

ISSN 2221-5646

Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна

Серія

«Математика, прикладна математика і механіка»

Серія започаткована 1965 р.

Том 83



Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"

Vol. 83

Харків
2016

До Віснику включено статті з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (протокол №15 від 28 листопада 2016 р.).

Головний редактор – Коробов В.І. – д-р ф.-м. наук,
ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Члени редакційної колегії:

Гандель Ю.В. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна
Пацегон М.Ф. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна
Руткас А.Г. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна
Скляр Г.М. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна
Фаворов С.Ю. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна
Щербина В.О. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна
Янцевич А.А. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна
Пастур Л.А. – д-р ф.-м. наук, акад. НАН України, ФТІНТ, м. Харків, Україна
Хруслов Є.Я. – д-р ф.-м. наук, акад. НАН України, ФТІНТ, м. Харків, Україна
Борисенко О.А. – д-р ф.-м. наук, чл.-кор. НАН України, м. Суми, Україна
Золотарьов В.О. – д-р ф.-м. наук, ФТІНТ, м. Харків, Україна
Чуйко С.М. – д-р ф.-м. наук, Дон. пед. університет, Слов'янськ, Україна
Дабровски А. – д-р ф.-мат. наук, університет, Щецин, Польща
Карлович Ю. – д-р ф.-м. наук, національний університет, м. Мехіко, Мексика
Солдатов О.П. – д-р ф.-м. наук, гос. університет, м. Белгород, Росія
Відповідальний секретар – канд. ф.-м. наук Резуненко О.В.,
ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Адреса редакційної колегії: 61022, Харків, майдан Свободи, 4,
ХНУ імені В.Н. Каразіна, факультет математики і інформатики, к.7-27.
Тел. 7075240, 7075135, Email: vestnik@univer.kharkov.ua
Интернет:
<http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/>

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21568-11468 Р від 21.08.2015

©Харківський національний університет
імені В.Н. Каразіна, оформлення, 2016

ЗМІСТ

Кадець В. М., Заварзіна О. О., Пластичність одиничної кулі простору ℓ_1 .	4
Чуйко С. М., О регуляризации линейных матричных уравнений.	10
Ігнатович С. Ю., Явний розв'язок задачі швидкодії для одної нелінійної тривимірної системи.	21
Макаров А. А. Управляемость эволюционного дифференциального уравнения в частных производных.	47
Чуешов Игорь Дмитриевич (некролог)	57
Дубовой Владимир Кириллович. К семидесятилетию со дня рождения.	60

CONTENTS

V. Kadets, O. Zavarzina, Plasticity of the unit ball of ℓ_1 .	4
S. M. Chuiko, On the Regularization of a linear matrix equations.	10
S. Yu. Ignatovich, Explicit solution of the time-optimal control problem for one nonlinear three-dimensional system.	21
A. A. Makarov Controllability of evolution partial differential equation.	47
Igor Dmitrievich Chueshov (obituary)	57
Dubovoj Vladimir Kirilljvich. On his 70th birthday.	60

Plasticity of the unit ball of ℓ_1

V. Kadets, O. Zavarzina

*V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine
v.kadets@karazin.ua, lesya.nikolchenko@mail.ru*

In the recent paper by Cascales, Kadets, Orihuela and Wingler it is shown that for every strictly convex Banach space X every non-expansive bijection $F : B_X \rightarrow B_X$ is an isometry. We extend this result to the space ℓ_1 , which is not strictly convex.

Keywords: non-expansive map; unit ball; plastic space.

Кадець В. М., Заварзіна О. О. **Пластичність одиничної кулі простору ℓ_1** . У нещодавній статті Каскалеса, Кадеця, Оріуели та Вінглера показано, що у будь-якому строго опуклому банаховому просторі X кожна нерозтягуюча бієкція $F : B_X \rightarrow B_X$ є ізометрією. Ми розповсюджуємо отриманий результат на простір ℓ_1 , який не є строго опуклим.

Ключові слова: нерозтягуюче відображення; одинична куля; пластичний простір.

Кадец В. М., Заварзина А. О. **Пластичность единичного шара пространства ℓ_1** . В недавней статье Каскалеса, Кадеца, Ориуэлы и Винглера показано, что в любом строго выпуклом банаховом пространстве X каждая нерастягивающая биекция $F : B_X \rightarrow B_X$ является изометрией. Мы распространяем полученный результат на пространство ℓ_1 , не являющееся строго выпуклым.

Ключевые слова: нерастягивающее отображение; единичный шар; пластичное пространство.

2010 Mathematics Subject Classification: 46B20.

Introduction

Let E be a metric space. A map $F : E \rightarrow E$ is called non-expansive, if $\rho(F(x), F(y)) \leq \rho(x, y)$ for all $x, y \in E$. The space E is called *Expand-Contract plastic* (or simply, an EC-space) if every non-expansive bijection from E onto itself is an isometry. A metric space is called totally bounded, if for every $\varepsilon > 0$ it possesses a finite ε -net.

Satz IV of [3] or Theorem 1.1 of [6] imply that every totally bounded metric space is an EC-space, but there are also examples of EC-spaces that are not totally bounded. According to [2, Theorem 2.6], the unit ball of every strictly convex Banach space is an EC-space, so in particular the closed unit ball of an infinite-dimensional Hilbert space is an example of not totally bounded EC-space. On the other hand, there are bounded closed convex sets in an infinite-dimensional Hilbert space that are not EC-spaces [2, Example 2.7].

It is a challenging question whether unit balls of all Banach spaces are EC-spaces. The question is not easy, and a possible approach to it consists in checking what happens with Expand-Contract plasticity of unit balls in classical spaces that are not strictly convex. The list of such spaces includes $C(K)$, $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, ℓ_1 , c_0 and many others. In this short note we do just one step in this direction. Namely, we demonstrate the EC-plasticity of the unit ball of ℓ_1 .

Below, the letters X , Y are used to denote Banach spaces, and we consider only real Banach spaces. For a Banach space X we denote by S_X and B_X the unit sphere and the closed unit ball of X respectively. For a convex set $A \subset X$ denote by $\text{ext}(A)$ the set of extreme points of A ; that is, $x \in \text{ext}(A)$ if $x \in A$ and for every $y \in X \setminus \{0\}$ either $x + y \notin A$ or $x - y \notin A$. A Banach space X is called strictly convex if all elements of S_X are extreme points of B_X , or in other words, S_X does not contain non-trivial line segments.

Recall also, that ℓ_1 is the space of those sequences $x = (x_1, x_2, \dots)$ of reals which satisfy the condition $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$. This space is equipped with the norm $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

We conclude the introduction by listing four known results that we will use in our proof. The first one is a part of [2, Theorem 2.3].

Proposition 1 *Let $F : B_X \rightarrow B_X$ be a non-expansive bijection. Then, the following holds true.*

1. $F(0) = 0$.
2. $F^{-1}(S_X) \subset S_X$.
3. If $F(x)$ is an extreme point of the unit ball, then $F(ax) = aF(x)$ for all $a \in (0, 1)$.
4. If $F(x)$ is an extreme point of B_X , then x is also an extreme point of B_X .
5. If $F(x)$ is an extreme point of the unit ball, then $F(-x) = -F(x)$.

We will need also the following result by P. Mankiewicz [5].

Proposition 2 *If $A \subset X$ and $B \subset Y$ are convex with non-empty interior, then every bijective isometry $F : A \rightarrow B$ can be extended to a bijective affine isometry $\tilde{F} : X \rightarrow Y$.*

Taking into account that in the case of A, B being the unit balls every isometry maps 0 to 0, this result implies that every bijective isometry $F : B_X \rightarrow B_Y$ is the restriction of a linear isometry from X onto Y .

Another ingredient of our proof will be the Brouwer invariance of domain principle [1] (see also the excellent exposition written by Terry Tao in his blog <https://terrytao.wordpress.com/2011/06/13/brouwers-fixed-point-and-invariance-of-domain-theorems-and-hilberts-fifth-problem/> of the less involved proof by W. Kulpa [4]).

Proposition 3 *Let U be an open subset of \mathbb{R}^n and $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ be an injective continuous map, then $f(U)$ is open in \mathbb{R}^n .*

The next easy proposition is surely not new, but we were not able to find it in the literature. That is why we present it here with a sketch of the proof.

Proposition 4 *Let X be a finite-dimensional normed space and V be a subset of B_X with the following two properties: V is homeomorphic to B_X and $V \supset S_X$. Then $V = B_X$.*

Proof. Recall, that a topological space E has the fixed-point property (FPP for short), if every continuous map $f : E \rightarrow E$ has a fixed point. According to Brouwer's fixed point theorem, B_X has the FPP, so V also has the FPP. Now let us argue "ad absurdum". Assume that $V \neq B_X$. Then there is a point $x_0 \in B_X \setminus V$. For every point $x \in V$ consider the semiaxis $L_x = \{x_0 + tx : t \in [0, +\infty)\}$ and denote $P(x)$ the point where L_x intersects S_X . Then P is a continuous retraction from V onto S_X , so S_X is a retract of V . This leads to contradiction, because a retract of a set with FPP must also have the FPP, but S_X does not have the FPP (just consider the map $x \mapsto -x$).

The main result

Theorem 1 *The unit ball of ℓ_1 is an EC-space.*

Proof. Denote U the closed unit ball of ℓ_1 , and let $e_n = (\delta_{i,n})_{i \in \mathbb{N}}$, $n = 1, 2, \dots$ be the elements of the canonic basis of ℓ_1 (here, as usual, $\delta_{i,n} = 0$ for $n \neq i$ and $\delta_{n,n} = 1$). It is well-known and easy to check that $\text{ext}(U) = \{\pm e_n, i = 1, 2, \dots\}$. Now consider a non-expansive bijection $F : U \rightarrow U$. Our goal is to demonstrate that F is an isometry.

Denote $g_n = F^{-1}e_n$. According to item (4) of Proposition 1 g_n is an extreme point of U , so it is of the form $\theta_n e_{m(n)}$, $\theta_n = \pm 1$. Moreover, by item (5) of the same Proposition 1, $m(n_1) \neq m(n_2)$ for $n_1 \neq n_2$. This means that the sequence (g_n) is equivalent to the canonic basis of ℓ_1 in the following usual sense: for every $(a_k) \in \ell_1$

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n g_n \right\| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

One more notation: for every $N \in \mathbb{N}$ and $X_N = \text{lin}\{g_k\}_{k \leq N}$ denote U_N and ∂U_N the unit ball and the unit sphere of X_N respectively, i.e.

$$U_N = \left\{ \sum_{n \leq N} a_n g_n : \sum_{n \leq N} |a_n| \leq 1 \right\}, \partial U_N = \left\{ \sum_{n \leq N} a_n g_n : \sum_{n \leq N} |a_n| = 1 \right\},$$

and analogously for $Y_N = \text{lin}\{e_k\}_{k \leq N}$ denote V_N and ∂V_N the unit ball and the unit sphere of Y_N respectively.

Claim. For every $N \in \mathbb{N}$ and every collection $\{a_k\}_{k \leq N}$ of reals with $\|\sum_{n \leq N} a_n g_n\| \leq 1$

$$F\left(\sum_{n \leq N} a_n g_n\right) = \sum_{n \leq N} a_n e_n.$$

Proof of the Claim. We will use the induction in N . If $N = 1$, the Claim follows from items (3) and (5) of Proposition 1. Now assume the validity of the Claim for $N - 1$, and let us prove it for N . At first, let us prove that

$$F(U_N) \subset V_N. \tag{1}$$

To this end, consider $x \in U_N$. If x is of the form αg_N the statement follows from Proposition 1. So we must consider $x = \sum_{i=1}^N \alpha_i g_i$, $\sum_{i=1}^N |\alpha_i| \leq 1$ with $\sum_{i=1}^{N-1} |\alpha_i| \neq 0$. Denote the expansion of $F(x)$ by $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i$. For the element

$$x_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i g_i}{\sum_{i=1}^{N-1} |\alpha_i|}$$

by the induction hypothesis

$$F(x_1) = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i e_i}{\sum_{i=1}^{N-1} |\alpha_i|},$$

so we may write the following inequalities:

$$\begin{aligned} 2 &= \left\| F(x_1) - \frac{\alpha_N}{|\alpha_N|} e_N \right\| \leq \left\| F(x_1) - \sum_{i=1}^N y_i e_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^N y_i e_i - \frac{\alpha_N}{|\alpha_N|} e_N \right\| \\ &= \|F(x_1) - F(x)\| + \left\| F(x) - \frac{\alpha_N}{|\alpha_N|} e_N \right\| - 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} |y_i| \\ &\leq \|F(x_1) - F(x)\| + \left\| F(x) - F\left(\frac{\alpha_N}{|\alpha_N|} g_N\right) \right\| \leq \|x_1 - x\| + \left\| x - \frac{\alpha_N}{|\alpha_N|} g_N \right\| \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \left| \alpha_j - \frac{\alpha_j}{\sum_{i=1}^{N-1} |\alpha_i|} \right| + |\alpha_N| + \sum_{j=1}^{N-1} |\alpha_j| + \left| \alpha_N - \frac{\alpha_N}{|\alpha_N|} \right| \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} |\alpha_j| \left(1 + \left| 1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{N-1} |\alpha_i|} \right| \right) + |\alpha_N| \left(1 + \left| 1 - \frac{1}{|\alpha_N|} \right| \right) = 2. \end{aligned}$$

This means that all the inequalities in between are in fact equalities, so in particular $\sum_{i=N+1}^{\infty} |y_i| = 0$, i.e. $F(x) = \sum_{i=1}^N y_i e_i \in V_N$ and (1) is proved.

Now, let us demonstrate that

$$F(U_N) \supset \partial V_N. \quad (2)$$

Assume contrary, that there is a $y \in \partial V_N \setminus F(U_N)$. Denote $x = F^{-1}(y)$. Then, $\|x\| = 1$ (by (2) of Proposition 1) and $x \notin U_N$. For every $t \in [0, 1]$ consider $F(tx)$. Let $F(tx) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n e_n$ be the corresponding expansion. Then,

$$\begin{aligned} 1 &= \|0 - tx\| + \|tx - x\| \geq \|0 - F(tx)\| + \|F(tx) - y\| \\ &= 2 \sum_{n > N} |b_n| + \left\| \sum_{n \leq N} b_n e_n \right\| + \left\| y - \sum_{n \leq N} b_n e_n \right\| \geq 2 \sum_{n > N} |b_n| + 1, \end{aligned}$$

so $\sum_{n > N} |b_n| = 0$. This means that $F(tx) \in V_N$ for every $t \in [0, 1]$. On the other hand, $F(U_N)$ contains a relative neighborhood of 0 in V_N (here we use that $F(0) = 0$ and Proposition 3), so the continuous curve $\{F(tx) : t \in [0, 1]\}$ in V_N which connects 0 and y has a non-trivial intersection with $F(U_N)$. This implies that there is a $t \in (0, 1)$ such that $F(tx) \in F(U_N)$. Since $tx \notin U_N$ this contradicts the injectivity of F . Inclusion (2) is proved.

Now, inclusions (1) and (2) together with Proposition 4 imply $F(U_N) = V_N$. Remark, that U_N is isometric to V_N and, by finite dimensionality, U_N and V_N are compacts. So, U_N and V_N can be considered as two copies of one the same compact metric space, and Theorem 1.1 of [6] (which we mentioned in the beginning of the Introduction) implies that every bijective non-expansive map from U_N onto V_N is an isometry. In particular, F maps U_N onto V_N isometrically. Finally, the application of Proposition 2 gives us that the restriction of F to U_N extends to a linear map from X_N to Y_N , *which completes the proof of the Claim*.

The remaining part of the proof is easy. The continuity of F and the claim imply that for every $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in U$

$$F \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n = x.$$

Consequently, $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n\| = \|F^{-1}(x)\|$.

Acknowledgement. We are indebted to Boris Kadets for pointing to us the references to the Brouwer invariance of domain principle.

REFERENCES

1. Brouwer L.E.J. Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets // Mathematische Annalen, 1912. – 71. – P. 305–315.

2. Cascales B., Kadets V., Orihuela J., Wingler E.J. Plasticity of the unit ball of a strictly convex Banach space // Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas. – 2016. – **110(2)**. – P. 723–727.
3. Freudenthal H., Hurewicz W. Dehnungen, Verkürzungen, Isometrien // Fund. Math., 1936. – **26**. – P. 120–122.
4. Kulpa, W. Poincaré and domain invariance theorem // Acta Univ. Carolin. Math. Phys., 1998. – **39**. – no. 1-2, – P. 127–136.
5. Mankiewicz P. On extension of isometries in normed linear spaces // Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 1972. – **20**. – P. 367–371.
6. Naimpally S.A., Piotrowski Z., Wingler E.J. Plasticity in metric spaces // J. Math. Anal. Appl., 2006. – **313**. – P. 38–48.

Article history: Received: 28 March 2016; Accepted: 23 September 2016.

О регуляризации линейных матричных уравнений

С. М. Чуйко

*Донбасский государственный педагогический университет,
84 116 Донецкая обл., г.Славянск, ул. Генерала Батюка, 19, Украина
chujko-slav@inbox.ru*

Линейные матричные уравнения широко используются в теории устойчивости движения, теории управления, а также в задачах восстановления изображений. В статье предложены оригинальные условия регуляризации, а также схема нахождения решений возмущенного матричного уравнения, в частности, уравнения Сильвестра, в общем случае, когда линейный матричный оператор L , соответствующий однородной части обобщенного матричного уравнения, не имеет обратного.

Ключевые слова: матричное уравнение Сильвестра, матричное уравнение Ляпунова, условия регуляризации, псевдообратные матрицы.

Чуйко С. М. **Про регуляризацію лінійних матричних рівнянь.** Лінійні матричні рівняння широко використовуються в теорії стійкості руху, теорії керування, а також у задачах про відновлення зображень. У статті запропоновані оригінальні умови регуляризації, а також схема знаходження розв'язків збуреного матричного рівняння, зокрема, рівняння Сільвестра, у випадку, коли лінійний матричний оператор L , відповідний до однорідної частини узагальненого матричного рівняння, не має оберненого.

Ключові слова: матричне рівняння Сильвестра, матричне рівняння Ляпунова, умови регуляризації, псевдообернена матриця.

S. M. Chuiko. **On the Regularization of a linear matrix equations.** Linear matrix equations widely used in the theory of stability of motion, control theory and signal processing. We suggest an algorithm for regularization of the inhomogeneous generalized matrix equation and, in particular, the Sylvester equation in general case when the linear matrix operator L , corresponding to the homogeneous part of the linear generalized matrix equation, has no inverse.
Keywords: Lyapunov matrix equation, Sylvester matrix equation, conditions of regularization, pseudoinverse matrix.

2000 Mathematics Subject Classification: 15A24, 34B15, 34C25.

Линейные матричные уравнения, в частности, матричные уравнения Ляпунова и Сильвестра [1, 2, 3, 4] широко используются в теории устойчивости движения [3, 5], а также при решении краевых задач для систем дифференциальных уравнений [6, 7, 8, 9]. В статьях [9, 10, 11] предложены условия разрешимости, а также схема построения частного решения уравнения Ляпунова. Используя технику псевдообратных матриц и проекторов, нами предложены оригинальные условия разрешимости, а также схема нахождения семейства линейно независимых решений неоднородного обобщенного матричного уравнения и, в частности, уравнения Сильвестра, в общем случае, когда линейный матричный оператор L , соответствующий однородной части обобщенного матричного уравнения не имеет обратного [10, 12].

Постановка задачи

Поставим следующую задачу: можно ли малыми возмущениями обеспечить разрешимость линейного матричного уравнения

$$\mathcal{L}X = \mathcal{A} \quad (1)$$

для любой правой части $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \delta}$? Здесь $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{\beta \times \gamma} \rightarrow \mathbb{R}^{\alpha \times \delta}$ — линейный ограниченный матричный функционал, $X \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$ — неизвестная матрица. Обозначим

$$\left\{ \Theta_j \right\}_{j=1}^{\beta \cdot \gamma} \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$$

естественный базис [13] пространства $\mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$. Общее решение уравнения (1) ищем в виде суммы

$$X = \sum_{j=1}^{\beta \cdot \gamma} \Theta_j c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1.$$

Последнее выражение приводит уравнение (1) к виду

$$\sum_{j=1}^{\beta \cdot \gamma} \left[\mathcal{L} \Theta_j \right] c_j = \mathcal{A}.$$

Определим оператор $\mathcal{M}[A] : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \cdot n}$, как оператор, который ставит в соответствие матрице $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ вектор-столбец $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы A , а также обратный оператор [12]

$$\mathcal{M}^{-1} \left[\mathcal{B} \right] : \mathbb{R}^{m \cdot n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n},$$

который ставит в соответствие вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ матрицу $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Определим матрицы

$$\Upsilon_1 := (1) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}, \quad \Upsilon_2 := (1\ 0\ 0\ 1)^* \in \mathbb{R}^{4 \times 1},$$

$$\Upsilon_3 := (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1)^* \in \mathbb{R}^{9 \times 1}, \dots$$

Вектор Υ_m состоит из $m - 1$ цепочки вида

$$(1\ 0\ 0 \dots 0)^* \in \mathbb{R}^{(m-1) \times 1}$$

и заканчивается единицей:

$$\Upsilon_m := \left(1\ 0\ 0 \dots 0\ 1\ 0\ 0 \dots 0 \dots 1\ 0\ 0 \dots 0\ 1 \right)^* \in \mathbb{R}^{m^2 \times 1}.$$

Определим также матрицы [12]

$$\left[E_n^m \right]_j := \left[E_1^m \right]_j \otimes I_n \in \mathbb{R}^{n \times m \cdot n}, \quad \left[E_1^m \right]_j := \left\{ \delta_{ij} \right\}_{i=1}^m \in \mathbb{R}^{1 \times m};$$

здесь δ_{ij} — символ Кронеккера [13]. Система (1) равносильна следующему уравнению

$$\mathcal{Q}c = \mathcal{M}[\mathcal{A}] \tag{2}$$

относительно вектора $c \in \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta}$; здесь

$$\mathcal{Q} := \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \left\{ \left[E_1^{\alpha \cdot \beta} \right]_j \otimes \mathcal{M}[\mathcal{L}\Theta_j] \right\}.$$

Уравнение (2) разрешимо при условии [10]

$$P_{\mathcal{Q}^*} \mathcal{M}[\mathcal{A}] = 0 \tag{3}$$

и только при нем. Здесь

$$P_{\mathcal{Q}^*} : \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$$

— ортопроектор матрицы \mathcal{Q}^* . При условии $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ будем говорить, что для матричного уравнения (1) имеет место критический случай, при этом уравнение (1) разрешимо лишь для тех неоднородностей \mathcal{A} , для которых выполнено условие (3).

Основной результат

Таким образом, поставленная задача равносильна следующей: можно ли в критическом случае малыми возмущениями привести матричное уравнение (1) общего вида к некритическому случаю? Последняя задача относится

к задачам о регуляризации [6, 14, 16, 17]. Как известно [18], любая $(m \times n)$ -матрица Q в определенном базисе может быть представлена в виде

$$Q = \Phi \cdot J \cdot \Psi, \quad \text{rank } Q := \rho; \quad (4)$$

здесь $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — невырожденные матрицы,

$$J := \begin{pmatrix} I_\rho & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Разложением (4) можно воспользоваться при решении задачи о регуляризации матричного уравнения (1). Возмущение матрицы Q будем искать в виде

$$Q := \mathcal{Q} + \varepsilon R \in \mathbb{R}^{\gamma\delta \times \alpha\beta}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

По определению алгебраическая система (1) представляет некритический случай при условии $P_{Q^*} = 0$. Очевидно, это условие равносильно уравнению

$$\left[\mathcal{Q} + \varepsilon R \right] \cdot \left[\mathcal{Q} + \varepsilon R \right]^+ = I_{\gamma\delta} \quad (5)$$

относительно $(\gamma\delta \times \alpha\beta)$ - матрицы R . Заметим, что уравнение (5) разрешимо лишь для $\gamma\delta = \alpha\beta$, либо $\gamma\delta < \alpha\beta$. Действительно, предположим уравнение (5) переопределенным: $\gamma\delta > \alpha\beta$, при этом

$$\begin{aligned} \text{rank} \left(\mathcal{Q} + \varepsilon R \right) \left(\mathcal{Q} + \varepsilon R \right)^+ &\leq \text{rank} \left(\mathcal{Q} + \varepsilon R \right) = \\ &= \text{rank} \left(\mathcal{Q} + \varepsilon R \right)^+ \leq \alpha\beta < \gamma\delta, \end{aligned}$$

что противоречит равенству рангов левой и правой части уравнения (5). При условии $\gamma\delta \leq \alpha\beta$ уравнение (5) имеет по меньшей мере одно семейство решений

$$\mathcal{R} := \Phi \cdot \Pi_J \cdot \Psi \in \mathbb{R}^{\gamma\delta \times \alpha\beta}, \quad \Pi_J := \begin{pmatrix} O & O \\ O & C \end{pmatrix}, \quad \text{rank } C := \gamma\delta - \rho.$$

Таким образом, поставленная задача о регуляризации алгебраической системы (2), равносильная уравнению (2) с $(\gamma\delta \times \alpha\beta)$ - матрицей Q , разрешима при условии $\gamma\delta \leq \alpha\beta$ в виде

$$Q := \mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} := \Phi \cdot \Pi_J \cdot \Psi.$$

Действительно, в силу невырожденности матриц $\Phi \in \mathbb{R}^{\gamma\delta \times \gamma\delta}$ и $\Psi \in \mathbb{R}^{\alpha\beta \times \alpha\beta}$ имеет место равенство [13, 4.48]

$$\text{rank } Q = \text{rank} (J + \varepsilon \Pi_J) = m,$$

при этом $P_{Q^*} = 0$, следовательно система (2) с матрицей Q разрешима для любых правых частей. Таким образом, найдено решение задачи о регуляризации алгебраической системы (2), при этом задача о регуляризации алгебраической системы (1) может быть поставлена для линейного матричного уравнения

$$LX = \mathcal{A}. \quad (6)$$

Здесь

$$LX := \mathcal{L}X + \varepsilon UXV;$$

здесь $U \in \mathbb{R}^{\gamma \times \alpha}$ — фиксированная постоянная матрица и $V \in \mathbb{R}^{\beta \times \delta}$ — неизвестная постоянная матрица. Обозначим

$$\left\{ \Xi_j \right\}_{j=1}^{\beta \cdot \delta} \in \mathbb{R}^{\beta \times \delta}$$

естественный базис [13] пространства $\mathbb{R}^{\beta \times \delta}$. Неизвестную матрицу V ищем в виде суммы

$$V = \sum_{j=1}^{\beta \cdot \delta} \Xi_j \xi_j, \quad \xi_j \in \mathbb{R}^1.$$

Для нахождения констант ξ_j , $j = 1, 2, \dots, \beta \cdot \delta$ используем уравнение

$$\left\{ \mathcal{M} \left[U \Theta_i \sum_{j=1}^{\beta \cdot \delta} \Xi_j \xi_j \right] \right\}_{i=1}^{\alpha \cdot \beta} = \mathcal{R}.$$

Обозначим матрицы $\Omega(\Xi_i) \in \mathbb{R}^{\gamma \delta \times \alpha \beta}$:

$$\Omega(\Xi_i) := \left\{ \mathcal{M} \left[U \Theta_1 \Xi_i \right], \dots, \mathcal{M} \left[U \Theta_{\alpha \beta} \Xi_i \right] \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, \alpha \beta.$$

Вектор $\xi \in \mathbb{R}^{\beta \cdot \delta}$ определяет уравнение

$$\Omega \cdot \xi = \mathcal{M}[\mathcal{R}], \quad (7)$$

разрешимое тогда и только тогда, когда

$$P_{\Omega^*} \mathcal{M}[\mathcal{R}] = 0; \quad (8)$$

здесь

$$\Omega := \left\{ \mathcal{M}[\Omega(\Xi_i)] \right\}_{i=1}^{\beta \cdot \gamma}$$

— постоянная $(\alpha \beta \gamma \delta \times \beta \gamma)$ – матрица, P_{Ω^*} — ортопроектор:

$$P_{\Omega^*} : \mathbb{R}^{\alpha \beta \gamma \delta \times \alpha \beta \gamma \delta} \rightarrow \mathbb{N}(\Omega^*).$$

При условии (8) уравнение (7) имеет по меньшей мере одно решение

$$\xi = \Omega^+ \cdot \mathcal{M}[\mathcal{R}],$$

определяющее неизвестную матрицу

$$\mathcal{V} = \mathcal{M}^{-1} \left[\Omega^+ \cdot \mathcal{M}[\mathcal{R}] \right].$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 0.1 *Матричное уравнение (1) в критическом случае ($P_{Q^*} \neq 0$) не разрешимо для произвольной неоднородности $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \delta}$. При условии (8) и $\gamma\delta \leq \alpha\beta$ для фиксированной матрицы $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{\gamma \times \alpha}$ и произвольного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon \ll 1$ возмущение функционала \mathcal{L} :*

$$\mathcal{L}X := \mathcal{L}X + \varepsilon \mathcal{U}X\mathcal{V}$$

приводит к матричному уравнению (6), разрешимому для любых правых частей. Здесь

$$\mathcal{V} = \mathcal{M}^{-1} \left[\Omega^+ \cdot \mathcal{M}[\mathcal{R}] \right].$$

В этом случае уравнение (6) имеет $r := \beta - \alpha$ – параметрическое семейство решений

$$X(\varepsilon) = \Phi[\mathcal{A}](\varepsilon) + \Psi[c_r], \tag{9}$$

где

$$\Phi[\mathcal{A}](\varepsilon) := \mathcal{M}^{-1} \left\{ Q^+ \mathcal{M}[B] \right\}, \quad \Psi[c_r] := \mathcal{M}^{-1} \left[P_{Q_r} c_r \right].$$

Здесь Q^+ – псевдообратная (по Муру-Пенроузу) матрица,

$$P_Q : \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma \times \beta \cdot \gamma} \rightarrow \mathbb{N}(Q), \quad P_{Q^*} : \mathbb{R}^{\alpha \cdot \delta \times \alpha \cdot \delta} \rightarrow \mathbb{N}(Q^*)$$

– ортопроекторы матрицы

$$Q := \mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} := \Phi \cdot \Pi_J \cdot \Psi$$

и Q^ . Матрица P_{Q_r} составлена из r линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора P_Q .*

Теорема 0.1 является обобщением соответствующих результатов [19] на случай матричных уравнений.

Пример 0.1 *Матричное уравнение общего вида*

$$\mathcal{L}X = \mathcal{A} \tag{10}$$

не разрешимо для произвольной неоднородности $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$; здесь

$$\mathcal{L} := \int_0^{2\pi} U(t)XV(t)dt, \quad U(t) := \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$V(t) := \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & \sin t & \cos t \\ \sin t & \cos t & \sin t & \cos t \\ \sin t & \cos t & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Естественный базис пространства $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ составляют матрицы

$$\Theta_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \Theta_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ключевая при исследовании уравнения (10) матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

определяет ортопроектор $P_{Q^*} \neq 0$, при этом для уравнения (10) имеет место критический случай, следовательно уравнение (10) не разрешимо для произвольной неоднородности $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$. Матрица Q может быть представлена в виде

$$Q = \Phi \cdot J \cdot \Psi, \quad \text{rank } Q = 2;$$

здесь

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $\mathcal{U} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Неизвестный сомножитель \mathcal{V} определяет матрица

$$\Omega := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$Q := \mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} := \Phi \cdot \Pi_J \cdot \Psi,$$

где

$$\Pi_J := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом условие (8) выполнено. Таким образом, находим матрицу

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

которая приводит к матричному уравнению (6), разрешимому для любых правых частей; здесь

$$LX := \mathcal{L}X + \varepsilon \mathcal{U}X\mathcal{V},$$

для которого

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 + \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— матрица полного ранга для произвольного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon \ll 1$. Положим

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}^1;$$

при этом решение возмущенного матричного уравнения (6) имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2c_1 - c_2 & - + 2c_2 & -c_1 - c_2 \end{pmatrix}.$$

Доказанная теорема может быть использована при решении дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли [9, 20], при решении линейных краевых задач для матричных дифференциальных уравнений [7, 8, 21], а также в теории устойчивости движения [3, 4, 5, 22]. Полученные результаты аналогично [23, 24] могут быть перенесены на обобщенные уравнения, содержащие неизвестные матрицы различных размерностей.

Acknowledgement. Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0115U003182.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
2. Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 367 с.
3. Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука, 1978. — 280 с.
4. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
5. Коробов В.И., Бебия М.О. Стабилизация одного класса нелинейных систем, неуправляемых по первому приближению // Доп. НАН України, 2014. — № 2. — С. 20 — 25.
6. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). — Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. — 298 p.
7. Chuiko S.M. The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Siberian Mathematical Journal, 2015. — 56, № 4. — pp. 752 — 760.

8. Chuiko S.M. Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation // Russian Mathematics, 2016. — **60**, № 8. — pp. 64 — 73.
9. Boichuk A.A., Krivosheya S.A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation // Differential Equations, 2001. — **37**, № 4. — P. 464 — 471.
10. Чуйко С.М. О решении матричных уравнений Ляпунова // Вестник Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. Серия: Математика, прикладная математика и механика, 2014. — № 1120. — С. 85–94.
11. Boichuk A.A., Krivosheya S.A. Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal, 1998. — **50**, № 8. — P. 1162 — 1169.
12. Чуйко С.М. О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика, 2014. — **19**, Вып. 1 (21), С. 49 — 57.
13. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 318 с.
14. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971. — 104 с.
15. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — 288 с.
16. Азбелев Н.В., Максимов Н.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 277 с.
17. Chuiko S.M. On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action // Journal of Mathematical Sciences, 2014. — **197**, № 1. — pp. 138 — 150.
18. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. 3 изд. М.: Изд. МЦНМО, 2009. — 672 с.
19. Chuiko S.M., Chuiko E.V., Belushenko A.V. On a regularization method for solving linear matrix equation // Bull. of Taras Shevchenko National Univ. Ser. Math., 2014. — **1**, pp. 12 — 14.
20. Деревенский В.П. Матричные уравнения Бернулли // Известия вузов. Математика. — 2008. — № 2. — С. 14–23.
21. Chuiko S. Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation // Miskolc Mathematical Notes, 2016. — **17**, № 1. — pp. 139 — 150.

22. Бебия М.О. «Стабилизация систем со степенной нелинейностью», «Вісник Харківського національного університету. Серія «Математика, прикладна математика і механіка», 2014. — № 1120, Вып. 69. — с. 75 — 84.
23. Чуйко С.М. О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра // Чебышевский сборник, 2015. — **16**, вып. 1. — С. 52 — 66.
24. Чуйко С.М. О решении билинейного матричного уравнения // Чебышевский сборник, 2016. — **17**, Вып. 2. — С. 196 — 205.

Статья получена: 19.09.2016; принята: 29.09.2016.

Explicit solution of the time-optimal control problem for one nonlinear three-dimensional system

S. Yu. Ignatovich

*V. N. Karazin Kharkiv National University
Svobody sq., 4, 61022, Kharkiv, Ukraine
ignatovich@ukr.net*

The time-optimal control problem for the system $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1$, $\dot{x}_3 = x_1^3$ is considered. Explicit formulas for finding optimal controls are given. The explicit solution of the optimal synthesis problem is obtained.

Keywords: nonlinear control systems, time optimality, explicit solution.

Ігнатович С. Ю. **Явний розв'язок задачі швидкодії для одної нелінійної тривимірної системи.** Розглядається задача швидкодії для системи $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1$, $\dot{x}_3 = x_1^3$. Даються явні формули для знаходження оптимальних керувань. Отримано явний розв'язок задачі оптимального синтезу.

Ключові слова: нелінійні керовані системи, швидкодія, явний розв'язок.

Игнатович С. Ю. **Явное решение задачи быстродействия для одной нелинейной трёхмерной системы.** Рассматривается задача быстродействия для системы $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1$, $\dot{x}_3 = x_1^3$. Даются явные формулы для нахождения оптимальных управлений. Получено явное решение задачи оптимального синтеза.

Ключевые слова: нелинейные управляемые системы, быстродействие, явное решение.

2000 Mathematics Subject Classification: 93C10, 49K30.

Introduction

The time-optimal problem is one of the most investigated optimal control problems. Different approaches were developed which give a description of optimal controls. However, in the general case an answer hardly can be obtained in an explicit form. So, for the simplest linear time-optimal control problem

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_i = x_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n, \quad |u(t)| \leq 1, \quad x(0) = x^0, \quad x(\theta) = 0, \quad \theta \rightarrow \min,$$

in the case $n = 2$ the well-known explicit solution directly follows from the Pontryagin Maximum Principle [1]. However, for $n \geq 3$ the answer is much more complicated and entirely non-obvious. Specifically, the Pontryagin Maximum Principle says that any optimal control equals ± 1 and has no more than $n - 1$ switchings, however, it does not give a direct way for finding the optimal time and switching moments. The analytical solution of this problem was obtained in [2]. It was shown that for an arbitrary initial point x^0 the optimal time is a root of one of two special polynomials of degree $\frac{1}{4}n(n+2)$ for even n and $\frac{1}{4}(n+1)^2$ for odd n with coefficients depending on x^0 . So, for $n = 3$ equations of degree 4 should be solved. Moments of switching can be found also as roots of certain polynomials.

For nonlinear systems the solution can be much more complicated; in particular, singular controls may occur. In [3], as an example, the time-optimal control problem for the system $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1$, $\dot{x}_3 = x_1^2$ was considered and the explicit solution was given. By arguments essentially using the concrete form of the system, it was shown that the optimal control (if exists) takes the values $+1$, -1 , 0 and has no more than two switchings.

Generally, it is an interesting problem to find classes of systems for which time-optimal controls can be described more or less explicitly. In the paper [4] one of such classes was presented, namely, the class of *dual to linear systems*,

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_i = P_i(x_1), \quad i = 2, \dots, n,$$

where $P_2(x_1), \dots, P_n(x_1)$ are linearly independent real analytic functions of *one variable* such that $P_2(0) = \dots = P_n(0) = 0$. We emphasize that such systems are non-controllable w.r.t. the first approximation for $n \geq 3$. It was shown that a time-optimal control is piecewise constant and takes the values $+1$, -1 and 0 only. Moreover, for any initial point $x^0 \neq 0$ and any optimal control $\hat{u}(t)$, $x \in [0, \hat{\theta}]$, steering x^0 to the origin (if exists) there exists a function

$$P(z) = -\psi_0 - \psi_2 P_2(z) - \dots - \psi_n P_n(z), \quad (1)$$

where $\psi_0 \geq 0$, ψ_2, \dots, ψ_n are real parameters, $\psi_0^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_n^2 > 0$, such that the first component of the optimal trajectory $\hat{x}_1(t)$ satisfies the following properties:

- $P(\hat{x}_1(t)) \geq 0$ for $t \in [0, \hat{\theta}]$; hence, $\hat{x}_1(t)$ belongs to the connected component of the set $\{z : P(z) \geq 0\}$ containing the point $z = 0$;
- if \bar{t} is a switching moment for $\hat{u}(t)$, then $\hat{x}_1(\bar{t})$ is a root of the function $P(z)$;
- if \bar{t} is a switching moment for $\hat{u}(t)$ such that $\hat{u}(\bar{t} + 0) = 0$ or $\hat{u}(\bar{t} - 0) = 0$, then $\hat{x}_1(\bar{t})$ is a multiple root of the function $P(z)$;
- any value can be taken by the function $\hat{x}_1(t)$ no more than twice when $t \in [0, \hat{\theta}]$, except of the value 0 which can be taken for three times if $x_1^0 = 0$.

These properties essentially reduce the set of possible optimal controls. In particular, if $P_i(x_1)$ are polynomials, the number of switchings can be estimated. As an example, in [4] the following time-optimal control problem was considered,

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = x_1^3, \quad |u(t)| \leq 1, \quad x(0) = x^0, \quad x(\theta) = 0, \quad \theta \rightarrow \min, \quad (2)$$

and all controls satisfying the above-mentioned conditions were described. Nevertheless, the questions remained whether all these controls are realized as optimal ones and whether an optimal control can be non-unique for some points.

In the present paper we give the complete solution of the time-optimal control problem (2). It turns out that all possible types of controls mentioned above are realized as optimal ones. Unlike the linear case, optimal controls and the optimal time can be found by *explicit* formulas. For each of such controls we describe the domain where it is optimal. We give the solution of the optimal synthesis problem, i.e., describe the domains where the optimal control equals +1 and -1, and the surfaces where it equals 0. Also, we describe surfaces where the optimal control is non-unique. In Sections 1–3 we consider all possible optimal controls in the case $x_1^0 > 0$ only; for $x_1^0 < 0$ the solution can be obtained by symmetry arguments. In Section 4 we sum up the results and briefly consider the case $x_1^0 = 0$.

1. Optimal controls

First, let us discuss the results of [4] in connection with the particular problem (2). For a given x^0 , denote by $\hat{\theta}$, $\hat{u}(t)$, $\hat{x}(t)$ the optimal time, an optimal control, and the corresponding optimal trajectory. Let us introduce the Pontryagin-Hamilton function $H = \psi_1 u + \psi_2 x_1 + \psi_3 x_1^3$ and consider the dual system

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2 - 3\psi_3 x_1^2, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = 0, \quad (3)$$

hence, ψ_2 and ψ_3 are constants. According to the Pontryagin Maximum Principle, there exist numbers $\psi_0 \leq 0$, ψ_2 , ψ_3 and a function $\psi_1(t)$ satisfying (3) such that $\psi_0^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 + (\psi_1(t))^2 \neq 0$ for $t \in [0, \hat{\theta}]$ and

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= \text{sign}(\psi_1(t)) \text{ a.e. for all } t \in [0, \hat{\theta}] \text{ such that } \psi_1(t) \neq 0, \\ \psi_0 + |\psi_1(t)| + \psi_2 \hat{x}_1(t) + \psi_3 \hat{x}_1^3(t) &= 0 \text{ for all } t \in [0, \hat{\theta}]. \end{aligned} \quad (4)$$

In particular, we get $\psi_0^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 \neq 0$. Now we introduce the function (1); for this example it equals a (nontrivial) polynomial

$$P(z) = -\psi_0 - \psi_2 z - \psi_3 z^3, \quad (5)$$

then (3), (4) imply

$$|\psi_1(t)| = P(\hat{x}_1(t)), \quad \dot{\psi}_1(t) = P'(\hat{x}_1(t)), \quad t \in [0, \hat{\theta}]. \quad (6)$$

In particular, it follows that $\hat{x}_1(t)$ belongs to the connected component of the set $\{z : P(z) \geq 0\}$ containing the point $z = 0$.

If $\psi_1(t) = 0$ identically in some segment (τ_1, τ_2) , then (6) implies that $\hat{x}_1(t)$ equals a root of $P(z)$ for $t \in (\tau_1, \tau_2)$. However, $P(z)$ has no more than three real roots, hence, $\hat{x}_1(t)$ equals one of them, $\hat{x}_1(t) = \text{const}$, therefore, $\hat{u}(t) = \hat{\dot{x}}_1(t) = 0$ for all $t \in (\tau_1, \tau_2)$. (Moreover, due to (6), $\hat{x}_1(t)$ should equal the multiple root of $P(z)$.) The question arises whether the set of roots of $\psi_1(t)$ may have more

complicated structure (for example, include convergent sequences of isolated roots or some nowhere dense subsets of positive measure).

It was proved in [4] that the answer is “no”. More specifically, for any $\bar{t} \in (0, \hat{\theta})$ there exists $\varepsilon > 0$ such that $\psi_1(t)$ keeps its sign on the intervals $(\bar{t} - \varepsilon, \bar{t})$ and $(\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon)$; for the points $\bar{t} = 0$ and $\bar{t} = \hat{\theta}$ the same is true with the intervals $(0, \varepsilon)$ and $(\hat{\theta} - \varepsilon, \hat{\theta})$. (Here we assume $\text{sign}(0) = 0$.) Clearly, this implies that the optimal control $\hat{u}(t)$ is piecewise constant and can take the values ± 1 and 0 only.

In our example, let us consider all possible functions $P(z)$ of the form (5) for all (nontrivial) sets of parameters $\psi_0 \leq 0, \psi_2, \psi_3$. Since the coefficient of z^2 vanishes, a relation between roots arises. Fig. 1–4 show all four possible types of $P(z)$ admitting optimal controls with at least two switchings (controls with no more than one switching can be regarded as partial cases, so, we do not consider them separately).

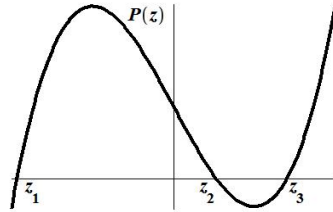


Fig. 1. Function $P(z)$ of type 1,
 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

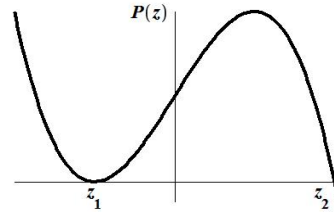


Fig. 2. Function $P(z)$ of type 2,
 $2z_1 + z_2 = 0$

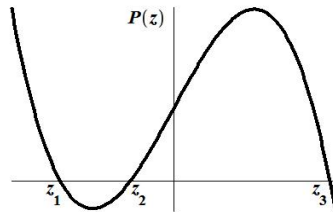


Fig. 3. Function $P(z)$ of type 3,
 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

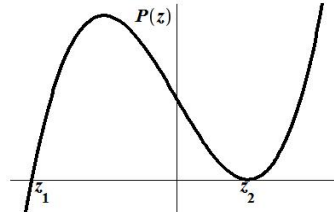


Fig. 4. Function $P(z)$ of type 4,
 $z_1 + 2z_2 = 0$

It was shown in [4] that any nonzero value can be taken by $\hat{x}_1(t)$ no more than twice. Let us illustrate the reason for this by an example. It is convenient to draw $x_1(t)$ instead of $u(t)$. Suppose a control $u(t)$ taking values ± 1 steers some point x^0 to the origin in the time θ and assume that $x_1(t)$ has the form shown in Fig. 5 (a). Then $x_1(t)$ takes the value μ_1 for three times. Due to very special form of the system (2), $x_2(0)$ and $x_3(0)$ equal the area under the curves $-x_1(t)$ and $-x_1^3(t)$ respectively. Now, let us successively transform $x_1(t)$ as is shown in Fig. 5 (b) and (c); obviously, the mentioned areas are the same as in case (a), hence, the corresponding controls also steer x^0 to the origin in the same time θ . However, the control of case (c) cannot be optimal since four different values $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ cannot be roots of a function of the form (5).

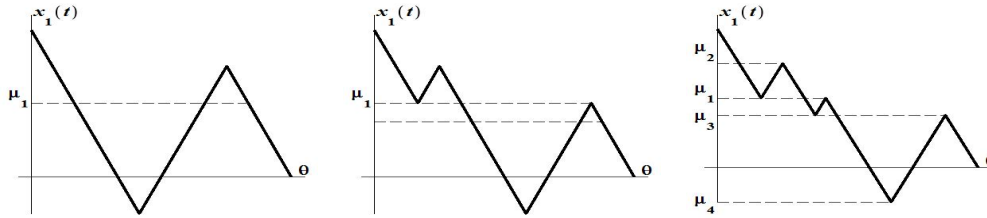


Fig. 5. Transformation of non-optimal trajectory; graphs of $x_1(t)$

2. Domains of solvability

Below we describe all possible controls compatible with the requirements mentioned above for the case $x_1^0 > 0$. For the sake of brevity, we omit the upper index of x^0 , i.e., we write x_i instead of x_i^0 . We use the notation

$$\begin{aligned} S_{11} &= x_2 - \frac{1}{2}x_1^2, & S_{21} &= x_3 - \frac{1}{4}x_1^4, \\ S_{12} &= x_2 + \frac{1}{2}x_1^2, & S_{22} &= x_3 + \frac{1}{4}x_1^4. \end{aligned}$$

Case 1 corresponds to $P(z)$ of type 1 (Fig. 1), the control is of the form

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [0, t_1), \\ -1 & \text{if } t \in [t_1, t_2), \\ 1 & \text{if } t \in [t_2, \theta]. \end{cases} \quad (7)$$

The graph of $x_1(t)$ is shown in Fig. 6.

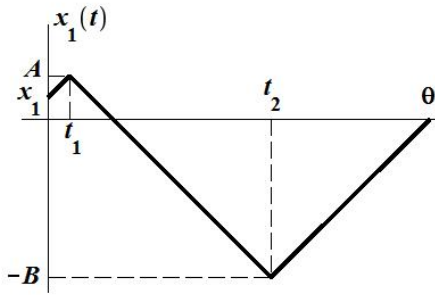


Fig. 6. Graph of $x_1(t)$, case 1

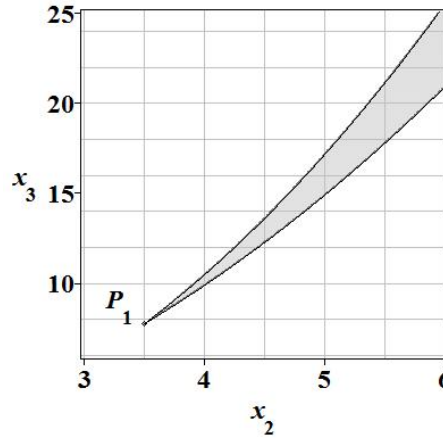


Fig. 7. Intersection of the domain D_1 and the plane $x_1 = 1$; $P_1 = (\frac{7}{2}, \frac{31}{4})$

Denote $x_1(t_1) = A$, $x_1(t_2) = -B$, then

$$A = x_1 + t_1 \geq x_1, \quad -B = x_1 + t_1 - (t_2 - t_1) = x_1 + 2t_1 - t_2 \leq 0.$$

Let $z_1 < 0 < z_2 \leq z_3$ be the roots of the function $P(z)$ (Fig. 1), then $A = z_2$, $B = -z_1$. Since $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, we get $-z_1 = z_2 + z_3 \geq 2z_2$, therefore, $B \geq 2A$.

Integrating the equations $\dot{x}_2(t) = x_1(t)$ and $\dot{x}_3(t) = x_1^3(t)$ on the time interval $t \in [0, \theta]$ and taking into account the conditions $x_2(\theta) = x_3(\theta) = 0$ we get

$$-x_2 = -\frac{1}{2}x_1^2 + A^2 - B^2 \quad \text{and} \quad -x_3 = -\frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}A^4 - \frac{1}{2}B^4.$$

Thus, in this case

$$\begin{cases} S_{11} = B^2 - A^2, \\ 2S_{21} = B^4 - A^4, \\ A \geq x_1, B \geq 2A, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 = \frac{S_{21}}{S_{11}} - \frac{1}{2}S_{11}, \\ B^2 = \frac{S_{21}}{S_{11}} + \frac{1}{2}S_{11}, \\ A \geq x_1, B \geq 2A. \end{cases}$$

Let us study the solvability of this system. If $S_{11} \leq 0$, then $B^2 \leq A^2$, which contradicts the requirement $B \geq 2A$. Hence, $S_{11} > 0$, therefore, the solvability conditions are

$$\begin{cases} S_{11} > 0, \\ \frac{S_{21}}{S_{11}} - \frac{1}{2}S_{11} \geq x_1^2, \\ \frac{S_{21}}{S_{11}} + \frac{1}{2}S_{11} \geq 4\left(\frac{S_{21}}{S_{11}} - \frac{1}{2}S_{11}\right), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_{11} > 0, \\ 2S_{21} - S_{11}^2 \geq 2x_1^2S_{11}, \\ 6S_{21} - 5S_{11}^2 \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

This system implies $\frac{1}{2}(2x_1^2S_{11} + S_{11}^2) \leq S_{21} \leq \frac{5}{6}S_{11}^2$, hence, $x_1^2S_{11} \leq \frac{1}{3}S_{11}^2$. This gives $x_1^2 \leq \frac{1}{3}S_{11}$, which is equivalent to $x_2 \geq \frac{1}{2}x_1^2$. Substituting the expressions for S_{11} and S_{21} to (8), we get the solvability domain for case 1, i.e., the domain in which the control of case 1 exists:

$$D_1 = \left\{ x : x_2 \geq \frac{7}{2}x_1^2, \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{1}{8}x_1^4 \leq x_3 \leq \frac{5}{6}x_2^2 - \frac{5}{6}x_1^2x_2 + \frac{11}{24}x_1^4 \right\}.$$

For any point $x \in D_1$ the switching moments and the time of motion can be found explicitly by the formulas

$$t_1 = A - x_1, \quad t_2 = 2A + B - x_1, \quad \theta = 2A + 2B - x_1, \quad (9)$$

where

$$A = \sqrt{\frac{S_{21}}{S_{11}} - \frac{1}{2}S_{11}}, \quad B = \sqrt{\frac{S_{21}}{S_{11}} + \frac{1}{2}S_{11}}. \quad (10)$$

Case 2 corresponds to $P(z)$ of type 2 (Fig. 2), the control is of the form

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{if } t \in [0, t_1), \\ 0 & \text{if } t \in [t_1, t_2), \\ 1 & \text{if } t \in [t_2, \theta]. \end{cases}$$

Denote $-A = x_1 - t_1 = z_1$ and $B = t_2 - t_1$, then $x_1 \leq z_2 = -2z_1 = 2A$. We have

$$-x_2 = \frac{1}{2}x_1^2 - A^2 - AB \quad \text{and} \quad -x_3 = \frac{1}{4}x_1^4 - \frac{1}{2}A^4 - A^3B.$$

Then

$$\begin{cases} S_{12} = A^2 + AB, \\ S_{22} = \frac{1}{2}A^4 + A^3B, \\ A \geq \frac{1}{2}x_1, B \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^4 - 2S_{12}A^2 + 2S_{22} = 0, \\ B = \frac{S_{12}}{A} - A, \\ A \geq \frac{1}{2}x_1, B \geq 0. \end{cases}$$

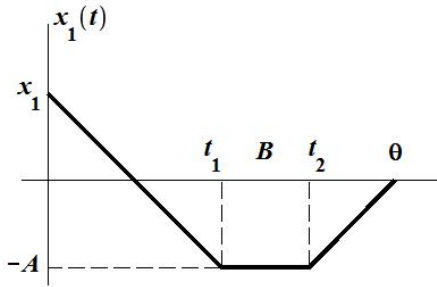


Fig. 8. Graph of $x_1(t)$, case 2

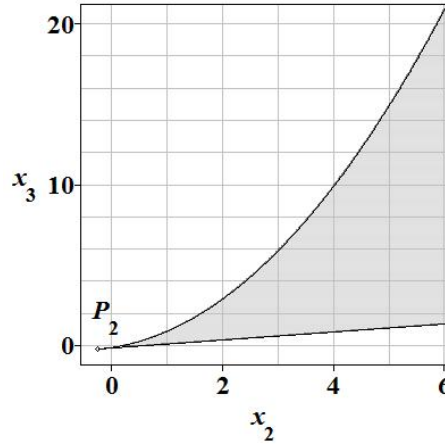


Fig. 9. Intersection of the domain D_2 and the plane $x_1 = 1$; $P_2 = (-\frac{1}{4}, -\frac{7}{32})$

The equation $A^4 - 2S_{12}A^2 + 2S_{22} = 0$ has real roots iff $d = S_{12}^2 - 2S_{22} \geq 0$, and then $A^2 = S_{12} \pm \sqrt{d}$. However, $B \geq 0$ iff $A^2 \leq S_{12}$. Hence, the minimal root should be chosen, $A^2 = S_{12} - \sqrt{d}$. The condition $A \geq \frac{1}{2}x_1$ can be rewritten as $A^2 = S_{12} - \sqrt{d} \geq \frac{1}{4}x_1^2$, which is equivalent to a pair of inequalities $S_{12} - \frac{1}{4}x_1^2 \geq 0$ and $(S_{12} - \frac{1}{4}x_1^2)^2 \geq d$. Substituting the expressions for S_{12} and S_{22} , we get the solvability domain for case 2:

$$D_2 = \left\{ x : x_2 \geq -\frac{1}{4}x_1^2, \frac{1}{4}x_1^2x_2 - \frac{5}{32}x_1^4 \leq x_3 \leq \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{1}{8}x_1^4 \right\}.$$

Then

$$t_1 = A + x_1, \quad t_2 = A + B + x_1, \quad \theta = 2A + B + x_1, \quad (11)$$

where

$$A = \sqrt{S_{12} - \sqrt{d}}, \quad d = S_{12}^2 - 2S_{22}, \quad B = \frac{S_{12}}{A} - A. \quad (12)$$

Case 3 also corresponds to $P(z)$ of type 2 (Fig. 2), the control is of the form

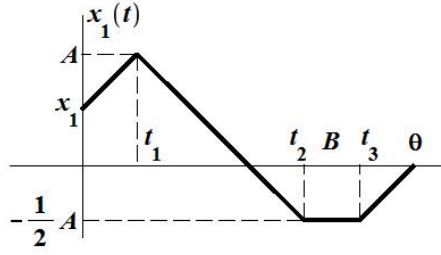
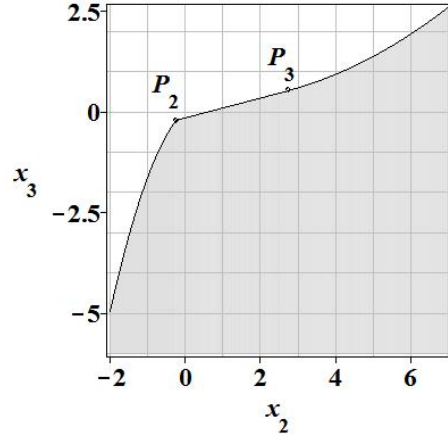
$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [0, t_1), \\ -1 & \text{if } t \in [t_1, t_2), \\ 0 & \text{if } t \in [t_2, t_3), \\ 1 & \text{if } t \in [t_3, \theta]. \end{cases}$$

Denote $A = x_1 + t_1 = z_2$ and $B = t_3 - t_2$, then

$$-x_2 = -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{4}A^2 - \frac{1}{2}AB \quad \text{and} \quad -x_3 = -\frac{1}{4}x_1^4 + \frac{15}{32}A^4 - \frac{1}{8}A^3B.$$

The solvability conditions are

$$\begin{cases} S_{11} = \frac{1}{2}AB - \frac{3}{4}A^2, \\ S_{21} = \frac{1}{8}A^3B - \frac{15}{32}A^4, \\ A \geq x_1, B \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9A^4 - 8S_{11}A^2 + 32S_{21} = 0, \\ B = \frac{2S_{11}}{A} + \frac{3}{2}A, \\ A \geq x_1, B \geq 0. \end{cases}$$

Fig. 10. Graph of $x_1(t)$, case 3Fig. 11. Intersection of the domain D_3 and the plane $x_1 = 1$; $P_3 = (\frac{11}{4}, \frac{17}{32})$

To analyze the biquadratic equation $9A^4 - 8S_{11}A^2 + 32S_{21} = 0$, let us introduce the function $f(z) = 9z^2 - 8S_{11}z + 32S_{21}$; then A^2 is a (positive) root of $f(z)$.

(a) If $S_{21} \leq 0$, then the function $f(z)$ has one non-negative root. Hence, the biquadratic equation has one non-negative root (the maximal one). The condition $A \geq x_1$, which can be expressed as $A^2 \geq x_1^2$, is equivalent to

$$f(x_1^2) \leq 0 \Leftrightarrow 9x_1^4 - 8S_{11}x_1^2 + 32S_{21} \leq 0. \quad (13)$$

If $S_{11} \geq 0$, then the condition $B \geq 0$ is obviously satisfied. If $S_{11} \leq 0$, then this condition can be expressed as $A^2 \geq -\frac{4}{3}S_{11}$ and is equivalent to

$$f(-\frac{4}{3}S_{11}) \leq 0 \Leftrightarrow 9(-\frac{4}{3}S_{11})^2 - 8S_{11}(-\frac{4}{3}S_{11}) + 32S_{21} \leq 0 \Leftrightarrow 5S_{11}^2 + 6S_{21} \leq 0. \quad (14)$$

We note that condition (13) implies (14) if $x_1^2 \geq -\frac{4}{3}S_{11}$, and (14) implies (13) otherwise; recall that if $S_{11} \geq 0$, then only condition (13) should be required. Hence, the solvability domain in case (a) is

$$\left\{ x : x_3 \leq \frac{1}{4}x_1^4, \quad x_3 \leq -\frac{5}{6}x_2^2 + \frac{5}{6}x_1^2x_2 + \frac{1}{24}x_1^4 \text{ if } x_2 \leq -\frac{1}{4}x_1^2, \right. \\ \left. x_3 \leq \frac{1}{4}x_1^2x_2 - \frac{5}{32}x_1^4 \text{ if } x_2 \geq -\frac{1}{4}x_1^2 \right\}$$

and

$$t_1 = A - x_1, \quad t_2 = \frac{5}{2}A - x_1, \quad t_3 = \frac{5}{2}A + B - x_1, \quad \theta = 3A + B - x_1, \quad (15)$$

where

$$A = \frac{2}{3}\sqrt{S_{11} + \sqrt{d}}, \quad d = S_{11}^2 - 18S_{21}, \quad B = \frac{2S_{11}}{A} + \frac{3}{2}A. \quad (16)$$

(b) Let $S_{21} > 0$. If $S_{11} < 0$, then the function $f(z)$ has no nonnegative roots, therefore, the biquadratic equation has no real roots. If $S_{11} \geq 0$, then $f(z)$ has

nonnegative roots iff $d = S_{11}^2 - 18S_{21} \geq 0$. The condition $B \geq 0$ is obviously satisfied. The condition $A \geq x_1$ will be considered later.

Now, suppose the equation $9A^4 - 8S_{11}A^2 + 32S_{21} = 0$ has two different positive roots $A_{max} > A_{min} \geq x_1$. Let us compare the corresponding times of motion θ_{max} and θ_{min} . For both values (15) holds, hence,

$$\theta_{min} = \frac{9}{2}A_{min} + \frac{2S_{11}}{A_{min}} - x_1, \quad \theta_{max} = \frac{9}{2}A_{max} + \frac{2S_{11}}{A_{max}} - x_1.$$

Since A_{min}^2 and A_{max}^2 are different roots of $f(z)$, we have $\frac{8}{9}S_{11} = A_{max}^2 + A_{min}^2$. Therefore, $\theta_{min} \geq \theta_{max}$ iff

$$\frac{\frac{9}{2}A_{min}^2 + 2S_{11}}{A_{min}} \geq \frac{\frac{9}{2}A_{max}^2 + 2S_{11}}{A_{max}} \Leftrightarrow \frac{3A_{min}^2 + A_{max}^2}{A_{min}} \geq \frac{3A_{max}^2 + A_{min}^2}{A_{max}},$$

which is equivalent to the obvious inequality $(A_{max} - A_{min})^3 \geq 0$. Thus, θ_{min} cannot be the optimal time. This means that the maximal root of the biquadratic equation should be taken, $A = A_{max}$, therefore, in this case (15), (16) hold as well. The condition $A^2 = \frac{4}{9}(S_{11} + \sqrt{d}) \geq x_1^2$ implies $S_{11} \geq 0$ and is equivalent to

$$\frac{9}{4}x_1^2 - S_{11} \leq 0 \quad \text{or} \quad d \geq (\frac{9}{4}x_1^2 - S_{11})^2 \Leftrightarrow 9x_1^4 - 8S_{11}x_1^2 + 32S_{21} \leq 0.$$

We note that $d \geq (\frac{9}{4}x_1^2 - S_{11})^2$ implies $d \geq 0$. Thus, the solvability domain in case (b) is

$$\{x : x_3 \geq \frac{1}{4}x_1^4, \quad x_3 \leq \frac{1}{4}x_1^2x_2 - \frac{5}{32}x_1^4 \text{ if } x_2 \leq \frac{11}{4}x_1^2, \\ x_3 \leq \frac{1}{18}x_2^2 - \frac{1}{18}x_1^2x_2 + \frac{19}{72}x_1^4 \text{ if } x_2 \geq \frac{11}{4}x_1^2\}.$$

Combining the obtained results, we get the solvability domain in case 3

$$D_3 = \{x : \quad x_3 \leq -\frac{5}{6}x_2^2 + \frac{5}{6}x_1^2x_2 + \frac{1}{24}x_1^4 \text{ if } x_2 \leq -\frac{1}{4}x_1^2, \\ x_3 \leq \frac{1}{4}x_1^2x_2 - \frac{5}{32}x_1^4 \text{ if } -\frac{1}{4}x_1^2 \leq x_2 \leq \frac{11}{4}x_1^2, \\ x_3 \leq \frac{1}{18}x_2^2 - \frac{1}{18}x_1^2x_2 + \frac{19}{72}x_1^4 \text{ if } x_2 \geq \frac{11}{4}x_1^2\}.$$

The time of motion and switching moments are found by formulas (15), (16).

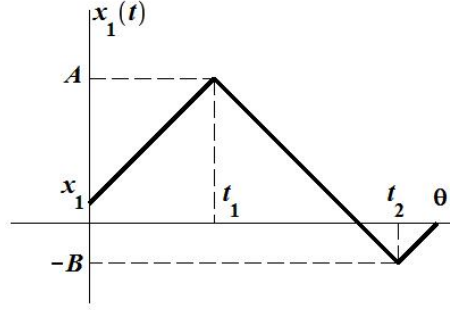
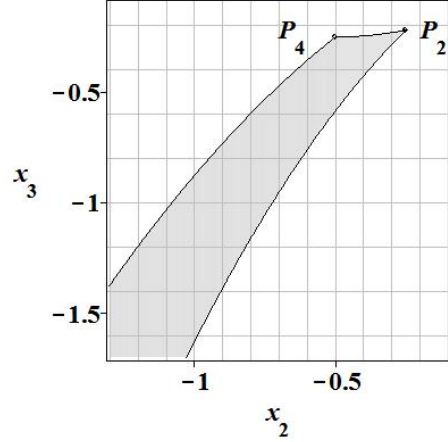
Case 4 corresponds to $P(z)$ of type 3 (Fig. 3), the control is of the form (7).

Using the notation of case 1, we have

$$\begin{cases} S_{11} = B^2 - A^2, \\ 2S_{21} = B^4 - A^4, \\ A \geq x_1, A \geq 2B \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 = \frac{S_{21}}{S_{11}} - \frac{1}{2}S_{11}, \\ B^2 = \frac{S_{21}}{S_{11}} + \frac{1}{2}S_{11}, \\ A \geq x_1, A \geq 2B \geq 0. \end{cases}$$

If $S_{11} \geq 0$, then $B^2 \geq A^2$, which contradicts the requirement $A \geq 2B$. If $S_{11} < 0$, then the solvability conditions are

$$\begin{cases} S_{11} < 0, 2S_{21} + S_{11}^2 \leq 0, \\ \frac{S_{21}}{S_{11}} - \frac{1}{2}S_{11} \geq x_1^2, \\ \frac{S_{21}}{S_{11}} - \frac{1}{2}S_{11} \geq 4(\frac{S_{21}}{S_{11}} + \frac{1}{2}S_{11}), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_{11} < 0, 2S_{21} \leq -S_{11}^2, \\ 2S_{21} \leq S_{11}^2 + 2x_1^2S_{11}, \\ 5S_{11}^2 + 6S_{21} \geq 0. \end{cases}$$

Fig. 12. Graph of $x_1(t)$, case 4Fig. 13. Intersection of the domain D_4 and the plane $x_1 = 1$; $P_4 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

Notice that these conditions imply $S_{11} \leq -\frac{3}{4}x_1^2$. Notice also that in this case $-S_{11}^2 \leq S_{21}^2 + 2x_1^2 S_{11}$ iff $S_{11} \leq -x_1^2$. Substituting the expressions for S_{11} and S_{21} , we get the solvability domain for case 4:

$$D_4 = \left\{ x : \begin{aligned} x_2 &\leq -\frac{1}{4}x_1^2, & x_3 &\geq -\frac{5}{6}x_2^2 + \frac{5}{6}x_1^2x_2 + \frac{1}{24}x_1^4, \\ & & x_3 &\leq -\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 + \frac{1}{8}x_1^4 \text{ if } x_2 \leq -\frac{1}{2}x_1^2, \\ & & x_3 &\leq \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{1}{8}x_1^4 \text{ if } x_2 \geq -\frac{1}{2}x_1^2 \end{aligned} \right\}$$

and the time of motion and switching moments are found by (9), (10).

Case 5 corresponds to $P(z)$ of type 4 (Fig. 4) with the control of the form

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [0, t_1), \\ 0 & \text{if } t \in [t_1, t_2), \\ -1 & \text{if } t \in [t_2, \theta]. \end{cases}$$

Denote $A = x_1 + t_1 = z_2$ and $B = t_2 - t_1$, then

$$-x_2 = -\frac{1}{2}x_1^2 + A^2 + AB \quad \text{and} \quad -x_3 = -\frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}A^4 + A^3B.$$

Hence,

$$\begin{cases} S_{11} = -A^2 - AB, \\ S_{21} = -\frac{1}{2}A^4 - A^3B, \\ A \geq x_1, B \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^4 + 2S_{11}A^2 - 2S_{21} = 0, \\ B = -\frac{S_{11}}{A} - A, \\ A \geq x_1, B \geq 0. \end{cases}$$

The biquadratic equation $A^4 + 2S_{11}A^2 - 2S_{21} = 0$ has real roots iff $d = S_{11}^2 + 2S_{21} \geq 0$, and then $A^2 = -S_{11} \pm \sqrt{d}$. However, $B \geq 0$ iff $A^2 \leq -S_{11}$. Hence, the minimal root should be chosen, $A^2 = -S_{11} - \sqrt{d}$. The condition $A \geq x_1$ can be written as $A^2 = -S_{11} - \sqrt{d} \geq x_1^2$ and is equivalent to $S_{11} + x_1^2 \leq 0$ and $d \leq (S_{11} + x_1^2)^2$. Therefore, the solvability domain is

$$D_5 = \left\{ x : x_2 \leq -\frac{1}{2}x_1^2, -\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 + \frac{1}{8}x_1^4 \leq x_3 \leq x_1^2x_2 + \frac{1}{4}x_1^4 \right\}.$$

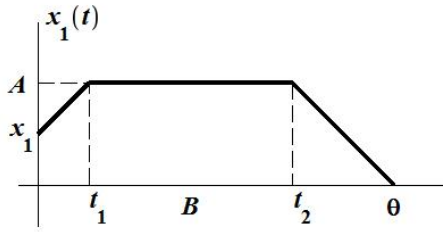


Fig. 14. Graph of $x_1(t)$, case 5

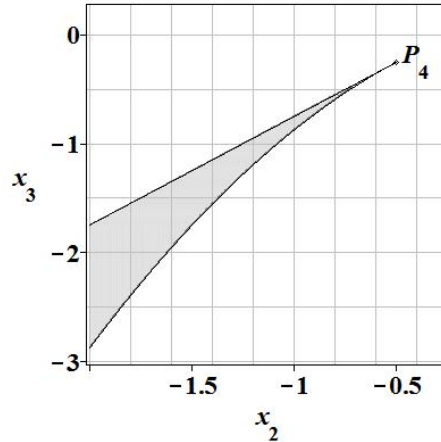


Fig. 15. Intersection of the domain D_5 and the plane $x_1 = 1$

In this case

$$t_1 = A - x_1, \quad t_2 = A + B - x_1, \quad \theta = 2A + B - x_1, \quad (17)$$

where

$$A = \sqrt{-S_{11} - \sqrt{d}}, \quad d = S_{11}^2 + 2S_{21}, \quad B = -\frac{S_{11}}{A} - A. \quad (18)$$

Case 6 corresponds to $P(z)$ of type 4 (Fig. 4) with the control of the form

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{if } t \in [0, t_1), \\ 0 & \text{if } t \in [t_1, t_2), \\ -1 & \text{if } t \in [t_2, \theta]. \end{cases}$$

Denote $A = x_1 - t_1 = z_2$ and $B = t_2 - t_1$, then

$$-x_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + AB \quad \text{and} \quad -x_3 = \frac{1}{4}x_1^4 + A^3B.$$

If $A = 0$ or $B = 0$, then $x_2 = -\frac{1}{2}x_1^2$ and $x_3 = -\frac{1}{4}x_1^4$; obviously, for this point the optimal control has no switchings and equals -1 . Below we assume $A > 0$ and $B > 0$. Then

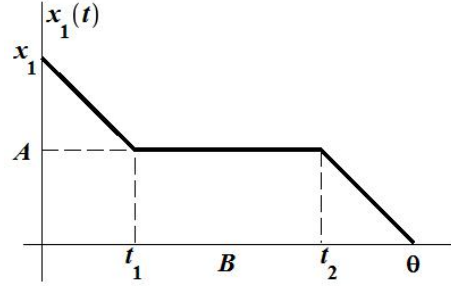
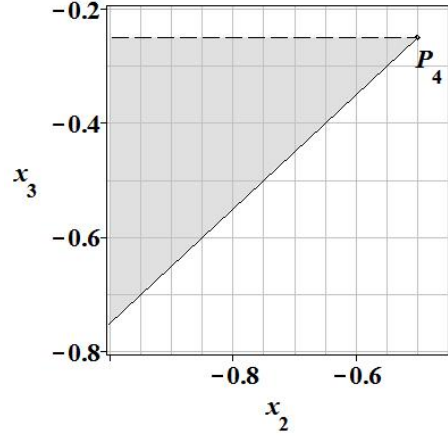
$$\begin{cases} S_{12} = -AB, \\ S_{22} = -A^3B, \\ 0 < A \leq x_1, \quad B > 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A^2 = \frac{S_{22}}{S_{12}}, \\ B = -\frac{S_{12}}{A}, \\ 0 < A \leq x_1, \quad B > 0. \end{cases}$$

The solvability domain equals

$$D_6 = \{x : x_2 < -\frac{1}{2}x_1^2, \quad x_1^2x_2 + \frac{1}{4}x_1^4 \leq x_3 < -\frac{1}{4}x_1^4\},$$

and in this case

$$t_1 = x_1 - A, \quad t_2 = x_1 - A + B, \quad \theta = x_1 + B, \quad (19)$$

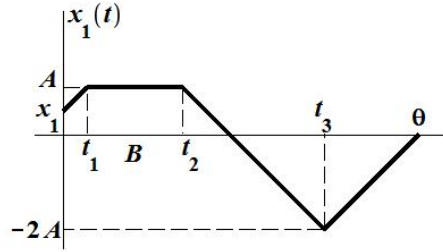
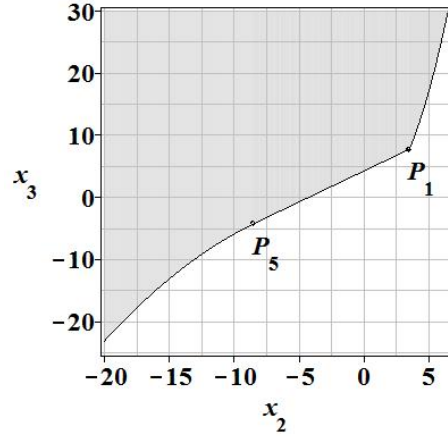
Fig. 16. Graph of $x_1(t)$, case 6Fig. 17. Intersection of the domain D_6 and the plane $x_1 = 1$

where

$$A = \sqrt{\frac{S_{22}}{S_{12}}}, \quad B = -\frac{S_{12}}{A}. \quad (20)$$

Case 7 corresponds to $P(z)$ of type 4 (Fig. 4) with the control of the form

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [0, t_1), \\ 0 & \text{if } t \in [t_1, t_2), \\ -1 & \text{if } t \in [t_2, t_3), \\ 1 & \text{if } t \in [t_3, \theta]. \end{cases}$$

Fig. 18. Graph of $x_1(t)$, case 7Fig. 19. Intersection of the domain D_7 and the plane $x_1 = 1$; $P_5 = (-\frac{17}{2}, -\frac{17}{4})$

Denote $A = x_1 + t_1 = z_2$ and $B = t_2 - t_1$, then

$$-x_2 = -\frac{1}{2}x_1^2 - 3A^2 + AB \quad \text{and} \quad -x_3 = -\frac{1}{4}x_1^4 - \frac{15}{2}A^4 + A^3B.$$

Hence,

$$\begin{cases} S_{11} = 3A^2 - AB, \\ S_{21} = \frac{15}{2}A^4 - A^3B, \\ A \geq x_1, B \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9A^4 + 2S_{11}A^2 - 2S_{21} = 0, \\ B = -\frac{S_{11}}{A} + 3A, \\ A \geq x_1, B \geq 0. \end{cases}$$

Analogously to case 3, we introduce the function $f(z) = 9z^2 + 2S_{11}z - 2S_{21}$.

(a) If $S_{21} \geq 0$ then $f(z)$ has one non-negative root. The condition $A \geq x_1$, which can be expressed as $A^2 \geq x_1^2$, is equivalent to

$$f(x_1^2) \leq 0 \Leftrightarrow 9x_1^4 + 2S_{11}x_1^2 - 2S_{21} \leq 0. \tag{21}$$

If $S_{11} \leq 0$, then the condition $B \geq 0$ is obviously satisfied. If $S_{11} \geq 0$, then the condition $B \geq 0$, which can be expressed as $A^2 \geq \frac{1}{3}S_{11}$, is equivalent to

$$f(\frac{1}{3}S_{11}) \leq 0 \Leftrightarrow 9(\frac{1}{3}S_{11})^2 + 2S_{11}(\frac{1}{3}S_{11}) - 2S_{21} \leq 0 \Leftrightarrow 5S_{11}^2 - 6S_{21} \leq 0. \tag{22}$$

Condition (21) implies (22) if $x_1^2 \geq \frac{1}{3}S_{11}$, and (22) implies (21) otherwise; if $S_{11} \leq 0$ then only (21) should be required. Thus, the solvability domain in case (a) is

$$\left\{ x : \begin{aligned} x_3 &\geq \frac{1}{4}x_1^4, & x_3 &\geq x_1^2x_2 + \frac{17}{4}x_1^4 \text{ if } x_2 \leq \frac{7}{2}x_1^2, \\ & & x_3 &\geq \frac{5}{6}x_2^2 - \frac{5}{6}x_1^2x_2 + \frac{11}{24}x_1^4 \text{ if } x_2 \geq \frac{7}{2}x_1^2 \end{aligned} \right\},$$

and the formulas for switching moments and the optimal time are

$$t_1 = A - x_1, \quad t_2 = A + B - x_1, \quad t_3 = 4A + B - x_1, \quad \theta = 6A + B - x_1, \tag{23}$$

where

$$A = \frac{1}{3}\sqrt{-S_{11} + \sqrt{d}}, \quad d = S_{11}^2 + 18S_{21}, \quad B = -\frac{S_{11}}{A} + 3A. \tag{24}$$

(b) Let $S_{21} < 0$. If $S_{11} > 0$, then the function $f(z)$ has no nonnegative roots. If $S_{11} \leq 0$, then $f(z)$ has nonnegative roots iff $d = S_{11}^2 + 18S_{21} \geq 0$. The condition $B \geq 0$ is obviously satisfied.

Suppose the equation $9A^4 + 2S_{11}A^2 - 2S_{21} = 0$ has two different positive roots $A_{max} > A_{min} \geq x_1$. Let us compare the corresponding times of motion θ_{min} and θ_{max} . For both values (23) holds, then

$$\theta_{min} = \frac{9A_{min}^2 - S_{11}}{A_{min}} - x_1, \quad \theta_{max} = \frac{9A_{max}^2 - S_{11}}{A_{max}} - x_1.$$

Since A_{min}^2 and A_{max}^2 are different roots of $f(z)$, we have $-\frac{2}{9}S_{11} = A_{min}^2 + A_{max}^2$. Then $\theta_{min} \geq \theta_{max}$ iff

$$\frac{9A_{min}^2 - S_{11}}{A_{min}} \geq \frac{9A_{max}^2 - S_{11}}{A_{max}} \Leftrightarrow \frac{3A_{min}^2 + A_{max}^2}{A_{min}} \geq \frac{3A_{max}^2 + A_{min}^2}{A_{max}},$$

which is equivalent to $(A_{max} - A_{min})^3 \geq 0$. Hence, θ_{min} cannot be the optimal time and the maximal root of the biquadratic equation should be taken, $A = A_{max}$. The condition $A^2 = \frac{1}{9}(-S_{11} + \sqrt{d}) \geq x_1^2$ implies $S_{11} \leq 0$ and is equivalent to

$$9x_1^2 + S_{11} \leq 0 \quad \text{or} \quad d \geq (9x_1^2 + S_{11})^2 \Leftrightarrow 9x_1^4 + 2S_{11}x_1^2 - 2S_{21} \leq 0.$$

The condition $d \geq (9x_1^2 + S_{11})^2$ implies $d \geq 0$. Therefore, the solvability domain in case (b) is

$$\left\{ x : x_3 \leq \frac{1}{4}x_1^4, \quad x_3 \geq -\frac{1}{18}x_2^2 + \frac{1}{18}x_1^2x_2 + \frac{17}{72}x_1^4 \text{ if } x_2 \leq -\frac{17}{2}x_1^2, \right. \\ \left. x_3 \geq x_1^2x_2 + \frac{17}{4}x_1^4 \text{ if } x_2 \geq -\frac{17}{2}x_1^2 \right\}.$$

Combining the obtained results, we get the solvability domain in case 7

$$D_7 = \left\{ x : \begin{aligned} x_3 &\geq -\frac{1}{18}x_2^2 + \frac{1}{18}x_1^2x_2 + \frac{17}{72}x_1^4 \text{ if } x_2 \leq -\frac{17}{2}x_1^2, \\ x_3 &\geq x_1^2x_2 + \frac{17}{4}x_1^4 \text{ if } -\frac{17}{2}x_1^2 \leq x_2 \leq \frac{7}{2}x_1^2, \\ x_3 &\geq \frac{5}{6}x_2^2 - \frac{5}{6}x_1^2x_2 + \frac{11}{24}x_1^4 \text{ if } x_2 \geq \frac{7}{2}x_1^2. \end{aligned} \right. \quad (25)$$

The time of motion and switching moments are found by (23), (24).

Case 8 corresponds to $P(z)$ of type 4 (Fig. 4) with the control of the form

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{if } t \in [0, t_1), \\ 0 & \text{if } t \in [t_1, t_2), \\ -1 & \text{if } t \in [t_2, t_3), \\ 1 & \text{if } t \in [t_3, \theta]. \end{cases}$$

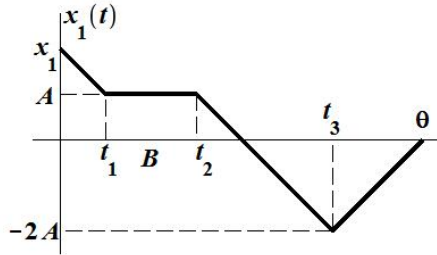


Fig. 20. Graph of $x_1(t)$, case 8

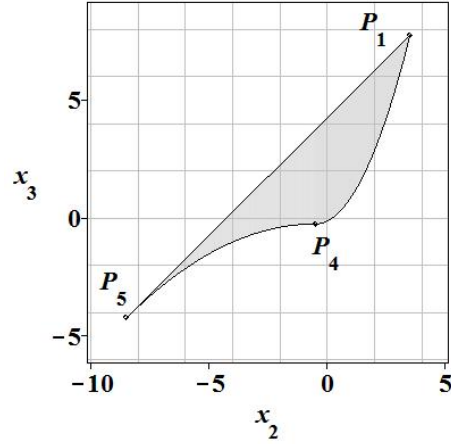


Fig. 21. Intersection of the domain of solvability D_8 and the plane $x_1 = 1$

Denote $A = x_1 - t_1 = z_2$ and $B = t_2 - t_1$, then

$$-x_2 = \frac{1}{2}x_1^2 - 4A^2 + AB \quad \text{and} \quad -x_3 = \frac{1}{4}x_1^4 - 8A^4 + A^3B.$$

If $A = 0$, then $B = 0$ and, therefore, $x_2 = -\frac{1}{2}x_1^2$ and $x_3 = -\frac{1}{4}x_1^4$; for this point the optimal control equals -1 . Below we require $A > 0$. Then

$$\begin{cases} S_{12} = 4A^2 - AB, \\ S_{22} = 8A^4 - A^3B, \\ 0 < A \leq x_1, \quad B \geq 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4A^4 + S_{12}A^2 - S_{22} = 0, \\ B = -\frac{S_{12}}{A} + 4A, \\ 0 < A \leq x_1, \quad B \geq 0. \end{cases}$$

Analogously to the cases 3 and 7, we introduce $f(z) = 4z^2 + S_{12}z - S_{22}$.

(a) If $S_{22} \geq 0$, then $f(z)$ has one non-negative root. The condition $A \leq x_1$ is equivalent to

$$f(x_1^2) \geq 0 \Leftrightarrow 4x_1^4 + S_{12}x_1^2 - S_{22} \geq 0. \quad (26)$$

If $S_{12} \leq 0$, then the condition $B \geq 0$ is satisfied. If $S_{12} \geq 0$, then $B \geq 0$ iff

$$f(\frac{1}{4}S_{12}) \leq 0 \Leftrightarrow 4(\frac{1}{4}S_{12})^2 + S_{12}(\frac{1}{4}S_{12}) - S_{22} \leq 0 \Leftrightarrow S_{12}^2 - 2S_{22} \leq 0. \quad (27)$$

Conditions (26) and (27) imply $S_{12} \leq 4x_1^2$. Hence, the solvability domain in case (a) is

$$\{x : -\frac{1}{4}x_1^4 \leq x_3 \leq x_1^2x_2 + \frac{17}{4}x_1^4, x_3 \geq \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{1}{8}x_1^4 \text{ if } -\frac{1}{2}x_1^2 \leq x_2 \leq \frac{7}{2}x_1^2\}$$

and

$$t_1 = x_1 - A, \quad t_2 = x_1 - A + B, \quad t_3 = x_1 + 2A + B, \quad \theta = x_1 + 4A + B, \quad (28)$$

where

$$A = \sqrt{\frac{1}{8}(-S_{12} + \sqrt{d})}, \quad d = S_{12}^2 + 16S_{22}, \quad B = -\frac{S_{12}}{A} + 4A. \quad (29)$$

(b) Let $S_{22} < 0$. If $S_{12} > 0$, then the function $f(z)$ has no nonnegative roots. If $S_{12} \leq 0$, then $f(z)$ has nonnegative roots iff $d = S_{12}^2 + 16S_{22} \geq 0$. The condition $B \geq 0$ is satisfied. Now we consider the condition $A \leq x_1$. Suppose the roots of the equation $4A^4 + S_{12}A^2 - S_{22} = 0$ are $A_{min} \leq A_{max}$.

(b1) First, let us consider the case when $A_{min}^2 \leq x_1^2 \leq A_{max}^2$, which is equivalent to $f(x_1^2) \leq 0$; this inequality implies $S_{12} \leq 0$. Then we get the condition

$$S_{22} < 0 \text{ and } 4x_1^4 + S_{12}x_1^2 - S_{22} \leq 0 \Leftrightarrow x_1^2x_2 + \frac{17}{4}x_1^4 \leq x_3 < -\frac{1}{4}x_1^4,$$

which implies $x_2 < -\frac{9}{2}x_1^2$. Analogously to (28), the time of motion θ_{8min} corresponding to A_{min} equals $\theta_{8min} = 8A_{min} - \frac{S_{12}}{A_{min}} + x_1$. It is easy to see that in this domain the control corresponding to case 6 exists; the time of motion θ_6 can be found by (19), (20). Let us show that $\theta_{8min} > \theta_6$. Since $A_{min}^2 + A_{max}^2 = -\frac{1}{4}S_{12}$, $A_{min}^2A_{max}^2 = -\frac{1}{4}S_{22}$, we get

$$\theta_{8min} = \frac{8A_{min}^2 + 4(A_{min}^2 + A_{max}^2)}{A_{min}} + x_1 = 4\frac{3A_{min}^2 + A_{max}^2}{A_{min}} + x_1,$$

$$\theta_6 = \sqrt{\frac{16(A_{min}^2 + A_{max}^2)^3}{A_{min}^2A_{max}^2}} + x_1 = 4\frac{\sqrt{(A_{min}^2 + A_{max}^2)^3}}{A_{min}A_{max}} + x_1.$$

Hence, $\theta_{8min} > \theta_6$ iff

$$\frac{3A_{min}^2 + A_{max}^2}{A_{min}} > \frac{\sqrt{(A_{min}^2 + A_{max}^2)^3}}{A_{min}A_{max}} \Leftrightarrow (3A_{min}^2 + A_{max}^2)^2A_{max}^2 > (A_{min}^2 + A_{max}^2)^3.$$

This is equivalent to the obvious inequality $A_{min}^2(6A_{min}^2A_{max}^2 + 3A_{max}^4 - A_{min}^4) > 0$. Thus, the control in case (b1) cannot be optimal. In Fig. 21 and in formula (30) we do not indicate points satisfying case (b1).

(b2) Now let us consider the case when $A_{max}^2 = \frac{1}{8}(-S_{12} + \sqrt{d}) \leq x_1^2$, which is equivalent to a pair of conditions $8x_1^2 + S_{12} \geq 0$ and $d \leq (8x_1^2 + S_{12})^2$. Let θ_{8max} be the time of motion corresponding to A_{max} . As above, we have

$$\theta_{8min} = 4 \frac{3A_{min}^2 + A_{max}^2}{A_{min}} + x_1, \quad \theta_{8max} = 4 \frac{3A_{max}^2 + A_{min}^2}{A_{max}} + x_1,$$

so, $\theta_{8min} \geq \theta_{8max}$ is equivalent to $(A_{max} - A_{min})^3 \geq 0$. Thus, the maximal root $A = A_{max}$ should be chosen. The solvability domain in case (b2) is

$$\left\{ x : -\frac{17}{2}x_1^2 \leq x_2 \leq -\frac{1}{2}x_1^2, \quad x_3 < -\frac{1}{4}x_1^4, \quad x_3 \leq x_2x_1^2 + \frac{17}{4}x_1^4, \right. \\ \left. x_3 \geq -\frac{1}{16}x_2^2 - \frac{1}{16}x_1^2x_2 - \frac{17}{64}x_1^4 \right\}.$$

Combining the obtained results, we get the solvability domain in case 8 (recall that we do not include points corresponding to the case (b1))

$$D_8 = \left\{ x : -\frac{17}{2}x_1^2 \leq x_2 \leq \frac{7}{2}x_1^2, \quad x_3 \leq x_1^2x_2 + \frac{17}{4}x_1^4, \right. \\ \left. x_3 \geq -\frac{1}{16}x_2^2 - \frac{1}{16}x_1^2x_2 - \frac{17}{64}x_1^4 \text{ if } x_2 \leq -\frac{1}{2}x_1^2, \right. \\ \left. x_3 \geq \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{1}{8}x_1^4 \text{ if } x_2 \geq -\frac{1}{2}x_1^2 \right\}. \quad (30)$$

The time of motion and switching moments are found by (28), (29).

3. Overlapping solvability domains

In this section we analyze the solvability domains which overlap.

Cases 2 and 3. The domain where both controls exist is

$$D_{2,3} = \left\{ x : x_2 \geq \frac{11}{4}x_1^2, \quad \frac{1}{4}x_1^2x_2 - \frac{5}{32}x_1^4 \leq x_3 \leq \frac{1}{18}x_2^2 - \frac{1}{18}x_1^2x_2 + \frac{19}{72}x_1^4 \right\}$$

(see Fig. 22). The times of motion θ_2 and θ_3 for cases 2 and 3 can be found by (11), (12) and (15), (16). Let us introduce the function $F = \theta_3 - \theta_2$, i.e.,

$$F(x) = \frac{6S_{11} + 3\sqrt{S_{11}^2 - 18S_{21}}}{\sqrt{S_{11} + \sqrt{S_{11}^2 - 18S_{21}}}} - \frac{2S_{12} - \sqrt{S_{12}^2 - 2S_{22}}}{\sqrt{S_{12} - \sqrt{S_{12}^2 - 2S_{22}}}} - 2x_1. \quad (31)$$

Then $\theta_2 = \theta_3$ iff x belongs to the surface

$$M_{2,3} = \left\{ x : x_2 \geq \frac{11}{4}x_1^2, \quad \frac{1}{4}x_1^2x_2 - \frac{5}{32}x_1^4 \leq x_3 \leq \frac{1}{18}x_2^2 - \frac{1}{18}x_1^2x_2 + \frac{19}{72}x_1^4, \quad F(x) = 0 \right\}$$

and for any point $x \in D_{2,3}$ one has $\theta_2 < \theta_3$ iff $F(x) > 0$.

Our nearest goal is to show that the surface $M_{2,3}$ has a unique point of intersection with any vertical line with fixed $x_1 > 0$ and $x_2 \geq \frac{11}{4}x_1^2$. To this end, let us fix any $x_1 > 0$ and $x_2 > \frac{11}{4}x_1^2$ and suppose x_3 runs through the segment $[x_{3min}, x_{3max}] = [\frac{1}{4}x_1^2x_2 - \frac{5}{32}x_1^4, \frac{1}{18}x_2^2 - \frac{1}{18}x_1^2x_2 + \frac{19}{72}x_1^4]$. Then

$$\theta_2 = \theta_2(x_3) = A_2 + \frac{S_{12}}{A_2} + x_1, \quad \theta_3 = \theta_3(x_3) = \frac{9}{2}A_3 + \frac{2S_{11}}{A_3} - x_1,$$

where

$$A_2 = A_2(x_3) = \sqrt{S_{12} - \sqrt{S_{12}^2 - 2S_{22}}}, \quad A_3 = A_3(x_3) = \frac{2}{3}\sqrt{S_{11} + \sqrt{S_{11}^2 - 18S_{21}}}.$$

By $\widehat{\theta}(x)$ we denote the optimal time for the point x ; it is continuous as a function of x , what follows from [5].

First, consider the lower bound, i.e., $x_3 = x_{3min}$. Let us notice that for points $x_\delta = (x_1, x_2, x_{3,\delta})$, where $x_{3,\delta} = x_{3min} - \delta$ with $\delta > 0$, the control of case 2 does not exist and the control of case 3 is optimal. Then $\widehat{\theta}(x_\delta) = \theta_3(x_{3,\delta})$. We notice that the function $\theta_3(x_3)$ is continuous. Hence,

$$\theta_3(x_{3min}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \theta_3(x_{3,\delta}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \widehat{\theta}(x_\delta) = \widehat{\theta}(x_0), \quad \text{where } x_0 = (x_1, x_2, x_{3min}),$$

which implies $\theta_3(x_{3min}) \leq \theta_2(x_{3min})$. Analogously, for the upper bound we get $\theta_2(x_{3max}) \leq \theta_3(x_{3max})$.

Notice that S_{11} and S_{12} are constants while S_{21} and S_{22} are increasing functions of x_3 . Hence, A_2 increases and A_3 decreases (as functions of x_3). Since $A_2^2 \leq S_{12}$, we see that θ_2 decreases as function of A_2 . Analogously, $A_3^2 \geq \frac{4}{9}S_{11}$ implies that θ_3 increases as function of A_3 . As a result, both functions θ_2 and θ_3 decrease as functions of x_3 .

Let us introduce the functions

$$h_2(x_3) = \theta_2(x_3) + \frac{27x_3}{2\sqrt{S_{11}}}, \quad h_3(x_3) = \theta_3(x_3) + \frac{27x_3}{2\sqrt{S_{11}}},$$

and show that $h_2(x_3)$ decreases and $h_3(x_3)$ increases. To this end, we find their derivatives. Since $\sqrt{S_{12}^2 - 2S_{22}} = -(A_2^2 - S_{12})$, we get

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \theta_2}{\partial A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = \left(1 - \frac{S_{12}}{A_2^2}\right) \frac{-2}{4A_2(A_2^2 - S_{12})} = -\frac{1}{2A_2^3}$$

and analogously

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial x_3} = \frac{\partial \theta_3}{\partial A_3} \cdot \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = \left(\frac{9}{2} - \frac{2S_{11}}{A_3^2}\right) \frac{-\frac{2}{3} \cdot 18}{6A_3(\frac{9}{4}A_3^2 - S_{11})} = -\frac{4}{A_3^3}.$$

Hence,

$$\frac{\partial h_2(x_3)}{\partial x_3} = -\frac{1}{2A_2^3(x_3)} + \frac{27}{2\sqrt{S_{11}}}, \quad \frac{\partial h_3(x_3)}{\partial x_3} = -\frac{4}{A_3^3(x_3)} + \frac{27}{2\sqrt{S_{11}}}.$$

Then

$$\frac{\partial h_2(x_3)}{\partial x_3} \leq 0 \Leftrightarrow 9A_2^2(x_3) \leq S_{11} \Leftrightarrow x_3 \leq \frac{1}{648}(68x_2^2 + 4x_1^2x_2 - 181x_1^4).$$

However, $x_3 \leq \frac{1}{18}x_2^2 - \frac{1}{18}x_1^2x_2 + \frac{19}{72}x_1^4$ for $x \in D_{2,3}$ and

$$\frac{1}{18}x_2^2 - \frac{1}{18}x_1^2x_2 + \frac{19}{72}x_1^4 \leq \frac{1}{648}(68x_2^2 + 4x_1^2x_2 - 181x_1^4) \Leftrightarrow (x_2 + 4x_1^2)(x_2 - \frac{11}{4}x_1^2) \geq 0,$$

which is true for $x \in D_{2,3}$. Hence, $\frac{\partial h_2(x_3)}{\partial x_3} \leq 0$, i.e., $h_2(x_3)$ decreases. For h_3 we have

$$\frac{\partial h_3(x_3)}{\partial x_3} \geq 0 \Leftrightarrow 9A_3^2(x_3) \geq 4S_{11} \Leftrightarrow 4\sqrt{S_{11}^2 - 18S_{21}} \geq 0,$$

which is obvious. Hence, $\frac{\partial h_3(x_3)}{\partial x_3} \geq 0$, i.e., $h_3(x_3)$ increases. As was shown above, $\theta_2(x_{3min}) \geq \theta_3(x_{3min})$ and $\theta_3(x_{3max}) \geq \theta_2(x_{3max})$, hence,

$$h_2(x_{3min}) \geq h_3(x_{3min}) \quad \text{and} \quad h_3(x_{3max}) \geq h_2(x_{3max}).$$

Thus, there exists a unique point $\tilde{x}_3 \in [x_{3min}, x_{3max}]$ such that $h_2(\tilde{x}_3) = h_3(\tilde{x}_3)$ or, equivalently, $\theta_2(\tilde{x}_3) = \theta_3(\tilde{x}_3)$ for any fixed $x_1 > 0$ and $x_2 \geq \frac{11}{4}x_1^2$.

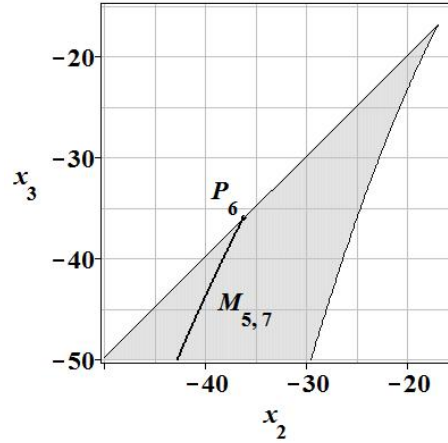
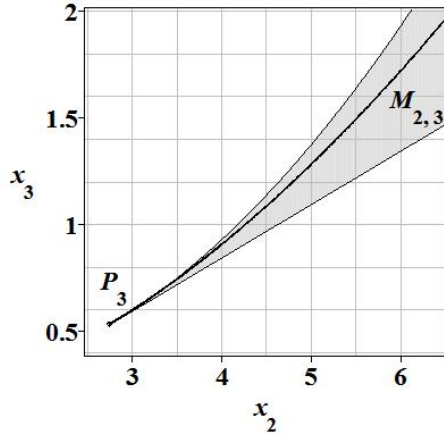


Fig. 22. Intersection of the domain $D_{2,3}$ and the surface $M_{2,3}$ with the plane $x_1 = 1$

Fig. 23. Intersection of the domain $D_{5,7}$ and the surface $M_{5,7}$ with the plane $x_1 = 1$;

$$P_6 = (c_2, c_2 + \frac{1}{4}) \approx (-36.175, -35.925)$$

Cases 5 and 7. The domain where both controls exist is

$$D_{5,7} = \{x : x_2 \leq -\frac{17}{2}x_1^2, -\frac{1}{18}x_2^2 + \frac{1}{18}x_1^2x_2 + \frac{17}{72}x_1^4 \leq x_3 \leq x_1^2x_2 + \frac{1}{4}x_1^4\}.$$

These conditions imply $x_2 \leq rx_1^2$, where $r = (-\frac{17}{2} - 6\sqrt{2}) \approx -16.98528$. Denote the corresponding times of motion by θ_5 and θ_7 . Formulas (17), (18) and (23), (24) imply

$$\theta_5 = \frac{-2S_{11} - \sqrt{S_{11}^2 + 2S_{21}}}{\sqrt{-S_{11} - \sqrt{S_{11}^2 + 2S_{21}}}} - x_1, \quad \theta_7 = \frac{-6S_{11} + 3\sqrt{S_{11}^2 + 18S_{21}}}{\sqrt{-S_{11} + \sqrt{S_{11}^2 + 18S_{21}}}} - x_1.$$

Hence, $\theta_5 \geq \theta_7$ iff

$$\frac{(-2S_{11} - \sqrt{S_{11}^2 + 2S_{21}})^2}{-S_{11} - \sqrt{S_{11}^2 + 2S_{21}}} \geq \frac{(-6S_{11} + 3\sqrt{S_{11}^2 + 18S_{21}})^2}{-S_{11} + \sqrt{S_{11}^2 + 18S_{21}}}. \quad (32)$$

Let us write down this relation in an explicit form w.r.t. x_3 . Taking into account that in $D_{5,7}$ the inequalities $S_{11} < 0$ and $S_{21} < 0$ hold, we denote $v = \sqrt{1 + 18\frac{S_{21}}{S_{11}^2}} < 1$ and $w = \sqrt{1 + 2\frac{S_{21}}{S_{11}^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{v^2 + 8} < 1$. Then (32) reads

$$\frac{2-w}{\sqrt{1-w}} \geq \frac{6+3v}{\sqrt{1+v}} \Leftrightarrow (2-w)^2(1+v) \geq (6+3v)^2(1-w).$$

Substituting $w^2 = \frac{1}{9}v^2 + \frac{8}{9}$, we get the equivalent inequality

$$9w(9v^2 + 32v + 32) \geq -v^3 + 80v^2 + 280v + 280;$$

its both sides are positive for $0 \leq v < 1$. Hence, we get

$$9(v^2 + 8)(9v^2 + 32v + 32)^2 \geq (-v^3 + 80v^2 + 280v + 280)^2,$$

which is equivalent to

$$(91v^4 + 486v^3 + 736v^2 - 584)(1+v)^2 \geq 0.$$

The function $91v^4 + 486v^3 + 736v^2 - 584$ increases as $v \geq 0$ and its unique positive root equals $v_1 \approx 0.71826$. Hence, (32) holds iff $v \geq v_1$. Substituting the expression of v we get that (32) holds iff $S_{21} \geq c_1 S_{11}^2$, i.e., $x_3 \geq \frac{1}{4}x_1^4 + c_1(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2)^2$, where $c_1 = \frac{1}{18}(v_1^2 - 1) \approx -0.026895$. Due to the definition of the domain $D_{5,7}$, this condition implies $c_1(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2)^2 \leq x_1^2 x_2$ or, equivalently, $x_2 \leq c_2 x_1^2$, where $c_2 = \frac{1+c_1+\sqrt{1+2c_1}}{2c_1} \approx -36.17491$.

Thus, $\theta_5 = \theta_7$ iff x belongs to the surface

$$M_{5,7} = \{x : x_2 \leq c_2 x_1^2, x_3 = \frac{1}{4}x_1^4 + c_1(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2)^2\}$$

and for any point $x \in D_{5,7}$ one has $\theta_7 < \theta_5$ iff $x_3 > \frac{1}{4}x_1^4 + c_1(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2)^2$.

Cases 6 and 8. The domain where both controls exist is

$$D_{6,8} = \{x : -\frac{17}{2}x_1^2 \leq x_2 \leq -\frac{1}{2}x_1^2, x_3 < -\frac{1}{4}x_1^4, x_3 \leq x_1^2 x_2 + \frac{17}{4}x_1^4, x_3 \geq -\frac{1}{16}x_2^2 - \frac{1}{16}x_1^2 x_2 - \frac{17}{64}x_1^4\}.$$

Let us compare $\theta_8 = \theta_{8max}$ and θ_6 . We use the arguments and notation of case 8 (b1). Namely, let $0 < A_{min}^2 \leq A_{max}^2$ be the roots of the equation $f(z) = 4z^2 + S_{12}z - S_{22} = 0$. Then $\theta_8 \leq \theta_6$ iff

$$\frac{3A_{max}^2 + A_{min}^2}{A_{max}} \leq \frac{\sqrt{(A_{min}^2 + A_{max}^2)^3}}{A_{min}A_{max}} \Leftrightarrow (3A_{max}^2 + A_{min}^2)^2 A_{min}^2 \leq (A_{min}^2 + A_{max}^2)^3,$$

which is equivalent to the inequality $6A_{min}^2 A_{max}^2 + 3A_{min}^4 - A_{max}^4 \leq 0$. Substituting expressions for A_{min}^2 and A_{max}^2 and taking into account that $S_{12} \leq 0$ and $S_{22} \leq 0$, we get that $\theta_8 \leq \theta_6$ iff

$$S_{12}^2 - 16S_{22} \leq -2S_{12}\sqrt{S_{12}^2 + 16S_{22}} \Leftrightarrow 256S_{22}^2 - 96S_{12}^2 S_{22} - 3S_{12}^4 \leq 0.$$

This condition is equivalent to the inequality $S_{22} \geq k_1 S_{12}^2$ or, what is the same, $x_3 \geq -\frac{1}{4}x_1^4 + k_1(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^2$, where $k_1 = \frac{1}{16}(3 - 2\sqrt{3}) \approx -0.0290064$. Due to the definition of the domain $D_{6,8}$, this condition implies $k_1(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^2 \leq x_2x_1^2 + \frac{9}{2}x_1^4$ or, equivalently, $x_2 \geq k_2x_1^2$, where $k_2 = \frac{1-k_1+\sqrt{1+16k_1}}{2k_1} = -\frac{1}{2} - \frac{8}{\sqrt{3}} \approx -5.118802$.

Thus, $\theta_8 = \theta_6$ iff x belongs to the surface

$$M_{6,8} = \{x : k_2x_1^2 \leq x_2 < -\frac{1}{2}x_1^2, x_3 = -\frac{1}{4}x_1^4 + k_1(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^2\}$$

and for any point $x \in D_{6,8}$ one has $\theta_8 < \theta_6$ iff $x_3 > -\frac{1}{4}x_1^4 + k_1(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^2$.

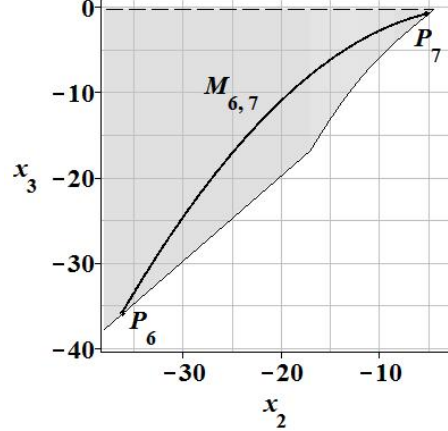
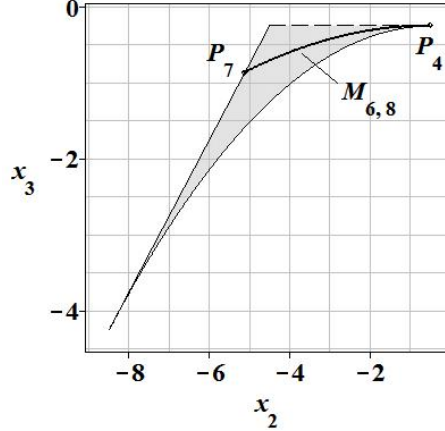


Fig. 24. Intersection of the domain $D_{6,8}$ and the surface $M_{6,8}$ with the plane $x_1 = 1$;
Fig. 25. Intersection of the domain $D_{6,7}$ and the surface $M_{6,7}$ with the plane $x_1 = 1$

$$P_7 = (k_2, k_2 + \frac{17}{4}) \approx (-5.119, -0.869)$$

Cases 6 and 7. The domain where both controls exist is

$$D_{6,7} = \{x : x_3 < -\frac{1}{4}x_1^4, \quad x_3 \geq x_1^2x_2 + \frac{1}{4}x_1^4 \text{ if } x_2 \leq rx_1^2, \\ x_3 \geq -\frac{1}{18}x_2^2 + \frac{1}{18}x_1^2x_2 + \frac{17}{72}x_1^4 \text{ if } rx_1^2 \leq x_2 \leq -\frac{17}{2}x_1^2, \\ x_3 \geq x_1^2x_2 + \frac{17}{4}x_1^4 \text{ if } -\frac{17}{2}x_1^2 \leq x_2 < -\frac{9}{2}x_1^2\},$$

where $r = -\frac{17}{2} - 6\sqrt{2} \approx -16.98528$ was introduced above. The times of motion θ_6 and θ_7 for cases 6 and 7 can be found by (19), (20) and (23), (24). Let us introduce the function $G = \theta_6 - \theta_7$, i.e.,

$$G(x) = \sqrt{\frac{S_{12}^3}{S_{22}} - \frac{-6S_{11} + 3\sqrt{S_{11}^2 + 18S_{21}}}{\sqrt{-S_{11} + \sqrt{S_{11}^2 + 18S_{21}}}}} + 2x_1, \quad (33)$$

then $\theta_6 = \theta_7$ iff x belongs to the surface

$$M_{6,7} = \{x : x_1^2x_2 + \frac{1}{4}x_1^4 \leq x_3 < -\frac{1}{4}x_1^4 \text{ if } c_2x_1^2 \leq x_2 \leq rx_1^2, \\ -\frac{1}{18}x_2^2 + \frac{1}{18}x_1^2x_2 + \frac{17}{72}x_1^4 \leq x_3 < -\frac{1}{4}x_1^4 \text{ if } rx_1^2 \leq x_2 \leq -\frac{17}{2}x_1^2, \\ x_1^2x_2 + \frac{17}{4}x_1^4 \leq x_3 < -\frac{1}{4}x_1^4 \text{ if } -\frac{17}{2}x_1^2 \leq x_2 \leq k_2x_1^2, \\ G(x) = 0\}$$

and for any point $x \in D_{6,7}$ one has $\theta_7 < \theta_6$ iff $G(x) > 0$.

Now we study this surface in detail. Let us fix any $x_1 > 0$ and $x_2 < -\frac{9}{2}x_1^2$ and suppose x_3 runs through the segment $[x_{3min}, -\frac{1}{4}x_1^4)$, where x_{3min} is given by the description of the domain $D_{6,7}$. First let us consider the lower bound, $x_3 = x_{3min}$.

(a) If $x_2 < rx_1^2$, then $x_{3min} = x_1^2x_2 + \frac{1}{4}x_1^4$. For these points using (17), (18) one easily finds $S_{11}^2 + 2S_{21} = (x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^2$, hence, $\theta_5(x_{3min}) = -\frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{2}x_1$. On the other hand, $S_{22} = S_{12}x_1^2$, hence, by (19), (20) we get $\theta_6(x_{3min}) = -\frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{2}x_1$. Thus, $\theta_5(x_{3min}) = \theta_6(x_{3min})$. Using the results obtained above for the domain $D_{5,7}$, we get

- if $x_2 < c_2x_1^2$, then $\theta_6(x_{3min}) = \theta_5(x_{3min}) > \theta_7(x_{3min})$;
- if $c_2x_1^2 \leq x_2 \leq rx_1^2$, then $\theta_6(x_{3min}) = \theta_5(x_{3min}) \leq \theta_7(x_{3min})$.

(b) If $rx_1^2 < x_2 < -\frac{17}{2}x_1^2$, then $x_{3min} = -\frac{1}{18}x_2^2 + \frac{1}{18}x_1^2x_2 + \frac{17}{72}x_1^4$. As above, we consider points $x_\delta = (x_1, x_2, x_{3,\delta})$, where $x_{3,\delta} = x_{3min} - \delta$ with small $\delta > 0$. For points x_δ the control of case 7 does not exist and the control of case 6 is optimal, i.e., $\hat{\theta}(x_\delta) = \theta_6(x_{3,\delta})$. Due to continuity of $\hat{\theta}$ and θ_6 , we have

$$\theta_6(x_{3min}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \theta_6(x_{3,\delta}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\theta}(x_\delta) = \hat{\theta}(x_0), \quad \text{where } x_0 = (x_1, x_2, x_{3min}),$$

therefore, $\theta_6(x_{3min}) \leq \theta_7(x_{3min})$.

(c) If $-\frac{17}{2}x_1^2 < x_2 < -\frac{9}{2}x_1^2$, then $x_{3min} = x_1^2x_2 + \frac{17}{4}x_1^4$. For these points $S_{21} = S_{11}x_1^2 + \frac{9}{2}x_1^4$, hence, $S_{11}^2 + 18S_{21} = (S_{11} + 9x_1^2)^2$. Since $S_{11} + 9x_1^2 \geq 0$, using (23), (24) we get $\theta_7(x_{3min}) = -\frac{x_2}{x_1} + \frac{17}{2}x_1$. On the other hand, $S_{22} = S_{12}x_1^2 + 4x_1^4$, therefore, $S_{12}^2 + 16S_{22} = (S_{12} + 8x_1^2)^2$. Since $S_{12} + 8x_1^2 \geq 0$, using (28), (29) we get $\theta_8(x_{3min}) = -\frac{x_2}{x_1} + \frac{17}{2}x_1$. Thus, $\theta_7(x_{3min}) = \theta_8(x_{3min})$. Using the results obtained for the domain $D_{6,8}$, we get

- if $k_2x_1^2 < x_2 < -\frac{9}{2}x_1^2$, then $\theta_7(x_{3min}) = \theta_8(x_{3min}) < \theta_6(x_{3min})$;
- if $x_2 \leq k_2x_1^2$, then $\theta_7(x_{3min}) = \theta_8(x_{3min}) \geq \theta_6(x_{3min})$.

Thus, we get the following relations.

$$\begin{aligned} & - \text{If } c_2x_1^2 \leq x_2 \leq k_2x_1^2, \text{ then } \theta_6(x_{3min}) \leq \theta_7(x_{3min}). \\ & - \text{If } x_2 < c_2x_1^2 \text{ or } k_2x_1^2 < x_2 < -\frac{9}{2}x_1^2, \text{ then } \theta_7(x_{3min}) < \theta_6(x_{3min}). \end{aligned} \tag{34}$$

Now let us study $\theta_6(x_3)$ and $\theta_7(x_3)$ as functions of $x_3 \in [x_{3min}, -\frac{1}{4}x_1^4)$. By (19), (20) and (23), (24),

$$\theta_6 = \theta_6(x_3) = \sqrt{\frac{S_{12}^3}{S_{22}} + x_1}, \quad \theta_7 = \theta_7(x_3) = 9A_7 - \frac{S_{11}}{A_7} - x_1,$$

and

$$A_7 = A_7(x_3) = \frac{1}{3} \sqrt{-S_{11} + \sqrt{S_{11}^2 + 18S_{21}}}.$$

Since $S_{11} < 0$ and $S_{12} < 0$ are constants while $S_{21} < 0$ and $S_{22} < 0$ are increasing functions of x_3 , we see that $\theta_6(x_3)$ and $A_7(x_3)$ increase. However, $9A_7^2 > -S_{11}$, hence, $\theta_7(x_3)$ also increases.

Let us introduce the functions

$$h_6(x_3) = \theta_6(x_3) - \frac{27x_3}{2\sqrt{-S_{11}^3}}, \quad h_7(x_3) = \theta_7(x_3) - \frac{27x_3}{2\sqrt{-S_{11}^3}},$$

and show that $h_6(x_3)$ increases and $h_7(x_3)$ decreases. We have

$$\frac{\partial h_6(x_3)}{\partial x_3} = \frac{\sqrt{-S_{12}^3}}{2\sqrt{-S_{22}^3}} - \frac{27}{2\sqrt{-S_{11}^3}}, \quad \frac{\partial h_7(x_3)}{\partial x_3} = \frac{1}{2A_7^3(x_3)} - \frac{27}{2\sqrt{-S_{11}^3}}.$$

Hence, $\frac{\partial h_7(x_3)}{\partial x_3} \leq 0$ iff $A_7 \geq \frac{1}{3}\sqrt{-S_{11}}$ which is obvious. Thus, $h_7(x_3)$ decreases.

For $h_6(x_3)$ we have $\frac{\partial h_6(x_3)}{\partial x_3} \geq 0$ iff $9S_{22} + S_{11}S_{12} \geq 0$ or, what is the same, $x_3 \geq -\frac{1}{9}(x_2^2 + 2x_1^4)$. If $x \in D_{6,7}$, then the inequality $x_3 \geq -\frac{1}{18}x_2^2 + \frac{1}{18}x_1^2x_2 + \frac{17}{72}x_1^4$ holds. Moreover, $-\frac{1}{18}x_2^2 + \frac{1}{18}x_1^2x_2 + \frac{17}{72}x_1^4 \geq -\frac{1}{9}(x_2^2 + 2x_1^4)$ for any x_1, x_2 . Therefore, $x_3 \geq -\frac{1}{9}(x_2^2 + 2x_1^4)$ in $D_{6,7}$, hence, $\frac{\partial h_6(x_3)}{\partial x_3} \geq 0$.

Thus, $h_6(x_3)$ increases and $h_7(x_3)$ decreases and, besides, relations (34) imply that

- if $c_2x_1^2 \leq x_2 \leq k_2x_1^2$, then $h_6(x_{3min}) \leq h_7(x_{3min})$,
- if $x_2 < c_2x_1^2$ or $k_2x_1^2 < x_2 < -\frac{9}{2}x_1^2$, then $h_7(x_{3min}) < h_6(x_{3min})$.

Concerning the upper bound, we have $h_6(x_3) \rightarrow +\infty$ as $x_3 \rightarrow -\frac{1}{4}x_1^4$ while $h_7(-\frac{1}{4}x_1^4) < +\infty$. Therefore, we obtain the following result.

- If $x_2 < c_2x_1^2$ or $k_2x_1^2 < x_2 < -\frac{9}{2}x_1^2$, then $h_7(x_3) < h_6(x_3)$, and therefore, $\theta_7(x_3) < \theta_6(x_3)$ for all $x_3 \in [x_{3min}, -\frac{1}{4}x_1^4]$.

- If $c_2x_1^2 \leq x_2 \leq k_2x_1^2$, then there exists a unique point $\tilde{x}_3 \in [x_{3min}, -\frac{1}{4}x_1^4]$ such that $h_6(\tilde{x}_3) = h_7(\tilde{x}_3)$ or, equivalently, $\theta_6(\tilde{x}_3) = \theta_7(\tilde{x}_3)$.

In other words, if $x \in M_{6,7}$, then $c_2x_1^2 \leq x_2 \leq k_2x_1^2$. Moreover, the surface $M_{6,7}$ has a unique point of intersection with any vertical line with fixed $x_1 > 0$ and $c_2x_1^2 \leq x_2 \leq k_2x_1^2$.

4. Time-optimal controls

Combining the results obtained above we formulate the explicit solution of the time-optimal control problem (2). Suppose a point x with $x_1 > 0$ is given. In order to set the point to a certain case, one has to check *all the conditions* from the list corresponding to this case; they are collected in Table 1. The optimal time and the optimal control are found by explicit formulas depending on the case.

Recall that $c_1 = \frac{1}{18}(v_1^2 - 1) \approx -0.026895$, where v_1 is the unique positive root of the equation $91v^4 + 486v^3 + 736v^2 - 584 = 0$, $c_2 = \frac{1+c_1+\sqrt{1+2c_1}}{2c_1} \approx -36.17491$, $k_1 = \frac{1}{16}(3 - 2\sqrt{3}) \approx -0.0290064$, $k_2 = \frac{1-k_1+\sqrt{1+16k_1}}{2k_1} = -\frac{1}{2} - \frac{8}{\sqrt{3}} \approx -5.118802$, and $r = (-\frac{17}{2} - 6\sqrt{2}) \approx -16.98528$; the functions $F(x)$ and $G(x)$ are given by formulas (31) and (33). Fig. 26 shows the intersection of the plane $x_1 = 1$ with domains where controls corresponding to cases 1–8 are optimal.

Case 1: (1, -1, 1)	$x_2 \geq \frac{7}{2}x_1^2$ and $\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{1}{8}x_1^4 \leq x_3 \leq \frac{5}{6}x_2^2 - \frac{5}{6}x_1^2x_2 + \frac{11}{24}x_1^4$.
Case 2: (-1, 0, 1)	$x_2 \geq -\frac{1}{4}x_1^2$ and $\frac{1}{4}x_1^2x_2 - \frac{5}{32}x_1^4 \leq x_3 \leq \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{1}{8}x_1^4$, if $x_2 \geq \frac{11}{4}x_1^2$ then $x_3 \geq \frac{1}{18}x_2^2 - \frac{1}{18}x_1^2x_2 + \frac{19}{72}x_1^4$ or $F(x) \geq 0$.
Case 3: (1, -1, 0, 1)	if $x_2 \leq -\frac{1}{4}x_1^2$ then $x_3 \leq -\frac{5}{6}x_2^2 + \frac{5}{6}x_1^2x_2 + \frac{1}{24}x_1^4$, if $-\frac{1}{4}x_1^2 \leq x_2 \leq \frac{11}{4}x_1^2$ then $x_3 \leq \frac{1}{4}x_1^2x_2 - \frac{5}{32}x_1^4$, if $x_2 \geq \frac{11}{4}x_1^2$ then $x_3 \leq \frac{1}{18}x_2^2 - \frac{1}{18}x_1^2x_2 + \frac{19}{72}x_1^4$ and $F(x) \leq 0$.
Case 4: (1, -1, 1)	$x_2 \leq -\frac{1}{4}x_1^2$ and $x_3 \geq -\frac{5}{6}x_2^2 + \frac{5}{6}x_1^2x_2 + \frac{1}{24}x_1^4$, if $-\frac{1}{2}x_1^2 \leq x_2 \leq -\frac{1}{4}x_1^2$ then $x_3 \leq \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{1}{8}x_1^4$, if $x_2 \leq -\frac{1}{2}x_1^2$ then $x_3 \leq -\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 + \frac{1}{8}x_1^4$.
Case 5: (1, 0, -1)	$x_2 \leq -\frac{1}{2}x_1^2$ and $-\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 + \frac{1}{8}x_1^4 \leq x_3 \leq x_1^2x_2 + \frac{1}{4}x_1^4$, if $x_2 \leq c_2x_1^2$ then $x_3 \leq \frac{1}{4}x_1^4 + c_1(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2)^2$.
Case 6: (-1, 0, -1)	$c_2x_1^2 \leq x_2 < -\frac{1}{2}x_1^2$ and $x_3 \geq x_1^2x_2 + \frac{1}{4}x_1^4$, if $c_2x_1^2 \leq x_2 \leq rx_1^2$ then $G(x) \leq 0$, if $rx_1^2 \leq x_2 \leq -\frac{17}{2}x_1^2$ then $x_3 \leq -\frac{1}{18}x_2^2 + \frac{1}{18}x_1^2x_2 + \frac{17}{72}x_1^4$ or $G(x) \leq 0$, if $-\frac{17}{2}x_1^2 \leq x_2 \leq k_2x_1^2$ then $x_3 \leq x_1^2x_2 + \frac{17}{4}x_1^4$ or $G(x) \leq 0$, if $k_2x_1^2 \leq x_2 < -\frac{1}{2}x_1^2$ then $x_3 \leq -\frac{1}{4}x_1^4 + k_1(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^2$.
Case 7: (1, 0, -1, 1)	if $x_2 \leq c_2x_1^2$ then $x_3 \geq \frac{1}{4}x_1^4 + c_1(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2)^2$, if $c_2x_1^2 \leq x_2 \leq rx_1^2$ then $x_3 \geq -\frac{1}{4}x_1^4$ or $x_3 \geq x_2x_1^2 + \frac{1}{4}x_1^4$ and $G(x) \geq 0$, if $rx_1^2 \leq x_2 \leq -\frac{17}{2}x_1^2$ then $x_3 \geq -\frac{1}{4}x_1^4$ or $x_3 \geq -\frac{1}{18}x_2^2 + \frac{1}{18}x_1^2x_2 + \frac{17}{72}x_1^4$ and $G(x) \geq 0$, if $-\frac{17}{2}x_1^2 \leq x_2 \leq k_2x_1^2$ then $x_3 \geq -\frac{1}{4}x_1^4$ or $x_3 \geq x_1^2x_2 + \frac{17}{4}x_1^4$ and $G(x) \geq 0$, if $k_2x_1^2 \leq x_2 \leq \frac{7}{2}x_1^2$ then $x_3 \geq x_1^2x_2 + \frac{17}{4}x_1^4$, if $x_2 \geq \frac{7}{2}x_1^2$ then $x_3 \geq \frac{5}{6}x_2^2 - \frac{5}{6}x_1^2x_2 + \frac{11}{24}x_1^4$.
Case 8: (-1, 0, -1, 1)	$k_2x_1^2 \leq x_2 \leq \frac{7}{2}x_1^2$ and $x_3 \leq x_1^2x_2 + \frac{17}{4}x_1^4$, if $k_2x_1^2 \leq x_2 \leq -\frac{1}{2}x_1^2$ then $x_3 \geq -\frac{1}{4}x_1^4 + k_1(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^2$, if $-\frac{1}{2}x_1^2 \leq x_2 \leq \frac{7}{2}x_1^2$ then $x_3 \geq \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{1}{8}x_1^4$.

Table 1. Description of optimal controls for points with $x_1 > 0$

Also, we obtain the solution of the optimal synthesis problem, i.e., describe the optimal control as a function on x . To this end, we take into account that the controls of cases 1, 3, 4, 5, 7 begin with +1 and the controls of cases 2, 6, 8 begin with -1. The value 0 corresponds to limit cases (between cases 5 and 6, between cases 7 and 8). There exist surfaces for which both values +1 and -1 are possible; they are described by the equations $F(x) = 0$ and $G(x) = 0$ (between cases 2 and 3, between cases 6 and 7). Fig. 27 shows the solution of the optimal synthesis

problem, namely, the intersection of the plane $x_1 = 1$ with the domains in which the optimal control as a function of x equals $+1$ or -1 . The intersection with surfaces corresponding to the value 0 are drawn by dotted lines; the intersection with surfaces where both values $+1$ and -1 are possible are drawn by bold lines.

Let us show that the rest part of the border (drawn by thin lines) corresponds to the value -1 . In fact, the upper thin curve separates cases 1 and 2 and the lower thin curve consists of two segments: one segment separates cases 8 and 4 and the second segment separates cases 2 and 3. At all these points $A = x_1$ where A corresponds to cases 1, 4, and 3 respectively, hence, at these points $u = -1$.

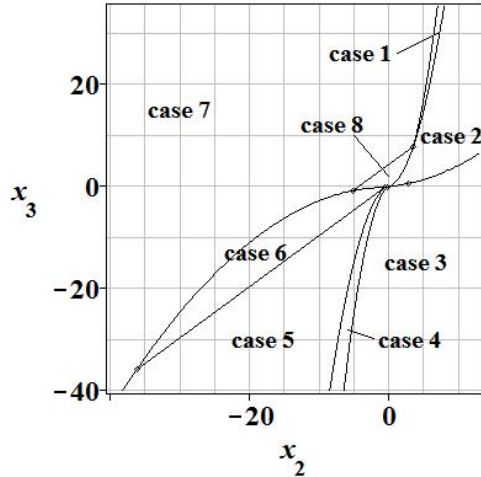


Fig. 26. Optimal controls on the plane $x_1 = 1$

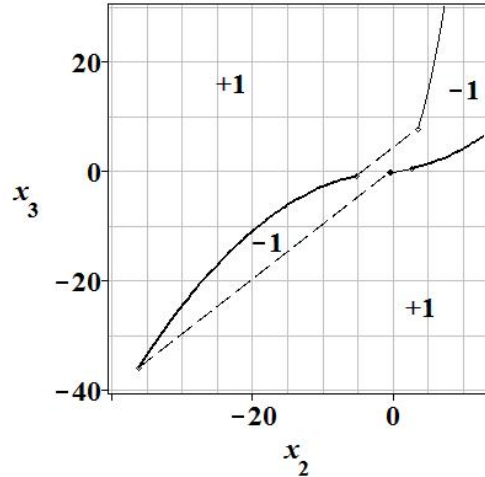


Fig. 27. Optimal synthesis on the plane $x_1 = 1$

For the points with $x_1 < 0$ we use the symmetry arguments. Namely, let us solve the time-optimal control problem for the point $-x$; suppose $\hat{u}(t, -x)$ is the optimal control and $\hat{\theta}(-x)$ is the optimal time. Then the optimal control and the optimal time for the initial point equal $\hat{u}(t, x) = -\hat{u}(t, -x)$ and $\hat{\theta}(x) = \hat{\theta}(-x)$.

Finally, let us find optimal controls for points with $x_1 = 0$. In this case the analysis of possible types of control is shorter since cases 6 and 8 are impossible. Since $x_1 = 0$, controls of cases 1, 3, 4 and 7 can be chosen in two forms; as an example, two forms of the control of case 3 are shown in Fig. 28.

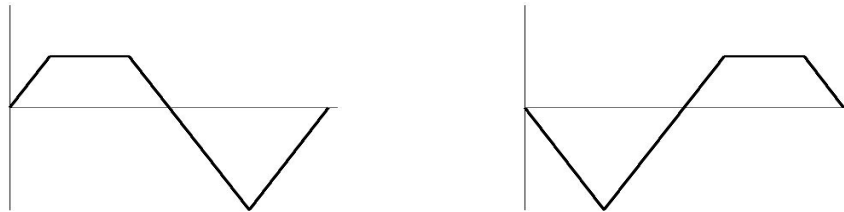


Fig. 28. Graph of $x_1(t)$ for two variants of the optimal control of case 3

Moreover, domains corresponding to cases 1 and 4 are symmetric to each

other; the same holds for cases 2 and 5 and for cases 3 and 7. We notice that, from the point of view of the synthesis problem, in these cases the both values +1 and -1 are possible.

Arguing analogously to the previous sections, one can find the domains in which controls corresponding to these cases exist, and analyze the overlapping domains. We give the final answer only, see Table 2, Fig. 29 and Fig. 30.

Case 1:	$x_2 \geq 0$ and $\frac{1}{2}x_2^2 \leq x_3 \leq \frac{5}{6}x_2^2$.
Case 2:	$x_2 \geq 0$ and $-c_1x_2^2 \leq x_3 \leq \frac{1}{2}x_2^2$,
Case 3:	if $x_2 \geq 0$ then $x_3 \leq -c_1x_2^2$, if $x_2 \leq 0$ then $x_3 \leq -\frac{5}{6}x_2^2$.
Case 4:	$x_2 \leq 0$ and $-\frac{5}{6}x_2^2 \leq x_3 \leq -\frac{1}{2}x_2^2$.
Case 5:	$x_2 \leq 0$ and $-\frac{1}{2}x_2^2 \leq x_3 \leq c_1x_2^2$.
Case 7:	if $x_2 \leq 0$ then $x_3 \geq c_1x_2^2$, if $x_2 \geq 0$ then $x_3 \geq \frac{5}{6}x_2^2$.

Table 2. Description of optimal controls for points with $x_1 = 0$

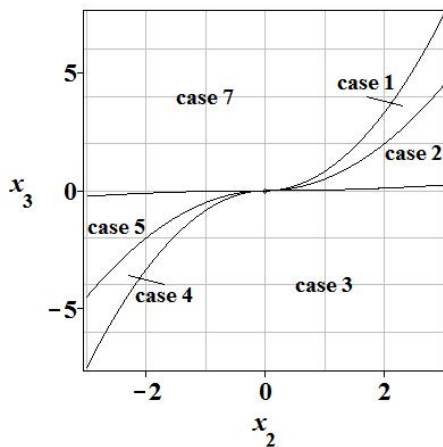


Fig. 29. Optimal controls on the plane $x_1 = 0$

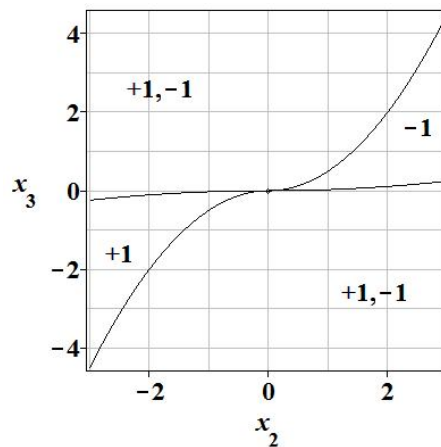


Fig. 30. Optimal synthesis on the plane $x_1 = 0$

Example. As was shown above, for some points there exist two different optimal controls. As an example, let us consider the point x with $x_1 = 1$ and $x_2 = -8$, then $-\frac{17}{2}x_1^2 \leq x_2 \leq k_2x_1^2$ (recall that $k_2 \approx -5.12$). Let us find x_3 so that $\theta_6 = \theta_7$. To this end we solve the equation $G(x) = G(1, -8, x_3) = 0$ on the interval $x_3 \in [x_1^2x_2 + \frac{17}{4}x_1^4, -\frac{1}{4}x_1^4] = [-\frac{15}{4}, -\frac{1}{4}]$ and get $x_3 \approx -1.879$. For this point both controls of cases 6 and 7 are optimal. Fig. 31 and 32 show the components of the optimal trajectories corresponding to these optimal controls; the time of motion equals $\theta_6 = \theta_7 \approx 17.092$.

Acknowledgement. The author is grateful to Sergey Shugaryov for attracting her attention to system (2).

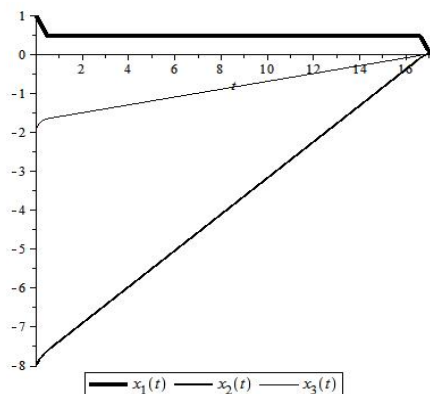


Fig. 31. Components of the optimal trajectory for the point $x = (1, -8, -1.879)$, case 6

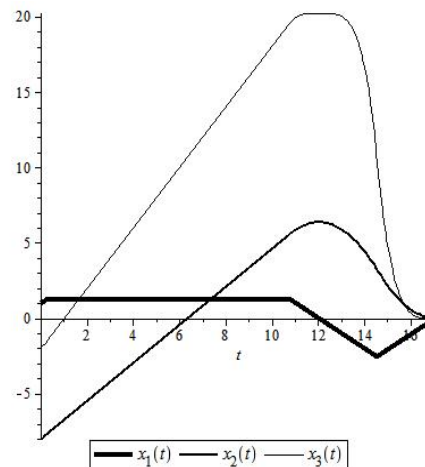


Fig. 32. Components of the optimal trajectory for the point $x = (1, -8, -1.879)$, case 7

REFERENCES

1. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. The mathematical theory of optimal processes. – M.: Nauka, 1961. – 391 p.; Engl. transl.: John Wiley & Sons, Inc., New York-London, 1962.
2. Korobov V. I., Sklyar G. M. Time-optimality and the power moment problem // *Mat. Sb. (N.S.)*, 1987. – Vol. 134(176). – P. 186–206; Engl. transl.: *Math. USSR-Sb.*, 1989. – V. 62. – P. 185–206.
3. Sklyar G. M., Ignatovich S. Yu. Approximation of time-optimal control problems via nonlinear power moment min-problems // *SIAM J. Control Optim.*, 2003. – V. 42. – P. 1325–1346.
4. Sklyar G. M., Ignatovich S. Yu., Shugaryov S. E. Time-optimal control problem for a special class of control systems: optimal controls and approximation in the sense of time optimality // *J. Optim. Theory Appl.*, 2015. – Vol. 165. – P. 62–77.
5. Korobov V. I. The continuous dependence of a solution of an optimal-control problem with a free time for initial data // *Differentsial'nye Uravneniya*, 1971. – V. 7. – P. 1120–1123; Engl. transl.: *Differ. Equations*, 1971 (1973). – V. 7. – P. 850–852.

Article history: Received: 22 August, 2016; Accepted: 26 October, 2016.

Управляемость эволюционного дифференциального уравнения в частных производных

А. А. Макаров

*Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
mak-family@yandex.ru*

Доказана 0-управляемость любого эволюционного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами в пространстве бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций. Приведены условия, при которых управление не зависит от времени. Рассмотрены также релейные управления для классических уравнений математической физики.

Ключевые слова: 0-управляемость, краевая задача, преобразование Фурье, релейное управление.

Макаров О. А., **Керованість еволюційного диференціального рівняння в частинних похідних.** Доведена 0-керованість будь-якого еволюційного диференціального рівняння в частинних похідних зі сталими коефіцієнтами в просторі нескінченно диференційованих швидко спадаючих функцій. Наведено умови, за якими керування не залежить від часу. Розглянуто також релейні керування для класичних рівнянь математичної фізики.

Ключові слова: 0-керованість, крайова задача, перетворення Фур'є, релейне керування.

A. A. Makarov, **Controllability of evolution partial differential equation.** Null-Controllability of any evolution partial differential equation with constant coefficients in the space of infinitely differentiable rapidly decreasing functions is proved. Conditions under which a control is independent of time are given. Bang-bang controls for the classical equations of mathematical physics are considered.

Keywords: null-controllability, boundary value problem, Fourier transform, bang-bang controls.

2000 Mathematics Subject Classification: 35S10.

Теории управляемости в последнее время посвящено много работ, но большая часть из них посвящена обыкновенным уравнениям; а из уравнений с частными производными рассматриваются, в основном, уравнения математической физики, например, — волновое [1, 2].

В данной статье рассматривается *общее линейное уравнение в частных производных эволюционного типа*, а также линейные системы и доказывается 0-управляемость в пространстве бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = P \left(\frac{\partial}{i \partial x} \right) w(x, t) + u(x, t), \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0; T]$, а функции $w(\cdot, t)$ и $u(\cdot, t)$ — из пространства Л. Шварца S при любых $t \in [0; T]$.

Определение 1. Уравнение (1) называется 0-управляемым на отрезке $[0; T]$ в пространстве S , если для любой функции $\varphi(x) \in S$ существует кусочно-непрерывное по t управление $u(\cdot, t) \in S$, такое, что решение уравнения $w(\cdot, t) \in S$ для всех $t \in [0; T]$ удовлетворяет начальному условию $w(x, 0) = \varphi(x)$ и $w(x, T) = 0$.

Теорема 1. Любое уравнение вида (1) является 0-управляемым в пространстве S на любом отрезке.

Доказательство. Так как задача Коши для уравнения (1) может оказаться некорректной в пространстве S , то заменим ее краевой двухточечной задачей, которая будет эквивалентна исходной задаче (с учетом условия $w(x, T) = 0$), но корректной в пространстве S .

В работе [3] было доказано, что для любого уравнения вида (1) существует корректная краевая задача в пространстве S с краевым условием

$$w(x, 0) + C(D)w(x, T) = \varphi(x), \quad (2)$$

где $C(D)$ — псевдодифференциальный оператор с символом $C(s) = e^{-iT \operatorname{Im} P(s)}$.

Под действием преобразования Фурье (по пространственным переменным) краевая задача (1)–(2) перейдет в задачу

$$\frac{\partial \tilde{w}(s, t)}{\partial t} = P(s)\tilde{w}(s, t) + \tilde{u}(s, t), \quad (3)$$

$$\tilde{w}(s, 0) + C(s)\tilde{w}(s, T) = \tilde{\varphi}(s), \quad (4)$$

решение которой имеет следующий вид

$$\tilde{w}(s, t) = \int_0^T G(s, t, \tau) \tilde{u}(s, \tau) d\tau + Q(s, t) \tilde{\varphi}(s), \quad (5)$$

где

$$Q(s, t) = \exp(tP(s))(1 + C(s) \exp(TP(s)))^{-1},$$

а функция Грина

$$G(s, t, \tau) = \begin{cases} Q(s, t)e^{-\tau P(s)} & \text{при } t > \tau \\ -Q(s, t)C(s)e^{(T-\tau)P(s)} & \text{при } t < \tau. \end{cases}$$

При $t = T$ получим

$$\tilde{w}(s, T) = \int_0^T Q(s, T)e^{-\tau P(s)} \tilde{u}(s, \tau) d\tau + Q(s, T) \tilde{\varphi}(s) = 0.$$

Сократив это равенство на ненулевую функцию $Q(s, T)$, получим уравнение

$$\int_0^T \exp(-\tau P(s)) \tilde{u}(s, \tau) d\tau = -\tilde{\varphi}(s). \quad (6)$$

Будем искать преобразование Фурье от управления $u(x, t)$ в виде $\tilde{u}(s, t) = e^{it \operatorname{Im} P(s)} \cdot \psi(s)$.

Подставляя эту функцию в уравнение (6), получим

$$\int_0^T \exp(-\tau \operatorname{Re} P(s)) \psi(s) d\tau = -\tilde{\varphi}(s).$$

Так как $\int_0^T \exp(-\tau \operatorname{Re} P(s)) d\tau = \frac{1 - e^{-T \operatorname{Re} P(s)}}{\operatorname{Re} P(s)} \neq 0$, то определена обратная бесконечно дифференцируемая функция $\frac{\operatorname{Re} P(s)}{e^{-T \operatorname{Re} P(s)} - 1}$, растущая не быстрее некоторой степени $|s|$, принадлежащая пространству мультипликаторов $C_{-\infty}^{+\infty}$.

Поэтому функция $\psi(s)$ принадлежит пространству S и управление $u(x, t) = \mathcal{F}_s^{-1} \left(\frac{\operatorname{Re} P(s) \cdot \tilde{\varphi}(s)}{e^{-T \operatorname{Re} P(s)} - 1} \cdot e^{it \operatorname{Im} P(s)} \right)$ также принадлежит пространству S , что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

Следствие. Если полином $P(s)$ — вещественный, то управление $u(x) = \mathcal{F}_s^{-1} \left(\frac{P(s) \cdot \tilde{\varphi}(s)}{e^{-TP(s)} - 1} \right)$ не зависит от t ; при этом получим результат работы [4].

Так, уравнение теплопроводности является 0-управляемым с управлением, не зависящим от t .

Рассмотрим более общий пример

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + b \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + u(x, t), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Здесь $P(s) = -as^2 + ibs$, а управление

$$u(x, t) = \mathcal{F}_s^{-1} \left(\frac{as^2 \cdot \tilde{\varphi}(s)}{1 - e^{Tas^2}} e^{itbs} \right) = G_1(x) * \varphi(x - tb),$$

где обобщенная функция $G_1(x) = \mathcal{F}_s^{-1} \left(\frac{as^2}{1 - e^{Tas^2}} \right)$ является свертывателем в пространстве S , так как функция $\frac{as^2}{1 - e^{Tas^2}}$ принадлежит пространству $C_{-\infty}^{\infty}$ — бесконечно дифференцируемых функций степенного роста [5].

Для случая, когда $P(s) \in i\mathbb{R}$, управление можно искать в виде

$$u(x, t) = u(x) \cdot \text{sign}(t - t_0),$$

где $t_0 \in (0; T)$, а $u(x) \in S$.

Тогда уравнение (6) примет следующий вид

$$\int_0^T \exp(-\tau P(s)) \text{sign}(\tau - t_0) d\tau \cdot \tilde{u}(s) = -\tilde{\varphi}(s).$$

Проинтегрировав данное выражение, получим

$$\frac{1}{P(s)} [2 \exp(-t_0 P(s)) - 1 - \exp(-T P(s))] \tilde{u}(s) = -\tilde{\varphi}(s),$$

а следовательно, $\tilde{u}(s) = \frac{P(s)\tilde{\varphi}(s)}{1 + \exp(-T P(s)) - 2 \exp(-t_0 P(s))}$, если знаменатель не равен нулю.

Рассмотрим уравнение

$$e^{iT w} - 2e^{it_0 w} + 1 = 0, \quad w \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

равносильное $2e^{it_0 w} = 1 + e^{iT w}$.

Если отношение t_0/T не является рациональным числом, то $|2e^{it_0 w}| = 2$, а $|1 + e^{iT w}| \leq 2$ и равенство выполняется лишь при условии $T w = 2k\pi$.

Но тогда для выполнения уравнения (7) необходимо, чтобы $t_0 w = 2m\pi$ и, значит, $t_0/T = m/k \in Q$, что противоречит нашему предположению.

Осталось показать, что функция $\tilde{u}(s) = \frac{P(s)\tilde{\varphi}(s)}{1 + \exp(-T P(s)) - 2 \exp(-t_0 P(s))}$ принадлежит пространству S . Для этого рассмотрим функцию

$$q(w) = (1 + \exp(iT w) - 2 \exp(it_0 w))^{-1}$$

при $w \in \mathbb{R}$.

Так как при иррациональном отношении t_0/T знаменатель этой функции является почти периодической функцией, отличной от нуля, то

$$\inf |1 + \exp(iT w) - 2 \exp(it_0 w)| = d > 0$$

и поэтому $q(w)$ является ограниченной почти периодической функцией (см. [6]). Значит, наша функция $\tilde{u}(s)$ принадлежит пространству S .

Получили следующий результат:

Утверждение. Если полином $P(s)$ является чисто мнимым для всех s , принадлежащих пространству \mathbb{R} , то уравнение (1) является 0-управляемым в пространстве S на любом отрезке с управлением вида

$$u(x, t) = u(x) \cdot \text{sign}(t - t_0)$$

при иррациональном отношении t_0/T .

Так, уравнение Шредингера $\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = ih \frac{\partial w^2(x, t)}{\partial x^2} + u(x) \cdot \text{sign}(t - t_0)$ является 0-управляемым с управлением $u(x) = G_1(x) * \varphi(x)$, где

$$G_1(x) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{-ihs^2}{1 + \exp(iThs^2) - 2 \exp(it_0hs^2)} \right)$$

является свертывателем в пространстве S (см. [5]).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = P \left(\frac{\partial}{i\partial x} \right) w(x, t) + v(t) \cdot u(x). \tag{8}$$

Здесь $w(x, t)$ и $u(x)$ являются вектор-функциями, координаты которых принадлежат пространству $\mathcal{H} = \bigcap_s H_0^s$, т. е. все производные которых принадлежат пространству \mathcal{L}_2 (см. [5]) или пространству S . Скалярная функция $v(t)$ является кусочно-непрерывной и $|v(t)| \leq 1$.

Определение 2. Система (8) называется 0-управляемой в пространстве \mathcal{H} (или S), если для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{H}$ (или S) существуют $u(x) \in \mathcal{H}$ (или S) и кусочно-непрерывная функция $v(t)$ такие, что решение данной системы $w(\cdot, t) \in \mathcal{H}$ (или S) удовлетворяет начальному условию $w(x, 0) = \varphi(x)$ и условию $w(x, T) = 0$.

Теорема 2. Система (8) будет 0-управляемой в пространстве \mathcal{H} тогда и только тогда, когда существует кусочно-непрерывная функция $v(t)$, ограниченная на отрезке $[0, T]$, и существует обратная матрица

$$\left[\int_0^T v(t) \exp(-tP(s)) dt \right]^{-1} \in H_l = (1 + |s|)^l \mathcal{L}_2$$

с некоторым l .

Доказательство.

Достаточность. В работе [3] доказано, что существует корректная краевая задача в пространстве \mathcal{H} с краевым условием

$$w(x, 0) + C(D)w(x, T) = \varphi(x),$$

где $C(D)$ — псевдодифференциальный оператор с символом из пространства H_l .

Решение двойственной по Фурье краевой задачи имеет вид

$$\tilde{w}(s, t) = \int_0^T G(s, t, \tau) \tilde{u}(s) v(\tau) d\tau + Q(s, t) \tilde{\varphi}(s),$$

где матрицы $G(s, t, \tau)$ и $Q(s, t)$ определяются по тем же формулам, как и в случае уравнения (1).

При $t = T$ получаем уравнение

$$\tilde{w}(s, T) = \int_0^T Q(s, T) \exp(-\tau P(s)) \tilde{u}(s) v(\tau) d\tau + Q(s, T) \tilde{\varphi}(s) = 0.$$

Сокращая на невырожденную матрицу $Q(s, T)$, получим

$$\int_0^T \exp(-\tau P(s)) v(\tau) d\tau \cdot \tilde{u}(s) = -\tilde{\varphi}(s). \quad (9)$$

В силу условия теоремы существует функция

$$\tilde{u}(s) = - \left[\int_0^T \exp(-\tau P(s)) v(\tau) d\tau \right]^{-1} \cdot \tilde{\varphi}(s),$$

принадлежащая пространству $\bigcap_s H_s^0$. Значит, управление $\tilde{u}(x)$ принадлежит пространству \mathcal{H} , что и требовалось доказать.

Необходимость. Решение задачи Коши двойственной по Фурье системы имеет вид

$$\tilde{w}(s, t) = \exp(tP(s)) \tilde{\varphi}(s) + \int_0^t \exp((t - \tau)P(s)) v(\tau) \tilde{u}(s) d\tau.$$

Тогда $\tilde{w}(s, T) = \exp(TP(s)) \tilde{\varphi}(s) + \int_0^T \exp((T - \tau)P(s)) v(\tau) \tilde{u}(s) d\tau = 0.$

Сокращая на $\exp(TP(s))$, получаем $\int_0^T \exp(-\tau P(s)) v(\tau) d\tau \cdot \tilde{u}(s) = -\tilde{\varphi}(s).$

Так как исходная система 0-управляема, то существует обратная матрица $\left(\int_0^T \exp(-\tau P(s)) v(\tau) d\tau \right)^{-1}$, являющаяся мультипликатором в пространстве $\mathcal{FH} = \bigcap_s H_s^0$, т. е. принадлежащая пространству H_l с некоторым l , что и требовалось доказать. *Теорема доказана.*

Следствие. Если определитель $\Delta = \det \int_0^T \exp(-tP(s))dt \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^n$, то система (8) будет 0-управляемой в пространствах \mathcal{H} или S с $v(t) \equiv 1$ и $u(x) \in \mathcal{H}$ или S .

Это следует из работы [7], в которой доказано, что из условия Следствия вытекает принадлежность матрицы

$$\left[\int_0^T \exp(-\tau P(s))v(\tau)d\tau \right]^{-1}$$

пространству $C_{-\infty}^{\infty}$, а, значит, управление $u(x)$ принадлежит пространствам \mathcal{H} или S .

В частности, если все собственные значения матрицы $P(s)$ являются вещественными, то $\Delta \neq 0$ и, значит, система (8) является 0-управляемой с управлением, не зависящим от t .

В той же работе [7] есть критерий условия $\Delta \neq 0$. А именно - это выполнение условий:

$$\frac{e^{-T\lambda_j(s)} - 1}{\lambda_j(s)} \neq 0 \quad \forall j = \overline{1, m}, \tag{10}$$

где $\lambda_j(s)$ — собственные значения матрицы $P(s)$.

Проиллюстрируем эффективность этого условия на следующем примере.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1(x_1, x_2, t)}{\partial t} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) w_1 - w_2 + u_1(x_1, x_2) \\ \frac{\partial w_2(x_1, x_2, t)}{\partial t} = - \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 w_1 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) w_2 + u_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Тогда матрица

$$P(s_1, s_2) = \begin{pmatrix} s_1^2 + s_2^2 & -1 \\ (s_1 + s_2)^2 & s_1^2 + s_2^2 \end{pmatrix}$$

и ее собственными значениями будут $\lambda_{1,2} = s_1^2 + s_2^2 \pm i(s_1 + s_2)$. При этом условие $\frac{\exp(-T(s_1^2 + s_2^2 \pm i(s_1 + s_2))) - 1}{s_1^2 + s_2^2 \pm i(s_1 + s_2)} = 0$ равносильно условию $s_1^2 + s_2^2 = 0$, т. е. $s_1 = s_2 = 0$. Знаменатель в этой точке тоже равен нулю, а вся дробь стремится к $-T$. Значит, условие (10) выполнено и система 0-управляема.

Рассмотрим систему (8) с мнимыми собственными значениями матрицы $P(s)$. Будем искать управление в виде $u(x)\text{sign}(t - t_0)$. Тогда уравнение (9) примет вид

$$\left(\int_0^{t_0} \exp(-tP(s))dt - \int_{t_0}^T \exp(-tP(s))dt \right) \tilde{u}(s) = -\tilde{\varphi}(s).$$

Если умножить это уравнение на матрицу $P(s)$ слева, то получим

$$\left(E + \exp(-TP(s)) - 2\exp(-t_0P(s))\right)\tilde{u}(s) = P(s)\tilde{\varphi}(s).$$

Собственные значения матрицы $P(s) = E + \exp(-TP(s)) - 2\exp(-t_0P(s))$ равны $w_j(s) = 1 + e^{-T\lambda_j(s)} - 2e^{-t_0\lambda_j(s)}$, $j = \overline{1, m}$.

Покажем для мнимых $\lambda_j(s)$ и иррациональном t_0/T , что $w_j(s) \neq 0$. Но ранее мы уже рассматривали уравнение (7) и показали, что оно не имеет ненулевых вещественных корней при иррациональном t_0/T . Значит, определитель матрицы $P(s)$ тоже не равен нулю. И так как он является почти-периодической функцией, то $|\Delta(s)| \geq d > 0$. Поэтому существует $R^{-1}(s) \in C_{-\infty}^{\infty}$.

Значит, $\tilde{u}(s) = R^{-1}(s)P(s)\tilde{\varphi}(s) \in S$ и управление $u(x) \in S$. То есть мы доказали следующий результат.

Теорема 3. *Если собственные значения матрицы $P(s)$ — мнимые, то система (8) является 0-управляемой в пространстве S с управлением вида $u(x) \cdot \text{sign}(t - t_0)$, где t_0/T — иррационально.*

В качестве примера рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \Delta w(x, t) + u(x)\text{sign}(t - t_0).$$

Так как собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i|s| = \pm i\sqrt{\sum_{k=1}^n s_k^2}$, то данное уравнение является 0-управляемым при иррациональном t_0/T .

В заключение рассмотрим пример уравнения второго порядка, у которого собственные значения принимают как вещественные так и мнимые значения.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \Delta w(x, t) + kw(x, t) + u(x)v(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T].$$

Характеристическое уравнение для этого уравнения имеет вид $\lambda^2 + |s|^2 - k = 0$. При $k < 0$ собственные значения — чисто мнимые, и поэтому данное уравнение 0-управляемо в пространстве S с $v(t) = \text{sign}(t - t_0)$, где t_0/T — иррационально.

Рассмотрим $k > 0$. Тогда собственные значения примут вид

$$\lambda_{1,2}(s) = \begin{cases} \pm\sqrt{k - |s|^2} & \text{при } |s| \leq \sqrt{k} \\ \pm i\sqrt{|s|^2 - k} & \text{при } |s| > \sqrt{k}. \end{cases}$$

Покажем, что и в этом случае уравнение является 0-управляемым в пространстве S с управлением данного вида.

Если с помощью стандартной замены переменных перейти от уравнения к системе, то матрица этой системы будет иметь вид

$$P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k - |s|^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{при } |s|^2 = \sum_{k=1}^n s_k^2.$$

Собственные значения этой матрицы совпадают с собственными значениями нашего уравнения $\lambda_{1,2}$.

Фундаментальная матрица $\exp(tP(s))$ для случая **вещественных ненулевых** собственных значений имеет вид

$$\exp(tP(s)) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t\sqrt{k - |s|^2} & -\frac{\operatorname{sh} t\sqrt{k - |s|^2}}{\sqrt{k - |s|^2}} \\ -\sqrt{k - |s|^2} \operatorname{sh} t\sqrt{k - |s|^2} & \operatorname{ch} t\sqrt{k - |s|^2} \end{pmatrix}.$$

Для случая **мнимых** собственных значений

$$\exp(tP(s)) = \begin{pmatrix} \cos t\sqrt{|s|^2 - k} & -\frac{\sin t\sqrt{|s|^2 - k}}{\sqrt{|s|^2 - k}} \\ -\sqrt{|s|^2 - k} \sin t\sqrt{|s|^2 - k} & \cos t\sqrt{|s|^2 - k} \end{pmatrix}.$$

В случае **нулевых** собственных значений, т. е. при $|s| = \sqrt{k}$

$$\exp(tP(s)) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь матрицу

$$R(s) = E + \exp(-TP(s)) - 2\exp(-t_0P(s)).$$

Собственные значения этой матрицы равны

$$w_{1,2}(s) = 1 + \exp(-T\lambda_{1,2}(s)) - 2\exp(-t_0\lambda_{1,2}(s)).$$

В случае мнимых собственных значений $\lambda_{1,2}(s)$ при иррациональном t_0/T было показано, что $w_{1,2}(s) \neq 0$ и существует $R^{-1}(s) \in C_{-\infty}^{\infty}$.

Рассмотрим вещественные собственные значения $\lambda_{1,2}(s)$, причем $|\lambda_{1,2}(s)| \leq \sqrt{k}$. Покажем, что уравнение $1 + e^y - 2e^{\rho y} = 0$ при некоторых $\rho \in (0; 1)$ не имеет на сегменте $[-a; a]$ ненулевых вещественных корней.

Найдем минимум функции $\varphi(y) = 1 + e^y - 2e^{\rho y}$.
 $\varphi'(y) = e^y - 2\rho e^{\rho y} = 0$, значит стационарная точка $y_0 = \frac{\ln 2\rho}{1-\rho}$. В ней и будет достигаться $\min \varphi(y) < 0$.

Следовательно, при $y < 0$ $\varphi(y) > \varphi(0) = 0$, при $y \in (0, y_0)$ $\varphi(y) < 0$, а второй вещественный корень функции $\varphi(y)$ будет больше y_0 . Поэтому если взять ρ близким к 1, чтобы выполнялось неравенство $\frac{\ln 2\rho}{1-\rho} > a$, то на сегменте $[-a; a]$ ненулевых корней у нашего уравнения не будет.

Значит существует обратная матрица $R^{-1}(s)$, причем она будет бесконечно дифференцируема и ограничена при $|s| < \sqrt{k}$.

Осталось разобрать случай, когда $|s| = \sqrt{k}$, т. е. матрица $P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Тогда матрица $R(s) = \begin{pmatrix} 1 + e^{-T} - 2e^{-t_0} & -Te^{-T} + 2t_0e^{-t_0} \\ 0 & 1 + e^{-T} - 2e^{-t_0} \end{pmatrix}$.

Определитель этой матрицы $\Delta = (1 + e^{-T} - 2e^{-t_0})^2 \neq 0$ при $t_0 \neq T/2$.

Итак, получили следующий результат: при иррациональном t_0/T и $\frac{2t_0}{T} > (T - t_0)\sqrt{k}$ наше уравнение будет 0-управляемым в пространстве S с управлением вида $G(x) * \varphi(x) \cdot \text{sign}(t - t_0)$, где $G(x) = \mathcal{F}^{-1}(R^{-1}(s)P(s))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. G.M.Sklyar and L.V.Fardigola, The Markov trigonometric moment problem in controllability problems for the wave equation on a half-axis. / *Matem. Fizika, Analiz, Geometriya*, 2002. — Vol. 9, No. 2. — P. 233-242.
2. L.V.Fardigola, Controllability Problems for the String Equation on a Half-Axis with a Boundary Control Bounded by a Hard Constant. / *SIAM J. Control Optim.*, 2008. — Vol. 47, No. 4. — P. 2179-2199.
3. Макаров А.А. Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений. / *Дифференциальные уравнения*, — 1994. — Т. 30. — № 1. — С. 144 – 150.
4. Макаров А.А. Управляемость эволюционной системой дифференциальных уравнений в частных производных. / Тезисы международной конференции памяти Ляпунова, X. — 2007. — С. 184 – 185.
5. Волевич Л.Р., Гиндикин С. Г. Обобщенные функции и уравнения в свертках. / Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. — М. : Наука, 1994. — 336 с.
6. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. / М. : Физматгиз, 1956. — 632 с.
7. Фардигола Л.В. Интегральная краевая задача в слое для системы дифференциальных уравнений в частных производных. / *Мат. сборник*, — 1995. — Т. 186. — № 11. — С. 123 – 144.

Статья получена: 29.02.2016; окончательный вариант: 12.11.2016;
принята: 15.11.2016.

ИГОРЬ ДМИТРИЕВИЧ ЧУЕШОВ

1951.09.23 – 2016.04.23

23 апреля 2016 года ушёл из жизни замечательный человек, учёный, доктор физико-математических наук, профессор Игорь Дмитриевич Чуешов.

Игорь Дмитриевич родился 23 сентября 1951 года в г. Ленинграде. В 1968г. закончил среднюю школу в г. Купянске и поступил в Харьковский университет на механико-математический факультет. В 1973 г. закончил университет



по специальности «математика» и с того времени работал на нашем мехмате. В 1974-1977г. - аспирант кафедры математической физики под руководством проф. В.А. Щербины. В 1977г. - защитил кандидатскую диссертацию «О динамике некоторых модельных задач квантовой теории». Защита состоялась в Институте математики г.Киев. В 1977-1980г. - ассистент кафедры математической физики ММФ ХГУ, 1980-1992г. - доцент. В 1990г. защитил докторскую диссертацию «Математическое описание нерегулярной динамики упругой полой оболочкой». Защита состоялась в Физико-техническом институте низких температур АН УССР, г.Харьков. В 1992г. ему присвоено ученое звание профессора. В 2000г. И.Д.Чуешов избран заведующим кафедрой математической физики и вычислительной математики. В 2009г. стал членом-корреспондентом Национальной академии наук Украины. В 2010г. за цикл научных работ «Теория динамических систем: современные методы и их применение» был удостоен Государственной премии Украины в области науки и техники.

И.Д.Чуешов - автор важных основополагающих работ по математике, широко известных в математическом мире. Его научные работы составляют весомый вклад в нелинейную математическую физику и существенно повлияли на развитие современной теории бесконечномерных динамических систем. Он решил ряд важных проблем, связанных с нелинейными (стохастическими и детерминированными) уравнениями в частных производных, возникающими в механике и физике, и инициировал несколько новых направлений в качественной теории диссипативных систем.

В первую очередь следует отметить его исследования, связанные с корректной разрешимостью и асимптотическим поведением эволюционных урав-

нений Кармана, которые описывают нелинейные колебания упругой полой оболочке. Доказанная им теорема дает окончательное решение проблемы, поставленной И.И.Воровичем в пятидесятых годах (и повторно отмеченной Ж.-Л.Лионсом в конце шестидесятых) о существовании и единственности глобальных решений этих уравнений. Он также предложил новые эффективные локализационные методы анализа асимптотического поведения решений. Полученные И.Д.Чуешовым результаты являются существенным шагом в понимании структуры аттракторов и дают ответ на некоторые вопросы Е.Дауелла относительно нелинейного флаттера оболочек.

В соавторстве с И.Лашецкой им был разработан новый эффективный метод анализа общих бесконечномерных диссипативных систем, порождаемых нелинейными уравнениями математической физики. Этот метод вводит понятие квазиустойчивой системы и основывается на так называемых «стабилизационных неравенствах», известных в теории управления. Его использование позволило решить ряд важных проблем, возникающих в волновой динамике с нелинейной внутренней и граничной диссипацией. Метод квазиустойчивости применим к очень широкому классу задач: параболическим, гиперболическим, смешанным, к задачам с интерфейсом, с запаздыванием, а также к задачам синхронизации.

Следует также отметить его тонкие результаты о связи статистических свойств возмущений и решений для некоторого класса нелинейных стохастических уравнений параболического типа. Эти результаты касаются сложного и важного вопроса о структуре и свойствах стохастических аттракторов. Для некоторого класса систем был разработан общий подход, который позволяет дать исчерпывающее описание сценариев стохастических бифуркаций в некоторых моделях математической генетики и охватывает случаи уравнений с почти периодическими возмущениями. Эти результаты заслужили высокую оценку специалистов. Они стимулировали интенсивные исследования, связанные с теоремами сравнения для стохастических параболических уравнений. И.Д.Чуешов является одним из основателей теории монотонных стохастических динамических систем. Совместно с профессором Л.Арнольдом он получил основополагающие результаты о структурах случайных аттракторов монотонных систем и ввел важное понятие полуравновесного состояния таких систем.

И.Д.Чуешов - автор 5 монографий [1-5]. Книги изданы на английском языке и нашли одобрение во многих школах математической физики далеко за пределами нашей страны. Незадолго до неожиданной смерти Игорь Дмитриевич завершил работу над своей шестой монографией и вносил последние штрихи, шлифовал текст. Надеемся, что эта книга скоро выйдет в свет.

И.Д.Чуешов - автор более 150 научных работ. Практически все его работы опубликованы в престижных международных журналах, которые индексируются в библиометрических базах данных (Web of Science, Scopus, MathSciNet и др.). Работы Игоря Дмитриевича находят отклик в исследованиях многих математиков, о чем свидетельствует высокий уровень цитирования. Мы

планируем разместить полный список его публикаций на сайте группы математической физики (кафедра фундаментальной математики). На момент написания данной заметки, список не может быть завершен, т.к. продолжают выходить в свет статьи, которые Игорь Дмитриевич отправил в печать в начале 2016 г. До последних своих дней он не прекращал заниматься научной деятельностью, математическими исследованиями.

Он был членом редколлегии ряда международных журналов таких как «Журнал математической физики, анализа, геометрии», «Український математичний журнал», «Stochastics and Dynamics», «Nonlinear Analysis: Real World Applications», «International Journal of Differential Equations», «International Journal of Biomathematics and Biostatistics», «Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна, Серія «Математика, прикладна математика і механіка».

Под руководством Игоря Дмитриевича выполнено семь кандидатских диссертаций (А.Резуненко, А.Рекало, А.Щербина, Т.Фастовская, И.Рыжкова, Е.Набока, М.Потёмкин). Он своим примером воспитывал в учениках самостоятельность в исследованиях и, в тоже время, всегда был готов помочь советом.

Игорь Дмитриевич был принципиальным, открытым человеком, замечательным ученым и учителем. Таким он останется в нашей памяти и сердцах.

Коробов В.И., Резуненко А.В., Рекало А.М., Рыжкова И.А., Фастовская Т.Б., Хруслов Е.Я., Щербина В.А.

Монографии И.Д.Чуешова:

1. И.Д.Чуешов, Введение в теорию бесконечномерных диссипативных систем Акта, Харьков, 1999, 432 с. (английский перевод: Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems, Acta, Kharkov, 2002. ISBN: 966-7021-23-8. <http://www.emis.de/monographs/Chueshov>).
2. I.D. Chueshov, Monotone Random Systems. Theory and Application, (Lecture Notes in Mathematics, 1779). Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2002, 234 p. ISBN: 3-540-43246-9. DOI: [10.1007/b83277](https://doi.org/10.1007/b83277)
3. I. Chueshov and I. Lasiecka, Long-time behaviour of second order evolution equations with nonlinear damping, Memoirs of AMS no 912, Amer.Math.Soc., Providence, RI, 2008, 183 p. ISBN: 978-0-8218-4187-7
4. I. Chueshov and I. Lasiecka, Von Karman Evolution Equations, Well-Posedness and Long-Time Dynamics, 2010, Springer, 778 p. ISBN: 978-0-387-87711-2. DOI: [10.1007/978-0-387-87712-9](https://doi.org/10.1007/978-0-387-87712-9)
5. I. Chueshov, Dynamics of Quasi-Stable Dissipative Systems, 2015, Springer, 390p. ISBN: 978-3-310-22902-7; 978-3-319-22903-4. DOI: [10.1007/978-3-319-22903-4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-22903-4)

ДУБОВОЙ ВЛАДИМИР КИРИЛЛОВИЧ

К семидесятилетию со дня рождения



19 июля 2016 года исполнилось 70 лет профессору кафедры фундаментальной математики, известному специалисту в области теории функций и теории операторов, Владимиру Кирилловичу Дубовому.

Владимир Кириллович родился в г. Полтаве в семье военнослужащего, штурмана дальней бомбардировочной авиации. В 1963г. после окончания школы в г. Харькове он поступает на механико-математический факультет ХГУ. С 4-го курса обучение и становление молодого математика проходило под руководством М. С. Лившица, выдающегося специалиста по теории несамосопряжённых и неунитарных операторов, который и стал его научным руководителем в аспирантуре. В 1972г. В. К. Дубовой защитил кандидатскую, а в 2004г. – докторскую диссертации. В разные годы он трудился на кафедрах математической физики, математического анализа, возглавлял кафедру высшей математики физического факультета. Читаемые им курсы продуманы до мельчайших деталей, а его лекторское мастерство высоко оценило уже не одно поколение студентов.

Владимир Кириллович – автор глубоких исследований в теории матричных интерполяционных задач анализа, создатель принципиально новых подходов к решению матричной проблемы Шура, к изучению рассеяния по внутренним каналам открытой системы и к исследованию явления псевдопродолжимости шуровской функции.

В аспирантский период В. К. Дубовым были описаны свойства релятивистски инвариантных открытых систем. Ещё до окончания аспирантуры, в 1971г., эти важные результаты в виде написанных им двух отдельных глав были включены М. С. Лившицем и А. А. Янцевичем в их монографию "Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах".

Во второй половине 70-х годов, отвечая на поставленные В. П. Потаповым вопросы, Владимир Кириллович начинает цикл исследований по матричной интерполяционной задаче Шура и непосредственно связанной с ней теории вполне неунитарных сжатий в гильбертовых пространствах. Синтезируя идеи J -теории В. П. Потапова с аппаратом, разработанным М. С. Лившицем,

Б. Сёкефальви-Надем и Ч. Фояшем, В. К. Дубовой предложил новые эффективные методы решения матричной интерполяционной задачи Шура. Им введено понятие подпространства типа K , позволившее ему дать конструктивное описание решений вырожденной задачи Шура непосредственно по данным задачи. Им были также установлены связи между асимптотическим поведением радиусов кругов Вейля в задаче Шура и максимальными односторонними сдвигом и косдвигом, содержащимися в соответствующем вполне унитарном сжатии. На этом пути были получены факторизации предельных радиусов Вейля. При этом оказалось, что внешние функции, появляющиеся в этих факторизациях и названные В. К. Дубовым дефектными, играют ключевую роль в теории рассеяния с потерями, которая ранее была построена в работах Д. З. Арова.

В 90-е годы, развивая идеи В. М. Адамяна и Д. З. Арова в теории унитарных сцеплений, В. К. Дубовой и С. С. Бойко предлагают новый подход к изучению рассеяния в системах с потерями, что позволило им дать в общем случае аналитическое описание субоператора рассеяния по внутренним каналам открытой системы, который был ранее введен Д. З. Аровым и изучался им в специальных случаях. Позже, в совместных работах с А. Я. Хейфецем, ими был получен явный вид этого субоператора через матрицу рассеяния системы и её дефектные функции.

Во второй половине 90-х годов Д. З. Аров обратил внимание Владимира Кирилловича на близость его исследований по задаче Шура к проблематике псевдопродолжения шуровских функций. Это послужило толчком к разработке им новых методов в терминах параметров Шура, позволивших получить глубокие критерии псевдопродолжимости шуровских функций. В этих же терминах получен критерий того, что невнутренняя функция класса Шура является рациональной. Ранее, ещё в 1917г., описание параметров Шура рациональных внутренних функций дал И. Шур в своей известной работе. В. К. Дубовой совместно с немецкими коллегами Б. Кирстайном и Б. Фритцше получил также описание важного в анализе класса мер Хельсона-Сегё в терминах параметров Шура ассоциированной шуровской функции.

В. К. Дубовой — автор более 50 научных работ, научный руководитель кандидатских диссертаций Л. А. Галстяна (совместно с В. П. Потаповым), С. Н. Зиненко, Рамадана К. Мохаммеда, С. С. Бойко. Итогом его сотрудничества с Б. Кирстайном и Б. Фритцше стала совместная с ними монография "Matricial version of the classical Schur problem".

Владимир Кириллович активно продолжает свою научную и педагогическую деятельность. Мы от всей души поздравляем его с юбилеем и желаем новых творческих успехов.

*Арминский Ю. М., Аров Д. З., Бойко С. С., Голинский Л. Б., Держач В. А.,
Дюкарев Ю. М., Зиненко С. Н., Золотарёв В. А., Кацнельсон В. Э.,
Кирстайн Б., Коробов В. И., Руткас А. Г., Сажнович А. Л., Фаворов С. Ю.,
Фритцше Б., Хейфец А. Я., Янцевич А. А.*

Правила для авторів
«Вісника Харківського національного університету
імені В.Н.Каразіна»,
Серія «Математика, прикладна математика і механіка»

Редакція просить авторів при направленні статей керуватися наступними правилами.

1. В журналі публікуються статті, що мають результати математичних досліджень.

2. Представленням статті вважається отримання редакцією двох екземплярів статті, анотацій, відомостей про авторів та архіва, що включає LATEX файли статті та файли малюнків.

3. Редакція приймає статті українською, російською або англійською мовами. Стаття має бути оформлена у редакторі LATEX (версія 2e). Файл-зразок оформлення статті можна знайти в редакції журналу та на веб-сторінці (<http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>). Стаття повинна починатися з коротких анотацій (не більше 10 строк), в яких повинні бути чітко сформульовані ціль та результати роботи. Анотації повинні бути трьома мовами (українською, російською та англійською): першою повинна стояти анотація на тій мові, якою є основний текст статті. В анотації повинні бути прізвища, ініціали авторів, назва роботи, міжнародна математична класифікація (Mathematics Subject Classification 2010). Анотація не повинна мати посилання на літературу та малюнки.

4. Приклади оформлення списку літератури:

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1960. 471 с.

2. Понтрягин Л.С. О нулях некоторых трансцендентных функций. // Изв. АН СССР, Сер.матем., 1942. 6. С. 115-134.

5. Кожний малюнок повинен бути пронумерований та представлений окремим файлом в одному з форматів: EPS, BMP, JPG. В файлі статті малюнок повинен бути вставлений автором. Під малюнком повинен бути підпис.

6. Відомості про авторів повинні містити: прізвища, ім'я, по батькові, службова адреса та номери телефонів, адреса електронної пошти. Прохання також повідомити прізвище автора, з яким треба вести переписку.

7. Рекомендуємо використовувати останні випуски журналу (vestnik-math.univer.kharkov.ua/currentv.htm) в якості зразка оформлення.

8. У випадку порушення правил оформлення редакція не буде розглядати статтю.

Електронна скринька: vestnik-khnu@ukr.net

Електронна адреса в Інтернеті: <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>

Visit our Web-page

<http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/>

to find

- **Information for Manuscript Preparation**
- **Editorial Board**
- **Abstracts**
- **Full-texts available (PDF)**

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна,
Том 83, Серія “Математика, прикладна математика і механіка”

Збірник наукових праць

Російською, українською, англійською мовами

Підписано до друку 28. 11. 2016 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.

Ум. друк. арк. 3,9

Обл.– вид. арк. 4,5

Наклад 100 пр.

Ціна договірна

61022, м.Харків, майдан Свободи, 4, Харківський національний університет
імені В.Н.Каразіна

Надруковано: ХНУ імені В.Н.Каразіна

61022, м.Харків, майдан Свободи, 4, тел. 705-24-32

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09