 0$, $\omega(\tau) > 0$ when $\tau > 0$. Modifying the semiclassical analysis [13] and [14], we obtain a condition on the function $\omega(\cdot)$ that ensures the extinction.

## 3. The problem statement

Let $\Omega$ is $C^1$ a bounded connected open set of $\mathbb{R}^N$ ($N \geqslant 1$). The aim of this paper is to investigate the time vanishing properties for energy solutions to initial–boundary value problems for the quasi-linear parabolic equation with neutral diffusion:

$$\begin{cases} \big(|u|^{q-1}u\big)_t - \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(|\nabla_x u|^{q-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + a_0(x)|u|^{\lambda-1}u = 0 \text{ in } \Omega \times (0,+\infty), \\ \hfill \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \times [0,+\infty), \\ \hfill u(x,0) = u_0(x) \text{ on } \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

The parameters of the equation satisfy the following relationships: $0 \leq \lambda < q$, the absorption potential $a_0(x)$ is a non-negative continuous function, and $u_0 \in L_{q+1}(\Omega)$. It is assumed also that the origin 0 belongs to $\Omega$ and that $a_0(x)$ degenerates at the origin.

**Definition 1** *Following [15], an energy solution of problem* (3.1) *is the function*

$$u(t,x) \in L_{q+1,\,loc}\big([0,+\infty); W^1_{q+1}(\Omega)\big)$$

*such that:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(|u|^{q-1}u\big) \in L_{\frac{q+1}{q},\,loc}\big([0,+\infty); \big(W^1_{q+1}(\Omega)\big)^*\big), \quad u(0,x) = u_0(x)$$

*and satisfying the following integral identity:*

$$\int_0^T \langle (|u|^{q-1}u)_t, \varphi\rangle dt + \int_0^T \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N |\nabla_x u|^{q-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0(x)|u|^{\lambda-1}u\varphi\right) dxdt = 0$$

*for arbitrary* $\varphi(t,x) \in L_{q+1,\,loc}([0,+\infty); W^1_{q+1}(\Omega))$ $\forall\, T < +\infty$.

In the integral equality of Definition 1, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ stands for the bilinear operation of pairing of elements of the space $V$ and its dual $V^*$. We note that the existence of an energy (weak) solution of problem (3.1) follows from results in [16].

**Definition 2** *If for any solution* $u(x,t)$ *of the mentioned problem exist* $0 < T < +\infty$ *such that* $u(x,t) = 0$ *a.e. in* $\Omega$ $\forall t \geq T$*, then solution vanishes in* $\Omega$ *in a finite time.*

Let for an arbitrary potential $a_0(x)$ from (3.1) exist radial minorant

$$a_0(x) \geq d_0 \exp\Big( - \frac{\omega(|x|)}{|x|^{q+1}} \Big) := a(|x|) \quad \forall\, x \in \Omega, \quad d_0 = const > 0, \tag{3.2}$$

where $\omega(\cdot)$ is a continuous function on $[0, +\infty)$, that is a continuously differentiable on the $(0, +\infty)$, a nondecreasing function. We also suppose that function $\omega(s)$ from condition (3.2) satisfies the conditions:

$(A)$ $\quad \omega(\tau) > 0 \;\; \forall \tau > 0,$

$(B)$ $\quad \omega(0) = 0,$

$(C)$ $\quad \omega(\tau) \leq \omega_0 = const < \infty \;\; \forall \tau \in \mathbb{R}^1_+$

## 4. Main Result

The main result of the present work is the following theorem.

**Theorem 1** *Let $0 \leq \lambda < q$ in equation from (3.1), initial data $u_0(x) \in L_{q+1}(\Omega)$, function $\omega(\cdot)$ from (3.2) satisfy assumptions (A), (B), (C) and the main condition of Dini type:*

$$\int\limits_{0+} \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau < \infty. \tag{4.1}$$

*Suppose also that $\omega(\cdot)$ satisfies the following technical condition*

$$\omega(\tau) \geq \tau^{q+1-\delta} \qquad \forall\, \tau \in (0, \tau_0), \;\; 0 < \delta < q. \tag{4.2}$$

*Then an arbitrary energy solution $u(x,t)$ of the problem (3.1) vanishes in finite time.*

Note, that Theorem 1 is a generalization of the corresponding statement, which was obtained in [13] and coincides with it under $q = 1$. In addition, also note here that result, which was obtained in [17] by a local energy estimates (where the author established a condition of the Dini type for the function $\omega(\cdot)$:

$$\int\limits_0^c \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau < \infty,$$

ensuring the extinction of an arbitrary solution in a finite time, was found as well) coincides with Theorem 1 of this article. But on the contrary with [17] the proof here is carried out by using a different technique – in the spirit of paper [13]. As we noticed above the proof of Theorem 1 is based on some variant of the semi-classical analysis, which was developed, particulary in [18, 19, 9, 12, 11, 13].

## 5. The proof of main result

First, we introduce for $h>0$ and $\alpha>0$ the following spectral characteristics:

$$\lambda_1(h)=\inf\left\{\int_\Omega |\nabla v|^{q+1}+h^{-(q+1)}a(|x|)|v|^{q+1}\,dx:\ v\in W^{1,q+1}(\Omega),\right.$$
$$\left.||v||_{L_{q+1}(\Omega)}=1\right\},$$

and

$$\mu(\alpha)=\lambda_1(\alpha^{\frac{q-\lambda}{q+1}}).$$

We define

$$r(z)=a^{-1}(z)$$

or equivalently

$$z=a(r(z))\ \text{ and }\ \rho(z)=z(r(z))^{q+1}\ \text{ for }\ z\ \text{ small enough.}$$

**Scheme of the proof**:

**1)** The first step in the proof of Theorem 1 is the two-side estimation of $\rho^{-1}$ in a neighbourhood of zero.

**2)** We will use the following statement for spectral characteristics $\lambda_1(h)$.

**Lemma B** (Corollaries 2.28, 2.31 in [14]) *Under assumptions* $(A)-(C)$ *and* (4.2), *there exist four positives constants* $C_1$, $C_2$, $C_3$ *and* $C_4$ *such that*

$$C_1h^{-(q+1)}\rho^{-1}(C_2h^{q+1})\le\lambda_1(h)\le C_3h^{-(q+1)}\rho^{-1}(C_4h^{q+1})$$

*for* $h>0$ *small enough.*

**3)** Then, due to the two-side estimation of $\rho^{-1}$ from first step of our proof, we continue inequality in Lemma **B** for $h=\alpha^{\frac{q-\lambda}{q+1}}$.

**4)** Finally, we will check up that the condition from the following Theorem is satisfies:

**Theorem BHV** (Theorem 2.2 in [11], p. 50). *Under assumptions* $(A)-(C)$, *if there exists a decreasing sequence* $(\alpha_n)$ *of positive real numbers such that*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\mu(\alpha_n)}\left(\ln(\mu(\alpha_n))+\ln\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right)+1\right)<+\infty,$$

*then an arbitrary energy solution $u(x,t)$ of the problem (3.1) vanishes in finite time.*

**Lemma 1** *Under assumptions (A)-(C) and* (4.2) *there holds*

$$\frac{s}{(1+\gamma)}\ln\left(\frac{d_0}{s}\right)\left[\omega\left(\left(\frac{\omega_0(1+\gamma)}{\ln\left(\frac{d_0}{s}\right)}\right)^{\frac{1}{q+1}}\right)\right]^{-1} \le \rho^{-1}(s) \le$$

$$\le s\ln\left(\frac{d_0}{s}\right)\left[\omega\left(\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{d_0}{s}\right)}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right)\right]^{-1}, \quad (5.1)$$

*for arbitrary $\gamma > 0$, for all $s > 0$ small enough.*

Proof:

Since $\omega$ is a nondecreasing function, from Lemma 4 it follows that

$$\omega\left(\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right) \le \omega(r(z)) \le \omega\left(\left(\frac{\omega_0}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)}\right)^{\frac{1}{q+1}}\right).$$

Therefore, substituting the definition of $\omega(r)$ (see (6.3)), we obtain

$$\omega\left(\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right) \le (r(z))^{q+1}\ln\left(\frac{d_0}{z}\right) \le \omega\left(\left(\frac{\omega_0}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)}\right)^{\frac{1}{q+1}}\right),$$

or

$$\frac{1}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)}\omega\left(\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right) \le (r(z))^{q+1} \le \frac{1}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)}\omega\left(\left(\frac{\omega_0}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)}\right)^{\frac{1}{q+1}}\right).$$

It follows the estimate for $\rho(z)$ (as $\rho(z) = z(r(z))^{q+1}$ for $z$ small enough):

$$z\frac{1}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)}\omega\left(\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right) \le \rho(z) \le z\frac{1}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)}\omega\left(\left(\frac{\omega_0}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)}\right)^{\frac{1}{q+1}}\right). \quad (5.2)$$

By an easy calculation, we have

$$\rho(z)\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)\left[\omega\left(\left(\frac{\omega_0}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)}\right)^{\frac{1}{q+1}}\right)\right]^{-1} \le z \le$$

$$\le \rho(z)\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)\left[\omega\left(\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right)\right]^{-1}. \quad (5.3)$$

Let here and further $\rho^{-1}(s) = z$. Substituting $z = \rho^{-1}(s)$ in (5.3) yields

$$s \ln\left(\frac{d_0}{\rho^{-1}(s)}\right)\left[\omega\left(\left(\frac{\omega_0}{\ln\left(\frac{d_0}{\rho^{-1}(s)}\right)}\right)^{\frac{1}{q+1}}\right)\right]^{-1} \le \rho^{-1}(s) \le$$

$$\le s \ln\left(\frac{d_0}{\rho^{-1}(s)}\right)\left[\omega\left(\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{d_0}{\rho^{-1}(s)}\right)}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right)\right]^{-1}.$$

In consideration of such fact, that from (5.2), we have for $z$ small enough, $\rho(z) \ge z$, which gives $\rho^{-1}(s) \le s$. Since $\omega(\cdot)$ is a nondecreasing function, due to (6.4), we get

$$s \ln\left(\frac{d_0}{s^{-\frac{1}{1+\gamma}}}\right)\left[\omega\left(\left(\frac{\omega_0}{\ln\left(\frac{d_0}{s^{-\frac{1}{1+\gamma}}}\right)}\right)^{\frac{1}{q+1}}\right)\right]^{-1} \le \rho^{-1}(s) \le$$

$$\le s \ln\left(\frac{d_0}{s}\right)\left[\omega\left(\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{d_0}{s}\right)}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right)\right]^{-1},$$

which completes the proof. $\square$

Now let us prove the two-sided estimate for $\mu(\alpha)$.

**Lemma 2** *Under assumptions* $(A)-(C)$ *and* (4.2), *there exist positives constants* $K_1''$, $K_2''$ *and* $K_3''$ *such that*

$$K_1'' \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left[\omega\left(\frac{K_2''}{\left(\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\frac{1}{q+1}}}\right)\right]^{-1} \le \mu(\alpha) \le K_3'' \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{q+1}{\delta}}. \qquad (5.4)$$

*for* $\alpha > 0$ *small enough.*

Proof: Due to the two-side estimation of $\rho^{-1}$ (5.1) from Lemma 1 (it was the first point of our proof), we continue inequality in Lemma **B** for $h = \alpha^{\frac{q-\lambda}{q+1}}$, and we get

$$K_1 \ln\left(\frac{d_0}{C_2 h^{q+1}}\right)\left[\omega\left(\frac{K_2}{\left(\ln\left(\frac{d_0}{C_2 h^{q+1}}\right)\right)^{\frac{1}{q+1}}}\right)\right]^{-1} \leq \lambda_1(h) \leq$$

$$\leq K_3 \ln\left(\frac{d_0}{C_4 h^{q+1}}\right)\left[\omega\left(\frac{1}{\left(\ln\left(\frac{d_0}{C_4 h^{q+1}}\right)\right)^{\frac{1}{\delta}}}\right)\right]^{-1},$$

and since $\omega^{-1}(r) \leq r^{-(q+1-\delta)}$ due to (4.2):

$$\left[\omega\left(\frac{1}{\left(\ln\left(\frac{d_0}{C_4 h^{q+1}}\right)\right)^{\frac{1}{\delta}}}\right)\right]^{-1} \leq \left[\frac{1}{\left(\ln\left(\frac{d_0}{C_4 h^{q+1}}\right)\right)^{\frac{1}{\delta}}}\right]^{-(q+1-\delta)}.$$

Let us consider the right side of inequality:

$$\left[\frac{1}{\left(\ln\left(\frac{d_0}{C_4 h^{q+1}}\right)\right)^{\frac{1}{\delta}}}\right]^{-(q+1-\delta)} = \left(\ln\left(\frac{d_0}{C_4 h^{q+1}}\right)\right)^{-\frac{1}{\delta}\cdot-(q+1-\delta)} = \left(\ln\left(\frac{d_0}{C_4 h^{q+1}}\right)\right)^{\frac{q+1-\delta}{\delta}},$$

as a result:

$$K_1 \ln\left(\frac{d_0}{C_2 h^{q+1}}\right)\left[\omega\left(\frac{K_2}{\left(\ln\left(\frac{d_0}{C_2 h^{q+1}}\right)\right)^{\frac{1}{q+1}}}\right)\right]^{-1} \leq \lambda_1(h) \leq$$

$$\leq K_3 \ln\left(\frac{d_0}{C_4 h^{q+1}}\right)\cdot \ln\left(\frac{d_0}{C_4 h^{q+1}}\right)^{\frac{q+1-\delta}{\delta}},$$

finally, we have

$$K_1 \ln\left(\frac{d_0}{C_2 h^{q+1}}\right)\left[\omega\left(\frac{K_2}{\left(\ln\left(\frac{d_0}{C_2 h^{q+1}}\right)\right)^{\frac{1}{q+1}}}\right)\right]^{-1} \leq \lambda_1(h) \leq$$

$$\leq K_3 \ln\left(\frac{d_0}{C_4 h^{q+1}}\right)^{1+\frac{q+1-\delta}{\delta}},$$

which leads to

$$K_1' \ln\left(\frac{1}{h}\right)\left[\omega\left(\frac{K_2'}{\left(\ln\left(\frac{1}{h}\right)\right)^{\frac{1}{q+1}}}\right)\right]^{-1} \leq \lambda_1(h) \leq K_3' \ln\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{q+1}{\delta}}. \tag{5.5}$$

The real number $\alpha$ is defined by

$$h = \alpha^{\frac{q-\lambda}{q+1}}$$

and thus we complete the proof. □

**Lemma 3** *Under* $(A)-(C)$ *with* (4.2), *if*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\omega\left(\frac{1}{(n\ln n)^{\frac{1}{q+1}}}\right)}{n} < +\infty, \tag{5.6}$$

*then all solutions of* (3.1) *vanish in a finite time. Moreover,*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\omega\left(\frac{1}{(n\ln n)^{\frac{1}{q+1}}}\right)}{n} < +\infty \iff \int_{0+} \frac{\omega(x)}{x}\,dx < +\infty. \tag{5.7}$$

Proof:

From Theorem BHV, if $(\alpha_n)$ is a decreasing sequence of positive real numbers and

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\omega\left(\frac{C_2''}{\left(\ln\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\right)^{\frac{1}{q+1}}}\right)}{\ln\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)} \left[\ln\left(\ln\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\right) + \ln\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) + 1\right] < +\infty,$$

then all the solutions of (3.1) vanish in a finite time.

Let $\alpha_n = n^{-Kn}$ for some $K > 0$, then:

$$\ln\left(\frac{1}{\alpha_n}\right) = Kn\ln n,$$

$$\ln\left(\ln\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\right) \sim \ln n,$$

because

$$\ln\left(\ln\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\right) \sim \ln(Kn\ln n) = \ln n + \ln\ln n + \ln K << \ln n + \ln n + const \sim \ln n,$$

and

$$\ln\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) = -Kn\ln n + K(n+1)\ln(n+1) =$$

$$= Kn\ln(\frac{n+1}{n}) + K\ln(n+1) \sim Kn\frac{1}{n} + K\ln n \sim K\ln n,$$

and, obviously,

$$1 = o(\ln n),$$

which leads us to (5.6).

Let's show that (5.7) is true. In fact, it is easy to see that

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\omega\left(\frac{1}{(n\ln n)^{\frac{1}{q+1}}}\right)}{n} < +\infty \iff \int_{n_0}^{+\infty} \frac{\omega\left(\frac{1}{(t\ln t)^{\frac{1}{q+1}}}\right)}{t}\, dt < +\infty.$$

Now, let

$$x = (t\ln t)^{-\frac{1}{q+1}},$$

then

$$dx = -\frac{1}{(q+1)(t\ln t)^{\frac{1}{q+1}}} \cdot \frac{\ln\, t+1}{\ln t} \cdot \frac{dt}{t},$$

since

$$\frac{ln\, t}{lnt+1} \to 1 \quad \text{as} \quad t \to +\infty,$$

hence

$$\int_{n_0}^{+\infty} \frac{\omega\left(\frac{1}{(t\ln t)^{\frac{1}{q+1}}}\right)}{t}\, dt \quad \text{is finite} \quad \text{if and only if} \quad (q+1)\int_0^c \frac{\omega(x)}{x}\, dx < +\infty,$$

which completes the proof of our main Theorem. □

## 6. Appendix

**Lemma 4** *Let the function* $\omega(\cdot)$ *from* (3.2) *satisfy (A)–(C) and technical condition* (4.2). *Then for* $z = a(r(z)) > 0$ *small enough it is true the following estimate:*

$$\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)}\right)^{\frac{1}{\delta}} \le r(z) \le \left(\frac{\omega_0}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)}\right)^{\frac{1}{q+1}}. \tag{6.1}$$

Proof:

Starting from condition (4.2) ($\omega(\tau) \ge \tau^{q+1-\delta}\ \forall\, \tau \in (0, \tau_0),\ 0 < \delta < q$) and just using assumption (C) on the function $\omega(\cdot)$ ($\omega(\tau) \le \omega_0 = const < \infty\ \forall \tau \in \mathbb{R}^1_+$) we easily arrive at

$$r^{q+1-\delta} \le \omega(r) \le \omega_0. \tag{6.2}$$

Since for $z = a(r(z))$, from (3.2):

$$a(r(z)) = d_0 \exp\Big(-\frac{\omega(r(z))}{(r(z))^{q+1}}\Big), \quad d_0 = const > 0,$$

it follows that

$$\frac{z}{d_0} = \exp\Big( - \frac{\omega(r(z))}{(r(z))^{q+1}}\Big),$$

then

$$\ln\left(\frac{d_0}{z}\right) = -\frac{\omega(r(z))}{(r(z))^{q+1}},$$

which equivalently

$$\ln\left(\frac{d_0}{z}\right) = \frac{\omega(r(z))}{(r(z))^{q+1}}.$$

So, we conclude that

$$\omega(r(z)) = (r(z))^{q+1} \ln\left(\frac{d_0}{z}\right). \tag{6.3}$$

Due to (6.2) and (6.3) it is easy to see the relationship

$$r(z)^{q+1-\delta} \le (r(z))^{q+1} \ln\left(\frac{d_0}{z}\right) \le \omega_0,$$

which completes the proof of Lemma 4, because the last one means:

$$\frac{r(z)^{q+1-\delta}}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)} \le (r(z))^{q+1}$$

and

$$(r(z))^{q+1} \ln\left(\frac{d_0}{z}\right) \le \omega_0.$$

This fact give us

$$\frac{1}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)} \le (r(z))^{\delta}$$

and

$$(r(z))^{q+1} \le \frac{\omega_0}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)} \qquad \text{respectively.}$$

Hence,

$$\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)}\right)^{\frac{1}{\delta}} \le r(z) \quad \text{and} \quad r(z) \le \left(\frac{\omega_0}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)}\right)^{\frac{1}{q+1}}.$$

□

**Lemma 5** *Let the function* $\omega(\cdot)$ *from* (3.2) *satisfy (A)–(C) and technical condition* (4.2)*. Then the following inequality hold for any* $\gamma = cont > 0$*:*

$$\rho^{-1}(s) \le s^{\frac{1}{1+\gamma}}. \tag{6.4}$$

Proof: By using (6.1) and $\rho(z) = z(r(z))^{q+1}$,

$$\rho(z) \geq z \left( \frac{1}{\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)} \right)^{\frac{q+1}{\delta}} \Longleftrightarrow \frac{1}{\rho(z)} \leq \frac{1}{z} \left( \ln\left(\frac{d_0}{z}\right)\right)^{\frac{q+1}{\delta}},$$

or equivalently,

$$\ln\left(\frac{1}{\rho(z)}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{q+1}{\delta} \ln\left(\ln\left(\frac{d_0}{z}\right)\right).$$

Due to

$$\ln(\ln(z^{-1})) << \ln z^{-1} \quad \text{for} \quad z \quad \text{small enough},$$

we obtain

$$\ln\left(\frac{1}{\rho(z)}\right) \leq (1+\gamma)\ln\left(\frac{1}{z}\right) \Longleftrightarrow \rho(z) \geq z^{1+\gamma} \Longrightarrow \rho^{-1}(s) \leq s^{\frac{1}{1+\gamma}}, \tag{6.5}$$

which completes the proof of Lemma 5. □

**Acknowledgements.**
This work was financial supported in part by Akhiezer Fund.
The author thank V.I. Korobov whose critical revision of the paper allows to improve it essentially.
The author is very grateful to V.A. Gorkavyy and V.A. Rybalko for useful discussions and valuable comments.

REFERENCES

1. Bandle C., Stakgold I. The formation of the dead core in parabolic reaction-diffusion problems // Trans. Amer. Math. Soc., 1984. – V. 286, **1**. – P. 275–293.
2. Chen Xu-Yan, Matano H., Mimura M. Finite-point extinction and continuity of interfaces in a nonlinear diffusion equation with strong absorption // J. Reine Angew. Math., 1995. – V. 459, **1**. – P. 1–36.
3. Friedman A., Herrero M.A. Extinction properties of semilinear heat equations with strong absorption // J. Math. Anal. Appl., 1987. – V. 124, **2**. – P. 530–546.
4. Knerr B.F. The behavior of the support of solutions of the equation of nonlinear heat conduction with absorption in one dimension // Trans. Amer. Math. Soc., 1979. – V. 249, **2**. – P. 409–424.
5. Payne L.E., Improperly Posed Problems in Partial Differential Equations. – SIAM, Philadelphia, 1975. – 62 p.
6. Straughan B. Instability, Nonexistence and Weighted Energy Methods in Fluid Dynamics and Related Theories. – Pitman, London, 1982. – 169 p.

7. Diaz J., Veron L. Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations. // Trans. Amer. Math. Soc., 1985. – **290:2**. – P. 787–814.
8. Antontsev S., Diaz J., Shmarev S.I. The Support Shrinking Properties for Solutions of Quasilinear Parabolic Equations with Strong Absorption Terms. // Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse Math., 1995. – **6:4**. – P. 5–30.
9. Cwickel M. Weak type estimates for singular value and the number of bound states of Schrödinger operator // Ann. Math., 1977. – **106**. – P. 93–100.
10. Kondratiev V.A., Véron L. Asymptotic behaviour of solutions of some nonlinear parabolic or elliptic equations. // Asymptotic Analysis., 1997. – **14**. – P. 117-156.
11. Belaud Y. Helffer B., Véron L. Long-time vanishing properties of solutions of sublinear parabolic equations and semi-classical limit of Schrцdinger operator // Ann. Inst. Henri Poincarré Anal. nonlinear, 2001. – V. 1, **18**. – P. 43–68.
12. Helffer B. Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications. – Lecture Notes in Math. 1336, Springer-Verlag, 1988. – 107 p.
13. Belaud Y., Shishkov A. Long-time extinction of solutions of some semilinear parabolic equations // J. Differ. Equat., 2007. – **238**. – P. 64–86.
14. Belaud Y. Asymptotic estimates for a variational problem involving a quasilinear operator in the semi-classical limit // Annals of global analysis and geometry, 2004. – **26**. – P. 271 – 313.
15. Alt H.W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z., 1983. – V. 183, **3**. – P. 311–341.
16. Bernis F. Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domain // Math. Am., 1988. – V. 279, **3**. – P. 373–394.
17. Stiepanova K.V. Extinction of solutions for parabolic equations with double nonlinearity and a degenerate absorption potential // Ukrainian Mathematical Journal, 2014. – V. 66, **1**. – P. 89–107.
18. Rosenblyum G. V. Distribution of the discrete spectrum of singular differential operators // Doklady Akad. Nauk USSR, 1972. – **202**. – P. 1012–1015.
19. Lieb E.H., Thirring W. Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrцdinger Hamiltonian and their relations to Sobolev Inequalities // In Studies in Math. Phys., essay in honour of V. Bargmann, Princeton Univ. Press, 1976. – P. 203–237.

Article history: Received: 27 September 2016; Final form: 28 November 2016; Accepted: 12 December 2016.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 84, 2016, с.46–60

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”
Vol. 84, 2016, p. 46–60
DOI: 10.26565/2221-5646-2016-84-05

УДК 537.84

# Неустойчивость Розенцвейга в двухслойной системе несмешивающихся намагничивающихся жидкостей

И. Д. Борисов, С. И. Поцелуев

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61002, Харьков, Украина*
*dptmech@univer.kharkov.ua*

Рассматривается устойчивость равновесия двухслойной системы несмешивающихся намагничивающихся жидкостей, разделенных тонкой горизонтальной пластиной с отверстием. Предложен численный метод построения границы области устойчивости в пространстве физических параметров рассматриваемой системы. В случае кругового отверстия проведены расчеты границы области устойчивости и мод наиболее быстро растущих возмущений.
*Ключевые слова:* магнитная жидкость, равновесные формы, неустойчивость равновесия.

І. Д. Борисов, С. І. Поцелуєв. **Нестійкість Розенцвейга в двошаровій системі незмішуваних намагнічуваних рідин.** Розглядається стійкість рівноваги двошарової системи незмішуваних намагнічуваних рідин, розділених тонкою горизонтальною пластиною з отвором. Запропоновано чисельний метод побудови границі області стійкості в просторі фізичних параметрів даної системи. Для випадку кругового отвору проведені розрахунки границі області стійкості і мод найбільш швидко зростаючих збурень.
*Ключові слова:* магнітна рідина, рівноважні форми, нестійкість рівноваги.

I. D. Borisov, S. I. Potseluiev. **Rozensweig instability of two-layer system of immiscible ferrofluid.** The stability of equilibrium for two-layer system of immiscible ferrofluids, separated by thin horizontal plate with a hole is considered. A numerical method for calculation of stability boundary in the space of dimensionless physical parameters of the system is proposed. In the case of circular hole the stability boundary and the most rapidly growing perturbations were calculated.
*Keywords:* ferrofluid, equilibrium forms, stability of equilibrium.
*2000 Mathematics Subject Classification:* 76W05

## ВВЕДЕНИЕ

Неустойчивость горизонтального слоя магнитной жидкости (МЖ) в вертикальном магнитном поле (неустойчивость Розенцвейга) является интересным примером процессов самоорганизации в физических системах. С увеличение магнитного поля горизонтальная свободная поверхность МЖ, теряя устойчивость, сменяется упорядоченной структурой конусообразных пиков с гексагональным расположением внутри круглой кюветы. Исследованию неустойчивости Розенцвейга посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ; библиографию этих работ и изложение основных результатов можно найти, обратившись к монографиям [1 – 4].

В работах [5 – 8], выполненных в последнее время, уточнены критические значения индукции поля, с превышением которых на изначально плоской поверхности МЖ образуются пространственные структуры, определены инкременты наиболее быстро растущих возмущений, проведено сопоставление теоретических результатов с результатами экспериментов и численного моделирования.

В сильном магнитном поле тонкие слои МЖ могут распадаться на отдельные капли, расположенные в узлах гексагональной решетки. Специфические особенности распада тонких слоев МЖ исследовались в работах [9 – 12].

Влияние горизонтального магнитного поля на устойчивость равновесия МЖ рассматривалось в [13 – 14]. Теоретически и экспериментально была доказана возможность стабилизации поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей (верхний слой – более тяжелая жидкость) вращающимся магнитным полем.

Одним из основных факторов, определяющих процессы перехода к новому состоянию равновесия при потере устойчивости, является ограниченность свободной поверхности МЖ [5, 15]. В данной работе рассматривается влияние этого фактора на примере системы несмешивающихся жидкостей, разделенных тонкой горизонтальной пластиной с отверстием. Подробно исследуется случай кругового отверстия. Предложен метод построения границы области устойчивости в пространстве физических параметров рассматриваемой системы. Найдены наиболее быстро растущие моды возмущений, определяющие начальную стадию эволюции системы в закритическом магнитном поле.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двухслойную систему несмешивающихся жидкостей, разделенных горизонтальной пластиной с отверстием (см. рис.1). Обозначим через $\Omega_1, \Omega_2$ области, занимаемые нижней и верхней жидкостями в состоянии равновесия, через $\Omega_3, \Omega_4$ – полубесконечные области под нижней и над верхней жидкостями. Пусть $h_1, h_2$ – толщина нижнего и верхнего слоев жидкостей, соответственно. Толщину пластины $\delta$, разделяющей жидкости, будем считать малой по сравнению с $h_1, h_2$. Это позволяет отождествлять пластину с ее срединной поверхностью, полагая $\delta = 0$.

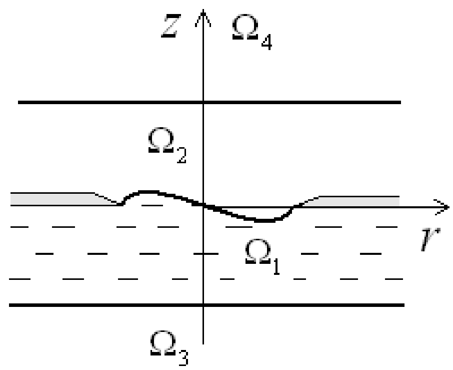


Рис. 1. К постановке задачи

Среду в каждой из областей $\Omega_k, k \in \overline{1,4}$ будем считать однородно намагничивающейся. Связь между индукцией $\vec{B}$ и напряженностью $\vec{H}$ магнитного поля в $\Omega_k$ запишем в виде

$$\vec{B}^{(k)} = \mu_0 \mu^{(k)}(H^{(k)})\vec{H}^{(k)} \quad k \in \overline{1,4}. \tag{1}$$

Здесь $\mu_0$ – абсолютная магнитная проницаемость вакуума, $\mu^{(k)}(H^{(k)})$ – относительная магнитная проницаемость $k$-й среды. Функции $\mu^{(k)} : H \to \mu^{(k)}(H), k = \overline{1,4}$ предполагаются заданными. В (1) и везде далее верхний индекс в круглых скобках означает номер области, к которой относится та или иная величина.

Горизонтальная поверхность раздела $z = 0$ и однородное магнитное поле $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ ($B_0 = const, \vec{e}_z$ – орт вертикальной оси $z$) отвечают одному из возможных состояний равновесия жидкостей. Рассмотрим движение жидкостей вблизи этого равновесного состояния. Вязкостью жидкостей будем пренебрегать. В этом случае эволюция поверхности раздела $\Gamma$ определяется потенциальными составляющими поля скоростей $\vec{v}^{(k)} = \nabla(\partial\varphi^{(k)}/\partial t), k = 1, 2$, где $\varphi^{(k)}(t, \vec{x})$ – потенциал малых смещений частиц $k$-й жидкости. Обозначим через $\zeta(t, x, y)$ отклонения поверхности $\Gamma$ от горизонтального уровня, через $\psi^{(k)}(t, \vec{x}), k = \overline{1,4}$ – возмущения потенциала магнитного поля в $\Omega_k$. В линейном приближении движение жидкостей вблизи равновесного состояния описывается следующей системой уравнений (относительно $\varphi, \zeta, \psi$):

$$\triangle\varphi^{(k)}(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_k, k \in \overline{1,2}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial z} = \zeta \quad \text{на}\ \Gamma; \tag{3}$$

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad \text{на}\ S_{12} \cup S_{13}, \quad \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial z} = 0 \quad \text{на}\ S_{12} \cup S_{24}; \tag{4}$$

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial t^2} - \rho_2 \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial t^2} + \sigma(-\triangle_\Gamma + b)\zeta - \tag{5}$$

$$-B_0 \left( q_1 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} - q_2 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z} \right) = c_\Gamma(t) \quad \text{на } \Gamma;$$

$$\zeta = 0 \quad \text{на } \partial\Gamma; \tag{6}$$

$$\operatorname{div} \mu_k \widehat{\nabla}^{(k)} \psi^{(k)} = 0, \quad \text{в} \quad \Omega_k, \quad k \in \overline{1,4}; \tag{7}$$

$$\psi^{(1)} - \psi^{(2)} = \left( H_0^{(1)} - H_0^{(2)} \right) \zeta, \quad \mu_1 q_1 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} = \mu_2 q_2 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z} \quad \text{на } \Gamma; \tag{8}$$

$$\psi^{(j)} = \psi^{(k)}, \quad \mu_j q_j \frac{\partial \psi^{(j)}}{\partial z} = \mu_k q_k \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial z} \quad \text{на } S_{jk}, \quad jk = 12, 13, 24; \tag{9}$$

$$\psi(t, \vec{x}) \to 0 \quad \text{при} \quad |\vec{x}| \to \infty; \tag{10}$$

$$\zeta|_{t=0} = \zeta^0(x, y), \quad \left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|_{t=0} = \zeta^1(x, y) \quad \text{на } \Gamma; \tag{11}$$

$$b := \frac{(\rho_1 - \rho_2)g}{\sigma}, \ \ \widehat{\nabla}^{(k)}(\cdot) := \nabla(\cdot) + \frac{\mu_H^{(k)}}{\mu_k} \vec{H}_0^{(k)} \frac{\partial(\cdot)}{\partial z},$$

$$q_k := 1 + \frac{\mu_H^{(k)} H_0^{(k)}}{\mu_k}, \quad \mu_k := \mu^{(k)}(H_0^{(k)}), \quad \mu_H^{(k)} := \left. \frac{d\mu^{(k)}}{dH} \right|_{H = H_0^{(k)}}, \ k \in \overline{1,4}.$$

Здесь $\rho_k$ – плотность $k$-й жидкости, $\sigma$ - коэффициент поверхностного натяжения на поверхности раздела жидкостей $\Gamma$; $H_0^{(k)} (= const)$ – напряженность магнитного поля в области $\Omega_k$ в состоянии равновесия; $S_{jk}$ – твердая поверхность раздела $j$–й и $k$–й областей; $\Delta_\Gamma$ – оператор Лапласа на $\Gamma$; $\zeta^0, \zeta^1$ – начальные отклонения и скорости точек поверхности раздела жидкостей, $c_\Gamma(t)$ - произвольная функция времени $t$.

Функция $\zeta(t, x, y)$ должна удовлетворять условию

$$\int_\Gamma \zeta(t, x, y) d\Gamma = 0 \quad \forall t \geq 0. \tag{12}$$

Уравнения (2) – следствие потенциальности движения и условия несжимаемости жидкостей. Равенства (3) представляют собой линеаризованные кинематические условия на поверхности Γ, равенства (4) – условия непроницаемости твердых поверхностей, смоченных жидкостями. Уравнение (5) получено линеаризацией динамического условия для скачка нормальных напряжений на поверхности Γ, обусловленного капиллярными силами и намагничиванием жидкостей. Условие (6) означает, что контур $\partial\Gamma$, совпадающий с острой кромкой пластины, в процессе колебаний жидкостей остается неподвижным. Это условие подтверждается экспериментально для достаточно малых внешних возмущений. Уравнения (7)– (10) получены линеаризацией уравнений и граничных условий для потенциала магнитного поля.

## 2. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

**2.1. Общие свойства спектра собственных значений и собственных мод колебаний.** Свободные колебания жидкостей описываются решениями задачи (2)–(10), зависящими от времени по закону

$$(\zeta, \varphi, \psi) = (\zeta(x, y), \varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x})) \exp(i\omega t) \tag{13}$$

где $\zeta(x, y), \varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x})$ – моды колебаний поверхности раздела, потенциала смещений частиц жидкостей и потенциала возмущений напряженности магнитного поля, $\omega$ – круговая частота колебаний. Подставляя (13) в (5), получим:

$$\sigma(-\triangle_\Gamma + b)\zeta - B_0 \left( q_1 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} - q_2 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z} \right) = \tag{14}$$
$$= \lambda(\rho_1 \varphi^{(1)} - \rho_2 \varphi^{(2)}) \quad \text{на } \Gamma \quad (\lambda := \omega^2).$$

Следуя [17], можно показать, что спектральная задача (2)– (10), где вместо (5) следует принять условие (14), имеет дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ вещественных собственных значений, все собственные значения $\lambda_k$ конечной кратности, причем $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Собственные значения $\lambda_k$ будем нумеровать в порядке возрастания с учетом их кратности. Собственные моды колебаний поверхности раздела жидкостей, отвечающие $\lambda_k$, обозначим через $\zeta_k$. Аналогичные обозначения $\varphi_k$ и $\psi_k$ введем для собственных мод потенциала смещений частиц жидкостей и потенциала магнитного поля. Обозначим через $\mathcal{H}(\Gamma)$ подпространство функций, ортогональных константам в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(\Gamma)$. Можно показать, что система собственных функции $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве $\mathcal{H}(\Gamma)$.

Для построения решений (13) рассмотрим вначале вспомогательную спектральную краевую задачу (относительно $u(x, y), \nu, \eta = \text{const}$);

$$-\triangle_\Gamma u(x, y) + \eta = \nu\, u(x, y) \quad \text{в} \quad \Gamma, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma, \quad \int_\Gamma u\, d\Gamma = 0. \tag{15}$$

Как известно, задача (15) имеет дискретный спектр собственных значений $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$, все собственные значения $\nu_k$ положительны, конечной кратности, $\nu_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Собственные функции $u_k$ образуют ортогональный базис $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $\mathcal{H}(\Gamma)$,

$$\int_\Gamma u_j u_k\, d\Gamma = 0, \int_\Gamma \triangledown_\Gamma u_j \cdot \triangledown_\Gamma u_k d\Gamma = 0 \quad \forall j \neq k. \tag{16}$$

Здесь $\nabla_\Gamma(\cdot)$ – поверхностный градиент функций, определенных на $\Gamma$.

Обозначим через $\varphi_k^{(1)}(\vec{x}), \varphi_k^{(2)}(\vec{x})$ решения задач (2)-(4) при $\zeta = u_k(x, y)$. Введем функции $\psi_k(\vec{x}) := (\psi_k^{(1)}(\vec{x}), \psi_k^{(2)}(\vec{x}), \psi_k^{(3)}(\vec{x}))$ – решения задачи (7)-(10)

при $\zeta = u_k(x,y)$. Приближенное решение спектральной задачи о собственных колебаниях жидкостей будем отыскивать в виде:

$$\zeta \simeq \sum_{k=1}^{N} a^k u_k, \quad \varphi \simeq \sum_{k=1}^{N} a^k \varphi_k, \quad \psi \simeq \sum_{k=1}^{N} a^k \psi_k, \tag{17}$$

где $a^k, k \in \overline{1,N}$ – заранее неизвестные коэффициенты, а число $N$ в (17) выбирается из условий практической сходимости вычислительного процесса, описанного ниже.

Коэффициенты $a^k$ и приближенные собственные значения $\lambda^N$ будем определять как решения алгебраической спектральной задачи:

$$\sigma(\mathcal{B}^N + b\mathcal{D}^N)a - B_0\mathcal{M}^N a = \lambda^N \mathcal{C}^N a, \tag{18}$$

$$\mathcal{B}^N := [b_{jk}]_{j,k=1}^N,\ \mathcal{C}^N := [c_{jk}]_{j,k=1}^N,\ \mathcal{D}^N := [d_{jk}]_{j,k=1}^N,\ \mathcal{M}^N := [m_{jk}]_{j,k=1}^N,$$
$$a := (a^1, a^2, \ldots, a^N)^\tau.$$

Здесь индекс $\tau$ означает операцию транспонирования, переводящую вектор–строку в вектор–столбец. Элементы матриц в (18) определяются следующими равенствами:

$$b_{jk} := -\int_\Gamma u_j \triangle_\Gamma u_k d\Gamma = \int_\Gamma \nabla_\Gamma u_j \cdot \nabla_\Gamma u_k d\Gamma;\ c_{jk} := \int_\Gamma u_j \left(\rho_1 \varphi_k^{(1)} - \rho_2 \varphi_k^{(2)}\right) d\Gamma;$$

$$d_{jk} := \int_\Gamma u_j u_k d\Gamma; \quad m_{jk} := \int_\Gamma u_j \left( q_1 \frac{\partial \psi_k^{(1)}}{\partial z} - q_2 \frac{\partial \psi_k^{(2)}}{\partial z} \right) d\Gamma. \tag{19}$$

Уравнения системы (18) легко следуют из динамического условия (14) в силу условий ортогональности (16).

Матрицы $\mathcal{B}^N$ и $\mathcal{D}^N$ – диагональные, что легко следует из (16). Выражения для элементов матриц $\mathcal{C}^N$ и $\mathcal{M}^N$ приводятся к виду:

$$c_{jk} := \sum_{m=1}^{2} \int_{\Omega_m} \rho_m \nabla \varphi_j^{(m)} \cdot \nabla \varphi_k^{(m)} d\Omega, \quad m_{jk} := \sum_{m=1}^{4} \int_{\Omega_m} \mu_0 \mu_m \nabla \psi_j^{(m)} \cdot \widehat{\nabla} \psi_k^{(m)} d\Omega. \tag{20}$$

Отсюда следует симметричность и положительная определенность матриц $\mathcal{C}^N$ и $\mathcal{M}^N$.

Обозначим через $\lambda_j^N, a_j := (a_j^1, a_j^2, \ldots, a_j^N)^\tau$, $j \in \overline{1,N}$ – собственные значения и собственные векторы задачи (18). Введем функции

$$\zeta_j^N = \sum_{k=1}^{N} a_j^k u_k, \quad \varphi_j^N = \sum_{k=1}^{N} a_j^k \varphi_k, \quad \psi_j^N = \sum_{k=1}^{N} a_j^k \psi_k. \tag{21}$$

Можно показать, что $\lambda_j^N \to \lambda_j$ при $N \to \infty$, а функции $\zeta_j^N(x,y)$ и их первые производные сходятся в норме пространства $\mathcal{L}_2(\Gamma)$ к собственным функциям задачи о свободных колебаниях жидкостей $\zeta_j(x,y)$ и их производным по переменным $x$ и $y$.

**2.2. Случай кругового отверстия.** Рассмотрим случай кругового отверстия радиуса R. Перейдем к безразмерным переменным, полагая

$$\varphi_{nk}(r,\vartheta) = R^2\overline{\varphi}_{nk}(\overline{r},\vartheta), \quad \psi_{nk}(r,\vartheta) = \mu_0^{-1}B_0R\overline{\psi}_{nk}(\overline{r},\vartheta),$$

$$\lambda = \sigma\rho_1^{-1}R^{-3}\overline{\lambda}, \quad r = R\overline{r}, \quad h_1 = R\overline{h}_1, \quad h_2 = R\overline{h}_2.$$

Все приводимые ниже выражения вплоть до раздела 3.2 записаны в безразмерной форме, причем черта в обозначениях безразмерных величин отброшена.

В рассматриваемом случае собственные значения и собственные функции задачи (15) легко определяются в явном виде:

$$\nu_{nk} = (æ_{nk})^2, \quad u_{0k}(r) = k_{0k}(J_0(æ_{0k}r) - J_0(æ_{0k})), \tag{22}$$

$$u_{nk}(r,\vartheta) = k_{nk}J_n(æ_{nk}r)\cos n(\vartheta-\vartheta_0),\ n = 0,1,2,\ldots,\ k = 1,2,\ldots,$$

где $J_n(\cdot)$ – функция Бесселя 1-го рода $n$– го порядка, $r,\vartheta$ – полярные координаты, $\vartheta_0$ – произвольная константа, $k_{nk}$ – нормирующие коэффициенты, $æ_{nk}$– положительные корни уравнений:

$$2J_1(æ_{0k})/æ_{0k} - J_0(æ_{0k}) = 0, \quad J_n(æ_{nk}) = 0, \quad n,k = 1,2,\ldots. \tag{23}$$

Здесь и далее, в отличие от предыдущего раздела, используется двойная индексация собственных значений и собственных функций задачи (15).

Отметим, что корни первого из уравнений (23) в точности совпадают с корнями второго уравнения (23) при $n = 2$, т.е. $æ_{0k} = æ_{2k}\,\forall k = 1,2,\ldots$, что легко следует из рекуррентного соотношения для функций Бесселя: $J_n(r) = 2(n-1)J_{n-1}(r)/r - J_{n-2}(r)$ при $n = 2$.

Функции $u_{nk}(r,\vartheta)$ являются линейной комбинацией собственных функций $u^c_{nk}(r,\vartheta)$ и $u^s_{nk}(r,\vartheta)$,

$$\left.\begin{array}{l} u^c_{nk}(r,\vartheta) \\ u^s_{nk}(r,\vartheta) \end{array}\right\} := k_{nk}J_n(æ_{nk}r)\left\{\begin{array}{l} \cos(n\vartheta), \\ \sin(n\vartheta). \end{array}\right.$$

Решения краевых задач (2)–(4) при $\zeta = u_{nk}(r,\vartheta)$ представим в виде:

$$\varphi^{(m)}_{nk}(r,\vartheta,z) = \overset{\circ}{\varphi}{}^{(m)}_{nk}(r,z)\cos n(\vartheta-\vartheta_0),\ m = 1,2. \tag{24}$$

Функции $\overset{\circ}{\varphi}{}^{(1)}_{nk}(r,z)$, $\overset{\circ}{\varphi}{}^{(2)}_{nk}(r,z)$ будем отыскивать в виде разложений в интеграл Ганкеля [16] по переменной $r$:

$$\overset{\circ}{\varphi}{}^{(1)}_{nk}(r,z) := \int_0^\infty f_{nk}(s)\frac{\mathrm{ch}(s(h_1+z))}{\mathrm{sh}(sh_1)}J_n(sr)\,ds \quad (-h_1 < z < 0),$$

$$\overset{\circ}{\varphi}{}^{(2)}_{nk}(r,z) := -\int_0^\infty f_{nk}(s)\frac{\mathrm{ch}(s(h_2-z))}{\mathrm{sh}(sh_2)}J_n(sr)\,ds \quad (0 < z < h_2). \tag{25}$$

Функции $\varphi_{nk}^{(m)}(r,\vartheta,z)$ удовлетворяют уравнениям (2) и граничным условиям (4) на поверхностях $S_{13}, S_{24}$. Удовлетворяя условиям (3), (4) на поверхностях $\Gamma$ и $S_{12}$, получим:

$$\int_0^\infty f_{nk}(s)J_n(sr)\,s\,ds = \begin{cases} u_{nk}(r) & (0<r<1), \\ 0 & (1<r<\infty). \end{cases} \tag{26}$$

Воспользуемся формулами обращения для преобразований Ганкеля [16]:

$$f_{nk}(s) = \int_0^1 u_{nk}(r)J_n(sr)\,r\,dr \tag{27}$$

Подставляя (22) в (27), получим:

$$f_{0k}(s) := \frac{k_{0k}æ_{0k}J_1(æ_{0k})J_2(s)}{s^2-æ_{0k}^2},\, f_{nk}(s) := -\frac{k_{nk}æ_{nk}J_{n+1}(æ_{nk})J_n(s)}{s^2-æ_{nk}^2}\ (n\neq 0). \tag{28}$$

Решения краевой задачи (7)–(10) при $\zeta = u_{nk}(r,\vartheta)$ отыскиваем в виде аналогичном (24):

$$\psi_{nk}^{(m)}(r,\vartheta,z) = \overset{\circ}{\psi}{}_{nk}^{(m)}(r,z)\cos n(\vartheta-\vartheta_0),\ m\in\overline{1,4}. \tag{29}$$

Представляя функции $\overset{\circ}{\psi}{}_{nk}^{(m)}(r,z)$, $m\in\overline{1,4}$ в виде разложений в интеграл Ганкеля по переменной $r$ и удовлетворяя условиям (7)–(10) при $\zeta = u_{nk}(r,\vartheta)$, получим:

$$\begin{gathered}
\overset{\circ}{\psi}{}_{nk}^{(1)}(r,z) = \int_0^\infty A_{nk}^{(1)}(s)\left[\operatorname{ch}\frac{(h_1+z)s}{\sqrt{q_1}} + \frac{\mu_3}{\mu_1}\sqrt{\frac{q_3}{q_1}}\operatorname{sh}\frac{(h_1+z)s}{\sqrt{q_1}}\right]J_n(rs)\,s\,ds, \\
\overset{\circ}{\psi}{}_{nk}^{(2)}(r,z) = \int_0^\infty A_{nk}^{(2)}(s)\left[\operatorname{ch}\frac{(h_2-z)s}{\sqrt{q_2}} + \frac{\mu_4}{\mu_2}\sqrt{\frac{q_4}{q_2}}\operatorname{sh}\frac{(h_2-z)s}{\sqrt{q_2}}\right]J_n(rs)\,s\,ds, \\
\overset{\circ}{\psi}{}_{nk}^{(3)}(s,z) = \int_0^\infty A_{nk}^{(3)}(s)\exp\frac{(h_1+z)s}{\sqrt{q_3}}J_n(rs)\,s\,ds, \\
\overset{\circ}{\psi}{}_{nk}^{(4)}(s,z) = \int_0^\infty A_{nk}^{(4)}(s)\exp\frac{(h_2-z)s}{\sqrt{q_4}}J_n(rs)\,s\,ds, \\
k=1,2,\ldots,\quad n=0,1,2,\ldots,
\end{gathered} \tag{30}$$

где

$$A_{nk}^{(1)}(s) = A_{nk}^{(3)}(s) = -\frac{(\mu_1-\mu_2)\sqrt{q_2}}{\mu_1}\frac{f_{nk}(s)S_2(s)}{D(s)},$$

$$A_{nk}^{(2)}(s) = A_{nk}^{(4)}(s) = \frac{(\mu_1-\mu_2)\sqrt{q_1}}{\mu_2}\frac{f_{nk}(s)S_1(s)}{D(s)},$$

$$D(s) = \mu_1\sqrt{q_1}S_1(s)C_2(s) + \mu_2\sqrt{q_2}S_2(s)C_1(s),$$

$$C_1(s) = \operatorname{ch}\frac{h_1 s}{\sqrt{q_1}} + \frac{\mu_3}{\mu_1}\sqrt{\frac{q_3}{q_1}}\operatorname{sh}\frac{h_1 s}{\sqrt{q_1}}, \quad C_2(s) = \operatorname{ch}\frac{h_2 s}{\sqrt{q_2}} + \frac{\mu_4}{\mu_2}\sqrt{\frac{q_4}{q_2}}\operatorname{sh}\frac{h_2 s}{\sqrt{q_2}},$$
$$S_1(s) = \operatorname{sh}\frac{h_1 s}{\sqrt{q_1}} + \frac{\mu_3}{\mu_1}\sqrt{\frac{q_3}{q_1}}\operatorname{ch}\frac{h_1 s}{\sqrt{q_1}}, \quad S_2(s) = \operatorname{sh}\frac{h_2 s}{\sqrt{q_2}} + \frac{\mu_4}{\mu_2}\sqrt{\frac{q_4}{q_2}}\operatorname{ch}\frac{h_2 s}{\sqrt{q_2}}.$$

Уравнения (18) распадаются на независимые уравнения при каждом $n$:

$$(\mathcal{B}_n^N + \mathrm{Bo}\mathcal{D}_n^N - \mathrm{W}\mathcal{M}_n^N)a = \lambda_n^N \mathcal{C}_n^N a, \quad n = 0, 1, 2, \dots ; \tag{31}$$
$$\mathrm{Bo} := \frac{g(\rho_1 - \rho_2)R^2}{\sigma}, \ \mathrm{W} := \frac{B_0^2(\mu_1 - \mu_2)^2\sqrt{q_1 q_2}R}{\mu_0\mu_1\mu_2\sigma}.$$

Безразмерные параметры Bo (– число Бонда) и W характеризуют отношение сил, обусловленных гравитационным и магнитным полями, к капиллярным силам, соответственно.

Элементы матриц $\mathcal{B}_n^N$ и $\mathcal{D}_n^N$ имеют вид:

$$b_{jk} = (æ_{nj})^2 d_{jk}, \quad d_{jk} := \frac{1}{2}(k_{nj})^2 J_{n+1}^2(æ_{nj})\delta_{jk}, \tag{32}$$
$$j, k \in \overline{1, N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Подставляя (24) в (19) и учитывая при этом (25), (28), после несложных преобразований получим:

$$c_{jk} = k_{nj}k_{nk}\int_0^\infty \left[\operatorname{cth}(h_1 s) + \frac{\rho_2}{\rho_1}\operatorname{cth}(h_2 s)\right] f_{nj}(s) f_{nk}(s) ds, \tag{33}$$

$$j, k \in \overline{1, N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Подставляя (29) в последнее из выражений (19), будем иметь:

$$m_{jk} = k_{nj}k_{nk}\int_0^\infty \frac{S_1(s)S_2(s)}{D(s)} f_{nj}(s) f_{nk}(s) s^2 ds, \tag{34}$$
$$j, k \in \overline{1, N}, n = 0, 1, 2, \dots .$$

Обозначим через $\lambda_{nj}^N$, $a_{nj} := (a_{nj}^1\ , a_{nj}^2, \dots, a_{nj}^N)^\tau$, $j \in \overline{1, N}$ собственные значения и собственные векторы спектральной задачи (31). Будем считать, что собственные значения $\lambda_{nj}^N$ при каждом $n$ упорядочены по $j$, так что $\lambda_{n1}^N \leq \lambda_{n2}^N \dots \leq \lambda_{nN}^N$. Согласно (21) приближенные выражения для собственных мод колебаний поверхности раздела жидкостей имеют вид:

$$\zeta_{nj} = \sum_{k=1}^N a_{nj}^k u_{nk}(r, \vartheta), \quad j \in \overline{1, N}, n = 0, 1, 2, \dots . \tag{35}$$

Функции $\zeta_{nj}$ являются линейными комбинациями функций

$$\zeta_{nj}^c := \sum_{k=1}^N a_{nj}^k u_{nk}^c(r, \vartheta), \quad \zeta_{nj}^s := \sum_{k=1}^N a_{nj}^k u_{nk}^s(r, \vartheta), \quad j \in \overline{1, N}, n = 0, 1, 2, \dots . \tag{36}$$

Собственные векторы задачи (31) можно выбирать так, чтобы выполнялись условия:

$$\sum_{p,q=1}^{N} c_{pq} a_{nj}^{p} a_{nk}^{q} = \delta_{jk}, \sum_{p,q=1}^{N} b_{pq} a_{nj}^{p} a_{nk}^{q} = \lambda_{nj}\delta_{jk} \tag{37}$$

$$\forall j,k \in \overline{1,N},\ n = 0,1,2,\dots .$$

Функции $\zeta_{nj}^{c}, \zeta_{nj}^{s}$ будут при этом удовлетворять условиям, аналогичным (16).

## 3. ГРАНИЦА ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ. ЭВОЛЮЦИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ.

**3.1. Решение эволюционной задачи.** В общем случае спектр задачи (31) при каждом $n$ может иметь $N_n^-$ отрицательных, $N_n^0$ нулевых і $N_n^+ = N - N_n^- - N_n^0$ положительных собственных значений,

$$\lambda_{nj}^{-} := \lambda_{nj} < 0 \quad \forall j \in \overline{1, N_n^-}, \quad \lambda_{nj}^{0} := \lambda_{n(N_n^-+j)} = 0 \quad \forall j \in \overline{1, N_n^0}, \tag{38}$$

$$\lambda_{nj}^{+} := \lambda_{n(N_n^-+N_n^0+j)} > 0 \quad \forall j \in \overline{1, N_n^+}.$$

Собственные моды колебаний, отвечающие собственным значениям $\lambda_{nj}^{\pm}$, будем обозначать через $\zeta_{nj}^{c\pm}, \zeta_{nj}^{s\pm}$, а собственным значениям $\lambda_{nj}^{0}$ – через $\zeta_{nj}^{c0}, \zeta_{nj}^{s0}$. Введем также обозначения:

$$\gamma_{nj} := |\lambda_{nj}^{-}|^{1/2} > 0 \quad \forall j \in \overline{1, N_n^-}, \quad \omega_{nj}^{+} := (\lambda_{nj}^{+})^{1/2} > 0 \quad \forall j \in \overline{1, N_n^+}.$$

Следуя [17] можно показать, что решение эволюционной задачи (2) – (11) представляется в виде:

$$\zeta(t,r,\vartheta) \simeq \zeta^{N}(t,r,\vartheta) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \left\{ \sum_{j=1}^{N_n^-} \left[ \left( \alpha_{nj}^{c-}\zeta_{nj}^{c-} + \alpha_{nj}^{s-}\zeta_{nj}^{s-} \right) \operatorname{ch}\gamma_{nj}t + \frac{1}{\gamma_{nj}} (\beta_{nj}^{c-}\zeta_{nj}^{c-} + \beta_{nj}^{s-}\zeta_{nj}^{s-}) \operatorname{sh}\gamma_{nj}t \right] + \right. \tag{39}$$

$$+ \sum_{j=1}^{N_n^0} \left[ \left( \alpha_{nj}^{c0}\zeta_{nj}^{c0} + \alpha_{nj}^{s0}\zeta_{nj}^{s0} \right) + \left( \beta_{nj}^{c0}\zeta_{nj}^{c0} + \beta_{nj}^{s0}\zeta_{nj}^{s0} \right) t \right] +$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{N_n^+} \left[ \frac{1}{2} \left( \alpha_{nj}^{c+}\zeta_{nj}^{c+} + \alpha_{nj}^{s+}\zeta_{nj}^{s+} \right) \cos\omega_{nj}^{+}t + \frac{1}{\omega_{nj}^{+}} \left( \beta_{nj}^{c+}\zeta_{nj}^{c+} + \beta_{nj}^{s+}\zeta_{nj}^{s+} \right) \sin\omega_{nj}^{+}t \right] \right\}.$$

Здесь $\alpha_{nj}^{c}, , \alpha_{nj}^{s}$ и $\beta_{nj}^{c}, \beta_{nj}^{s}$ – коэффициенты разложений в ряды Фурье функций $\zeta^{0}(r,\vartheta)$ и $\zeta^{1}(r,\vartheta)$ в начальных условиях (10),(11) по системе базисных функций $\{u_{nj}^{c}(r,\vartheta), u_{nj}^{s}(r,\vartheta)\}_{j=1}^{\infty}$.

В аналогичной форме можно представить потенциалы смещений частиц жидкостей и возмущений магнитного поля. Соответствующие выражения здесь не приводятся, поскольку в дальнейшем они не используются.

Как видно из приведених выражений, при наличии отрицательных $\lambda_{nj}^{-}$ или нулевых $\lambda_{nj}^{0}$ собственных значений начальные возмущения поверхности раздела жидкостей неограниченно возрастают со временем $t$. Неограниченное возрастание объясняется тем, что в принятой математической модели не учитываются нелинейные эффекты. Приведенное решение (40) описывает начальную стадию эволюции поверхности раздела жидкостей в закритическом магнитном поле. Безразмерные величины $\gamma_{nj}, \omega_{nj}^{+}$ в (40) имеют при этом физический смысл инкремента роста возмущений и круговой частоты колебаний, соответственно.

При наличии только положительных собственных значений $\lambda_{nj} > 0$ малые начальные возмущения равновесного состояния жидкостей остаются малыми для $\forall t > 0$. Таким образом, об устойчивости (или неустойчивости) равновесного состояния жидкостей можно судить по знаку наименьшего собственного значения $\lambda_{nj}$.

**3.2. Численные результаты.** Будем считать, что жидкость в области $\Omega_1$ намагничивается по закону Ланжевена, а намагниченность всех остальных сред пренебрежимо мала:

$$M^{(1)} = M_s L\left(\frac{3\chi_0 H^{(1)}}{M_s}\right), \quad M^{(k)} = 0\ \forall k = \overline{2,4}, \quad L(\xi) := \operatorname{cth}(\xi) - \frac{1}{\xi}. \tag{40}$$

Здесь $M_s$ – намагниченность насыщения, $L(\xi)$ – функция Ланжевена, $\chi_0$ – магнитная восприимчивость жидкости в $\Omega_1$ при $H = 0$. Введем безразмерные индукцию и напряженность магнитного поля, полагая

$$\overline{B} = \frac{B_0}{\mu_0 M_s}, \quad \overline{H}_0^{(k)} = \frac{H^{(k)}}{M_s} = \overline{B} - \overline{M}_0^{(k)} \quad \forall k = \overline{1,4}, \tag{41}$$

$$\overline{M}_0^{(1)} = L\left(3\chi_0 \overline{H}_0^{(1)}\right), \quad \overline{M}_0^{(k)} = 0 \quad \forall k = \overline{2,4}.$$

Величины $\mu_k, q_k$ в рассматриваемом случае имеют вид:

$$\mu_1\left(\overline{H}_0^{(1)}\right) = \frac{\overline{B}}{\overline{H}_0^{(1)}}, \quad q_1(\overline{H}_0^{(1)}) = \frac{(1 + L_H)\,\overline{H}_0^{(1)}}{\overline{B}}, \quad \mu_k = q_k = 1\ \forall k = \overline{2,4}, \tag{42}$$

где

$$L_H = -\frac{3\chi_0}{\operatorname{sh}^2\left(3\chi_0 \overline{H}_0^{(1)}\right)} + \frac{1}{3\chi_0 \overline{H}_0^{(1)}}$$

Безразмерную величину $W$ представим в виде:

$$W := W_0 L^2\left(3\chi_0 \overline{H}_0^{(1)}\right)\mu_1\sqrt{q_1}, \quad W_0 := \frac{\mu_0 M_s^2 R}{\sigma}. \tag{43}$$

Заметим теперь, что напряженность $\overline{H}_0^{(1)}$ и индукция $\overline{B}$ магнитного поля связаны взаимно однозначным соотношением (41), так что величины $\mu_1, q_1$

однозначно определяются по заданному значению $\overline{B}$. Примем $\overline{B}$ в качестве одного из определяющих параметров рассматриваемой системы. Состояние равновесия жидкостей характеризуется, таким образом, безразмерными параметрами:

$$\overline{B}, Bo, W_0, \chi_0, h_1/R, h_2/R, \rho_2/\rho_1.$$

Собственные значения $\lambda_{nk}$ зависят, очевидно, от всей совокупности этих параметров Нетрудно показать, что возрастание индукции магнитного поля $\overline{B}$ приводит к появлению отрицательных собственных значений $\lambda^-_{nk}$, если $\overline{B}$ превышает некоторое критическое значение $\overline{B}^*$. При $\overline{B} < \overline{B}^*$ равновесное состояние устойчиво, а в случае $\overline{B} > \overline{B}^*$ – неустойчиво. Граница области устойчивости в пространстве безразмерных параметров определяется уравнением:

$$\lambda_{n^*j^*} := \min_{n,j} \lambda_{nj}(\overline{B}, \mathrm{Bo}, W, \chi_0, h_1/R, h_2/R, \rho_2/\rho_1) = 0. \tag{44}$$

Собственный вектор $a_{n^*j^*} := (a^1_{n^*j^*}, a^2_{n^*j^*}, \ldots, a^N_{n^*j^*})^\tau$, отвечающий $\lambda_{n^*j^*}$, определяет наиболее опасное возмущение поверхности раздела жидкостей $\zeta_{n^*j^*}$, приводящее к потери устойчивости равновесия:

$$\zeta_{n^*j^*} = \sum_{k=1}^{N} a^k_{n^*j^*} u_{n^*k}(r, \vartheta). \tag{45}$$

Собственные значения $\lambda_{nj}$ спектральных задач (31) отыскивались численно с использованием метода Холесского. В проведенных вычислениях число базисных функций варьировалось в диапазоне $50 \leq N \leq 100$. Дальнейшее увеличение $N$ не приводило к существенному уточнению результатов.

На рис.2 приведены результаты расчета границы области устойчивости на плоскости $(\mathrm{Bo}, \overline{B})$ при $W_0 = 10^3$ для различных значений $\chi_0$. Вычисления показали, что в (45), как правило, один из коэффициентов $a^{k^*}_{n^*j^*}$ значительно превосходит остальные. Пунктирные линии в области неустойчивости $\overline{B} > \overline{B}\ ^*$ выделяют зоны, в пределах которых наиболее быстро растущим возмущениям отвечают номера гармоник $(n^*, k^*)$. Именно эти моды дают наглядное представление о начальной эволюции поверхности раздела жидкости при потере устойчивости и переходе в новое равновесное состояние. При этом необходимо считать, что индукция магнитного поля $\overline{B}$ принимает закритические значения за время значительно меньшее характерного времени гидродинамических процессов.

При малых числах Бонда наиболее опасными являются осесимметричные возмущения $(n = 0)$, либо возмущения по первой $(n = 1)$ или второй $(n = 2)$ гармонике. Формы наиболее опасных возмущений для некоторых значений параметров показаны на рис.3. Отметим, что в определенном диапазоне значений числа Бонда в равной мере могут быть опасными осесимметричные возмущения и возмущения по второй гармонике. Это объясняется совпадением спектров собственных значений $\{\lambda_{nk}\}$ задачи (31) при $n = 0$ и $n = 2$.

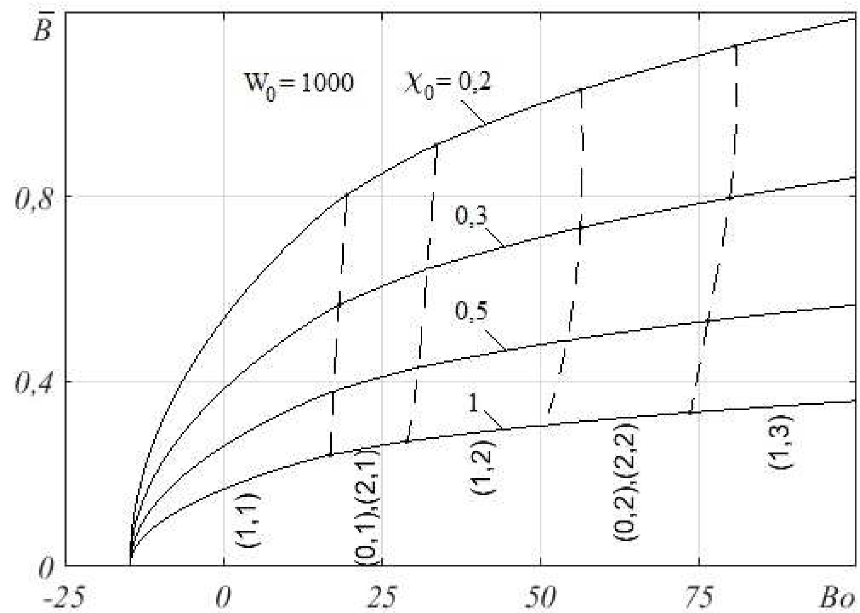


Рис. 2. Зависимость критических значений индукции магнитного поля $\overline{B}^*$ от числа Бонда Bo при $\overline{h}_1 = \overline{h}_2 = 0.1$.

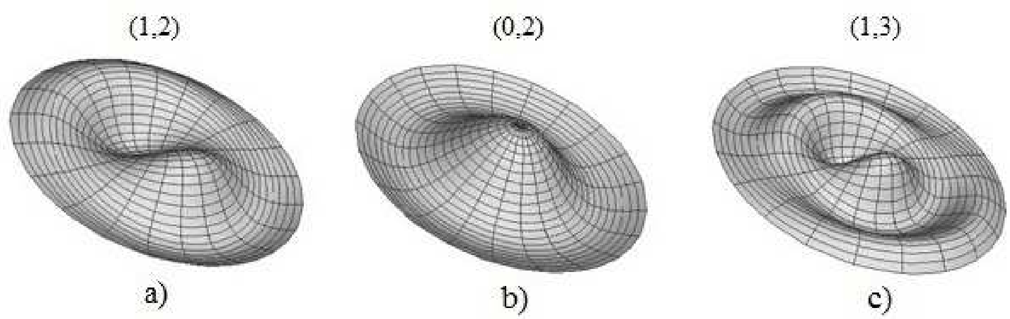


Рис. 3. Формы наиболее опасных возмущений при $W_0 = 10^3, \chi_0 = 0.2$: a) $\mathrm{Bo} = 40, \overline{\mathrm{B}} = 0.95$; b) $\mathrm{Bo} = 60, \overline{\mathrm{B}} = 1.05$; c) $\mathrm{Bo} = 90, \overline{\mathrm{B}} = 1.15$.

Вопрос о том, какая из этих мод реализуется в экспериментах остается открытым. С ростом значений числа Бонда при фиксированных значениях остальных параметров возрастают критические значения индукции магнитного поля $\overline{B}^*$. Можно показать, что $\overline{B}^*$ асимптотически возрастает как $\mathrm{Bo}^{1/2}$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В отличие от случая бесконечно протяженных горизонтальных слоев МЖ собственные частоты колебаний жидкости с ограниченной свободной поверхностью образуют дискретный спектр, а отвечающие им моды колебаний качественно отличаются друг от друга. Это позволяет объяснить многообразие форм МЖ, наблюдаемых в реальных экспериментах.

В связи с этим отметим, что в теоретических исследованиях неустойчивости безграничных слоев МЖ, как правило, ограничиваются рассмотрением одномерного синусоидального возмущения свободной поверхности, непрерывно зависящего от одного параметра (волнового числа), либо суперпозиции двух или трех таких возмущений. Это позволяет аппроксимировать одномерные, квадратные или гексагональные структуры, наблюдаемые в экспериментах с МЖ в прямоугольных, гексагональных или круглых кюветах в далекой закритической области значений параметров, когда влияние границы области, занимаемой МЖ, существенно ослабевает.

В случаях, когда свободная поверхность жидкости (или поверхность раздела жидкостей) ограничена, а индукция магнитного поля близка к критическим значениям, наиболее опасные возмущения имеют более сложную структуру. Это подтверждается расчетами, проведенными в данной статье. Для МЖ, намагничивающихся по закону Ланжевена, построены границы области устойчивости равновесных состояний в пространстве определяющих параметров. Показано, что область значений параметров, отвечающих неустойчивым равновесным состояниям, разбивается на зоны, каждая из которых характеризуется вполне определенной модой наиболее быстро растущих возмущений. Изменения индукции магнитного поля, вызывающие переход физических параметров из одной зоны в другую, сопровождаются качественной перестройкой форм поверхности раздела МЖ. С увеличением числа Бонда критические значения индукции магнитного поля стремятся к значениям, соответствующим случаю двухслойной системы жидкостей с безграничной поверхностью раздела.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. – М.: Мир, 1989. – 389 с.

2. Баштовой В.Г., Берковский Б.М., Вислович А.Н. Введение в термомеханику магнитных жидкостей. – М.: Наука, 1985. – 188 с.

3. Блум Э.Я., Майоров М.М., Цеберс А.О. Магнитные жидкости. – Рига: Зинатне, 1989. – 386 с.

4. Odenbach S., Beiglbock W., Ehlers J. et al. Colloidal Magnetic Fluids: Basics, Development and Application of Ferrofluids. –Berlin: Springer, 2009. – 430 p.

5. Abou B, Westfreid J.E., Roux S. The instability in ferrofluids: hexagon-square transition mechanism and wavenumber selection. // J. Fluid Mech., 2000. – Vol. 416. – P. 217–237.

6. Lange A., Richter R., Tobiska L. Linear and nonlinear approach to the Rosensweig instability. // GAMM-Mitt., 2007.– Vol. 30, №1. – P. 171–184.

7. Knieling H., Richter R., Rehberg I. Growth of surface undulations at the Rosensweig instability. // Phys. Rev. E, 2007.– Vol. 76, 066301.– P. 1–11.

8. Gollwitzer C., Matthies G., Richter R. et all. The surface topography of a magnetic fluid: a quantitative comparison between experiment and numerical simulation. // J. Fluid Mech., 2007. – Vol. 571. – P. 455 — 474.

9. Диканский Ю.М., Закинян А.Р., Мкртчян Л.С. Неустойчивость тонкого слоя магнитной жидкости в перпендикулярном магнитном поле. // Журнал технической физики, 2010. – Т.80.– Вып.9. – С. 38 – 43.

10. Бушуева К.А., Костарев К.Г., Лебедев А.В. Капельные структуры, образуемые феррожидкостью в однородном магнитном поле. // Конвективные течения, 2011.– Вып. 5.– С. 159 – 170.

11. Коровин В.М. Неустойчивостиь Розенцвейга в тонком слое магнитной жидкости. //Журнал технической физики, 2013.– Т.83, Вып.12.– С. 17 – 25.

12. Коровин В.М. О влиянии горизонтального магнитного поля на неустойчивость Розенцвейга нелинейно намагничивающейся феррожидкости. // Журнал технической физики, 2014. – Т.84.– Вып.11.– С. 1 – 8.

13. Rannacher D., Engel A. Suppressing the Rayleigh-Taylor instability with a rotating magnetic field. // Phys. Rev. E, 2007.– Vol. 75, 016311.– P. 1 – 8.

14. Poehlmann A., Richter R., Rehberg I. Unravelling the Rayleigh-Taylor instability by stabilization. // J. Fluid Mech., 2013. – Vol. 732, R3. – P. 1 – 10.

15. Borysov I.D., Potseluiev S.I, Yatsenko T.Yu. Instability of equilibrium and appearance of ordered spatial structures on the free surface of ferrofluid. //Magnetohydrodynamics, 2014. – Vol. 50, №1. – P. 3 – 12.

16. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Физматлит., 1961. – 524 с.

17. Borisov I.D., Yatsenko T.Yu. Small Oscillations of Magnetizable Ideal Fluid. // J. Math. Physics, Analysis, Geometry, 2010. – Vol. 6, №4. – P. 383 – 395.

Статья получена: 1.12.2016.; окончательный вариант: 18.12.2016.; принята: 20.12.2016.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 84, 2016, с.61–92

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 84, 2016, p. 61–92
DOI: 10.26565/2221-5646-2016-84-06

УДК 517

# Approximation properties of generalized Fup-functions

I. V. Brysina, V. A. Makarichev

*N.Ye. Zhukovsky National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute"*
*Chkalov Str. 17, 61070 Kharkiv, Ukraine*
*iryna.brysina@gmail.com, victor.makarichev@gmail.com*

Generalized $Fup$-functions are considered. Almost-trigonometric basis theorem is proved. Spaces of linear combinations of shifts of the generalized $Fup$-functions are constructed and an upper estimate of the best approximation of classes of periodic differentiable functions by these spaces in the norm of $L_2[-\pi, \pi]$ is obtained.
*Keywords*: function with a compact support, approximation of periodic functions, up-function, Kolmogorov width, best approximation, generalized Fup-function.

Брисіна І. В., Макарічев В. О. **Апроксимаційні властивості узагальнених Fup-функцій.** Розглянуто узагальнені Fup-функції. Доведено теорему про майже-тригонометричний базис. Побудовано простори лінійних комбінацій зсувів узагальнених Fup-функцій і отримано верхню оцінку найкращого наближення цими просторами класів періодичних диференційованих функцій за нормою $L_2[-\pi, \pi]$.
*Ключові слова*: фінітна функція, наближення періодичних функцій, up-функція, поперечник за Колмогоровим, найкраще наближення, узагальнені Fup-функції.

Брысина И. В., Макаричев В. А. **Аппроксимационные свойства обобщенных Fup-функций.** Рассмотрены обобщенные Fup-функции. Доказана теорема о почти-тригонометрическом базисе. Построены пространства линейных комбинаций сдвигов обобщенных Fup-функций и получена верхняя оценка наилучшего приближения этими пространствами классов периодических дифференцируемых функций по норме $L_2[-\pi, \pi]$.
*Ключевые слова*: финитная функция, приближение периодических функций, up-функция, поперечник по Колмогорову, наилучшее приближение, обобщенные Fup-функции.

*2000 Mathematics Subject Classification* 41A30, 41A50

## Introduction

Construction and investigation of compactly supported functions such as splines and wavelets is an intensively developing area of mathematics. Various systems of functions with a compact support are widely used in numerical methods, mathematical physics, approximation theory, digital signal, image processing etc. In particular these systems are used for numerical solution of differential equations. Notice that the function, which is a solution of some equation, is often infinitely differentiable or has high degree of smoothness. Hence, the problem of construction of the function space $L$ that combines the following properties is of interest:

(i) all functions from $L$ are infinitely differentiable (this property is important for approximation of smooth functions);

(ii) in the space $L$ there exists a basis that consists of compactly supported functions (for example, this property makes it possible to construct effective algorithms of solution of some differential equations);

(iii) the space $L$ has good approximation properties.

Consider in detail the last property. Let $X$ be a linear space supplied with a norm $\|\cdot\|_X$. Denote by $A$ some subset of $X$. Let $L$ be a subspace of $X$ such that $\dim L = N$. By

$$E_X(A, L) = \sup_{\varphi \in A} \inf_{f \in L} \|\varphi - f\|_X$$

we denote the best approximation of the set $A$ by the linear space $L$ in the norm of $X$. It can be said that $L$ has good approximation properties, if there exists small $\varepsilon > 0$ such that $E_X(A, L) < \varepsilon$. At the same time it is interesting, if there exists some other linear space $V \subset X$ such that $\dim V = N$ and $E_X(A, V) < E_X(A, L)$ (this means that $V$ has better approximation properties than $L$). Therefore the value of

$$d_N(A, X) = \inf_{\dim V = N} E_X(A, V)$$

is of interest. We note that $d_N(A, X)$ is the Kolmogorov width [1].

Let $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a sequence of positive integer numbers.

**Definition 1** *The sequence of spaces $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ is extremal for approximation of a set $A$ in the norm of $X$, if $\dim L_k = N_k$ and $E_X(A, L_k) = d_{N_k}(A, X)$ for any $k \in \mathbb{N}$.*

**Definition 2** *The sequence of spaces $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ is asymptotically extremal for approximation of a set $A$ in the norm of $X$, if $\dim L_k = N_k$ for any $k \in \mathbb{N}$ and*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{E_X(A, L_k)}{d_{N_k}(A, X)} = 1.$$

We say that spaces $\{L_k\}$ have good approximation properties, if the sequence $\{L_k\}$ is extremal or asymptotically extremal for approximation of $A$ in the norm of $X$.

In [2, 3, 4], the spaces, which satisfy properties (i) – (iii), were introduced. Consider in detail main results of these publications.

Consider the function

$$mup_s(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(st(2s)^{-k}\right)}{s^2 t(2s)^{-k}\sin\left(t(2s)^{-k}\right)}dt,$$

where $s \in \mathbb{N}$.

For the case $s = 1$ the function $mup_s(x)$ is equal to well-known Rvachev function

$$up(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(t2^{-k}\right)}{t2^{-k}}dt,$$

which is a solution with a compact support of the functional differential equation

$$y'(x) = 2(y(2x+1) - y(2x-1)).$$

As a solution of this equation the function $up(x)$ was introduced in [5] (see aslo [2] and [3]).

The function $mup_s(x)$ for the case $s \geq 2$ was constructed in [6].

For any $s \in \mathbb{N}$ the function $mup_s(x)$ combines the following properties:

1) $supp\ mup_s(x) = [-1, 1]$;

2) $mup_s(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$;

3) the function $mup_s(x)$ is not analytic at any $x \in [-1, 1]$;

4) $\int_{-\infty}^{\infty} mup_s(x)dx = 1$;

5) $mup_s(x)$ is a solution of the equation

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{s}(y(2sx + 2s - 2k + 1) - y(2sx - 2k + 1));$$

6) $\left\|mup_s^{(n)}(x)\right\|_{C[-1,1]} = 2^n(2s)^{n(n-1)/2}$ for any $n = 0, 1, 2, \ldots$.

For the case $s = 1$ the properties 1) – 6) were proved in [5] (see also [2]). For the general case these properties were proved in [6] (see also [4, 7]).

Let $MUP_{s,n}$ be the space of functions $\psi(x)$ of the form

$$\psi(x) = \sum_k c_k \cdot mup_{s,n}\left(x - \frac{k}{(2s)^n}\right), x \in [-1, 1]$$

and $\widetilde{MUP}_{s,n}$ be the space of functions $\varphi(x)$ such that

$$\varphi(x) = \sum_k c_k \cdot mup_s\left(\frac{x}{\pi} - \frac{k}{(2s)^n}\right), x \in [-\pi, \pi]$$

and $\varphi^{(j)}(-\pi) = \varphi^{(j)}(\pi)$ for any $j = 0, 1, 2, \ldots$.

**Theorem 1 ([4])** *For any $n = 0, 1, 2, \ldots$ there exists the set of coefficients $\{v_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ such that*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j \cdot mup_s\left(x - \frac{j}{(2s)^n}\right) \equiv x^n.$$

This means that $MUP_{s,n}$ contains all polynomials of order not greater than $n$.

Further, consider the function

$$Fmup_{s,n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left(\frac{\sin\left(\frac{t}{2(2s)^n}\right)}{\frac{t}{2(2s)^n}}\right)^n F_s\left(\frac{t}{(2s)^n}\right) dt,$$

where $s \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ and $F_s(t)$ is the Fourier transform of the function $mup_s(x)$.

It was shown in [4] that $Fmup_{s,n}(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ and

$$Fmup_{s,n}(x) = 0 \text{ for } |x| > \frac{n+2}{2(2s)^n}$$

(for the case $s = 1$ these properties were obtained in [3]).

**Theorem 2 ([4])** *The system of functions*

$$\left\{Fmup_{s,n}\left(x - \frac{j}{(2s)^n} + 1 + \frac{n+2}{2(2s)^n}\right)\right\}_{j=1}^{2(2s)^n+n+1}$$

*is a basis of the space $MUP_{s,n}$.*

Combining this theorem with theorem 1, we see that any polynomial of degree at most $n$ can be expressed as a linear combination of shifts of the function $Fmup_{s,n}(x)$.

**Theorem 3 ([4])** *The system of functions $\{\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_{2(2s)^n}(x)\}$ constitutes a basis of the space $\widetilde{MUP}_{s,n}$, where*

$$\psi_k(x) = Fmup_{s,n}\left(\frac{x}{\pi} - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} - 1\right) +$$
$$+ Fmup_{s,n}\left(\frac{x}{\pi} - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} + 1\right), k = 1, \ldots, n+1,$$
$$\psi_k(x) = Fmup_{s,n}\left(\frac{x}{\pi} - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} + 1\right), k = n+2, \ldots, 2(2s)^n.$$

It follows from this theorem that dimension of $\widetilde{MUP}_{s,n}$ equals $2(2s)^n$.

Let us remark that for the case $s = 1$ theorems 1 – 3 were obtained in [3].

Further, we need some notations. By $\widetilde{W}^r_\infty$ denote the class of functions $g \in C^r_{[-\pi,\pi]}$ such that $g^{(k)}(-\pi) = g^{(k)}(\pi)$ for any $k = 0, 1, \ldots, r-1$ and $\|g^{(r)}\|_{C([-\pi,\pi])} \leq 1$. Let $\widetilde{W}^r_2$ be the class of functions $g \in C^{r-1}_{[-\pi,\pi]}$ such that the equality $g^{(k)}(-\pi) = g^{(k)}(\pi)$ holds for any $k = 0, 1, \ldots, r-1$, $g^{(r-1)}(x)$ is absolutely continuous and $\|g^{(r)}\|_{L_2[-\pi,\pi]}$.

**Theorem 4 ([3], see also [2])** *We have*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_{C([-\pi,\pi])}(\widetilde{W}^r_\infty, \widetilde{MUP}_{1,n})}{d_{2^{n+1}}(\widetilde{W}^r_\infty, C([-\pi,\pi]))} = 1.$$

In other words, spaces $\widetilde{UP}_n = \widetilde{MUP}_{1,n}$ are asymptotically extremal for approximation of $\widetilde{W}^r_\infty$ in the norm of $C([-\pi,\pi])$.

**Theorem 5 ([2])** *There exists $n(r)$ such that*

$$E_{L_2[-\pi,\pi]}(\widetilde{W}^r_2, \widetilde{MUP}_{1,n}) = d_{2^{n+1}}(\widetilde{W}^r_2, L_2[-\pi,\pi])$$

*for any $n \geq n(r)$.*

Therefore $\widetilde{UP}_n$ is extremal for approximation of functions from the class $\widetilde{W}^r_2$ in the norm of the space $L_2[-\pi,\pi]$.

**Theorem 6 ([4])** *For any $s \geq 2$ the following equality holds:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_{L_2[-\pi,\pi]}(\widetilde{W}^r_2, \widetilde{MUP}_{s,n})}{d_{2(2s)^n}(\widetilde{W}^r_2, L_2[-\pi,\pi])} = 1.$$

This means that spaces $\widetilde{MUP}_{s,n}$ are asymptotically extremal for approximation of $\widetilde{W}^r_2$ in the norm of $L_2[-\pi,\pi]$.

We see that the functions $mup_s(x)$ (in particular, the function $up(x)$) and $Fmup_{s,n}(x)$ have a number of convenient properties. Therefore these functions have applications to wavelet theory [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14], digital signal processing [15, 16], numerical methods and numerical modeling [17, 18, 19, 20] (note that a comprehensive survey also can be found in chapter 2 of [21]), the theory of generalized Taylor series [2, 7, 11, 12, 22, 23, 24, 25] etc.

We note also that the growth rate of the dimension of $MUP_{s,n}$ and $\widetilde{MUP}_{s,n}$ is a disadvantage of these spaces. Indeed, for any $s \in \mathbb{N}$ the value of $\dim \widetilde{MUP}_{s,n} = 2(2s)^n$ increases exponentially. Our goal is to construct the space of functions that does not have this disadvantage and has all advantages of $\widetilde{MUP}_{s,n}$.

Let $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ be a function such that

1) *supp* $f(x) = [-1, 1]$,

2) $f(x)$ is an even function,

3) $f(x) \geq 0$ for any $x \in [-1, 1]$,

4) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

By $F(t)$ denote the Fourier transform of this function.

**Definition 3 ([26])** *The function*

$$f_{N,m}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left( \frac{\sin(t/N)}{t/N} \right)^{m+1} F(t/N)\, dt,$$

*where $F(t)$ is the Fourier transform of $f(x)$, $N \neq 0$ and $m \in \mathbb{N}$ is called a generalized $Fup$-function and f(x) is called its mother function.*

Here we use the term "mother function"just as the term "mother wavelet"is used in the theory of wavelets.

It can be seen that the generalized $Fup$-function is a generalization of the function $Fmup_{s,n}(x)$.

The aim of this paper is to investigate the best approximation of the class $\widetilde{W}_2^r$ by the spaces of linear combinations of shifts of the generalized $Fup$-functions in the norm of the space $L_2[-\pi, \pi]$.

This paper is organized as follows. In section 2, we introduce and prove the almost-trigonometric basis theorem. In section 3, we construct the spaces of shifts of the generalized $Fup$-functions and using the almost-trigonometric basis theorem, we obtain an upper estimate of the best approximation of $\widetilde{W}_2^r$ by these spaces in the norm of $L_2[-\pi, \pi]$. In the last section, we analyze the results of this paper and consider some open problems.

Actually, in this paper we introduce a new method of construction of locally supported functions with good approximation properties.

Further, we assume that

$$\|f\| = \|f\|_{L_2[-\pi,\pi]} \text{ and } (f, g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

## Almost-trigonometric basis theorem

Let $N$ be an arbitrary even natural number.

Denote by $V_N$ the space of functions $f(x) \in L_2[-\pi, \pi]$ such that

$$f(x) = \sum_{p=0}^{N/2-1} \left( a_p \cdot v_{N,p}(x) + b_p \cdot w_{N,p}(x) \right),$$

where

$$v_{N,0}(x) \equiv 1,$$

$$v_{N,p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(r_{N,p,k} \cdot \cos((p+kN)x) + q_{N,p,k} \cdot \cos((N(k+1)-p)x)\right) \tag{1}$$

and

$$w_{N,p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(s_{N,p,k} \cdot \sin((p+kN)x) + t_{N,p,k} \cdot \sin((N(k+1)-p)x)\right) \tag{2}$$

for $p = 1, 2, \ldots, N/2-1$,

$$w_{N,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(y_{N,k} \cdot \cos\left(\frac{N}{2}(2k+1)x\right) + z_{N,k} \cdot \sin\left(\frac{N}{2}(2k+1)x\right)\right), \tag{3}$$

$r_{N,p,0} = s_{N,p,0} = 1$ for any $p = 1, 2, \ldots, N/2-1$. We assume that series in (1) – (3) are convergent in $L_2[-\pi,\pi]$.

We shall say that the system of functions $\{v_{N,p}, w_{N,p}\}_{p=0}^{N/2-1}$ is an almost-trigonometric basis of the space $V_N$.

In this section, we obtain an upper estimate of the best approximation of the class $\widetilde{W}_2^r$ by the space $V_N$ in the norm of $L_2[-\pi,\pi]$.

**Theorem 7** *If there exists $m \in \mathbb{N}$, $M \geq 0$ and functions $\varphi_1$, $\varphi_2$ such that*

*(i)* *$\varphi_1$, $\varphi_2$ are positive, increasing and differentiable on $[0, 1/2]$;*

*(ii)* *$\varphi_1(1/2) \leq 1$, $\varphi_2(1/2) \leq 1$;*

*(iii)* *$m+1 \geq r$;*

*(iv)* *for any $p = 1, 2, \ldots, N/2-1$ the following conditions hold:*

$$q_{N,p,0}^2 = \left(\frac{p}{N-p}\right)^{2(m+1)} \varphi_1^2\left(\frac{p}{N}\right), \tag{4}$$

$$t_{N,p,0}^2 = \left(\frac{p}{N-p}\right)^{2(m+1)} \varphi_2^2\left(\frac{p}{N}\right); \tag{5}$$

*(v)*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(r_{N,p,k}^2 + q_{N,p,k}^2\right) \leq \left(\frac{p}{N}\right)^{2(m+1)} M, \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(s_{N,p,k}^2 + t_{N,p,k}^2\right) \leq \left(\frac{p}{N}\right)^{2(m+1)} M \tag{7}$$

*for any $p = 1, 2, \ldots, N/2-1$;*

*then*

$$E_{L_2[-\pi,\pi]}\left(\widetilde{W}_2^r, V_N\right) \le \left(\frac{N}{2}\right)^{-r}\sqrt{1+\varepsilon}, \tag{8}$$

*where*

$$\varepsilon = \frac{M^2}{2^{4m+3}} + \frac{M}{2^{2m+1}} + \frac{\sqrt{2M}}{2^{m+r+1}}.$$

*Proof.* To prove this statement, it is sufficient to obtain the following inequality:

$$\inf_{\omega\in V_N}\|f-\omega\| \le \left(\frac{N}{2}\right)^{-r}\sqrt{1+\frac{M^2}{2^{4m+3}}+\frac{M}{2^{2m+1}}+\frac{\sqrt{2M}}{2^{m+r+1}}} \tag{9}$$

for any $f\in\widetilde{W}_2^r$.

Let $f(x)$ be an arbitrary function from the class $\widetilde{W}_2^r$.

By construction, the space $V_n$ contains all constant functions.

Let $f$ be a non-constant function. It follows from the definition of the class $\widetilde{W}_2^r$ that

$$0 < \|f^{(r)}\| \le 1.$$

Consider the Fourier series expansion of the function $f$:

$$f(x) = \widetilde{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\widetilde{a}_n\cdot\cos(nx) + \widetilde{b}_n\cdot\sin(nx)\right).$$

Let $g(x) = f(x) - \widetilde{a}_0$. By the above

$$\begin{gathered}\inf_{\omega\in V_N}\|f-\omega\| = \inf_{\omega\in V_N}\|g-\omega\| \\ = \|f^{(r)}\|\cdot\inf_{\omega\in V_N}\left\|\frac{1}{\|f^{(r)}\|}g-\omega\right\| \le \inf_{\omega\in V_n}\|\zeta-\omega\|,\end{gathered} \tag{10}$$

where $\zeta(x) = \frac{1}{\|f^{(r)}\|}g(x)$.

Notice that

$$\|\zeta^{(r)}\| = 1. \tag{11}$$

The function $\zeta$ can be represented in the following form:

$$\zeta(x) = \sum_{p=1}^{N/2}\left(\theta_{N,p}(x) + \mu_{N,p}(x)\right),$$

where

$$\theta_{N,p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\widetilde{a}_{p+kN}}{\|f^{(r)}\|}\cdot\cos((p+kN)x) + \frac{\widetilde{a}_{(k+1)N-p}}{\|f^{(r)}\|}\cdot\cos((N(k+1)-p)x)\right)$$

and

$$\mu_{N,p}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\widetilde{b}_{p+kN}}{\|f^{(r)}\|}\cdot\sin((p+kN)x)+\frac{\widetilde{b}_{(k+1)N-p}}{\|f^{(r)}\|}\cdot\sin((N(k+1)-p)x)\right)$$

for $p=1,2,\ldots,N/2-1$,

$$\theta_{N,N/2}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\widetilde{a}_{(k+1)N/2}}{\|f^{(r)}\|}\cdot\cos\left(\frac{N}{2}(k+1)x\right),$$

$$\mu_{N,N/2}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\widetilde{b}_{(k+1)N/2}}{\|f^{(r)}\|}\cdot\sin\left(\frac{N}{2}(k+1)x\right).$$

Further we need some notations.

Let $c_p=\|\theta_{N,p}^{(r)}\|$, $d_p=\|\mu_{N,p}^{(r)}\|$,

$$f_p(x)=\begin{cases}\frac{1}{c_p}\theta_{N,p}(x), \text{ if } c_p\neq 0,\\ \theta_{N,p}(x), \text{ if } c_p=0\end{cases} \quad\text{and}\quad g_p(x)=\begin{cases}\frac{1}{d_p}\mu_{N,p}(x), \text{ if } d_p\neq 0,\\ \mu_{N,p}(x), \text{ if } d_p=0\end{cases}$$

for $p=1,2,\ldots,N/2$.

In these notations,

$$\zeta(x)=\sum_{p=1}^{N/2}\left(c_pf_p(x)+d_pg_p(x)\right) \text{ and } \|f_p^{(r)}\|=\|g_p^{(r)}\|=1.$$

In addition, from (11) it follows that

$$\sum_{p=1}^{N/2}\left(c_p^2+d_p^2\right)=1.$$

Therefore, to prove inequality (9) for any non-constant function $f\in\widetilde{W}_2^r$, it is sufficient to obtain an upper estimate of $\inf\limits_{\omega\in V_N}\|\zeta-\omega\|$, where

$$\zeta(x)=\sum_{p=1}^{N/2}(c_pf_p(x)+d_pg_p(x)),$$

$$f_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_{p+kN}\cdot\cos((p+kN)x)+a_{(k+1)N-p}\cdot\cos((N(k+1)-p)x)\right)$$

and

$$g_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(b_{p+kN}\cdot\sin((p+kN)x)+b_{(k+1)N-p}\cdot\sin((N(k+1)-p)x)\right)$$

for $p = 1, 2, \ldots, N/2 - 1$,

$$f_{N/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{(k+1)N/2} \cdot \cos\left(\frac{N}{2}(k+1)x\right),$$

$$g_{N/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{(k+1)N/2} \cdot \sin\left(\frac{N}{2}(k+1)x\right),$$

$$\left\|f_p^{(r)}\right\| = \left\|g_p^{(r)}\right\| = 1 \tag{12}$$

for $p = 1, 2, \ldots, N/2$,

$$\sum_{p=1}^{N/2} \left(c_p^2 + d_p^2\right) = 1.$$

Let us introduce some notations.

For any $p = 1, 2, \ldots, N/2 - 1$ let

$$\alpha_{p,1} = \left\| f_p - \frac{(f_p, v_{N,p})}{(v_{N,p}, v_{N,p})} v_{N,p} \right\|, \ \alpha_{p,2} = \left\| g_p - \frac{(g_p, w_{N,p})}{(w_{N,p}, w_{N,p})} w_{N,p} \right\|$$

and $\alpha_{N/2,1} = \|f_{N/2}\|$, $\alpha_{N/2,2} = \|g_{N/2}\|$.

It is easily shown that

$$\inf_{\omega \in V_N} \|\zeta - \omega\| \le \max_{p=1,\ldots,N/2, j=1,2} \alpha_{p,j}. \tag{13}$$

Consider $\alpha_{p,j}$ for $p = 1, 2, \ldots, N/2$ and $j = 1, 2$.

1. For the case $p = N/2$, we have

$$\alpha_{N/2,1}^2 = \pi \sum_{k=0}^{\infty} a_{(k+1)N/2}^2 = \left(\frac{N}{2}\right)^{-2r} \pi \sum_{k=0}^{\infty} a_{(k+1)N/2}^2 \left(\frac{N}{2}\right)^{2r}$$

$$\le \left(\frac{N}{2}\right)^{-2r} \pi \sum_{k=0}^{\infty} \left((k+1)\frac{N}{2}\right)^{2r} a_{(k+1)N/2}^2 = \left(\frac{N}{2}\right)^{-2r} \left\|f_{N/2}^{(r)}\right\|^2.$$

If we combine this with (12), we get $\alpha_{N/2,1}^2 \le (N/2)^{-2r}$.

By the same argument, $\alpha_{N/2,2}^2 \le (N/2)^{-2r}$.

Hence,

$$\alpha_{N/2,j}^2 \le \left(\frac{N}{2}\right)^{-2r} \tag{14}$$

for $j = 1, 2$.

2. Let $p = 1, 2, \ldots, N/2 - 1$ and $j = 1, 2$.

Consider the functions

$$\ell_{p,j}(x) = \begin{cases} a_p \cdot \cos(px) + a_{N-p} \cdot \cos((N-p)x), & \text{if } j = 1, \\ b_p \cdot \sin(px) + b_{N-p} \cdot \sin((N-p)x), & \text{if } j = 2, \end{cases}$$

$$h_{p,j}(x) = \begin{cases} f_p(x) - \ell_{p,j}(x), \text{ if } j = 1, \\ g_p(x) - \ell_{p,j}(x), \text{ if } j = 2, \end{cases}$$

$$\zeta_{p,j}(x) = \begin{cases} \cos(px) + q_{N,p,0} \cdot \cos((N-p)x), \text{ if } j = 1, \\ \sin(px) + t_{N,p,0} \cdot \sin((N-p)x), \text{ if } j = 2, \end{cases}$$

$$\epsilon_{p,j}(x) = \begin{cases} v_{N,p}(x) - \zeta_{p,j}(x), \text{ if } j = 1, \\ w_{N,p}(x) - \zeta_{p,j}(x), \text{ if } j = 2. \end{cases}$$

Then

$$\left\| (\ell_{p,j} + h_{p,j}) - \frac{(\ell_{p,j} + h_{p,j}, \zeta_{p,j} + \epsilon_{p,j})}{(\zeta_{p,j} + \epsilon_{p,j}, \zeta_{p,j} + \epsilon_{p,j})} (\zeta_{p,j} + \epsilon_{p,j}) \right\|^2.$$

It is not hard to prove that $\ell_{p,j}$, $\zeta_{p,j}$ are orthogonal to the functions $h_{p,j}$, $\epsilon_{p,j}$, i. e.

$$(\ell_{p,j}, h_{p,j}) = (\ell_{p,j}, \epsilon_{p,j}) = (\zeta_{p,j}, h_{p,j}) = (\zeta_{p,j}, \epsilon_{p,j}) = 0. \tag{15}$$

This implies that

$$\alpha_{p,j}^2 = \left\| \ell_{p,j} + h_{p,j} - \frac{(\ell_{p,j}, \zeta_{p,j}) + (h_{p,j}, \epsilon_{p,j})}{\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2} (\zeta_{p,j} + \epsilon_{p,j}) \right\|^2 = A_1 + A_2 + A_3,$$

where

$$A_1 = \left\| \ell_{p,j} - \frac{(\ell_{p,j}, \zeta_{p,j})}{\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2} (\zeta_{p,j} + \epsilon_{p,j}) \right\|^2,$$

$$A_2 = \left\| h_{p,j} - \frac{(h_{p,j}, \epsilon_{p,j})}{\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2} (\zeta_{p,j} + \epsilon_{p,j}) \right\|^2 \tag{16}$$

and

$$A_3 = 2 \left( \ell_{p,j} - \frac{(\ell_{p,j}, \zeta_{p,j}) \cdot (\zeta_{p,j} + \epsilon_{p,j})}{\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2} \; , \; h_{p,j} - \frac{(h_{p,j}, \epsilon_{p,j}) \cdot (\zeta_{p,j} + \epsilon_{p,j})}{\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2} \right). \tag{17}$$

Further, $A_1 = A_{1,1} + A_{1,2} - 2 \cdot A_{1,3}$, where

$$A_{1,1} = \left\| \ell_{p,j} - \frac{(\ell_{p,j}, \zeta_{p,j})}{\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2} \zeta_{p,j} \right\|^2,$$

$$A_{1,2} = \frac{(\ell_{p,j}, \zeta_{p,j})^2}{\left(\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2\right)^2} \|\epsilon_{p,j}\|^2 \tag{18}$$

and

$$A_{1,3} = \left( \ell_{p,j} - \frac{(\ell_{p,j}, \zeta_{p,j})}{\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2} \zeta_{p,j} \; , \; \frac{(\ell_{p,j}, \zeta_{p,j})}{\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2} \epsilon_{p,j} \right).$$

Using (15), we get $A_{1,3} = 0$. Also, we see that

$$A_{1,1} = \left\| \ell_{p,j} - (\ell_{p,j}, \zeta_{p,j}) \left( \frac{1}{\|\zeta_{p,j}\|^2} + \frac{1}{\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2} - \frac{1}{\|\zeta_{p,j}\|^2} \right) \zeta_{p,j} \right\|^2 =$$

$$= A_{1,1,1} + A_{1,1,2} + A_{1,1,3},$$

where

$$A_{1,1,1} = \left\| \ell_{p,j} - \frac{(\ell_{p,j}, \zeta_{p,j})}{\|\zeta_{p,j}\|^2} \zeta_{p,j} \right\|^2, \tag{19}$$

$$A_{1,1,2} = (\ell_{p,j}, \zeta_{p,j})^2 \left( \frac{1}{\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2} - \frac{1}{\|\zeta_{p,j}\|^2} \right)^2 \|\zeta_{p,j}\|^2 \tag{20}$$

and

$$A_{1,1,3} = \left( \ell_{p,j} - \frac{(\ell_{p,j}, \zeta_{p,j})}{\|\zeta_{p,j}\|^2} \zeta_{p,j} \ , \ \zeta_{p,j} \right) \cdot \left( \frac{1}{\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2} - \frac{1}{\|\zeta_{p,j}\|} \right).$$

It follows from (15) that $A_{1,1,3} = 0$.
Consequently

$$\alpha_{p,j}^2 = A_{1,1,1} + A_{1,1,2} + A_{1,2} + A_2 + A_3. \tag{21}$$

By $\gamma_{p,j}$ denote $\left\| \ell_{p,j}^{(r)} \right\|^2$. Using (12), we get

$$\left\| h_{p,j}^{(r)} \right\|^2 = 1 - \gamma_{p,j} \tag{22}$$

and

$$0 \le \gamma_{p,j} \le 1. \tag{23}$$

Let us prove that

$$A_{1,1,1} \le \gamma_{p,j} \left( \frac{N}{2} \right)^{-2r}. \tag{24}$$

By construction

$$(\ell_{p,j}, \zeta_{p,j}) = \begin{cases} \pi \left( a_p + a_{N-p} \cdot q_{N,p,0} \right), & \text{if } j = 1, \\ \pi \left( b_p + b_{N-p} \cdot t_{N,p,0} \right), & \text{if } j = 2 \end{cases} \tag{25}$$

and

$$\|\zeta_{p,j}\|^2 = \begin{cases} \pi \left( 1 + q_{N,p,0}^2 \right), & \text{if } j = 1, \\ \pi \left( 1 + t_{N,p,0}^2 \right), & \text{if } j = 2. \end{cases} \tag{26}$$

If we combine these equalities with (19), we get

$$A_{1,1,1} = \pi \left( \left( a_p - \frac{a_p + a_{N-p} q_{N,p,0}}{1 + q_{N,p,0}^2} \right)^2 + \left( a_{N-p} - \frac{a_p + a_{N-p} q_{N,p,0}}{1 + q_{N,p,0}^2} q_{N,p,0} \right)^2 \right)$$

$$= \pi \frac{(a_p \cdot q_{N,p,0}^2 - a_{N-p} \cdot q_{N,p,0})^2 + (a_{N-p} - a_p \cdot q_{N,p,0})^2}{\left( 1 + q_{N,p,0}^2 \right)^2} = \pi \frac{(a_{N-p} - a_p \cdot q_{N,p,0})^2}{1 + q_{N,p,0}^2}$$

for the case $j = 1$.

Similarly,

$$A_{1,1,1} = \pi \frac{(b_{N-p} - b_p \cdot t_{N,p,0})^2}{1 + t_{N,p,0}^2}$$

for the case $j = 2$.

Also, we see that

$$\gamma_{p,j} = \begin{cases} \pi \left(p^{2r} \cdot a_p^2 + (N-p)^2 \cdot a_{N-p}^2\right), \text{ if } j = 1 \\ \pi \left(p^{2r} \cdot b_p^2 + (N-p)^{2r} \cdot b_{N-p}^2\right), \text{ if } j = 2. \end{cases} \tag{27}$$

It is not hard to prove that

$$\max_{(x,y)\in D} (y - c \cdot x)^2 = \frac{\gamma_{p,j}}{\pi} \cdot \frac{p^{2r} + c^2 \cdot (N-p)^{2r}}{p^{2r} \cdot (N-p)^{2r}},$$

where

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \cdot p^{2r} + y^2 \cdot (N-p)^{2r} = \frac{\gamma_{p,j}}{\pi}\right\}.$$

By setting $c = a_p$ and $c = b_p$, we obtain

$$A_{1,1,1} \le \begin{cases} \frac{\pi}{1+q_{N,p,0}^2} \cdot \frac{\gamma_{p,j}}{\pi} \cdot \frac{p^{2r}+(N-p)^{2r} \cdot q_{N,p,0}^2}{p^{2r} \cdot (N-p)^{2r}}, \text{ if } j = 1, \\ \frac{\pi}{1+t_{N,p,0}^2} \cdot \frac{\gamma_{p,j}}{\pi} \cdot \frac{p^{2r}+(N-p)^{2r} \cdot t_{N,p,0}^2}{p^{2r} \cdot (N-p)^{2r}}, \text{ if } j = 2. \end{cases}$$

By (4) and (5), it follows that

$$A_{1,1,1} \le \gamma_{p,j} \cdot \frac{p^{2r} + (N-p)^{2r} \cdot \frac{p^{2(m+1)}}{(N-p)^{2(m+1)}} \cdot \varphi_j^2\left(\frac{p}{N}\right)}{p^{2r} \cdot (N-p)^{2r} \cdot \left(1 + \frac{p^{2(m+1)}}{(N-p)^{2(m+1)}} \cdot \varphi_j^2\left(\frac{p}{N}\right)\right)}$$

$$= \gamma_{p,j} \cdot \frac{N^{2(m+1-r)}}{N^{2(m+1)}} \cdot \frac{\left(1 - \frac{p}{N}\right)^{2(m+1-r)} + \left(\frac{p}{N}\right)^{2(m+1-r)} \cdot \varphi_j^2\left(\frac{p}{N}\right)}{\left(1 - \frac{p}{N}\right)^{2(m+1)} + \left(\frac{p}{N}\right)^{2(m+1)} \cdot \varphi_j^2\left(\frac{p}{N}\right)}.$$

Hence,

$$A_{1,1,1} \le \gamma_{p,j} \cdot N^{-2r} \cdot \eta_j\left(\frac{p}{N}\right), \tag{28}$$

where

$$\eta_j(x) = \frac{(1-x)^{2(m+1-r)} + x^{2(m+1-r)} \cdot \varphi_j^2(x)}{(1-x)^{2(m+1)} + x^{2(m+1)} \cdot \varphi_j^2(x)}.$$

Let us prove that $\eta_j(p/N) \le 2^{2r}$.

We get

$$\eta_j'(x) = \frac{\xi_j(x)}{\left((1-x)^{2(m+1)} + x^{2(m+1)} \cdot \varphi_j^2(x)\right)^2},$$

where

$$\zeta_j(x) = \Big((1-x)^{2(m+1-r)} + x^{2(m+1-r)} \cdot \varphi_j^2(x)\Big)'$$
$$\times \Big((1-x)^{2(m+1)} + x^{2(m+1)} \cdot \varphi_j^2(x)\Big)$$
$$- \Big((1-x)^{2(m+1-r)} + x^{2(m+1-r)} \cdot \varphi_j^2(x)\Big)$$
$$\times \Big((1-x)^{2(m+1)} + x^{2(m+1)} \cdot \varphi_j^2(x)\Big)'.$$

It can be easily checked that if $m+1=r$, then

$$\xi_j(x) = 2\varphi_j(x)\varphi_j'(x)\left((1-x)^{2r} - x^{2r}\right) + 2r\varphi_j^2(x)\left((1-x)^{2r} - x^{2r}\right) +$$
$$+2r\left((1-x)^{2r-1} - x^{2r-1}\varphi_j^4(x)\right).$$

By the assumption of the theorem $\varphi_j$ is an increasing differentiable function and $0 \le \varphi_j(x) \le 1$. Thus $\xi_j(x) \ge 0$. Hence, $\eta_j'(x) \ge 0$ for any $x \in [0,1/2]$.

It is not hard to prove that if $m+1>r$, then

$$\xi_j(x) = 2r\left((1-x)^{4m-2r+3} - x^{4m-2r+3}\varphi_j^4(x)\right)$$
$$+2\varphi_j(x)\varphi_j'(x)(1-x)^{2(m+1-r)}x^{2(m+1-r)}\left((1-x)^{2r} - x^{2r}\right)$$
$$+2\varphi_j^2(x)((m+1-r)x^{2(m-r)+1}(1-x)^{2(m-r)+1}((1-x)^{2r+1} - x^{2r+1})$$
$$+(m+1)x^{2(m+1-r)}(1-x)^{2(m+1-r)}((1-x)^{2r-1} - x^{2r-1})).$$

By the same argument, $\xi_j(x) \ge 0$ and $\eta_j'(x) \ge 0$ for any $x \in [0,1/2]$. Therefore the function $\eta_j(x)$ increases on the segment $[0,1/2]$.

Since $p \le N/2-1$, we see that $\eta_j(p/N) \le \eta_j(1/2-1/N)$. By construction,

$$\eta_j\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{N}\right)^{2(m+1-r)} + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right)^{2(m+1-r)} \cdot \varphi_j^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{N}\right)^{2(m+1)} + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right)^{2(m+1)} \cdot \varphi_j^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right)}$$

$$= 2^{2r} \cdot \frac{\sum\limits_{k=0}^{2(m+1-r)} \begin{pmatrix} 2(m+1-r) \\ k \end{pmatrix} \Big(1 + (-1)^k \cdot \varphi_j^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right)\Big)\left(\frac{2}{N}\right)^k}{\sum\limits_{k=0}^{2(m+1)} \begin{pmatrix} 2(m+1) \\ k \end{pmatrix} \Big(1 + (-1)^k \cdot \varphi_j^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right)\Big)\left(\frac{2}{N}\right)^k}.$$

It follows from the properties of the function $\varphi_j(x)$ that

$$0 \le \varphi_j\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right) \le \varphi_j\left(\frac{1}{2}\right) \le 1. \tag{29}$$

If we combine this with

$$\begin{pmatrix} 2(m+1-r) \\ k \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 2(m+1) \\ k \end{pmatrix},$$

we get

$$\eta_j\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right) \le 2^{2r}\cdot\frac{\sum\limits_{k=0}^{2(m+1-r)}\begin{pmatrix}2(m+1)\\ k\end{pmatrix}\left(1+(-1)^k\cdot\varphi_j^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right)\right)\left(\frac{2}{N}\right)^k}{\sum\limits_{k=0}^{2(m+1)}\begin{pmatrix}2(m+1)\\ k\end{pmatrix}\left(1+(-1)^k\cdot\varphi_j^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right)\right)\left(\frac{2}{N}\right)^k}.$$

Obviously,

$$\eta_j\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right)\le 2^{2r}.$$

Hence, $\eta_j(p/N)\le 2^{2r}$. Combining this inequality with (28), we obtain (24).

Let us prove that

$$A_{1,1,2}\le\gamma_{p,j}\cdot M^2\cdot\left(\frac{N}{2}\right)^{-2r}\cdot\frac{1}{2^{4m+3}}. \tag{30}$$

Using (20), we obtain

$$A_{1,1,2}=(\ell_{p,j},\zeta_{p,j})^2\cdot\frac{\|\epsilon_{p,j}\|^4}{\|\zeta_{p,j}\|^2\cdot(\|\zeta_{p,j}\|^2+\|\epsilon_{p,j}\|^2)^2}.$$

It follows from (25) that $\|\zeta_{p,j}\|^2\ge\pi$ and

$$\|\zeta_{p,j}\|^2+\|\epsilon_{p,j}\|^2\ge\pi. \tag{31}$$

Therefore,

$$A_{1,1,2}\le(\ell_{p,j},\zeta_{p,j})^2\cdot\|\epsilon_{p,j}\|^4\cdot\pi^{-3}.$$

From (4), (5) and (29) it follows that $q^2_{N,p,0}\le 1$ and $t^2_{N,p,0}\le 1$. If we combine these inequalities with (25) and (27), we get

$$(\ell_{p,1},\zeta_{p,1})^2\le 2\pi^2\left(a_p^2+a_{N-p}^2\cdot q^2_{N,p,0}\right)\le 2\pi^2\left(a_p^2+a_{N-p}^2\right)$$

$$\le 2\pi^2\cdot p^{-2r}\cdot\left(a_p^2\cdot p^{2r}+a_{N-p}^2\cdot(N-p)^{2r}\right)=2\pi\cdot p^{-2r}\cdot\gamma_{p,1}.$$

Similarly, $(\ell_{p,2},\zeta_{p,2})^2\le 2\pi\cdot p^{-2r}\cdot\gamma_{p,2}$.

Hence,

$$(\ell_{p,j},\zeta_{p,j})^2\le 2\pi\cdot p^{-2r}\cdot\gamma_{p,j} \tag{32}$$

for $j=1,2$.

By construction,

$$\epsilon_{p,j}(x)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(r_{N,p,k}\cdot\cos((p+kN)x)+\\ \qquad +q_{N,p,k}\cdot\cos((N(k+1)-p)x)),\ \text{if } j=1,\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}(s_{N,p,k}\cdot\sin((p+kN)x)+\\ \qquad +t_{N,p,k}\cdot\sin((N(k+1)-p)x)),\ \text{if } j=2.\end{cases}$$

This implies that

$$\|\epsilon_{p,j}\|^2 = \begin{cases} \pi \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left( r_{N,p,k}^2 + q_{N,p,k}^2 \right), \text{ if } j = 1, \\ \pi \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left( s_{N,p,k}^2 + t_{N,p,k}^2 \right), \text{ if } j = 2. \end{cases}$$

Using (6) and (7), we get

$$\|\epsilon_{p,j}\|^2 \leq M \cdot \pi \cdot \left( \frac{p}{N} \right)^{2(m+1)}. \tag{33}$$

If we combine this inequality with (32), we obtain

$$A_{1,1,2} \leq 2M^2 \cdot \gamma_{p,j} \cdot \frac{p^{4(m+1)-2r}}{N^{4(m+1)}}.$$

Since $p < N/2$, it can easily be checked that (30) holds.

Let us show that

$$A_{1,2} \leq \gamma_{p,j} \cdot \left( \frac{N}{2} \right)^{-2r} \cdot \frac{M}{2^{2m+1}}. \tag{34}$$

It follows from (18), (31), (32) and (33) that

$$A_{1,2} \leq 2\pi p^{-2r} \gamma_{p,j} \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{p}{N} \right)^{2(m+1)} \cdot M\pi = \gamma_{p,j} \cdot 2M \cdot \frac{p^{2(m+1-r)}}{N^{2(m+1)}}.$$

By assumption, $m + 1 \geq r$ and $p < N/2$. Therefore,

$$A_{1,2} \leq \gamma_{p,j} \cdot 2M \cdot \left( \frac{N}{2} \right)^{2(m+1-r)} \cdot \frac{1}{N^{2(m+1)}} = \gamma_{p,j} \left( \frac{N}{2} \right)^{-2r} \frac{M}{2^{2m+1}}.$$

Let us prove that

$$A_2 \leq \left( \frac{N}{2} \right)^{-2r} \cdot \frac{1 - \gamma_{p,j}}{2^{2r}} \tag{35}$$

Using (16), we get

$$A_2 = \|h_{p,j}\|^2 + \frac{(h_{p,j}, \epsilon_{p,j})^2}{(\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2)^2} \cdot (\zeta_{p,j} + \epsilon_{p,j} \ , \ \zeta_{p,j} + \epsilon_{p,j})$$

$$-2 \cdot \frac{(h_{p,j}, \epsilon_{p,j})}{\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2} \cdot (h_{p,j} \ , \ \zeta_{p,j} + \epsilon_{p,j}).$$

If we combine this with (15), we obtain

$$A_2 = \|h_{p,j}\|^2 + \frac{(h_{p,j}, \epsilon_{p,j})^2}{\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2} - 2 \cdot \frac{(h_{p,j}, \epsilon_{p,j})^2}{\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2} \leq \|h_{p,j}\|^2.$$

By construction, we have

$$\|h_{p,1}\|^2 = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_{p+kN}^2 + a_{(k+1)N-p}^2 \right)$$

$$\le \pi(p+N)^{-2r} \sum_{k=1}^{\infty} \left( (p+kN)^{2r} a_{p+kN}^2 + ((k+1)N-p)^{2r} a_{(k+1)N-p}^2 \right) =$$

$$= (p+N)^{-2r} \cdot \left\| h_{p,1}^{(r)} \right\|^2 .$$

Similarly, $\|h_{p,2}\|^2 \le (p+N)^{-2r} \cdot \left\| h_{p,2}^{(r)} \right\|^2$. Thus

$$\|h_{p,j}\|^2 \le (p+N)^{-2r} \cdot \left\| h_{p,j}^{(r)} \right\|^2 , j = 1, 2$$

Combining this with (22) and $p < N/2$, we get

$$\|h_{p,j}\|^2 \le \frac{1-\gamma_{p,j}}{(p+N)^{2r}} = \frac{1-\gamma_{p,j}}{N^{2r}\left(1+\frac{p}{N}\right)^{2r}} \le \frac{1-\gamma_{p,j}}{N^{2r}} = \frac{1-\gamma_{p,j}}{2^{2r}} \cdot \left(\frac{N}{2}\right)^{-2r} . \quad (36)$$

Inequality (35) follows.

Let us show that

$$|A_3| \le \sqrt{2M \cdot \gamma_{p,j} \cdot (1-\gamma_{p,j})} \cdot \left(\frac{N}{2}\right)^{-2r} \cdot \frac{1}{2^{m+r}} . \quad (37)$$

From (15) and (17) it follows that

$$A_3 = 2(\ell_{p,j}, h_{p,j}) - 2\frac{(h_{p,j}, \epsilon_{p,j})}{\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2} (\ell_{p,j}, \zeta_{p,j} + \epsilon_{p,j})$$

$$-2\frac{(\ell_{p,j}, \zeta_{p,j})}{\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2} (h_{p,j}, \zeta_{p,j} + \epsilon_{p,j}) +$$

$$+2\frac{(\ell_{p,j}, \zeta_{p,j}) \cdot (h_{p,j}, \epsilon_{p,j})}{(\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2)^2} \left(\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2\right) = -2\frac{(\ell_{p,j}, \zeta_{p,j}) \cdot (h_{p,j}, \epsilon_{p,j})}{\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2} .$$

Therefore,

$$|A_3| \le 2\frac{|(\ell_{p,j}, \zeta_{p,j})| \cdot |(h_{p,j}, \epsilon_{p,j})|}{\|\zeta_{p,j}\|^2 + \|\epsilon_{p,j}\|^2} .$$

If we combine this inequality with (31), (32), (33), (36) and $p < N/2$, we obtain

$$|A_3| \le 2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{2\pi \cdot \gamma_{p,j}} \cdot p^{-r} \cdot \frac{\sqrt{1-\gamma_{p,j}}}{(p+N)^r} \cdot \sqrt{\pi M} \cdot \left(\frac{p}{N}\right)^{m+1}$$

$$= 2\sqrt{2M\gamma_{p,j}(1-\gamma_{p,j})} \frac{p^{m+1-r}}{N^{m+1}(p+N)^r}$$

$$= 2\sqrt{2M\gamma_{p,j}(1-\gamma_{p,j})}\frac{p^{m+1-r}}{N^{m+1+r}\left(1+\frac{p}{N}\right)^{r}} \le$$

$$\le 2\sqrt{2M\gamma_{p,j}(1-\gamma_{p,j})}\cdot\frac{(N/2)^{m+1-r}}{N^{m+1+r}}$$

$$= \sqrt{2M\gamma_{p,j}(1-\gamma_{p,j})}\left(\frac{N}{2}\right)^{-2r}\frac{1}{2^{m+r}}.$$

Inequality (37) is proved.

It follows from (21), (24), (30), (34), (35) and (37) that

$$\alpha_{p,j}^2 \le \left(\frac{N}{2}\right)^{-2r}\left(\gamma_{p,j}+\frac{1-\gamma_{p,j}}{2^{2r}}+\frac{M^2\gamma_{p,j}}{2^{4m+3}}+\frac{M\gamma_{p,j}}{2^{2m+1}}+\frac{\sqrt{2M\gamma_{p,j}(1-\gamma_{p,j})}}{2^{m+r}}\right).$$

Since $\gamma_{p,j}\in[0,1]$ (see (23)), we have

$$\gamma_{p,j}+\frac{1-\gamma_{p,j}}{2^{2r}}\le 1 \text{ and } \sqrt{\gamma_{p,j}(1-\gamma_{p,j})}\le\frac{1}{2}.$$

Hence,

$$\alpha_{p,j}^2 \le \left(\frac{N}{2}\right)^{-2r}\left(1+\frac{\sqrt{2M}}{2^{m+r+1}}+\frac{M}{2^{2m+1}}+\frac{M^2}{2^{4m+3}}\right),$$

where $p=1,2,\ldots,N/2-1$ and $j=1,2$. If we combine this with (13) and (14), we get

$$\inf_{\omega\in V_N}\|\zeta-\omega\| \le \left(\frac{N}{2}\right)^{-2r}\left(1+\frac{\sqrt{2M}}{2^{m+r+1}}+\frac{M}{2^{2m+1}}+\frac{M^2}{2^{4m+3}}\right).$$

Using (10), we see that inequality (9) is satisfied for any non-constant function $f\in\widetilde{W}_2^r$.

This completes the proof.

**Remark** In [1], A.N. Kolmogorov proved that

$$d_N\left(\widetilde{W}_2^r, L_2[-\pi,\pi]\right) = \left(\frac{N}{2}\right)^{-r}. \tag{38}$$

Therefore the estimate (8) can be expressed as follows:

$$E_{L_2[-\pi,\pi]}\left(\widetilde{W}_2^r, V_N\right) \le d_N\left(\widetilde{W}_2^r, L_2[-\pi,\pi]\right)\sqrt{1+\frac{M^2}{2^{4m+3}}+\frac{M}{2^{2m+1}}+\frac{\sqrt{2M}}{2^{m+r+1}}}.$$

This means that $V_N$ is an almost best linear space for approximation of $\widetilde{W}_2^r$ in the norm of $L_2[-\pi,\pi]$.

## Approximation properties of generalized Fup-functions

Consider the generalized $Fup$-function

$$f_{N,m}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left( \frac{\sin(t/N)}{t/N} \right)^{m+1} F(t/N)\, dt,$$

where $N$ is an even natural number, $m \in \mathbb{N}$, $m \leq N-2$ and $F(t)$ is the Fourier transform of the mother function $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ such that

(i) *supp* $f(x) = [-1, 1]$,

(ii) $f(x)$ is an even function,

(iii) $f(x) \geq 0$ for any $x \in [-1, 1]$,

(iv) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$,

(v) $F(\pi) \geq 0$.

Using Paley–Wiener theorem, we get

$$supp\ f_{N,m} \subseteq \left[ -\frac{m+2}{N}, \frac{m+2}{N} \right]. \tag{39}$$

Let

$$f_{N,m,k}(x) = f_{N,m}\left( \frac{x}{\pi} - \frac{2k-m-2+N}{N} \right) + f_{N,m}\left( \frac{x}{\pi} - \frac{2k-m-2-N}{N} \right)$$

for any $k = 1, 2, \ldots, m+1$ and

$$f_{N,m,k}(x) = f_{N,m}\left( \frac{x}{\pi} - \frac{2k-m-2-N}{N} \right)$$

for $k = m+2, \ldots, N$.

Denote by $L_{N,m}$ the space of functions $\varphi$ such that

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \cdot f_{N,m,k}(x),\ \ x \in [-\pi, \pi].$$

The aim of this section is to prove the following result.

**Theorem 8** *If* $m+1 \geq r$, *then there exists* $M \geq 0$ *such that*

$$E_{L_2[-\pi,\pi]}\left( \widetilde{W}_2^r, L_{N,m} \right) \leq \left( \frac{N}{2} \right)^{-r} \sqrt{1+\varepsilon}, \tag{40}$$

*where*

$$\varepsilon = \frac{M^2}{2^{4m+3}} + \frac{M}{2^{2m+1}} + \frac{\sqrt{2M}}{2^{m+r+1}}$$

*Proof.*

First we shall show that there exists an almost-trigonometric basis of the space $L_{N,m}$.

Let us expand the function $f_{N,m,k}$ in the Fourier series:

$$f_{N,m,k}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \cdot e^{ijx}, \quad \text{where} \quad c_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{N,m,k}(x) \cdot e^{-ijx} dx.$$

For the case $k = 1, 2, \ldots, m+1$ we get $c_j = I_1 + I_2$, where

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{N,m} \left( \frac{x}{\pi} - \frac{2k-m-2+N}{N} \right) \cdot e^{-ijx} dx$$

and

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{N,m} \left( \frac{x}{\pi} - \frac{2k-m-2-N}{N} \right) \cdot e^{-ijx} dx.$$

After the change of variables we obtain

$$I_1 = \frac{1}{2} \exp \left( -ij\pi \cdot \frac{2k-m-2-N}{N} \right) \cdot \int_{-2-\frac{2k-m-2}{N}}^{-\frac{2k-m-2}{N}} f_{N,m}(z) \cdot e^{-ij\pi z} dz,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \exp \left( -ij\pi \cdot \frac{2k-m-2+N}{N} \right) \cdot \int_{-\frac{2k-m-2}{N}}^{2-\frac{2k-m-2}{N}} f_{N,m}(z) \cdot e^{-ij\pi z} dz.$$

Since

$$\exp \left( -ij\pi \cdot \frac{2k-m-2-N}{N} \right) = \exp \left( -ij\pi \cdot \frac{2k-m-2}{N} \right) \cdot \exp(ij\pi)$$

$$= \exp \left( -ij\pi \cdot \frac{2k-m-2}{N} \right) \cdot \exp(-ij\pi) = \exp \left( -ij\pi \cdot \frac{2k-m-2+N}{N} \right),$$

we get

$$c_j = \frac{1}{2} \exp \left( -ij\pi \cdot \frac{2k-m-2-N}{N} \right) \cdot \int_{-2-\frac{2k-m-2}{N}}^{2-\frac{2k-m-2}{N}} f_{N,m}(z) \cdot e^{-ijz} dz.$$

Using $1 \leq k \leq m+1$ and $m \leq N-2$, we have

$$-2 - \frac{2k-m-2}{N} \leq -1 \leq -\frac{m+2}{N} \quad \text{and} \quad 2 - \frac{2k-m-2}{N} \geq 1 \geq \frac{m+2}{N}.$$

If we combine these inequalities with (39), we obtain

$$c_j = \frac{1}{2} \exp\left(-ij\pi \cdot \frac{2k-m-2-N}{N}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_{N,m}(z) \cdot e^{-ij\pi z} dz.$$

Therefore

$$c_j = \frac{1}{2} \exp\left(-ij\pi \cdot \frac{2k-m-2-N}{N}\right) \cdot F_{N,m}(j\pi). \tag{41}$$

Similarly we can obtain (41) for $k = m+2, \ldots, N$.

Consequently

$$f_{N,m,k}(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left(-ij\pi \cdot \frac{2k-m-2-N}{N}\right) \cdot F_{N,m}(j\pi) \cdot e^{ijx} \tag{42}$$

holds for every $k = 1, 2, \ldots, N$.

Consider the functions

$$\zeta_{N,m,p}(x) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N} f_{N,m,k}(x) \cdot \exp\left(ip\pi \cdot \frac{2k-m-2-N}{N}\right)$$

for $p = 1, 2, \ldots, N$.

By construction,

$$\zeta_{N,m,p}(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{p,j} \cdot F_{N,m}(j\pi) \cdot e^{ijx},$$

where

$$a_{p,j} = \sum_{k=1}^{N} \exp\left(i\pi(p-j) \cdot \frac{2k-m-2-N}{N}\right).$$

We have

$$a_{p,j} = \exp\left(i\pi(p-j)\left(-1-\frac{m}{N}\right)\right) \cdot \sum_{k=1}^{N} \left(\exp\left(i\pi \cdot \frac{2(p-j)}{N}\right)\right)^{k-1}$$

$$= \begin{cases} N \cdot (-1)^{mq}, \text{ if } j = p + Nq, \text{ where } q \in \mathbb{Z}, \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

Hence

$$\zeta_{N,m,p}(x) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{N,m}(\pi(p+Nq)) \cdot (-1)^{mq} \cdot e^{i(p+Nq)x} \tag{43}$$

for $p = 1, 2, \ldots, N$.

Consider several cases.

1. Let $m$ be an even number. By (43), we obtain

$$\zeta_{N,m,p}(x) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{N,m}(\pi(p+Nq)) \cdot e^{i(p+Nq)x}. \tag{44}$$

By definition,

$$F_{N,m}(\pi N(q+1)) = \left(\frac{\sin(\pi(q+1))}{\pi(q+1)}\right)^{m+1} F(\pi(q+1)) = \begin{cases} 0, & \text{if } \ q \neq -1, \\ F(0), & \text{if } \ q = -1. \end{cases}$$

From property (iv) of the function $f$ it follows that

$$F_{N,m}(\pi N(q+1)) = \begin{cases} 0, & \text{if } \ q \neq -1, \\ 1, & \text{if } \ q = -1. \end{cases} \tag{45}$$

Therefore

$$\zeta_{N,m,N}(x) \equiv 1.$$

Let

$$\psi_{N,m,p}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\zeta_{N,m,p}(x) + \zeta_{N,m,N-p}(x)), & \text{if } \ p = 1, 2, \ldots, N/2, \\ \frac{1}{2i}(\zeta_{N,m,p-N/2}(x) - \zeta_{N,m,3N/2-p}(x)), & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } \ p = N/2+1, \ldots, N-1, & \\ \zeta_{N,m,N}(x), \quad \text{if } \quad p = N. & \end{cases}$$

By the above

$$\psi_{N,m,N}(x) = 1. \tag{46}$$

Using (44), we obtain

$$\zeta_{N,m,N-p}(x) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{N,m}(-\pi(p - N(q+1))) \cdot e^{-i(p-N(q+1))x}.$$

It follows from property (ii) of the function $f$ that the function $F$ is even. Therefore

$$\psi_{N,m,N-p}(x) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{N,m}(\pi(p - N(q+1))) \cdot e^{-i(p-N(q+1))x}$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{\infty} F_{N,m}(\pi(p+Ns)) \cdot e^{-i(p+Ns)x}.$$

Hence, for any $p = 1, 2, \ldots, N/2$ we get

$$\psi_{N,m,p}(x) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{N,m}(\pi(p+Nq)) \cdot \cos((p+Nq)x).$$

Since $F$ is even function, we obtain

$$\begin{aligned}\psi_{N,m,p}(x) = \sum_{q=0}^{\infty}(F_{N,m}(\pi(p+Nq)) \cdot \cos((p+Nq)x) \\ +F_{N,m}(\pi((q+1)N-p)) \cdot \cos(((q+1)N-p)x))\end{aligned} \tag{47}$$

for $p = 1, 2, \ldots, N/2 - 1$ and

$$\psi_{N,m,N/2}(x) = 2\sum_{q=0}^{\infty} F_{N,m}\left(\pi(2q+1)\frac{N}{2}\right) \cdot \cos\left((2q+1)\frac{N}{2}x\right). \tag{48}$$

In the same way,

$$\begin{aligned}\psi_{N,m,p}(x) = \sum_{q=0}^{\infty}(F_{N,m}(\pi(p-N/2+Nq)) \cdot \sin((p-N/2+Nq)x) \\ +F_{N,m}(\pi((q+1)N-p+N/2)) \cdot \sin(((q+1)N-p+N/2)x))\end{aligned} \tag{49}$$

for $p = N/2+1, \ldots, N-1$.

2. Let $m$ be an odd number. In this case, using (43), we get

$$\zeta_{N,m,p}(x) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^q \cdot F_{N,m}(\pi(p+qN)) \cdot e^{i(p+qN)x}.$$

This implies that

$$\zeta_{N,m,N}(x) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^q \cdot F_{N,m}(\pi N(q+1)) \cdot e^{iN(q+1)x}.$$

If we combine this with (45), we obtain

$$\zeta_{N,m,N}(x) \equiv -1.$$

Let

$$\psi_{N,m,p}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2i}\left(\zeta_{N,m,p}(x) + \zeta_{N,m,N-p}(x)\right), & \text{if } p = 1, 2, \ldots, N/2, \\ \frac{1}{2}\left(\zeta_{N,m,p-N/2}(x) - \zeta_{N,m,3N/2-p}(x)\right), & \\ & \text{if } \ p = N/2+1, \ldots, N-1, \\ \zeta_{N,m,N}(x), \quad \text{if } \ p = N. & \end{cases}$$

As above, it can be proved that

$$\begin{aligned}\psi_{N,m,p}(x) = \sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q(F_{N,m}(\pi(p+Nq)) \cdot \sin((p+qN)x) \\ +F_{N,m}(\pi((q+1)N-p)) \cdot \sin(((q+1)N-p)x))\end{aligned} \tag{50}$$

for $p = 1, 2, \ldots, N/2-1$,

$$\psi_{N,m,N/2} = 2\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q F_{N,m}\left(\pi(2q+1)\frac{N}{2}\right)\sin\left((2q+1)\frac{N}{2}x\right), \tag{51}$$

$$\begin{aligned}\psi_{N,m,p}(x) = \sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q(F_{N,m}(\pi(p-N/2+qN))\cdot\cos((p-N/2+qN)x)-\\ -F_{N,m}(\pi((q+1)N-p+N/2))\cdot\cos(((q+1)N-p+N/2)x))\end{aligned} \tag{52}$$

for $p = N/2+1, \ldots, N-1$ and

$$\psi_{N,m,N}(x) \equiv -1. \tag{53}$$

Consider the functions

$$v_{N,m,0}(x) = (-1)^m \cdot \psi_{N,m,N}(x), \quad w_{N,m,0}(x) = \frac{1}{2F_{N,m}(\pi N/2)}\cdot\psi_{N,m,N/2}(x),$$

$$v_{N,m,p}(x) = \begin{cases}\psi_{N,m,p+N/2}(x)/F_{N,m}(\pi p), & \text{if } \ m \text{ is odd,}\\ \psi_{N,m,p}(x)/F_{N,m}(\pi p), & \text{if } \ m \text{ is even}\end{cases}$$

and

$$w_{N,m,p}(x) = \begin{cases}\psi_{N,m,p}(x)/F_{N,m}(\pi p), & \text{if } \ m \text{ is odd,}\\ \psi_{N,m,p+N/2}(x)/F_{N,m}(\pi p), & \text{if } \ m \text{ is even}\end{cases}$$

for $p = 1, 2, \ldots, N/2-1$.

Let us remark that $F_{N,m}(\pi p) \neq 0$ for $p = 1, 2, \ldots, N/2$. This statement will be proved later.

From (46) – (53) it follows that

$$v_{N,m,0}(x) \equiv 1,$$

$$w_{N,m,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(y_{N,m,k}\cos\left(\frac{N}{2}(2k+1)x\right) + z_{N,m,k}\sin\left(\frac{N}{2}(2k+1)x\right)\right),$$

$$v_{N,m,p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(r_{N,m,p,k}\cos((p+kN)x) + q_{N,m,p,k}\cos(((k+1)N-p)x)\right)$$

and

$$w_{N,m,p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(s_{N,m,p,k}\sin((p+kN)x) + t_{N,m,p,k}\sin((N(k+1)-p)x)\right)$$

for $p = 1, 2, \ldots, N/2-1$, where

$$y_{N,m,k} = \frac{1+(-1)^m}{2}\cdot\frac{F_{N,m}\left(\pi\cdot\frac{N}{2}\cdot(2k+1)\right)}{F_{N,m}\left(\pi\cdot\frac{N}{2}\right)}, \tag{54}$$

$$z_{N,m,k} = (-1)^k \cdot \frac{1-(-1)^m}{2} \cdot \frac{F_{N,m}\left(\pi \cdot \frac{N}{2} \cdot (2k+1)\right)}{F_{N,m}\left(\pi \cdot \frac{N}{2}\right)}, \tag{55}$$

$$r_{N,m,p,k} = (-1)^{mk} \cdot \frac{F_{N,m}(\pi(p+kN))}{F_{N,m}(\pi p)}, \tag{56}$$

$$q_{N,m,p,k} = (-1)^{m(k+1)} \cdot \frac{F_{N,m}(\pi(N(k+1)-p))}{F_{N,m}(\pi p)}, \tag{57}$$

$$s_{N,m,p,k} = (-1)^{mk} \cdot \frac{F_{N,m}(\pi(p+kN))}{F_{N,m}(\pi p)}, \tag{58}$$

$$t_{N,m,p,k} = (-1)^{m(k+1)+1} \cdot \frac{F_{N,m}(\pi(N(k+1)-p))}{F_{N,m}(\pi p)}. \tag{59}$$

We see that the system $\{v_{N,m,p}, w_{N,m,p}\}_{p=0}^{N/2-1}$ constitutes an almost-trigonometric basis of the space $L_{N,m}$.

Now we show that all conditions of Theorem 7 are satisfied.

First note that condition (iii) of Theorem 7 is satisfied.

Secondly, from (57) and (59) it follows that

$$q^2_{N,m,p,0} = t^2_{N,m,p,0} = \left(\frac{F_{N,m}(\pi(N-p))}{F_{N,m}(\pi p)}\right)^2.$$

By construction,

$$F_{N,m}(\pi p) = \left(\frac{\sin(\pi p/N)}{p/N}\right)^{m+1} \cdot F(\pi p/N)$$

and

$$\begin{aligned} F_{N,m}(\pi(N-p)) &= \left(\frac{\sin(\pi - \pi p/N)}{\pi(N-p)/N}\right)^{m+1} \cdot F\left(\frac{\pi(N-p)}{N}\right) \\ &= \left(\frac{\sin(\pi p/N)}{\pi(N-p)/N}\right)^{m+1} \cdot F\left(\frac{\pi(N-p)}{N}\right). \end{aligned}$$

This implies that

$$t^2_{N,m,p,0} = q^2_{N,m,p,0} = \left(\frac{p}{N-p}\right)^{2(m+1)} \cdot \varphi^2\left(\frac{p}{N}\right),$$

where

$$\varphi(t) = \frac{F(\pi(1-t))}{F(\pi t)}.$$

Let us prove that the function $\varphi$ is positive, increasing and differentiable on $[0, 1/2]$.

It follows from properties (i) and (ii) of the function $f$ that

$$F(\pi t) = 2\int_0^1 \cos(\pi t x) f(x)dx.$$

For any $x \in [0,1]$, $t_1 \in [0,1/2]$ and $t_2 \in [0,1/2]$ such that $t_1 < t_2$ the inequality $0 \le \pi t_1 x \le \pi t_2 x \le \pi/2$ holds. Since the function $f(x)$ is positive (see property (iii)), we have $\cos(\pi t_1 x) f(x) \ge \cos(\pi t_2 x) f(x)$. Therefore $F(\pi t_1) \ge F(\pi t_2)$. This means that the function $F(\pi t)$ decreases on the segment $[0,1/2]$. Hence, $F(\pi t) \ge F(\pi/2)$ for any $t \in [0,1/2]$. Furthermore, $\cos(x\pi/2) > 0$ for every $x \in [0,1)$. This implies that the equality

$$\int_0^1 \cos(x\pi/2) f(x) dx = 0$$

holds if and only if $f(x) = 0$ for almost every $x \in [0,1]$. The last statement contradicts the properties of the function $f(x)$. We see that $F(\pi/2) > 0$. Therefore $F(\pi t) > 0$ for every $t \in [0,1/2]$.

Moreover, by construction,

$$F_{N,m}(\pi p) = \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi p}{N}\right)}{\frac{\pi p}{N}} \right)^{m+1} \cdot F\left(\frac{\pi p}{N}\right) > 0$$

for $p = 1, 2, \ldots, N/2$. This implies that the functions $v_{N,m,p}$ and $w_{N,m,p}$ were defined correctly.

Further,

$$F(\pi(1-t)) = 2 \int_0^1 \cos(\pi(1-t)x) f(x) dx.$$

Consider $t_1, t_2 \in [0,1/2]$ such that the inequality $t_1 < t_2$ holds. We obtain $0 \le \pi(1-t_2)x \le \pi(1-t_1)x \le \pi$ for all $x \in [0,1]$. If we combine this with property (iii) of the function $f$, we see that $\cos(\pi(1-t_1)x) f(x) \le \cos(\pi(1-t_2)x) f(x)$. Equivalently, the function $F(\pi(1-t))$ increases on the segment $[0,1/2]$. Therefore $F(\pi(1-t)) \ge F(\pi)$ for $t \in [0,1/2]$. From property (v) of the function $f(x)$ it follows that the function $F(\pi(1-t)) \ge 0$ for $t \in [0,1/2]$.

Thus the function $\varphi$ is positive and increasing on the segment $[0,1/2]$. In particular $\varphi(t) \le \varphi(1/2) = 1$ for any $t \in [0,1/2]$.

By Paley-Wiener theorem, the function $F$ is an entire function. Therefore the function $\varphi$ is differentiable on $[0,1/2]$.

Finally we shall show that the last condition of Theorem 7 is satisfied.

By construction,

$$F_{N,m}(\pi p) = \left( \frac{\sin(\pi p/N)}{\pi p/N} \right)^{m+1} \cdot F\left(\frac{\pi p}{N}\right),$$

$$F_{N,m}(\pi(p+kN)) = \left( \frac{\sin(\pi k + \pi p/N)}{\pi(p+kN)/N} \right)^{m+1} \cdot F\left(\frac{\pi(p+kN)}{N}\right)$$

and

$$F_{N,m}(\pi((k+1)N-p)) = \left(\frac{\sin\left(\pi(k+1)-\pi p/N\right)}{\pi((k+1)N-p)/N}\right)^{m+1}$$

$$\times F\left(\frac{\pi((k+1)N-p)}{N}\right).$$

Hence, we obtain

$$\left(\frac{F_{N,m}(\pi(p+kN))}{F_{N,m}(\pi p)}\right)^2 = \left(\frac{p}{p+kN}\right)^{2(m+1)} \cdot \left(\frac{F\left(\pi(p+kN)/N\right)}{F\left(\pi p/N\right)}\right)^2$$

and

$$\left(\frac{F_{N,m}(\pi((k+1)N-p))}{F_{N,m}(\pi p)}\right)^2 = \left(\frac{p}{(k+1)N-p}\right)^{2(m+1)}$$

$$\times \left(\frac{F\left(\pi((k+1)N-p)/N\right)}{F\left(\pi p/N\right)}\right)^2.$$

It follows from the properties of the function $f$ that

$$|F(t)| = 2 \cdot \left|\int_0^1 \cos(tx) f(x)dx\right| \leq 2\int_0^1 |f(x)|dx$$

$$= \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Moreover, by the above $F(\pi p/N) \geq f(\pi/2) > 0$ for $p = 1, 2, \ldots, N/2$. Therefore

$$\left(\frac{F_{N,m}(\pi(p+kN))}{F_{N,m}(\pi p)}\right)^2 \leq \frac{1}{F^2(\pi/2)} \cdot \left(\frac{p}{p+kN}\right)^{2(m+1)}$$

and

$$\left(\frac{F_{N,m}(\pi((k+1)N-p))}{F_{N,m}(\pi p)}\right)^2 \leq \frac{1}{F^2(\pi/2)} \cdot \left(\frac{p}{(k+1)N-p}\right)^{2(m+1)}.$$

If we combine this with (56)–(59), we obtain

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(r^2_{N,m,p,k} + q^2_{N,m,p,k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(s^2_{N,m,p,k} + t^2_{N,m,p,k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{F_{N,m}(\pi(p+kN))}{F_{N,m}(\pi p)}\right)^2 + \left(\frac{F_{N,m}(\pi((k+1)N-p))}{F_{N,m}(\pi p)}\right)^2\right)$$

$$\leq \frac{1}{F^2(\pi/2)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \frac{p}{p+kN} \right)^{2(m+1)} + \left( \frac{p}{(k+1)N-p} \right)^{2(m+1)} \right)$$

$$= \frac{1}{F^2(\pi/2)} \cdot \left(\frac{p}{N}\right)^{2(m+1)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(k+p/N)^{2(m+1)}} + \frac{1}{(k+1-p/N)^{2(m+1)}} \right).$$

Since $1 \geq p \geq N/2$, we get

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(r_{N,m,p,k}^2 + q_{N,m,p,k}^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(s_{N,m,p,k}^2 + t_{N,m,p,k}^2\right) \leq \left(\frac{p}{N}\right)^{2(m+1)} \cdot M,$$

where

$$M = \frac{1}{F^2(\pi/2)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\left(k+\frac{1}{N}\right)^{2(m+1)}} + \frac{1}{\left(k+\frac{1}{N}+\frac{1}{2}\right)^{2(m+1)}} \right). \tag{60}$$

We see that all conditions of Theorem 7 are satisfied and inequality (40) holds. This completes the proof.

**Remark.** Actually, it was shown in the proof of Theorem 8 that the dimension of the space $L_{N,m}$ is equal to $N$. Therefore the system $\{f_{N,m,k}\}_{k=1}^{N}$ is linearly independent. Moreover, by definition of the Kolmogorov width, we see that

$$d_N\left(\widetilde{W}_2^r, L_2[-\pi,\pi]\right) \leq E_{L_2[-\pi,\pi]}\left(\widetilde{W}_2^r, L_{N,m}\right). \tag{61}$$

If we combine this with (38) and (40), we get

$$d_N\left(\widetilde{W}_2^r, L_2[-\pi,\pi]\right) \leq E_{L_2[-\pi,\pi]}\left(\widetilde{W}_2^r, L_{N,m}\right)$$

$$\leq d_N\left(\widetilde{W}_2^r, L_2[-\pi,\pi]\right) \sqrt{1+\varepsilon(N,m,r)},$$

where

$$\varepsilon(N,m,r) = \frac{M^2}{2^{4m+3}} + \frac{M}{2^{2m+1}} + \frac{\sqrt{2M}}{2^{m+r+1}}.$$

Furthermore, it follows from (60) and the equality

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi}{90},$$

that

$$M \leq \frac{2}{F^2(\pi/2)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{F^2(\pi/2)} \cdot \frac{\pi^4}{45}.$$

Hence,

$$\lim_{N,m\to\infty} \frac{E_{L_2[-\pi,\pi]}\left(\widetilde{W}_2^r, L_{N,m}\right)}{d_N\left(\widetilde{W}_2^r, L_2[-\pi,\pi]\right)} = 1.$$

This means that $L_{N,m}$ is almost the best space for approximation of the class $\widetilde{W}_2^r$ in the norm of $L_2[-\pi,\pi]$. In other words, the generalized $Fup$-function $f_{N,m}$, which is a function with a local support, has good approximation properties.

## Conclusion

In this paper we introduce a method of construction of function spaces that combine the following convenient properties:

1) an existence of the basis that constructed using shifts of one compactly supported function; besides, as it can be seen from (39) a support of this function can be made arbitrarily small;

2) smoothness of functions of these spaces; moreover, the degree of smoothness of these functions can be arbitrarily large; for example, if the mother function is $mup_s(x)$, we get infinitely differentiable generalized $Fup$-function;

3) the dimension of these spaces can be quite arbitrarily;

4) good approximation properties; the class $\widetilde{W}_2^r$ is a classic object of investigation in approximation theory, theorem 8 actually means that spaces of shifts of the generalized $Fup$-functions approximate $\widetilde{W}_2^r$ well; furthermore, these spaces are almost the best spaces for approximation of $\widetilde{W}_2^r$ in the norm of $L_2[-\pi,\pi]$;

The last property is the most important.

Notice that spaces of shifts of the generalized $Fup$-functions have good approximation properties because of existence of the almost-trigonometric basis.

We stress that the almost-trigonometric basis theorem is another important result. Actually, if it can be proved that some space of functions has an almost-trigonometric basis, then this space has good approximation properties.

In spite of all convenient properties, there are many unsolved problems relating generalized $Fup$-functions. The following open questions are of interest:

1) How can some generalize $Fup$-function be computed (generally, for this purpose the Fourier series can be used)?

2) Can convenient asymptotic expansions of generalized $Fup$-functions be obtained (we note that the first term of asymptotic expansions of these functions was already obtained in [26])?

3) Can the inequality (61) be replaced by equality

$$E_{L_2[-\pi,\pi]}\left(\widetilde{W}_2^r, L_{N,m}\right) = d_N\left(\widetilde{W}_2^r, L_2[-\pi,\pi]\right)$$

(notice that by theorem 5 this equality holds, if $up(x)$ is a mother-function of the generalized $Fup$-function)?

4) Can it be proved that

$$E_{C_{[-\pi,\pi]}}\left(\widetilde{W}^r_\infty, L_{N,m}\right) \leq d_N\left((\widetilde{W}^r_\infty, C_{[-\pi,\pi]}\right) \cdot (1+\alpha(N,m)),$$

where $\alpha(N,m) \to \infty$ as $N,m \to \infty$ (see theorem 4 for the *up*-function case)?

These will be the object of another papers.

**Acknowledgement.** Research of V.A. Makarichev is supported in part by N.I. Akhiezer Foundation.

REFERENCES

1. Kolmogoroff A.N. Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebener Funktionenklasse. // Ann. of Math., 1936. – **37**. – P. 107–110.

2. Rvachev V.A. Compactly supported solutions of functional–differential equations and their applications. // Russian Math. Surveys, 1990. – **45**. – P. 87–120.

3. Rvachev V.L., Rvachev V.A. Non-classical methods of approximation theory in boundary value problem (in Russian). – K.: Naukova Dumka, 1979. – 196 p.

4. Makarichev V.A. Approximation of periodic functions by $mup_s(x)$. // Math. Notes, 2013. – **93**. – P. 858–880.

5. Rvachev V.L., Rvachev V.A. A certain finite function (in Ukrainian). // Proc. Ukr. SSR Acad. Sci., Ser. A., 1971. – **8**. – P. 705–707.

6. Rvachev V.A., Starets G.A. Some atomic functions and their apllications (in Ukrainian). // Proc. Ukr. SSR Acad. Sci., Ser. A., 1983. – **11**. – P. 22–24.

7. Makarichev V.A. Asymptotics of the basis functions of generalized Taylor series for the class $H_{\rho,2}$. // Math. Notes, 2011. – **89**. – P. 689–705.

8. Dyn N., Ron A. Multiresolution analysis by infinitely differentiable compactly supported functions. // Appl. Comput. Harmon. Anal., 1995. – **2**. – P. 15–20.

9. Cooklev T., Berbecel G.I., Venetsanopoulos A.N. Wavelets and differential-dilatation equations. // IEEE Transactions on signal processing, 2000. – **48**. – P. 670–681.

10. Charina M., Stockler J. Tight wavelet frames for irregular multiresolution analysis. // Appl. Comput. Harmon. Anal., 2008. – **25**. – P. 98–113.

11. Makarichev V.A. Applications of the function $mup_s(x)$. // Progress in analysis. Proceedings of the 8th congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation (ISAAC), 2012. – **2**. – P. 297–304.

12. Makarichev V.A. The function $mup_s(x)$ and its applications to the theory of generalized Taylor series, approximation theory and wavelet theory. // In book: Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences. – Kharkiv: Apostrophe, 2011. – P. 279–287.

13. Brysina I.V., Makarichev V.A. Atomic wavelets. // Radioelectronic and Computer Systems, 2012. – **53**. – P. 37–45.

14. Rvachova T.V. On a nonstationary system of infinitely differentiable wavelets with compact support (in Russian). // Visn. Hark. nac. univ. im. V.N. Karazina, Ser.: Mat. prikl. mat. meh., 2011. – **967**. – P. 63–80.

15. Lazorenko O.V. The use of atomic functions in the Choi–Williams analysis of ultrawideband signals. // Radioelectronics and Communications Systems, 2009. **52**. – P. 397–404.

16. Ulises Moya-Sanchez E., Bayro-Corrochano E. Quaternionic analytic signal using atomic functions. // Progress in Pattern Recognition, Image Analysis, Computer Vision, and Applications, Lecture Notes in Computer Science, 2012. – **7441**. – P. 699–706.

17. Gotovac H., Andricevic R., Gotovac B. Multi-resolution adaptive modeling of groundwater flow and transport problems. // Adv. Water Resour., 2007. – **30**. – P. 1105–1126.

18. Gotovac H., Cvetkovic V., Andricevic R. Adaptive Fup multi-resolution approach to flow and advective transport in heterogeneous porous media. // Adv. Water Resour., 2009. – **32**. – P. 885–905.

19. Gotovac H., Gotovac B. Maximum entropy algorithm with inexact upper entropy bound based on Fup basis functions with compact support. // J. Comput. Phys., 2009. – **228**. – P. 9079–9091.

20. Basarab M.A. Periodic atomic quasiinterpolation. // Ukrainian Math. J., – 2001. – **53**. – P. 1728 – 1734.

21. Stoyan Y.G., Protsenko V.S., Man'ko G.P., Goncharyuk I.V., Kurpa L.V., Rvachev V.A., Sinekop N.S., Sirodzha I.B., Shevchenko A.N., Sheiko T.I. The theory of R-functions and current problems of applied mathematics (in Russian). – Kiev: Naukova Dumka, 1986. – 264 p.

22. RvachovaT.V. On a relation between the coefficients and sum of the generalized Taylor series. // Mathematical physics, analysis and geometry, 2003. – **10**. – P. 262–268.

23. Rvachova T.V. On the asymptotics of the basic functions of a generalized Taylor series (in Russian). // Visn. Hark. nac. univ. im. V.N. Karazina, Ser.: Mat. prikl. mat. meh., 2003. – **602**. – P. 94–104.

24. Rvachova T.V. On the rate of approximation of the infinitely differentiable functions by the partial sums of the generalized Taylor series (in Russian). // Visn. Hark. nac. univ. im. V.N. Karazina, Ser.: Mat. prikl. mat. meh., 2010. – **931**. – P. 93–98.

25. Makarichev V.A. On the asymptotics of the basic functions of a generalized Taylor series for some classes of infinitely differentiable functions (in Russian). // Del'nevostochniy mathematicheskiy zhurnal, 2011. – **11**. – P. 56–75.

26. Brysina I.V., Makarichev V.A. On the asymptotics of the generalized Fup-functions. // Adv. Pure Appl. Math., 2014. – **5**. – P. 131–138.

Article history: Received: 29 December 2015; Accepted: 12 December 2016.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 84, 2016, с.93–111

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 84, 2016, p. 93–111
DOI: 10.26565/2221-5646-2016-84-07

УДК 517.946

# Усреднение уравнения диффузии в областях с мелкозернистой границей с нелинейным граничным условием типа Робена

Хилькова Л. А.

*Институт химических технологий*
*Восточноукраинского национального университета им. В.Даля, Украина*
*LarisaHilkova@gmail.com*

В работе рассматривается краевая задача для уравнения стационарной диффузии в перфорированной области, дополнительной большому числу не пересекающихся мелких шаров на поверхности которых задаётся нелинейное условие типа Робена. Изучается асимптотическое поведение решения задачи. Выводятся усреднённые уравнения, описывающие главный член асимптотики решений.
*Ключевые слова:* усреднение, диффузия, условие Робена, квазирешения.

Хількова Л. О. **Усереднення рівняння дифузії в областях з дрібнозернистою межею з нелінійною граничною умовою типу Робена.** В роботі розглядається крайова задача для рівняння стаціонарної дифузії в перфорованих областях, додаткових великому числу дрібних куль, що не перетинаються, на поверхні яких задається нелінійна умова типу Робена. Вивчається асимптотична поведінка розв'язків задачі. Виводяться усереднені рівняння, що описують головний член асимптотики розв'язків.
*Ключові слова:* усереднення, дифузія, умова Робена, квазірозв'язки.

L. O. Khilkova. **Homogenization of the diffusion equation in domains with the fine-grained boundary with the nonlinear boundary Robin condition.** In this paper we consider the boundary-value problem for the stationary diffusion equation in perforated domains, which are additional of a large number non-overlapping small balls on the surface of which is given the nonlinear Robin condition. We study the asymptotic behavior of the solution of the problem. We derive homogenization equations describing the principal term of the asymptotic of the solutions.
*Keywords:* homogenization, diffusion, Robin condition, quasisolutions.

*2000 Mathematics Subject Classification* 35J65, 35Q80.

## Введение

Во многих естественных науках, в частности в экологии, химии, физике, возникает необходимость в изучении процессов диффузии в средах, содержащих инородные включения, на поверхности которых происходит поглощение диффундирующего вещества. Для стационарных процессов, плотность диффундирующего вещества $u^\varepsilon(x)$ (параметр $\varepsilon$ характеризует расстояния между включениями) описывается краевыми задачами для эллиптических уравнений в перфорированных областях $\Omega^\varepsilon$, дополнительных к поглощающим включениям $F^\varepsilon$ ($\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus F^\varepsilon$), с граничным условием типа Робена на поверхностях включений $\partial F^\varepsilon$:

$$-\Delta u^\varepsilon(x) = f^\varepsilon(x),\ x \in \Omega^\varepsilon,$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon(x)}{\partial \nu} + \sigma^\varepsilon(x, u^\varepsilon) = 0,\ x \in \partial F^\varepsilon.$$

При очень большом количестве малых включений $F^\varepsilon = \cup_{i=1}^{N(\varepsilon)} F_i^\varepsilon$ ($N(\varepsilon) \to \infty, diam F_i^\varepsilon \to 0$) прямое нахождение решения этой задачи практически невозможно в виду сложности области $\Omega^\varepsilon$. Естественный подход в этой ситуации состоит в исследовании асимптотического поведения решения при уменьшении размеров включений и увеличении их числа, и, как следствие, построение усреднённой модели процесса диффузии с поглощением. Этот подход был развит достаточно полно для периодически распределённых включений (с малым периодом $\varepsilon$) как с линейным, так и нелинейным поглощением на границе ([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]). Почти во всех работах, посвященных такой задаче предполагалось, что размеры включений и плотность поглощения на их поверхности имеют тот же порядок малости $\varepsilon$, что и период; в этом случае предельное поглощение при $\varepsilon \to 0$ ненулевое и конечное.

В данной работе рассматривается случай, когда включения очень малы и располагаются произвольно (не периодически). Предполагается, что включения – это шары радиуса порядка $\varepsilon^\alpha$, а плотность поглощения на их поверхности имеет порядок $\varepsilon^\beta$. Если шары очень малы, так что суммарная площадь поглощающей поверхности мала, то для того, чтобы предельное поглощение было отлично от 0 необходимо, чтобы плотность поглощения была велика. Такая ситуация характерна для процессов очистки воды с помощью мелкодисперсного сильнопоглощающего порошка. В данной работе мы предполагаем, что при $\varepsilon \to 0$ существует предельная плотность распределения центров шаров в области $\Omega$, и выводим усреднённые уравнения диффузии в среде с поглощением для различных значений параметров $(\alpha, \beta) \in \Lambda := \{1 < \alpha < 3,\ 2\alpha + \beta \geqslant 3\} \cup \{\alpha \geqslant 3,\ -\infty < \beta < \infty\}$. Отметим, что ранее случай периодического распределения шаров при $(\alpha, \beta) \in \{2 < \alpha \leqslant 3,\ \beta = 3 - 2\alpha\}$ рассматривался в работе [10].

Данная работа организована следующим образом. В разделе 1 дана точная постановка задачи и сформулирован основной результат. В разделе 2 приведено доказательство основной теоремы. Этот раздел делится на несколько подразделов, которые соответствуют основным шагам доказательства. При доказательстве используется метод «квазирешений», который был развит в работе [15]. Этот метод основывается на вариационных энергетических методах, разработанных ранее при решении задач усреднения (например, [16]).

**1. Постановка задачи и основной результат**

Пусть $\Omega$ – ограниченная область в пространстве $R^3$ с границей $\partial\Omega$, в которой расположены включения $F_i^\varepsilon = B(x^{i\varepsilon}, r_i^\varepsilon)$ – не пересекающиеся шары радиусов $r_i^\varepsilon$ с центрами в точках $x^{i\varepsilon}$ $(i = 1, ..., N(\varepsilon))$. Здесь $\varepsilon$ – малый параметр, характеризующий «среднее» расстояние между ближайшими шарами. Радиусы шаров при $\varepsilon \to 0$ стремятся к нулю, а их количество $N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-3})$ растёт.

В области $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus F^\varepsilon$ $(F^\varepsilon = \cup_{i=1}^{N(\varepsilon)} F_i^\varepsilon)$ рассматривается краевая задача

$$-\Delta u^\varepsilon(x) = f^\varepsilon(x),\ x \in \Omega^\varepsilon, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon(x)}{\partial\nu} + \sigma^\varepsilon(x^{i\varepsilon}, u^\varepsilon) = 0,\ x \in \partial F_i^\varepsilon,\ i = 1, ..., N(\varepsilon), \tag{2}$$

$$u^\varepsilon(x) = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

где $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа, $\nu$ – единичная нормаль к границе $\partial F^\varepsilon$, внешняя по отношению к области $\Omega^\varepsilon$; функция источников $f^\varepsilon(x) \in L^2(\Omega)$ задана, а функция плотности поглощения $\sigma^\varepsilon(x, u)$ удовлетворяет условиям:

$a_1$: $\sigma^\varepsilon(x, u) = \varepsilon^\beta \sigma(x, u)$, где $\beta \in R^1$, $\sigma(x, u) \in C(\Omega, C^1(R^1))$ и $\sigma(x, 0) = 0$;

$a_2$: $\forall\, x \in \Omega :\ 0 < k_1 \leqslant \frac{\partial}{\partial u}\sigma(x, u) \leqslant k_2(1 + |u|^\nu)$, где $0 \leqslant \nu < 1$.

Как известно, при каждом фиксированном $\varepsilon$ существует единственное решение $u^\varepsilon(x)$ задачи (1)-(3) (см.например [17]). В данной работе изучается асимптотическое поведение $u^\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$, когда число шаров $N(\varepsilon) \to \infty$ и их радиусы $r_i^\varepsilon \to 0$ $(i = 1, ..., N(\varepsilon))$.

Уточним расположение и размеры шаров $F_i^\varepsilon$. Их радиусы определим равенством

$$r_i^\varepsilon = a_i^\varepsilon \varepsilon^\alpha,\ (i = 1, ..., N(\varepsilon)), \tag{4}$$

где параметр $\alpha > 1$, а числа $a_i^\varepsilon$ выбираются так, что $0 < a \leqslant a_i^\varepsilon \leqslant A < \infty$ и $a$, $A$ не зависят от $\varepsilon$.

Обозначим

$$d_i^\varepsilon = dist\left(x^{i\varepsilon}, \bigcup_{i\neq j} x^{j\varepsilon} \cup \partial\Omega\right) \tag{5}$$

расстояние от центра $i$ – го до центра ближайшего шара или до границы $\partial\Omega$;

$$b_i^\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon^\beta (r_i^\varepsilon)^2 \text{ при } (\alpha,\, \beta) \in \Lambda \cap \{\beta \geqslant \alpha\}; \\ r_i^\varepsilon \text{ при } (\alpha,\, \beta) \in \Lambda \cap \{\beta < -\alpha\}, \end{cases} \tag{6}$$

числа $b_i^\varepsilon$ характеризуют порядок малости поглощающей способности каждого шара при различных значениях параметров $\alpha$, $\beta$.

Будем предполагать, что шары в области $\Omega$ располагаются так, что выполняются условия

$d_1$: $\exists\, \frac{2}{3} < \varkappa_1 < 1 : \, d_i^\varepsilon \geqslant (r_i^\varepsilon)^{\varkappa_1}$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \max\limits_i d_i^\varepsilon \to 0$;

$d_2$: $\exists\, \frac{6}{4-\nu} < \varkappa_2 \leqslant 2 : \, \sum\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{(b_i^\varepsilon)^{\varkappa_2}}{(d_i^\varepsilon)^{3(\varkappa_2-1)}} \leqslant C_b$, где $C_b$ не зависит от $\varepsilon$.

Если учесть, что среднее расстояние между центрами шаров $F_i^\varepsilon$ имеет порядок $\varepsilon$, то условия $d_1$, $d_2$ требуют, чтобы шары располагались не слишком близко друг к другу. В остальном расположение шаров можно считать произвольным.

Пространственное распределение плотности поглощения в области $\Omega$ зададим с помощью обобщенной функции от $x$, зависящей от параметров $\varepsilon$, $u$:

$$c^\varepsilon(x,u) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} c_i^\varepsilon(u)\cdot\delta(x - x^{i\varepsilon}),\ (\forall\,\varepsilon > 0,\, \forall\, u \in R^1 : \, c^\varepsilon(x,u) \in \mathcal{D}'(\Omega)), \qquad (7)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функции Дирака, а $c_i^\varepsilon(u)$ – функции поглощательной способности шаров, определённые при $(\alpha,\beta) \in \Lambda = \{1 < \alpha < 3,\ 2\alpha+\beta \geqslant 3\} \cup \{\alpha \geqslant 3,\ -\infty < \beta < \infty\}$ равенствами

$$c_i^\varepsilon(u) = \begin{cases} 2\pi(a_i^\varepsilon)^2 g(x^{i\varepsilon},u)\varepsilon^{2\alpha+\beta} \text{ при } \alpha+\beta > 0; \\ 2\pi a_i^\varepsilon\,[u - V_i^\varepsilon]^2\,\varepsilon^\alpha + 2\pi(a_i^\varepsilon)^2 g(x^{i\varepsilon}, V_i^\varepsilon)\varepsilon^{2\alpha+\beta} \text{ при } \alpha+\beta = 0; \\ 2\pi a_i^\varepsilon u^2 \varepsilon^\alpha \text{ при } \alpha+\beta < 0. \end{cases} \qquad (8)$$

В этом равенстве

$$g(x,u) = 2\int\limits_0^u \sigma(x,r)\,dr \qquad (9)$$

и $V_i^\varepsilon = V_i^\varepsilon(u)$ – решение уравнения

$$V_i^\varepsilon(u) = u - a_i^\varepsilon \sigma(x^{i\varepsilon}, V_i^\varepsilon). \qquad (10)$$

В данной работе мы изучаем асимптотическое поведение при $\varepsilon \to 0$ решений $u^\varepsilon(x)$ задачи (1)-(3) для различных значений параметров $\alpha$, $\beta$, при условии, что шары распределены в области $\Omega$ объёмно, так что плотность распределения (7) сходится в слабой топологии $\mathcal{D}'(\Omega)$ к обычной функции $c(x,u) \in C(\Omega, C^1(R^1))$. Для этого сначала определим в каком смысле понимается сходимость решений $u^\varepsilon(x)$, определённых в перфорированных областях $\Omega^\varepsilon$.

Будем говорить, что последовательность функций $u^\varepsilon(x) \in L^p(\Omega^\varepsilon)$ сходится в $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$, если существует функция $u(x) \in L^p(\Omega)$ такая что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u^\varepsilon - \chi^\varepsilon u\|_{L^p(\Omega)} = 0,$$

где $\chi^\varepsilon(x)$ – характеристическая функция области $\Omega^\varepsilon$.

Основной результат данной работы следующий:

**Теорема 1** *Пусть области $\Omega^\varepsilon$ удовлетворяют условиям $d_1$, $d_2$ и при $\varepsilon \to 0$ выполняются условия:*

1. *обобщенные функции $c^\varepsilon(x, u)$ при $\forall\, u \in R^1$ сходятся в слабой топологии пространства $\mathcal{D}'(\Omega)$ к функции $c(x, u) \in C(\Omega, C^1(R^1))$;*
2. *функции $f^\varepsilon(x)$, продолженные нулём на множество $F^\varepsilon$, сходятся слабо в $L^2(\Omega)$ к функции $f(x)$.*

*Тогда решения $u^\varepsilon(x)$ задачи (1)-(3) сходятся в $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$ (при $p < 6$) к функции $u(x)$, являющейся решением усреднённой задачи*

$$-\Delta u(x) + c_u(x, u) = f(x) \text{ в } \Omega, \tag{11}$$

$$u(x) = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{12}$$

*где $c_u(x, u) = \frac{\partial}{\partial u} c(x, u)$.*

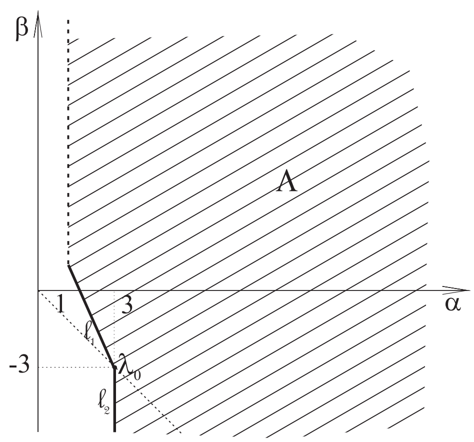


Рис. 1: Область изменения параметров $\alpha$, $\beta$

Функция $c(x, u)$ зависит от параметра $\alpha$, определяющего насколько малыми являются включения, и параметра $\beta$, характеризующего интенсивность поглощения на их поверхности. Областью изменения параметров $\alpha$, $\beta$ является область $\Lambda = \{1 < \alpha < 3,\, 2\alpha + \beta \geqslant 3\} \cup \{\alpha \geqslant 3,\, -\infty < \beta < \infty\}$. Из формул (7), (8) и условия 1) теоремы 1 следует, что функция $c(x,u)=0$, при $(\alpha,\,\beta)\in\Lambda\setminus\{\ell_1\cup\ell_2\cup\lambda_0\}$ и отлична от нуля и конечна на ломанной $\ell_1\cup\ell_2\cup\lambda_0$, где $\ell_1=\{1<\alpha<3,\,\beta=3-2\alpha\}$, $\ell_2=\{\alpha=3,\,\beta<-\alpha\}$, $\lambda_0=(3,-3)$.

*Замечание.* В нашей следующей работе будет показано, что при случайном распределении центров шаров и их радиусов условия $d_1$, $d_2$ и условие 1) теоремы 1 выполняются с вероятностью стремящейся к 1 при $\varepsilon\to 0$.

**2. Доказательство теоремы 1**

Сначала наметим схему доказательства. Определим вариационные постановки начальной и усреднённой задач.

Решение $u^\varepsilon(x)$ задачи (1)-(3) минимизируют функционал

$$\Phi^\varepsilon[w^\varepsilon]=\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|\nabla w^\varepsilon|^2\,dx-2\int\limits_{\Omega^\varepsilon}f^\varepsilon w^\varepsilon\,dx+\varepsilon^\beta\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\int\limits_{\partial F_i^\varepsilon}g(x^{i\varepsilon},w^\varepsilon)\,d\Gamma \tag{13}$$

в классе функций $w^\varepsilon(x)\in H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)=\{w^\varepsilon(x)\in H^1(\Omega^\varepsilon):\ w^\varepsilon(x)|_{x\in\partial\Omega}=0\}$. Здесь $g(x^{i\varepsilon},w^\varepsilon)$ определяется равенством (9) и в силу свойств функции $\sigma(x,u):\ g(x^{i\varepsilon},w^\varepsilon)\geqslant 0$.

Введём функционал усреднённой задачи (11)-(12):

$$\Phi[w]=\int\limits_{\Omega}|\nabla w|^2\,dx-2\int\limits_{\Omega}fw\,dx+2\int\limits_{\Omega}c(x,w)\,dx, \tag{14}$$

где функция $c(x,w)$ определена в условии 1) теоремы 1. Решение усреднённой задачи $u(x)$ минимизирует этот функционал в классе функций $w(x)\in\mathring{H}^1(\Omega)$.

В разделе 2.1 мы показываем, что решения $u^\varepsilon(x)$ задачи (1)-(3) можно продолжить на множество $F^\varepsilon$ так, что продолженные решения $\tilde u^\varepsilon(x)$ будут равномерно ограничены по $\varepsilon$ в пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$ и, следовательно, из последовательности $\{\tilde u^\varepsilon(x)\}$ можно выделить слабо сходящуюся в $\mathring{H}^1(\Omega)$ подпоследовательность $\{\varepsilon=\varepsilon_k,\,k=1,..,\infty\}$, которая в силу теорем вложения сходится сильно в $L^p(\Omega)\,(p<6)$ к некоторой функции $u(x)\in\mathring{H}^1(\Omega)$.

В разделах 2.2 – 2.4 мы показываем, что функция $u(x)$ является минимизантом функционала (14) и, значит, решением усреднённой задачи (11)-(12). Это делается следующим образом. В разделе 2.2 мы вводим специальные тестовые функции $w^\varepsilon(x)$, аппроксимирующие минимизант функционала (13). Они строятся по произвольной функции $w(x)\in C_0^2(\Omega)$ и удовлетворяют следующим свойствам: $w^\varepsilon(x)\in H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)$, в малых окрестностях шаров $F_i^\varepsilon$ они удовлетворяют уравнению Лапласа, на поверхности шаров краевому условию (2) и достаточно далеко от шаров $w^\varepsilon(x)=w(x)$. Такие функции мы будем называть «квазирешениями».

Так как решение $u^\varepsilon(x)$ задачи (1)-(3) минимизируют функционал (13) в $H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)$, то справедливо неравенство

$$\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon]\leqslant\Phi^\varepsilon[w^\varepsilon]. \tag{15}$$

В разделе 2.3 мы показываем, что при выполнении условий теоремы 1

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi^\varepsilon[w^\varepsilon]=\Phi[w], \tag{16}$$

где $\Phi[w]$ – функционал, определённый в (14). Из (15), (16) в силу плотности $C_0^2(\Omega)$ в пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$ следует неравенство

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon]\leqslant\Phi[w],\ \forall\, w\in\mathring{H}^1(\Omega). \tag{17}$$

В разделе 2.4 мы показываем, что если $u^\varepsilon(x)$ сходится слабо в $\mathring{H}^1(\Omega)$ к функции $u(x)$ по подпоследовательности $\varepsilon=\varepsilon_k\to 0$, то справедливо неравенство

$$\underline{\lim}_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon]\geqslant\Phi[u]. \tag{18}$$

Из (17), (18) следует, что предельная функция $u(x)$ удовлетворяет неравенству $\Phi[u]\leqslant\Phi[w]$ для произвольной функции $w(x)\in\mathring{H}^1(\Omega)$. Следовательно, $u(x)$ минимизирует функционал $\Phi[w]$ в классе $\mathring{H}^1(\Omega)$ и, значит, является решением усреднённой задачи (11)-(12).

В разделе 2.5 мы показываем, что усреднённая задача (11)-(12) имеет единственное решение, значит, вся последовательность продолженных решений $\{\tilde{u}^\varepsilon(x)\}$ сходится сильно в $L^p(\Omega)$ к функции $u(x)$, и, следовательно, последовательность решений $\{u^\varepsilon(x)\}$ начальной задачи (1)-(3) сходится в $L^p(\Omega^\varepsilon,\Omega)$ к решению $u(x)$ усреднённой задачи (11)-(12).

Предварительно докажем лемму.

**Лемма 1** *Пусть выполнено условие 1 теоремы 1, тогда для любой функции* $w(x)\in C_0^1(\Omega)$ *справедливо равенство*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon}))=\int\limits_\Omega c(x,w(x))\,dx. \tag{19}$$

*Доказательство.* Пусть $K'_\delta\subset K_\delta\subset K''_\delta$ – концентрические кубы со сторонами $\delta'<\delta<\delta''$ соответственно. Рассмотрим функции $\varphi_{\delta'}(x),\ \varphi_{\delta''}(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, удовлетворяющие условиям $0\leqslant\varphi_{\delta'}(x)\leqslant 1$ и $\varphi_{\delta'}(x)=1$ при $x\in K'_\delta$, $\varphi_{\delta'}(x)=0$ при $x\notin K_\delta$, $0\leqslant\varphi_{\delta''}(x)\leqslant 1$ и $\varphi_{\delta''}(x)=1$ при $x\in K_\delta$, $\varphi_{\delta''}(x)=0$ при $x\notin K''_\delta$.

Из определения обобщенной функции $c^\varepsilon(x,u)$ (7) и положительности функций $c_i^\varepsilon(u)$ (8) справедливы неравенства

$$\langle c^\varepsilon(x,u),\varphi_{\delta'}(x)\rangle\leqslant\sum_{x^{i\varepsilon}\in K_\delta}c_i^\varepsilon(u)\leqslant\sum_{x^{i\varepsilon}\in\overline{K}_\delta}c_i^\varepsilon(u)\leqslant\langle c^\varepsilon(x,u),\varphi_{\delta''}(x)\rangle.$$

Перейдём в них к пределу при $\varepsilon\to 0$. Тогда, учитывая условие 1 теоремы 1, получаем

$$\int\limits_\Omega c(x,u)\cdot\varphi_{\delta'}(x)\,dx\leqslant\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\sum_{x^{i\varepsilon}\in K_\delta}c_i^\varepsilon(u)\leqslant\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\sum_{x^{i\varepsilon}\in\overline{K}_\delta}c_i^\varepsilon(u)\leqslant\int\limits_\Omega c(x,u)\cdot\varphi_{\delta''}(x)\,dx.$$

Теперь перейдём к пределу при $\delta' \to \delta$, $\delta'' \to \delta$. Учитывая свойства функций $\varphi_{\delta'}(x)$, $\varphi_{\delta''}(x)$, заключаем что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{x^{i\varepsilon}\in K_\delta} c_i^\varepsilon(u) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{x^{i\varepsilon}\in \overline{K}_\delta} c_i^\varepsilon(u) = \int\limits_{K_\delta} c(x,u)\,dx. \tag{20}$$

Разрежем область $\Omega$ на не пересекающиеся кубы $K_\delta^j$ со сторонами $\delta$, так чтобы $supp\; w(x) \in \bigcup\limits_j K_\delta^j$, тогда

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) = \sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in \overline{K}_\delta^j}{}' c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})), \tag{21}$$

здесь $\sum'$ означает, что $x^{i\varepsilon}$ принадлежит только одному $\overline{K}_\delta^j$.

Обозначим $\overline{w}_j$ – среднее значение функции $w(x)$ в кубе $\overline{K}_\delta^j$, тогда так как $w(x) \in C_0^1(\Omega)$

$$|\overline{w}_j - w(x)| < C\cdot\delta, \text{ при } x \in \overline{K}_\delta^j. \tag{22}$$

Учитывая (21), запишем

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) = \sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in \overline{K}_\delta^j}{}' (c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) - c_i^\varepsilon(\overline{w}_j)) + \sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in \overline{K}_\delta^j}{}' c_i^\varepsilon(\overline{w}_j), \tag{23}$$

Оценим первое слагаемое. Из определения $c_i^\varepsilon(u)$ (8) и неравенства (22), следует

$$\left|\sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in \overline{K}_\delta^j}{}' (c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) - c_i^\varepsilon(\overline{w}_j))\right| \leqslant \sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in \overline{K}_\delta^j}{}' \left|c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) - c_i^\varepsilon(\overline{w}_j)\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\delta \sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in \overline{K}_\delta^j}{}' b_i^\varepsilon = C\delta \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} b_i^\varepsilon.$$

Применяя неравенство Гёльдера для значения $\varkappa_2$ из условия $d_2$ и пользуясь этим условием, имеем

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} b_i^\varepsilon \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{(b_i^\varepsilon)^{\varkappa_2}}{(d_i^\varepsilon)^{3(\varkappa_2-1)}}\right)^{\frac{1}{\varkappa_2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} (d_i^\varepsilon)^3\right)^{\frac{\varkappa_2-1}{\varkappa_2}} \leqslant C_b^{\frac{1}{\varkappa_2}} |\Omega|^{\frac{\varkappa_2-1}{\varkappa_2}}. \tag{24}$$

Тогда для первого слагаемого в (23) справедлива оценка

$$\left|\sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in \overline{K}_\delta^j}{}' (c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) - c_i^\varepsilon(\overline{w}_j))\right| \leqslant \tilde{C}\delta, \tag{25}$$

где константа $\tilde{C}$ не зависит от $\varepsilon$, $\delta$.

Оценим второе слагаемое в (23). Из (20) с учётом того, что $w(x) \in C_0^1(\Omega)$ и $c(x,u) \in C(\Omega, C^1(R^1))$, следует

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_j \sum_{x^{i\varepsilon} \in \overline{K}_\delta^j}{}' c_i^\varepsilon(\overline{w}_j) = \sum_j \int_{K_\delta^j} c(x, \overline{w}_j)\, dx = \int_\Omega c(x, w(x))\, dx + O(\delta) \qquad (26)$$

Из (23), (25), (26) получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) = \int_\Omega c(x, w(x))\, dx + O(\delta),$$

и переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем требуемое равенство (19).

**2.1. Компактность минимизантов функционала** (13)

Так как $\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] \leqslant \Phi^\varepsilon[0] = 0$, то при $(\alpha, \beta) \in \Lambda$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2\, dx + \varepsilon^\beta \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \int_{\partial F_i^\varepsilon} g(x^{i\varepsilon}, u^\varepsilon)\, d\Gamma \leqslant 2 \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon u^\varepsilon\, dx.$$

Отсюда с помощью неравенства Коши-Буняковского и неотрицательности функции $g(x, u^\varepsilon)$, получим

$$\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant 2\, \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\, \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,. \qquad (27)$$

Из условия $d_1$ следует, что области $\Omega^\varepsilon$ удовлетворяют условию сильной связности ([18]), т.е. функции $u^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ допускают продолжение $\tilde{u}^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega)$ на всю область $\Omega$ с выполнением неравенства

$$\|\nabla \tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_1\, \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,, \qquad (28)$$

где константа $C_1$ не зависит от $\varepsilon$.

Из (27) и (28) и неравенства Фридрихса $\|\tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_2\, \|\nabla \tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$ получим

$$\|\tilde{u}^\varepsilon\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leqslant C_3\, \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,,$$

откуда, учитывая сходимость $f^\varepsilon$ к $f$ в $L^2(\Omega)$, имеем

$$\|\tilde{u}^\varepsilon\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leqslant \tilde{C},$$

где константы $C_2$, $C_3$, $\tilde{C}$ не зависят от $\varepsilon$. Таким образом функции $\tilde{u}^\varepsilon(x)$ равномерно ограничены по $\varepsilon$ в $\mathring{H}^1(\Omega)$. Отсюда следует, что последовательность функций $\{\tilde{u}^\varepsilon(x)\}$ слабо компактна в $\mathring{H}^1(\Omega)$, и, значит, из неё можно выделить подпоследовательность $\{\varepsilon = \varepsilon_k,\ k = 1, ..., \infty\}$, слабо сходящуюся в $\mathring{H}^1(\Omega)$ и в силу компактности вложения $\mathring{H}^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)\, (p < 6)$ сильно сходящуюся в $L^p(\Omega)$ к некоторой функции $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Таким образом, подпоследовательность $\{u^{\varepsilon_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$ к функции $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Далее, мы покажем, что функция $u(x)$ минимизирует функционал (14).

**2.2. Построение квазирешений**

По произвольной функции $w \in C_0^2(\Omega)$ построим следующие функции:

$$w^\varepsilon(x) = w_1^\varepsilon(x) - w_2^\varepsilon(x),\ x \in \Omega^\varepsilon, \tag{29}$$

$$w_1^\varepsilon(x) = w(x) - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} (w(x) - w(x^{i\varepsilon})) \cdot \varphi\left(\frac{r}{4r_i^\varepsilon}\right), \tag{30}$$

$$w_2^\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{A_i^\varepsilon}{r} \cdot \varphi\left(\frac{2r}{d_i^\varepsilon}\right), \tag{31}$$

где $r = |x - x^{i\varepsilon}|$, $\varphi(t)$ – дважды непрерывно-дифференцируемая и монотонная на $[0, \infty)$ функция, такая что $\varphi(t) = 1$ для $t \leqslant 1/2$ и $\varphi(t) = 0$ для $t \geqslant 1$ и числа $A_i^\varepsilon$ являются решением уравнения

$$A_i^\varepsilon = (a_i^\varepsilon)^2 \varepsilon^{2\alpha+\beta} \sigma\left(x^{i\varepsilon}, w(x^{i\varepsilon}) - \frac{A_i^\varepsilon}{a_i^\varepsilon \varepsilon^\alpha}\right). \tag{32}$$

Из свойств функции $\sigma(x, u)$ следует, что это уравнение имеет единственное решение.

Используя свойства функций $w(x)$, $\varphi(t)$ нетрудно убедиться, что $w^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$; при $x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} B(x^{i\varepsilon}, d_i^\varepsilon/2) :\ w^\varepsilon(x) = w(x)$; при $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} B(x^{i\varepsilon}, 2r_i^\varepsilon) :$ $\Delta w^\varepsilon(x) = 0$; при $x \in \partial F_i^\varepsilon$ функция $w^\varepsilon(x)$ удовлетворяет краевому условию (2). Таким образом, функция $w^\varepsilon(x)$ обладает всеми свойствами квазирешений.

Квазирешения могут быть естественным образом продолжены на множество $F^\varepsilon$:

$$\tilde{w}^\varepsilon(x) = \begin{cases} w^\varepsilon(x),\ x \in \Omega^\varepsilon; \\ w(x^{i\varepsilon}) - \dfrac{A_i^\varepsilon}{r_i^\varepsilon},\ x \in F_i^\varepsilon,\ i = 1, ..., N(\varepsilon), \end{cases} \tag{33}$$

здесь значение продолженного квазирешения $\tilde{w}^\varepsilon(x)$ внутри шара $F_i^\varepsilon$ $(i = 1, ..., N(\varepsilon))$ постоянно и равно значению на его поверхности $\partial F_i^\varepsilon$, которое обозначим

$$w_i^\varepsilon = w(x^{i\varepsilon}) - \frac{A_i^\varepsilon}{r_i^\varepsilon}. \tag{34}$$

Из (32) нетрудно видеть, что $w_i^\varepsilon$ является решением уравнения

$$w_i^\varepsilon = w(x^{i\varepsilon}) - \varepsilon^{\alpha+\beta} a_i^\varepsilon \sigma\left(x^{i\varepsilon}, w_i^\varepsilon\right). \tag{35}$$

Получим необходимые в дальнейшем оценки $A_i^\varepsilon$ и $w_i^\varepsilon$. В силу свойств $a_1$, $a_2$ функции $\sigma(x, u)$ уравнение (35) имеем единственное решение, которое удовлетворяет оценке

$$|w_i^\varepsilon| \leqslant |w(x^{i\varepsilon})| \tag{36}$$

и может быть при $(\alpha,\,\beta)\in\Lambda$ представлено равенствами

$$w_i^\varepsilon=\begin{cases} w(x^{i\varepsilon})+O(\varepsilon^{\alpha+\beta}) \text{ при } \alpha+\beta>0;\\ V_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) \text{ при } \alpha+\beta=0;\\ \dfrac{w(x^{i\varepsilon})\varepsilon^{-\alpha-\beta}}{a_i^\varepsilon\cdot\sigma_u(x_i^\varepsilon,0)}+O(\varepsilon^{-2\alpha-2\beta}) \text{ при } \alpha+\beta<0, \end{cases} \tag{37}$$

где $V_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon}))$ – решение уравнения (10) при $u=w(x^{i\varepsilon})$.

Из (4), (6), (32), (34) и (37) имеем

$$A_i^\varepsilon=\begin{cases} \sigma(x^{i\varepsilon},w(x^{i\varepsilon}))\cdot b_i^\varepsilon+O(\varepsilon^{3\alpha+2\beta}) \text{ при } \alpha+\beta>0;\\ \sigma(x^{i\varepsilon},V_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})))\cdot b_i^\varepsilon \text{ при } \alpha+\beta=0;\\ w(x^{i\varepsilon})\cdot b_i^\varepsilon+O(\varepsilon^{-\beta}) \text{ при } \alpha+\beta<0. \end{cases} \tag{38}$$

Кроме того, из (34)

$$A_i^\varepsilon=a_i^\varepsilon\varepsilon^\alpha(w(x^{i\varepsilon})-w_i^\varepsilon). \tag{39}$$

Из (36), (38), (39) в силу свойств функции $\sigma(x,u)$ при всех $(\alpha,\beta)\in\Lambda$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} &A_i^\varepsilon=O(\varepsilon^\alpha),\\ &|A_i^\varepsilon|\leqslant C\left(|w(x^{i\varepsilon})|+|w(x^{i\varepsilon})|^{1+\nu}\right)\cdot b_i^\varepsilon. \end{aligned} \tag{40}$$

Далее, положив $C_{1w}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N(\varepsilon)} C\left(|w(x^{i\varepsilon})|+|w(x^{i\varepsilon})|^{1+\nu}\right)$ и используя оценку (24), получаем

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}|A_i^\varepsilon|\leqslant C_{1w}\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}b_i^\varepsilon\leqslant C_{2w}, \tag{41}$$

константы $C_{1w}$, $C_{2w}$ не зависят от $\varepsilon$, но зависят от выбора функции $w(x)$.

Для квазирешений справедлива следующая лемма.

**Лемма 2** *Последовательность продолженных квазирешений $\{\tilde w^\varepsilon(x)\}$ при $\varepsilon\to0$ сходится слабо в $H^1(\Omega)$ к функции $w(x)$, при этом функции $\tilde w_1^\varepsilon(x)$ сходятся сильно к функции $w(x)$ и функции $\tilde w_2^\varepsilon(x)$ сходятся слабо к* 0.

*Доказательство.* Обозначим $B_i^1=B(x^{i\varepsilon},4r_i^\varepsilon)\setminus B(x^{i\varepsilon},2r_i^\varepsilon)$, $\hat B_i^1=B(x^{i\varepsilon},4r_i^\varepsilon)$. В силу (30), (33) и оценок (40), (41), имеем

$$\|\tilde w_1^\varepsilon-w\|^2_{H^1(\Omega)}\leqslant\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\left[\int\limits_{\hat B_i^1}(w(x)-w(x^{i\varepsilon}))^2\,dx+\int\limits_{B_i^1}(w(x)-w(x^{i\varepsilon}))^2\left|\nabla\varphi\left(\frac{r}{4r_i^\varepsilon}\right)\right|^2dx\right.$$

$$\left.+\int\limits_{B_i^1}\left(2|w(x)-w(x^{i\varepsilon})|\left(\nabla w(x),\nabla\varphi\left(\frac{r}{4r_i^\varepsilon}\right)\right)+|\nabla w(x)|^2\right)dx\right]=O(\varepsilon^{3(\alpha-1)}),$$

Перейдём к пределу при $\varepsilon \to 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\tilde{w}_1^\varepsilon - w\|_{H^1(\Omega)} = 0,$$

таким образом, функции $\tilde{w}_1^\varepsilon(x)$ сходятся сильно к функции $w(x)$ в $H^1(\Omega)$.

Обозначим $B_i^2 = B(x^{i\varepsilon}, d_i^\varepsilon/2) \setminus B(x^{i\varepsilon}, d_i^\varepsilon/4)$, $\hat{B}_i^2 = B(x^{i\varepsilon}, d_i^\varepsilon/2) \setminus F_i^\varepsilon$. В силу (31), (33), условия $d_1$ и оценок (40), (41), имеем

$$\|\tilde{w}_2^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \left[ \int\limits_{F_i^\varepsilon} \frac{(A_i^\varepsilon)^2}{(r_i^\varepsilon)^2}\,dx + \int\limits_{\hat{B}_i^2} \frac{(A_i^\varepsilon)^2(r^2+1)}{r^4}\,dx + \int\limits_{B_i^2} \frac{(A_i^\varepsilon)^2}{r^2} \left|\nabla\varphi\left(\frac{2r}{d_i^\varepsilon}\right)\right|^2 dx\right]$$
$$+ \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{B_i^2} \frac{2(A_i^\varepsilon)^2}{r} \cdot \left(\nabla\frac{1}{r}, \nabla\varphi\left(\frac{2r}{d_i^\varepsilon}\right)\right) dx \leqslant 2\pi \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} (A_i^\varepsilon)^2 d_i^\varepsilon + \frac{4\pi}{3}\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} (A_i^\varepsilon)^2 r_i^\varepsilon$$
$$+ 4\pi \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{(A_i^\varepsilon)^2}{r_i^\varepsilon} + C \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{(A_i^\varepsilon)^2}{d_i^\varepsilon} \leqslant 8\pi C_{2w} \max_{1\leqslant i\leqslant N(\varepsilon)} w(x^{i\varepsilon}) + O\left(\varepsilon^{\alpha(1-\varkappa_1)}\right) \leqslant \hat{C},$$

где $\hat{C}$ не зависит от $\varepsilon$, и, значит, функции $\tilde{w}_2^\varepsilon(x)$ равномерно ограничены по $\varepsilon$ в $H^1(\Omega)$. Кроме того, для любой функции $\psi(x) \in C^2(\Omega)$, имеем

$$\left|(\tilde{w}_2^\varepsilon, \psi)_{H^1(\Omega)}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} |A_i^\varepsilon| \left[ \int\limits_{F_i^\varepsilon} \frac{|\psi(x)|}{r_i^\varepsilon}\,dx + \int\limits_{B_i^2} \frac{1}{r} \cdot \left|\left(\nabla\varphi\left(\frac{2r}{d_i^\varepsilon}\right), \nabla\psi\right)\right| dx + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\hat{B}_i^2} \left(\frac{|\psi(x)|}{r} \cdot \varphi\left(\frac{2r}{d_i^\varepsilon}\right) + \varphi\left(\frac{2r}{d_i^\varepsilon}\right) \cdot \left|\left(\nabla\frac{1}{r}, \nabla\psi\right)\right|\right) dx\right] \leqslant C_1\varepsilon^{3(\alpha-1)} + C_2 \max_{1\leqslant i\leqslant N(\varepsilon)} d_i^\varepsilon,$$

где константы $C_1$, $C_2$ не зависят от $\varepsilon$. Перейдём к пределу при $\varepsilon \to 0$. В силу условия $d_1$, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (\tilde{w}_2^\varepsilon, \psi)_{H^1(\Omega)} = 0,\ \forall\psi(x) \in C^2(\Omega).$$

Таким образом, функции $\tilde{w}_2^\varepsilon(x)$ равномерно ограничены по $\varepsilon$ и слабо сходятся к 0 на всюду плотном в $H^1(\Omega)$ множестве $C^2(\Omega)$, и, значит, функции $\tilde{w}_2^\varepsilon(x)$ слабо сходятся к 0 в пространстве $H^1(\Omega)$.

Следовательно, функции $\tilde{w}^\varepsilon(x) = \tilde{w}_1^\varepsilon(x) + \tilde{w}_2^\varepsilon(x)$ слабо сходятся к функции $w(x)$ в пространстве $H^1(\Omega)$.

**2.3. Доказательство неравенства** (17)

Подставим квазирешение $w^\varepsilon(x)$ (29) в функционал (13) и запишем его в следующем виде

$$\Phi^\varepsilon[w^\varepsilon] = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla w_1^\varepsilon|^2\,dx - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla w_1^\varepsilon, \nabla w_2^\varepsilon)\,dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla w_2^\varepsilon|^2\,dx - \\ - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon w^\varepsilon\,dx + \varepsilon^\beta \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{\partial F_i^\varepsilon} g(x^{i\varepsilon}, w^\varepsilon)\,d\Gamma. \tag{42}$$

Оценим третье слагаемое в (42). Обозначим $\hat{B}_i = B(x^{i\varepsilon}, d_i^\varepsilon/2)\backslash B(x^{i\varepsilon}, d_i^\varepsilon/4)$. Используя определение функций $w_2^\varepsilon(x)$ (31), оценки (40), (41), условие $d_1$ для областей $\Omega^\varepsilon$ и применяя интегрирование по частям по областям $B(x^{i\varepsilon}, d_i^\varepsilon/4)\setminus B(x^{i\varepsilon}, 2r_i^\varepsilon)$ $(i = 1, ..., N(\varepsilon))$ с учётом равенства $\Delta w_2 = 0$ в этих областях, получаем

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla w_2^\varepsilon|^2\,dx = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{B(x^{i\varepsilon}, d_i^\varepsilon/2)\backslash F_i^\varepsilon} |\nabla w_2^\varepsilon|^2\,dx = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \Bigg[ \int\limits_{\partial B(x^{i\varepsilon}, d_i^\varepsilon/4)} \frac{\partial w_2^\varepsilon}{\partial \nu}\cdot w_2^\varepsilon\,d\Gamma + \\ + \int\limits_{\hat{B}_i} |\nabla w_2^\varepsilon|^2\,dx + \int\limits_{\partial F_i^\varepsilon} \frac{\partial w_2^\varepsilon}{\partial \nu}\cdot w_2^\varepsilon\,d\Gamma \Bigg] \leqslant C_1 \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{(A_i^\varepsilon)^2}{d_i^\varepsilon} + 4\pi \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{(A_i^\varepsilon)^2}{r_i^\varepsilon} \leqslant \\ \leqslant 4\pi \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{(A_i^\varepsilon)^2}{r_i^\varepsilon} + O\left(\varepsilon^{(1-\varkappa_1)\alpha}\right) = 4\pi \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} a_i^\varepsilon \varepsilon^\alpha (w(x^{i\varepsilon}) - w_i^\varepsilon)^2 + O\left(\varepsilon^{(1-\varkappa_1)\alpha}\right).$$

В силу (37) при $\varepsilon \to 0$ и $(\alpha, \beta) \in \Lambda$, имеем

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla w_2^\varepsilon|^2\,dx = \begin{cases} o(1) \text{ при } \alpha+\beta > 0; \\ 4\pi \sum\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} a_i^\varepsilon \left(w(x^{i\varepsilon}) - V_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon}))\right)^2 \varepsilon^\alpha + o(1) \\ \text{ при } \alpha+\beta = 0; \\ 4\pi \sum\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} a_i^\varepsilon \left(w(x^{i\varepsilon})\right)^2 \varepsilon^\alpha + o(1) \text{ при } \alpha+\beta < 0, \end{cases} \tag{43}$$

здесь $V_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon}))$ – решение уравнения (10) при $u = w(x^{i\varepsilon})$.

Оценим последнее слагаемое в (42). Так как при $x \in \partial F_i^\varepsilon$ значение квазирешения $w^\varepsilon(x) = w_i^\varepsilon$, имеем

$$\varepsilon^\beta \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{\partial F_i^\varepsilon} g(x^{i\varepsilon}, w^\varepsilon(x))\,d\Gamma = \varepsilon^\beta \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{\partial F_i^\varepsilon} g(x^{i\varepsilon}, w_i^\varepsilon)\,d\Gamma = 4\pi \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} (a_i^\varepsilon)^2 g(x^{i\varepsilon}, w_i^\varepsilon) \varepsilon^{2\alpha+\beta}.$$

Используя определение функции $g(x,u)$ (9) и свойства $a_1$, $a_2$ функции $\sigma(x,s)$, оценим $g(x^{i\varepsilon}, w_i^\varepsilon)$ при $\alpha+\beta\neq 0$. В силу (37) при $\alpha+\beta<0$ значения $w_i^\varepsilon = O(\varepsilon^{-\alpha-\beta})$ малы, тогда

$$g(x^{i\varepsilon}, w_i^\varepsilon) = 2\int\limits_0^{w_i^\varepsilon} \sigma(x^{i\varepsilon}, s)\,ds = 2\int\limits_0^{w_i^\varepsilon} \left(\sigma(x^{i\varepsilon},0) + \sigma_s'(x^{i\varepsilon},0)s + O(s^2)\right)\,ds =$$
$$= \sigma_s'(x^{i\varepsilon},0)\cdot(w_i^\varepsilon)^2 + O((w_i^\varepsilon)^3) = O(\varepsilon^{-2\alpha-2\beta}),$$

при $\alpha+\beta>0$ значения $w_i^\varepsilon = w(x^{i\varepsilon}) + O(\varepsilon^{\alpha+\beta})$, тогда

$$g(x^{i\varepsilon}, w_i^\varepsilon) = g(x^{i\varepsilon}, w(x^{i\varepsilon})) + 2\int\limits_{w(x^{i\varepsilon})}^{w(x^{i\varepsilon})+O(\varepsilon^{\alpha+\beta})} \sigma(x^{i\varepsilon}, s)\,ds = g(x^{i\varepsilon}, w(x^{i\varepsilon})) + O(\varepsilon^{\alpha+\beta}).$$

Таким образом при $\varepsilon\to 0$ и $(\alpha,\beta)\in\Lambda$, имеем

$$\varepsilon^\beta \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{\partial F_i^\varepsilon} g(x^{i\varepsilon}, w^\varepsilon)\,d\Gamma = \begin{cases} 4\pi \displaystyle\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} (a_i^\varepsilon)^2 g\left(x^{i\varepsilon}, w(x^{i\varepsilon})\right)\varepsilon^{2\alpha+\beta} + o(1) \\ \text{ при } \alpha+\beta>0; \\ 4\pi \displaystyle\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} (a_i^\varepsilon)^2 g\left(x^{i\varepsilon}, V_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon}))\right)\varepsilon^{\alpha} \\ \text{ при } \alpha+\beta=0; \\ o(1) \text{ при } \alpha+\beta<0. \end{cases} \tag{44}$$

В силу формул (8), (42) и полученных оценок (43), (44) при малых $\varepsilon$, имеем

$$\Phi^\varepsilon[w^\varepsilon] = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla w_1^\varepsilon|^2\,dx - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla w_1^\varepsilon, \nabla w_2^\varepsilon)\,dx - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon w^\varepsilon\,dx + 2\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) + o(1).$$

Перейдём к пределу при $\varepsilon\to 0$. Так как $w(x)\in C_0^2(\Omega)$, в силу (7), условий теоремы 1, лемм 1, 2, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Phi^\varepsilon[w^\varepsilon] = \int\limits_\Omega |\nabla w|^2\,dx - 2\int\limits_\Omega fw\,dx + 2\int\limits_\Omega c(x,w)\,dx.$$

Таким образом, для любой функции $w(x)\in C_0^2(\Omega)$ справедливо равенство (16), где $\Phi[w]$ – функционал, определённый в (14). Учитывая что пространство $C_0^2(\Omega)$ плотно в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и $u^\varepsilon(x)$ – минимизант функционала $\Phi^\varepsilon$, мы убеждаемся в справедливости неравенства (17) для $\forall\, w(x)\in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

**2.4. Доказательство неравенства** (18)

Рассмотрим теперь функцию $u(x)$ – слабый предел в $H^1(\Omega)$ продолженных решений $\tilde{u}^\varepsilon(x)$ задачи (1)-(3) по подпоследовательности $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$. Как следует из теорем вложения следы $\tilde{u}^\varepsilon(x)$ и $u(x)$ на $\partial\Omega$ сохраняются и равны 0. Таким образом, функция $u(x) \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

Мы не можем утверждать, что функция $u(x) \in C_0^2(\Omega)$, и следовательно, не можем построить квазирешение, используя функцию $u(x)$, поэтому, используя (29)-(31), вначале мы построим квазирешение $u_\delta^\varepsilon(x)$ для функции $u_\delta(x) \in C_0^2(\Omega)$, такой что

$$\|u - u_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \delta \tag{45}$$

для произвольного малого $\delta > 0$.

Представим решение задачи (1)-(3) в форме

$$u^\varepsilon(x) = u_\delta^\varepsilon(x) + \zeta_\delta^\varepsilon(x), \tag{46}$$

так как функции $u^\varepsilon(x), u_\delta^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$, тогда $\zeta_\delta^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$. Продолжим квазирешение $u_\delta^\varepsilon(x)$ в шары $F_i^\varepsilon$ описанным ранее способом (33). Продолжение функции $\zeta_\delta^\varepsilon(x)$ определим соответственно

$$\tilde{\zeta}_\delta^\varepsilon(x) = \tilde{u}^\varepsilon(x) - \tilde{u}_\delta^\varepsilon(x). \tag{47}$$

Так как последовательность продолженных решений $\tilde{u}^\varepsilon(x)$ сходится слабо в $H^1(\Omega)$ к функции $u(x)$ по подпоследовательности $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0\,(k = 1, ..., \infty)$ и последовательность функций $\tilde{u}_\delta^\varepsilon(x)$ в силу леммы 2 сходится слабо в $H^1(\Omega)$ к функции $u_\delta(x)$ при $\varepsilon \to 0$, тогда последовательность функций $\tilde{\zeta}_\delta^\varepsilon(x)$ сходится слабо в $H^1(\Omega)$ к функции $u(x) - u_\delta(x)$ по подпоследовательности $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0\,(k = 1, ..., \infty)$.

Подставляя функцию $u^\varepsilon(x)$ (46) в функционал (13) и пользуясь теоремой о среднем для функции $g(x, u)$ на интервале $(u_\delta^\varepsilon, u_\delta^\varepsilon + \zeta_\delta^\varepsilon)$, запишем

$$\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] = \Phi^\varepsilon[u_\delta^\varepsilon] + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla\zeta_\delta^\varepsilon|^2\,dx + 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla u_\delta^\varepsilon, \nabla\zeta_\delta^\varepsilon)\,dx - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon\zeta_\delta^\varepsilon\,dx +$$
$$+ 2\varepsilon^\beta \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{\partial F_i^\varepsilon} \sigma(x^{i\varepsilon}, u_\delta^\varepsilon + \hat{\zeta}_\delta^\varepsilon)\zeta_\delta^\varepsilon\,d\Gamma,$$

где $0 \leqslant \hat{\zeta}_\delta^\varepsilon \leqslant \zeta_\delta^\varepsilon$ при $\zeta_\delta^\varepsilon > 0$ и $\zeta_\delta^\varepsilon \leqslant \hat{\zeta}_\delta^\varepsilon \leqslant 0$ при $\zeta_\delta^\varepsilon < 0$. Далее, учитывая представление (29)-(31) $u_\delta^\varepsilon(x) = u_{\delta1}^\varepsilon(x) + u_{\delta2}^\varepsilon(x)$, с помощью интегрирования по частям с учётом краевого условия, получаем

$$\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] = \Phi^\varepsilon[u_\delta^\varepsilon] + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla\zeta_\delta^\varepsilon|^2\,dx + 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla u_{\delta1}^\varepsilon, \nabla\zeta_\delta^\varepsilon)\,dx - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \Delta u_{\delta2}^\varepsilon\zeta_\delta^\varepsilon\,dx -$$
$$-2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon\zeta_\delta^\varepsilon\,dx + 2\varepsilon^\beta \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{\partial F_i^\varepsilon} \Big(\sigma(x^{i\varepsilon}, u_\delta^\varepsilon + \hat{\zeta}_\delta^\varepsilon) - \sigma(x^{i\varepsilon}, u_\delta^\varepsilon)\Big)\,\zeta_\delta^\varepsilon\,d\Gamma.$$

Отсюда, в силу монотонности функции $\sigma(x,u)$, следует

$$\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] \geqslant \Phi^\varepsilon[u^\varepsilon_\delta] - 2\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(\nabla u^\varepsilon_{\delta 1}, \nabla\zeta^\varepsilon_\delta)\,dx\right| - 2\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\Delta u^\varepsilon_{\delta 2}\zeta^\varepsilon_\delta\,dx\right| - 2\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon\zeta^\varepsilon_\delta\,dx\right|. \quad (48)$$

Оценим слагаемые в правой части этого неравенства.

Пользуясь неравенствами Коши-Буняковского и (45) и учитывая, что функции $\tilde{u}^\varepsilon_{\delta 1}(x)$ сходятся сильно в $H^1(\Omega)$ к функции $u_\delta(x)$ при $\varepsilon\to 0$, $\tilde{\zeta}^\varepsilon_\delta(x)$ сходятся слабо в $H^1(\Omega)$, и в силу компактности вложения $H^1(\Omega)\subset L^p(\Omega)\,(p<6)$ сильно в $L^p(\Omega)$, к функции $u(x)-u_\delta(x)$ по подпоследовательности $\varepsilon=\varepsilon_k\to 0$ и $f^\varepsilon(x)$, продолженные нулём на множество $F^\varepsilon$, сходится слабо в $L^2(\Omega)$ к функции $f(x)$, получаем

$$\begin{gathered}\varlimsup_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(\nabla u^\varepsilon_{\delta 1}, \nabla\zeta^\varepsilon_\delta)\,dx\right| \leqslant \varlimsup_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\left|\int\limits_{\Omega}(\nabla \tilde{u}^\varepsilon_{\delta 1}, \nabla\tilde{\zeta}^\varepsilon_\delta)\,dx\right| = \\ = \left|\int\limits_{\Omega}(\nabla u_\delta, \nabla(u-u_\delta))\,dx\right| \leqslant \|u_\delta\|_{H^1(\Omega)}\cdot\|u-u_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|u_\delta\|_{H^1(\Omega)}\cdot\delta.\end{gathered} \quad (49)$$

$$\begin{gathered}\varlimsup_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon\zeta^\varepsilon_\delta\,dx\right| = \varlimsup_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\left|\int\limits_{\Omega} \tilde{f}^\varepsilon\tilde{\zeta}^\varepsilon_\delta\,dx\right| = \left|\int\limits_{\Omega} f(u-u_\delta)\,dx\right| \leqslant \\ \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|u-u_\delta\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|u-u_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)}\cdot\delta.\end{gathered} \quad (50)$$

Обозначим $B_i = B(x^{i\varepsilon}, d^\varepsilon_i/2)\setminus B(x^{i\varepsilon}, d^\varepsilon_i/4)$, $\hat{B}_i = B(x^{i\varepsilon}, d^\varepsilon_i/2)$. Используя свойства функций $\varphi(t)$, $u_\delta(x)$, условие $d_2$ для областей $\Omega^\varepsilon$ и неравенства Коши-Буняковского и Гёльдера при значении $\varkappa_2$ из условия $d_2$, а также значение объёма шара $|\hat{B}_i| = \frac{\pi}{6}(d^\varepsilon_i)^3$, получаем

$$\begin{aligned}&\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\Delta u^\varepsilon_{2\delta}\cdot\zeta^\varepsilon_\delta\,dx\right| \leqslant \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\int\limits_{B_i}|\Delta u^\varepsilon_{2\delta}\cdot\zeta^\varepsilon_\delta|\,dx \leqslant C_1\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\frac{|A^\varepsilon_i[u_\delta]|}{(d^\varepsilon_i)^3}\int\limits_{B_i}|\zeta^\varepsilon_\delta|\,dx \leqslant \\ &\leqslant C_2\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\frac{|u_\delta(x^{i\varepsilon})|^{1+\nu}b^\varepsilon_i}{(d^\varepsilon_i)^3}\int\limits_{\hat{B}_i}|\tilde{\zeta}^\varepsilon_\delta|\,dx \leqslant C_2\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\frac{|u_\delta(x^{i\varepsilon})|^{1+\nu}b^\varepsilon_i}{(d^\varepsilon_i)^3}|\hat{B}_i|^{1-1/p_1}\|\tilde{\zeta}^\varepsilon_\delta\|_{L^{p_1}(\hat{B}_i)} \leqslant \\ &\leqslant C_3\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\frac{(b^\varepsilon_i)^{\varkappa_2}}{(d^\varepsilon_i)^{3(\varkappa_2-1)}}\right)^{\frac{1}{\varkappa_2}}\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}|u_\delta(x^{i\varepsilon})|^{(1+\nu)p_2}|\hat{B}_i|\right)^{1/p_2}\|\tilde{\zeta}^\varepsilon_\delta\|_{L^{p_1}(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant C_4\|u_\delta\|^{1+\nu}_{L^{(1+\nu)p_2}(\Omega)}\|\tilde{\zeta}^\varepsilon_\delta\|_{L^{p_1}(\Omega)},\end{aligned}$$

где $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{\varkappa_2}=1$. В силу условий $a_2$, $d_2$ имеем $\frac{2+\nu}{6} < \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2} \leqslant \frac{1}{2}$ и, значит, мы можем выбрать такие $p_1$, $p_2$, чтобы $p_1<6$ и $(1+\nu)p_2<6$. Используя далее тот факт, что пространство $H^1(\Omega)$ компактно вложено в пространство $L^p(\Omega)$ при $p < 6$, получаем справедливость следующей оценки

$$\varlimsup_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\Delta u^\varepsilon_{2\delta}\cdot\zeta^\varepsilon_\delta\,dx\right| \leqslant \tilde{C}\|u_\delta\|^{1+\nu}_{H^1(\Omega)}\cdot\varlimsup_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\|\tilde{\zeta}^\varepsilon_\delta\|_{L^{p_1}(\Omega)} = \tilde{C}\|u_\delta\|^{1+\nu}_{H^1(\Omega)}\cdot$$
$$\cdot\|u-u_\delta\|_{L^{p_1}(\Omega)} \leqslant \tilde{C}\|u_\delta\|^{1+\nu}_{H^1(\Omega)}\cdot\|u-u_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \tilde{C}\|u_\delta\|^{1+\nu}_{H^1(\Omega)}\cdot\delta. \tag{51}$$

Перейдём в неравенстве (48) к пределу при $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$. Используя оценки (49), (50), (51), получаем

$$\varliminf_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] \geqslant \varliminf_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon_\delta] - 2\left(\left(\tilde{C}\|u_\delta\|^\nu_{H^1(\Omega)}+1\right)\cdot\|u_\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right)\cdot\delta.$$

Перейдём в этом неравенстве к пределу при $\delta \to 0$. Учитывая непрерывность функционала $\Phi$ в $H^1(\Omega)$ и равенство (16) при $w^\varepsilon = u^\varepsilon_\delta$, $w = u_\delta$, получаем

$$\varliminf_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] \geqslant \lim_{\delta\to 0}\Phi[u_\delta] = \Phi[u].$$

Таким образом, неравенство (18) доказано.

**2.5. Единственность решения усреднённой задачи** (11)-(12)

Рассмотрения требуют лишь случаи, когда параметры $(\alpha,\beta)$ принадлежат ломанной $\ell_1\cup\lambda_0\cup\ell_2$. Поскольку при $(\alpha,\beta)\in\Lambda\setminus\{\ell_1\cup\lambda_0\cup\ell_2\}$ $c(x,u)=0$ (т.е. $c_u(x,u)=0$) и задача (11)-(12) становится задачей Дирихле для уравнения Пуассона.

Будем рассматривать функцию $c^\varepsilon(x,u)$, заданную формулой (7), как обобщённую функцию переменных $x$, $u$ из $\mathcal{D}'(\Omega\times R^1)$, зависящую от параметра $\varepsilon$ ([19]). Рассмотрим обобщённую функцию $\tilde{c}^\varepsilon(x,u)\in\mathcal{D}'(\Omega\times R^1)$ : $\tilde{c}^\varepsilon(x,u) = \frac{\partial^2}{\partial^2 u}c^\varepsilon(x,u) = \sum\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)}\tilde{c}^\varepsilon_i(u)\cdot\delta(x-x^{i\varepsilon})$. В силу формул (8), (9), (10) при $(\alpha,\beta)\in\ell_1\cup\lambda_0\cup\ell_2$ имеем

$$\tilde{c}^\varepsilon_i(u) = \begin{cases} 4\pi(a^\varepsilon_i)^2\sigma_u(x^{i\varepsilon},u)\varepsilon^3, \text{ при } (\alpha,\beta)\in\ell_1; \\ \dfrac{4\pi(a^\varepsilon_i)^2\sigma_u(x^{i\varepsilon},V^\varepsilon_i)}{1+a^\varepsilon_i\sigma_u(x^{i\varepsilon},V^\varepsilon_i)}\varepsilon^3, \text{ при } (\alpha,\beta)\in\lambda_0; \\ 4\pi a^\varepsilon_i\varepsilon^3, \text{ при } (\alpha,\beta)\in\ell_2. \end{cases} \tag{52}$$

Из условия 1 теоремы 1 следует, что функции $\tilde{c}^\varepsilon(x,u)$ сходятся в слабой топологии $\mathcal{D}'(\Omega)$ к второй производной $\frac{\partial^2}{\partial u^2}c(x,u)$. В силу свойства функции плотности поглощения $\sigma(x,u)$ ($\sigma_u(x,u)\geqslant 0$) и формул (52) имеем $\tilde{c}^\varepsilon_i(u)\geqslant 0$. Отсюда заключаем, что вторая производная $\frac{\partial^2}{\partial u^2}c(x,u)\geqslant 0$ и следовательно справедливо неравенство

$$(c_u(x,u_1)-c_u(x,u_2))(u_1-u_2)\geqslant 0\;\forall\, u_1,\,u_2\in R^1. \tag{53}$$

Предположим, что существует два различных решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ задачи (11)-(12). Тогда их разность $u_1(x) - u_2(x)$ будет удовлетворять соотношениям

$$-\Delta(u_1 - u_2) + (c_u(x, u_1) - c_u(x, u_2)) = 0 \text{ в } \Omega, \tag{54}$$

$$u_1 - u_2 = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{55}$$

Умножим (54) на $u_1(x) - u_2(x)$ и проинтегрируем по области $\Omega$. Применяя интегрирование по частям и (55), получаем

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2\,dx + \int\limits_{\Omega} (c_u(x, u_1) - c_u(x, u_2))(u_1 - u_2)\,dx = 0.$$

В силу (53) из этого равенства следует, что $u_1(x) = u_2(x)$ при почти всех $x \in \Omega$ и единственность решения $u(x)$ усреднённой задачи (11)-(12) доказана. Теорема доказана.

**Литература**


1. Берлянд Л.В., Гончаренко М.В. Осреднение уравнения диффузии в пористой среде со слабым поглощением // Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1989. – № **52**. – С. 113 – 122.

2. Cabarrubias B., Donato P. Homogenization of a quasilinear elliptic problem with nonlinear Robin boundary condition // Applicable Analysis: An International Journal, 2012. – Vol.**91**, №6. – P. 1111 – 1127.

3. Chourabi I., Donato P. Homogenization and correctors of a class of elliptic problems in perforated domains // Asymptotic Analysis, 2015. – № **92**, P. 1 – 43.

4. Chourabi I., Donato P. Homogenization of elliptic problems with quadratic growth and nonhomogenous Robin conditions in perforated domains // Chinese Annals of Mathematics, 2016. – Vol. **37B**, №6. – P. 833 – 852.

5. Cioranescu D., Donato P. On Robin problems in perforated domains //Mathematical sciences and applications, 1997. – № **9**. – P. 123 – 135.

6. Cioranescu D., Donato P., Zaki R. Asymptotic behaviour of elliptic problems in perforated domains with nonlinear boundary conditions // Asymptotic Analysis, 2007. – № **53**. – P. 209 – 235.

7. Conca C., Diaz J., Linan A., Timofte C. Homogenization in chemical reactive floes // Electronic Journal of Differential Equations, 2004. – № **40**. – P. 1 – 22.

8. Conca C., Diaz J., Linan A., Timofte C. Homogenization results for chemical reactive flows through porous media // New Trends in Continuum Mechanics, 2005. – № **6**. – P. 99 – 107.

9. Conca C., Diaz J., Timofte C. On the homogenization of a transmission problem arising in chemistry // Romanian Reports in Physics, 2004. – Vol. **56**, №4. – P. 613 – 622.

10. Goncharenko M. The asymptotic behaviour of the third boundary-value problem solutions in domains with fine-grained boundaries // Mathematical sciences and applications, 1997. – № **9**. – P. 203 – 213.

11. Mel'nyk T.A., Sivak O.A. Asymptotic analysis of a boundary-value problem with the nonlinean multiphase interactions in a perforated domain // Ukrainian Mathematical Journal, 2009. – Vol.61, № **4**. – P. 494 – 512.

12. Mel'nyk T.A., Sivak O.A. Asymptotic approximations for solutions to quasilinear and linear elliptic problems with different perturbed boundary conditions in perforated domains // Asymptotic Analysis, 2011. – № **5**. – P. 79 – 92.

13. Timofte C. On the homogenization of a climatization problem // Studia Universitatis «Babes-Bolyai», Mathematica, 2007. – Vol.LII, № **2**. – P. 117 – 125.

14. Timofte C., Cotfas N., Pavel G. On the asymptotic behaviour of some elliptic problems in perforated domains // Romanian Reports in Physics, 2012. – Vol.64, № **1**. – P. 5 – 14.

15. Berlyand L.V., Khruslov E.Ya. Competition between the surface and the boundary layer energies in a Ginzburg-Landau model of a liquid crystal composite // Asymptotic Analysis, 2002. – № **29**. – P. 185 – 219.

16. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Усреднённые модели микронеоднородных сред. – К: Наукова думка, 2005. – 551 с.

17. Cabarrubias B., Donato P. Existence and Uniqueness for a Quasilinear Elliptic Problem With Nonlinear Robin Condition // Carpathian Journal of Mathematics, 2011. – Vol.27, № **2**. – P. 173 – 184.

18. Хруслов Е.Я. Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Математический сборник, 1978. – Т.106(148), № **4(8)**. – С. 604 – 621.

19. Владимиров В.С. Обобщённые функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

Статья получена: 15.11.2016; окончательный вариант: 10.12.2016; принята: 15.12.2016.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 84, 2016, с.112–122

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”
Vol. 84, 2016, p. 112–122
DOI: 10.26565/2221-5646-2016-84-08

УДК 533.72

# Continual distribution with screw modes

V. D. Gordevskyy, O. S. Sazonova

*V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine*
*gordevskyy2006@yandex.ua, olena.s.sazonova@karazin.ua*

Explicit approximate solution of the Boltzmann equation for the hard-sphere model are built. It has the kind of continual distribution in the case of local Maxwellians of special form describing the screw-shaped stationary equilibrium states of a gas. Some limited cases, in which this distribution minimized the uniform-integral remainder between the sides of this equation are obtained.
*Keywords:* hard spheres, Boltzmann equation, Maxwellian, screws, uniform-integral remainder, continual distribution.

Гордевський В. Д., Сазонова О. С. **Континуальний розподіл з гвинтовими модами.** Побудовано явний наближений розв'язок нелінійного рівняння Больцмана для моделі твердих куль. Він має вид континуального розподілу у випадку локальних максвеліанів, що описують стаціонарні рівноважні стани газу, подібні гвинтам. Здобуто деякі граничні випадки, в яких цей розподіл мінімізує рівномірно-інтегральний відхил між частинами рівняння.
*Ключові слова:* тверді кулі, рівняння Больцмана, максвеліан, гвинти, рівномірно-інтегральний відхил, континуальний розподіл.

Гордевский В. Д., Сазонова Е. С. **Континуальное распределение с винтовыми модами.** Построено явное приближенное решение нелинейного уравнения Больцмана для модели твердых сфер. Оно имеет вид континуального распределения в случае локальных максвеллианов, описывающих винтообразные стационарные равновесные состояния газа. Получены некоторые предельные случаи, в которых это распределение минимизирует равномерно-интегральную невязку между частями уравнения.
*Ключевые слова:* твердые сферы, уравнение Больцмана, максвеллиан, винты, равномерно-интегральная невязка, континуальное распределение.
*2000 Mathematics Subject Classification* 76P05; 45K05; 82C40; 35Q55.

## 1. Introduction

The interaction between flows of a gas of hard spheres is described by the kinetic integro-differential Boltzmann equation [1]–[3]:

$$D(f) = Q(f,f), \tag{1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} Q(f,f) = \frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v-v_1,\alpha)|[f(t,v_1',x)f(t,v',x) - \\ - f(t,v_1,x)f(t,v,x)], \end{aligned} \tag{3}$$

where $f(t,v,x)$ is the distribution to be found, that describes the number of particles that in the moment of time $t$ have velocity $v$ and are in the point of space $x$, $\partial f/\partial x$ is its spatial gradient, $t \in R^1$ is the time, $x = (x^1,x^2,x^3) \in R^3$ and $v = (v^1,v^2,v^3) \in R^3$ are the molecule coordinate and the velocity, $d > 0$ is its diameter, $v$ and $v_1$ are the molecule velocities before the collision, $\alpha \in \Sigma$, $\Sigma$ is the unit sphere in $R^3$. The molecule velocities after the collision are defined by the formulae

$$v' = v - \alpha(v-v_1,\alpha), \quad v_1' = v + \alpha(v-v_1,\alpha), \tag{4}$$

The well-known exact solutions of (1) – (4) are the global and local Maxwellians [1]-[3]. Some other exact solutions were obtained only for the case of Maxwellian molecules and for some of its generalizations [4]–[6].

That is why the question of the search of explicit approximate solutions of this kinetic integro-differential equation and satisfying it with arbitrary accuracy was occured.

Then bimodal distributions including both global and local Maxwellians of different particular kinds describing screw-shaped [7], [8], tornado-like [9], [10] and other equilibrium states of a gas were studied [11].

Then a new approach to the search for explicit approximate solutions of the Boltzmann equation was proposed in the paper [12], namely the continual kind of distribution function. It was supposed, that mass velocity of the global Maxwellian does not take discrete values but becomes an arbitrary parameter taking any values in $\mathbb{R}^3$.

Attempts to transfer the results of [12] and other works in the case of local Maxwellians of the most general form have not been successful due to occur at the same time significant difficulties.

The objective of this paper is to study the behavior of the continual distribution involving local Maxwellians of a special form that describe the screw-shaped stationary equilibrium states of a gas (in short-screws or spirals) [7, 8, 14]. Every Maxwellian of this type is defined by the formula

$$M(v,u,x) = \rho_0 e^{\beta\omega^2 r^2}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(v-u-[\omega\times x])^2}. \tag{5}$$

Physically, distribution (5) corresponds to the situation when the gas has an inverse temperature $\beta = \frac{1}{2T}$, where $T = \frac{1}{3\rho} \int\limits_{\mathbb{R}^3} (v-u)^2 f dv$ and rotates in whole as a solid body with the angular velocity $\omega \in R^3$ around its axis on which the point $x_0 \in R^3$ lies,

$$x_0 = \frac{[\omega \times u]}{\omega^2}, \tag{6}$$

The square of this distance from the axis of rotation is

$$r^2 = \frac{1}{\omega^2}[\omega \times (x - x_0)]^2 \tag{7}$$

and the density of the gas has the form:

$$\rho = \rho_0 e^{\beta \omega^2 r^2} \tag{8}$$

($\rho_0$ is the density of the axis, that is $r = 0$), $u \in R^3$ is the arbitrary parameter (linear mass velocity for $x$), for which $x||\omega$, and $u + [\omega \times x]$ is the mass velocity in the arbitrary point $x$. The distribution (5) gives not only a rotation, but also a translational movement along the axis with the linear velocity

$$\frac{(\omega, u)}{\omega^2}\omega,$$

Thus, it really describes a spiral movement of the gas in general, moreover, this distribution is stationary (independent of $t$), but inhomogeneous.

We will consider the continual distribution [12] such form as:

$$f = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(t, x, u) M(v, u, x) du, \tag{9}$$

It is assumed, that the coefficient function $\varphi(t, x, u)$ is non-negative and belong to $C^1\left(\mathbb{R}^7\right)$. It is required to find functions $\varphi(t, x, u)$ and the behavior of all parameters such that the uniform-integral remainder [13]

$$\Delta = \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f, f)| dv, \tag{10}$$

tends to zero.

In the section 2 asymptotical expressions for some upper estimations of remainder *Delta* with $\beta \to +\infty$ and other assumptions about the behavior of the vector for angular velocity $\omega$.

## 2. Main results

Before formulating and proving the main results it is necessary to reconstruct the right part (10). First we must to obtain and estimate the integral with variable $v$, substituting distributions (5), (9) in (1)–(3) according to

$$D(M) = Q(M, M) = 0. \tag{11}$$

Thus,

$$D(f)=\int\limits_{\mathbb{R}^3} D(\varphi)M\,du=\int\limits_{\mathbb{R}^3} D(\varphi)e^{\beta\omega^2r^2}\widetilde{M}\,du \tag{12}$$

$$\begin{aligned} Q(f,f)=\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1\int\limits_{\Sigma} d\alpha|(v-v_1,\alpha)|\times\\ \times e^{2\beta\omega^2r^2}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^3} du_1\varphi(t,x,u_1)\widetilde{M}(v_1',u_1,x)\int\limits_{\mathbb{R}^3} du_2\varphi(t,x,u_2)\widetilde{M}(v',u_2,x)-\\ -\int\limits_{\mathbb{R}^3} du_1\varphi(t,x,u_1)\widetilde{M}(v_1,u_1,x)\int\limits_{\mathbb{R}^3} du_2\varphi(t,x,u_2)\widetilde{M}(v,u_2,x)\Bigg], \end{aligned} \tag{13}$$

where the denotation

$$\widetilde{M}=\widetilde{M}(v,u,x)=\rho\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\beta(v-\tilde{u})^2} \tag{14}$$

$$\tilde{u}=\tilde{u}(x)=u+[\omega\times x]$$

were introduced

Then

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^3}|D(f)-Q(f,f)|\,dv=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)e^{\beta\omega^2r^2}\widetilde{M}\,du-\\ -\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1\int\limits_{\Sigma} d\alpha|(v-v_1,\alpha)|\times\\ \times e^{2\beta\omega^2r^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2)\big[\widetilde{M}(v_1',u_1,x)\widetilde{M}(v',u_2,x)-\\ -\widetilde{M}(v_1,u_1,x)\widetilde{M}(v,u_2,x)\big]du_1du_2\Bigg|dv. \end{aligned} \tag{15}$$

As usual, we introduce the notion of "gain"$G$ and "loss"$L$ parts of the collision integral $Q$

$$G(f,g)=\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1\int\limits_{\Sigma} d\alpha|(v-v_1,\alpha)|f(t,v_1',x)g(t,v_1,x), \tag{16}$$

$$L(g)=\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1\int\limits_{\Sigma} d\alpha|(v-v_1,\alpha)|g(t,v_1,x). \tag{17}$$

Because, as is known [1]:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} G(M_1, M_2)dv = \int\limits_{\mathbb{R}^3} M_1 L(M_2)dv, \tag{18}$$

we obtain the next upper estimation

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f,f)|\, dv \le \int\limits_{\mathbb{R}^6} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t} + v\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| e^{\beta\omega^2 r^2}\widetilde{M}\, dudv+\\ + e^{2\beta\omega^2 r^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2)\int\limits_{\mathbb{R}^3}\big[\widetilde{M_1}L(\widetilde{M_2})+\\ + \widetilde{M_2}L(\widetilde{M_1})\big]du_1du_2dv\end{aligned} \tag{19}$$

According to (19) for the correctly define of remainder (10) on coefficient functions it is necessary to impose new conditions of fast decrease on a spatial variable $x$. Therefore we will introduce the new denotation

$$\varphi(t,x,u) = \psi(t,x,u)e^{-\beta\omega^2 r^2}, \tag{20}$$

where the functions are continuously differentiable and non-negative. Then according to (19), (20) and (7) the estimate (19) takes a form

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f,f)|\, dv \le\\ \le \int\limits_{\mathbb{R}^6}\left|\frac{\partial\psi}{\partial t} + v\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - 2\beta\psi\big[[\omega\times(x-x_0)]\times\omega\big]\right)\right|\widetilde{M}\, dudv+\\ + \int\limits_{\mathbb{R}^6}\psi(t,x,u_1)\psi(t,x,u_2)\int\limits_{\mathbb{R}^3}\big[\widetilde{M_1}L(\widetilde{M_2}) + \widetilde{M_2}L(\widetilde{M_1})\big]du_1du_2dv\end{aligned} \tag{21}$$

**Theorem.** *Let conditions (5), (14), (20) be valid, and*

$$\omega = \frac{\omega_0 s}{\beta^k}, \tag{22}$$

*where $s > 0$ is any constant, $\omega_0$ is arbitrary fixed vector (the other parameters are also arbitrary and fixed so far). Also we assume that the functions $\psi$, $|\frac{\partial\psi}{\partial t}|$, $|\frac{\partial\psi}{\partial x}|$, $|[\omega_0\times x]|\psi$, $\left([\omega_0\times x], \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$, are bounded with respect to $t$ and $x$ on $\mathbb{R}^7$ and that the quantities*

$$\psi,\ |u|\psi,\ \frac{\partial\psi}{\partial t},\ \frac{\partial\psi}{\partial x},\ u\frac{\partial\psi}{\partial x} \in L_1(\mathbb{R}^3) \tag{23}$$

*in the variable $u$ uniformly in $t$ and $x$ on $\mathbb{R}^4$. Then the quality $\Delta$ defined by formula (10) is meaningful (i.e., the finite inyegral and the finite supremum), and we have $\Delta'$ such that*

$$\Delta \le \Delta'. \tag{24}$$

*If*

$$\frac{1}{2} < k \le 1, \tag{25}$$

*or*

$$\frac{1}{4} < k \le \frac{1}{2}, \tag{26}$$

*and*

$$[\omega_0 \times u] = 0, \tag{27}$$

*then there is the finite limit*

$$L = \lim_{\beta\to+\infty} \Delta' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left[ \rho \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial\psi}{\partial t} + u \frac{\partial\psi}{\partial x} \right| du + \right. \\ \left. + 2\pi^3 d^2 \rho^2 \int\limits_{\mathbb{R}^6} \psi(t,x,u_1)\psi(t,x,u_2)|u_1 - u_2| du_1 du_2 \right]. \tag{28}$$

To prove Theorem we need the following lemma [7], which gives a sufficient condition for the continuity of supremum of the function of special kind of many variables. The supremum is taken respectively to a part of variables.

**Lemma.** *Let the function $g(y,z) : Y \times Z \to \mathbb{R}^1; Y \in \mathbb{R}^p; Z \in \mathbb{R}^q$; and let the following conditions be satisfied:*

*1) $\forall z \in Z$, $g(y,z)$ is bounded in $Y$;*

*2) $g(y,z)$ is continuity in $z$ uniformly with respect to $y$, i.e.,*

$$\forall z_0 \in Z, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in Y, \forall z \in Z,$$

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |g(y,z) - g(y,z_0)| < \varepsilon$$

*Then the function*

$$l(z) = \sup_{y\in Y} |g(y,z)|$$

*is continuity on the set $Z$.*

*Proof the Theorem.* From (10), (21), (23) and the properties of supremum, there are follows the existence of the remainder $\Delta$, and

$$\Delta \le \Delta' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left[ \int\limits_{\mathbb{R}^6} \left| \frac{\partial\psi}{\partial t} + v \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} - 2\beta\psi \big[ [\omega \times (x - x_0)] \times \omega \big] \right) \right| \widetilde{M}\, dv du + \right. \\ \left. + \int\limits_{\mathbb{R}^6} \psi(t,x,u_1)\psi(t,x,u_2) \int\limits_{\mathbb{R}^3} \big[ \widetilde{M_1} L(\widetilde{M_2}) + \widetilde{M_2} L(\widetilde{M_1}) \big] dv du_1 du_2 \right]. \tag{29}$$

In (29) we also interchange the integration order; the validity of this procedure can be justified as follows.

The integrand in the first term is continuous and

$$\int\limits_{\mathbb{R}^6} \left| \frac{\partial\psi}{\partial t} + v\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - 2\beta\psi\big[[\omega\times(x-x_0)]\times\omega\big]\right)\right| \widetilde{M}\,du$$

converges uniformly in $\mathbb{R}^3$ (by the Weierstrass theorem),

$$\left|\left| \frac{\partial\psi}{\partial t} + v\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - 2\beta\psi\big[[\omega\times(x-x_0)]\times\omega\big]\right)\right| \rho\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta(v-\tilde{u})^2}\right| \leq$$
$$\leq \rho\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta(v-\tilde{u})^2}\left(\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right| + |v|\left(\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| + 2\beta\psi\left|\big[[\omega\times(x-x_0)]\times\omega\big]\right|\right)\right)$$

is integrable by virtue of condition (23).

The integrand in the second term is continuous by the theorem conditions, and the inner integral converges uniformly in $u_1$ and $u_2$ by the Weierstrass theorem because we have an integrable majorizing function. We can therefore also change the integration order here.

Changing the variables as $\sqrt{\beta}(v-\widetilde{u}) = w$ and $v = \frac{w}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u} = \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u + [\omega\times x]$, we have

$$\Delta' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\left[\rho\pi^{-3/2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\left|\frac{\partial\psi}{\partial t} + \left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u + [\omega\times x]\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - 2\beta\psi\big[[\omega\times(x-x_0)]\times\omega\big]\right)\right| e^{-w^2}dwdu\right] +$$
$$+ \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^6}\psi(t,x,u_1)\psi(t,x,u_2)\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[\widetilde{M}_1 L(\widetilde{M}_2) + \widetilde{M}_2 L(\widetilde{M}_1)\right] dwdu_1du_2\right]. \tag{30}$$

Let us consider the integrand of the second supremum in expression (30):

$$\widetilde{M}_1 L(\widetilde{M}_2) = \widetilde{M}\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u}_1, u_1, x\right)\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1\times$$
$$\times\int\limits_{\Sigma} d\alpha\left|\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u}_1 - v_1, \alpha\right)\right|\widetilde{M}(v_1,u_2,x) = \widetilde{M}\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u}_1, u_1, x\right)\frac{d^2}{2}\rho\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1\int\limits_{\Sigma} d\alpha\left|\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u}_1 - v_1, \alpha\right)\right| e^{-\beta(v_1-\tilde{u}_2)^2}.$$

We introduce the replacement

$$\sqrt{\beta}(v_1 - \tilde{u}_2) = z; \qquad v_1 = \frac{z}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u}_2 = \frac{z}{\sqrt{\beta}} + u_2 + [\omega \times x] .$$

$$\widetilde{M}_1 L(\widetilde{M}_2) = \widetilde{M}\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u}_1, u_1, x\right) \frac{d^2}{2}\rho\pi^{3/2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} ds \int\limits_{\Sigma} d\alpha \left| \left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u}_1 - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - \tilde{u}_2, \alpha\right)\right| e^{-z^2}.$$

Let $\theta$ be the angle between the vectors $\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u}_1 - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - \tilde{u}_2\right)$ and $\alpha$. Then we have

$$\widetilde{M}_1 L(\widetilde{M}_2) = \widetilde{M}\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u}_1, u_1, x\right) \frac{d^2}{2}\rho\pi^{3/2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz e^{-z^2} \times$$
$$\times \int\limits_{\Sigma} d\alpha \left| \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1 + [\omega \times x] - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - u_2 - [\omega \times x] \right| |\cos\theta|.$$

We direct the $z$-axis along the vector $(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1 - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - u_2)$ and introduce the spherical coordinate system on $\Sigma$. Integrating over the angles $\theta$ and $\varphi$, we then obviously obtain

$$M_1 L(M_2) = M\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1, u_1\right) \frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz e^{-z^2} \left| \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1 - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - u_2 \right|.$$

Analogously, we have

$$M_2 L(M_1) = M\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_2, u_2\right) \frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz e^{-z^2} \left| \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_2 - \frac{w}{\sqrt{\beta}} - u_1 \right|.$$

Hence, we obtain

$$\int\limits_{\mathbb{R}^6} \psi_1\psi_2 \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[ M\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1, u_1\right) \beta^{3/2} \frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz e^{-z^2} \left| \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1 - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - u_2 \right| + \right.$$
$$\left. + M\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_2, u_2\right) \beta^{3/2} \frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz e^{-z^2} \left| \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_2 - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - u_1 \right| \right] dw du_1 du_2 =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^6} \psi_1\psi_2 \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[ \rho\pi^{-3/2} e^{-w^2} \frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz e^{-z^2} \left| \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1 - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - u_2 \right| + \right.$$
$$\left. + \rho\pi^{-3/2} e^{-w^2} \frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz e^{-z^2} \left| \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_2 - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - u_1 \right| \right] dw du_1 du_2 =$$
$$= 2 \int\limits_{\mathbb{R}^6} \psi_1\psi_2 \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[ e^{-w^2} \frac{d^2\rho^2}{\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz e^{-z^2} \left| \frac{(w-z)}{\sqrt{\beta}} + u_1 - u_2 \right| \right] dw du_1 du_2$$

For expression simplification (30) we introduce the notation:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tag{31}$$

$$A(w,u,t,x) = \rho \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz e^{w^2} \left| w\gamma + (u_1 - u_2) - z\gamma \right| \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
B(w,u,t,x) &= \left( \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u + [\omega \times x] \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - 2\beta\psi \big[ [\omega \times (x - x_0)] \times \omega \big] \right) = \\
&= \left( \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u + [\omega \times x] \right) \times \\
&\times \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2\beta\psi \left( \omega\,(\omega, x - x_0) - \omega^2 \left( x - \frac{[\omega \times u]}{\omega^2} \right) \right) = \\
&= \left( \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u + [\omega \times x] \right) \times \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2\beta\psi \big( \omega\,(\omega, x) - x\omega^2 + [\omega \times u] \big) = \\
&= \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u + [\omega \times x] \right) + \\
&+ 2\psi\sqrt{\beta} \left\{ (\omega, w)(\omega, x) - \omega^2 (x, w) + (w, [\omega \times u]) \right\} = \\
&= \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u + [\omega \times x] \right) + \\
&+ 2\psi\sqrt{\beta} \left\{ -[\omega \times w][\omega \times x] + (w, [\omega \times u]) \right\}
\end{aligned} \tag{33}$$

Using expressions (23) and (31), we will obtain the following:

$$\begin{aligned}
B(w,u,t,x) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \big( w\gamma + u + \gamma^2 s [\omega_0 \times x] \big) + \\
+ 2\psi\gamma s \left\{ (w, [\omega_0 \times u]) - s\gamma^2 [\omega_0 \times w][\omega_0 \times x] \right\}
\end{aligned} \tag{34}$$

Taking formulas (32) and (34) into account, we rewrite expression (30) as

$$\begin{aligned}
\Delta' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left[ \rho \pi^{-3/2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} + B(w,u,t,x) \right| e^{w^2} dw du \right] + \\
+ \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left[ 2\rho \pi^{-3/2} \int\limits_{\mathbb{R}^6} \psi(t,x,u_1)\psi(t,x,u_2) \int\limits_{\mathbb{R}^3} A(w,u_1,u_2,t,x) dw du_1 du_2 \right]
\end{aligned} \tag{35}$$

We apply the aforesaid Lemma to each supremum contained in (35), where $y = (t,x), Y = \mathbb{R}^4, z = (w,\gamma)$, $Z = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1_+$. Fulfillment of the first and second conditions follows from (23), (32), (34) and the theorem conditions.

Because the lemma conditions are satisfied for each of these supremums, the whole quantity $\Delta'$ is continuous in $\gamma$ on $\mathbb{R}^1_+$. So, in (35) we can pass to the limit with $\beta \to +\infty$, which is equivalent to the tending of $\gamma$ to zero. Thus dependence on $z$ and $w$ is reduced only to expressions $e^{z^2}$ in (32) and $e^{w^2}$ in (35). As a result of integration by $z$ and $w$ we come to (28).

Now, based on the obtained expression for the limit as $\beta \to +\infty$, we can find the sufficient condition for the mismatch $\Delta$ to tend to zero, which we formulate as a corollary of Theorem.

**Corollary.** *Let all the theorem conditions be valid. Then the statement*

$$\Delta \to 0 \tag{36}$$

*holds if the function $\psi$ defined by formula (8) has the form*

$$\psi(t,x,u) = C(x-ut)\left(\frac{P}{\pi}\right)^{3/2} e^{-P(u-u_0)^2}, \tag{37}$$

*where $C$ is any smooth, positive and bounded function together with all its derivatives, $u_0 \in \mathbb{R}^3$ is an arbitrary fixed vector, and $P \to +\infty$.*

*Proof.* Let us use limit expression (28) and substitute expression (37) in it. The integrand of the first term then vanishes,

$$C'(x-ut)(-u) + uC'(x-ut) = 0.$$

We consider the integral in the second term (the proof of integral convergence and it tending to zero as $P \to +\infty$ is analogous to proof in [12]). The corollary is proved.

**Remark 1.** Relation (36) also holds at a fixed $P$ in expression (37) under the additional condition that $d \to 0$ (the near-Knudsen gas).

**Remark 2.** In (37), we can obviously take $C\big([u \times x]\big)$ instead of the first factor $C(x-ut)$ and take other $\delta$-functions instead of the second factor.

**Remark 3.** The common property of all obtained distributions is that they describe the non-uniform cooling gas ($\beta \to +\infty$). Besides, the rotation of spiral decelerates ($\omega \to 0$), although in different degrees in accordance with (22) and under the conditions of (25), (26). As corollary shows, the estimate (21) and the limit in expression (28) ensure the further arbitrary smallness of the remainder $\Delta$ for the given coefficient functions and sufficiently small absolute temperature, which only means assuming that the thermal constituent of the molecule velocities is small when an arbitrary value of the mass velocity of a flow is preserved. At the same time, the distribution $f$ itself does not tend to any of Maxwellians (i.e. to the known exact solution of the Boltzmann equations). It's defined by (37), (9), (5).

In summary, in this paper we managed a few to generalize results, which obtained in [12] and [14]. We have here constructed continual distribution for the case of local Maxwellians describing the screw-shaped stationary equilibrium states of a gas and satisfying Boltzmann equation (1)–(3) in the sense of minimizing mismatch (10).

REFERENCES


1. Cercignani C. Theory and Application of the Boltzmann Equation. – Scottish Academic Press, Edinburgh, 1975.
2. Kogan M. Dynamics of Diluted Gas. – Nauka, Moscow, 1967. (in Russian).
3. Carleman T. Problems Mathematiques dans la Theorie Cinetique des Gas. – Almqvist Wiksells, Uppsala, 1957.
4. Bobylev A.V. Exact solutions of the Boltzmann equation. // Sov. Phys. Dokl., 1976. – **20**. – P. 822–824.
5. Krook K., Wu T.T. Exact solutions of the Boltzmann equation // Phys. Fluids, 1977. – V. 20, **10(1)**. – P. 1589–1595.
6. Ernst H.M. Exact solutions of the nonlinear Boltzmann equation // J. Statist. Phys., 1984. – V. 34, **5/6**. – P. 1001–1017.
7. Gordevskyy V.D. Biflow Distributions with Screw Modes // Theor. Math. Phys., 2001. – V. 126, **2**. – P. 234–249.
8. Gordevskyy V.D. Rotating Flows with Acceleration and Compacting in the Model of Hard Spheres // Theor. Math. Phys., 2009. – V. 161, **2**. – P. 1558–1566.
9. Gordevskyy V.D. Transitional regime between vortical states of a gas // Nonl. Analysis (NA 3752), 2003. – V. 53, **3-4**. – P. 481–494.
10. Gordevskyy V.D. Vorticies in a gas of hard spheres // Theor. Math. Phys., 2003. – V. 135, **2**. – P. 704–713.
11. Gordevskyy V.D. Trimodal Approximate Solutions of the Non-linear Boltzmann Equation // Math. Meth. Appl. Sci., 1998. – **21**. – P. 1479–1494.
12. Gordevskyy V.D., Sazonova E.S. Continuum analogue of bimodal distribution // Theor. Math. Phys., 2012. – V. 171, **3**. – P. 839–847.
13. Gordevskyy V.D. An approximate two-flow solution to the Boltzmann equation // Theor. Math. Phys., 1998. – V. 114, **1**. – P. 99–108.
14. Gordevskyy V. D., Sazonova E. S. Asymmetrical bimodal distributions with screw modes // Math. Phys., Anal., Geom., 2011. – V. 7, **3**. – P. 212–224.


Article history: Received: 17 November 2016; Final form: 19 December 2016; Accepted: 20 December 2016.

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
Том 84, 2016, с.123–124

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics”
Vol. 84, 2016, p. 123–124

УДК 517.9

# КОРОБОВ ВАЛЕРИЙ ИВАНОВИЧ

*К 75-летию со дня рождения*

27 сентября 2016 года исполнилось 75 лет Главному редактору нашего журнала доктору физико-математических наук, профессору Коробову Валерию Ивановичу.

Вся жизнь этого замечательного человека связана с математикой и Харьковским университетом. По его инициативе в 1971 году была открыта первая «прикладная» кафедра на факультете – кафедра математической теории систем, а Валерий Иванович в 30 лет стал её заведующим – самым молодым заведующим кафедрой в университете. Валерий Иванович создал в Харькове научную школу по математической теории управления, ставшую известной далеко за пределами нашей страны. Валерий Иванович – автор более 170 научных работ, среди которых – монография «Метод функции управляемости» (2007). За выдающиеся научные достижения Валерий Иванович Коробов удостоен Государственной премии Украины в области науки и техники (2010 год), а за вклад в развитие космонавтики награжден медалью

С. П. Королёва Федерации космонавтики России. Он воспитал сотни студентов, 12 кандидатов наук, а трое его учеников – Нгуен Хоа Шон, Рабах Рабах и Г. М. Скляр – стали докторами наук. В сентябре 2016 года в Харьковском национальном университете имени В. Н. Каразина состоялась Международная конференция «Differential Equations and Control Theory», посвящённая 75-летию Валерия Ивановича Коробова, на которой собрались его ученики, последователи, коллеги из разных стран.

Мы от всей души поздравляем Валерия Ивановича с юбилеем и желаем ему доброго здоровья и новых научных достижений.

*Rabah Rabah, Nguyen Khoa Son, Борисенко А.А., Гандель Ю.В., Золотарев В.А., Игнатович С.Ю., Пастур Л.А., Пацегон Н.Ф., Приходько А.П., Резуненко А.В., Скляр Г.М., Хруслов Е.Я., Чуйко С.М.*

# Правила для авторів
## «Вісника Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна, Серія «Математика, прикладная математика і механіка»

Редакція просить авторів при направленні статей керуватися наступними правилами.

**1.** В журналі публикуються статті, що мають результати математичних досліджень.

**2.** Представленням статті вважається отримання редакцією файлів статті, анотацій, відомостей про авторів та архіва, що включає LATEX та PDF файли статті та файли малюнків.

**3.** Редакція приймає статті українською, російскою або англійською мовами. Стаття має бути оформлена у редакторі LATEX (версія 2e). Файл-зразок оформлення статті можно знайти в редакції журналу та на веб-сторінці (http://vestnik-math.univer.kharkov.ua). Стаття повинна починатися з коротких анотацій (не більше 10 строк), в яких повинні бути чітко сформульовані ціль та результати роботи. Анотації повинні бути трьома мовами (українською, російскою та англійською): першою повинна стояти анотація тією мововюн, якою є основний текст статті. В анотації повинні бути призвища, ініціали авторів, назва роботи, ключові слова, міжнародна математична класифікація (Mathematics Subject Classification 2010). Анотація не повинна мати посилання на літературу та малюнки.

**4.** Приклади оформлення списка літератури:

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. - Харьков: Харьковское Математическое Общество, 1892. - 251 с.
2. Ляпунов А.М. Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Сообщения Харьковского мат. общества. Сер. 2. – 1894. – Т. **4**. № 3. – С. 123–140.

**5.** Кожний малюнок повинен бути пронумерований та представлений окремим файлом в одному з форматів: EPS, BMP, JPG. В файлі статті малюнок повинен бути вставлений автором. Під малюнком повинен бути підпис.

**6.** Відомості про авторів повинні містити: прізвища, ім'я, по батькові, службова адреса та номера телефонів, адреса електронної пошти. Прохання також повідомити прізвище автора, з яким треба вести переписку.

**7.** Рекомендуємо використовувати останні випуски журналу ( vestnik-math.univer.kharkov.ua/currentv.htm ) в якості зразка оформлення.

**8.** У випадку порушення правил оформлення редакція не буде розглядати статтю.

Електронна скринька: vestnik-khnu@ukr.net

Електронна адреса в Інтернеті: **http://vestnik-math.univer.kharkov.ua**

## Visit our Web-page

**http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/**

## to find

- **Information for Manuscript Preparation**
- **Editorial Board**
- **Abstracts**
- **Full-texts available (PDF)**

*Наукове видання*

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна,
Том 84, Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

Збірник наукових праць

Російскою, українською, англійскою мовами

Підписано до друку 22. 12. 2016 р.
Формат $70 \times 108/16$. Папір офсетний. Друк ризограф.
Ум. друк. арк. 7,9
Обл.– вид. арк. 9,2
Наклад 100 пр.
Ціна договірна

61022, м.Харків, майдан Свободи, 4, Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна
Надруковано: ХНУ імені В.Н.Каразіна
61022, м.Харків, майдан Свободи, 4, тел. 705-24-32

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09