ISSN 2221-5646

Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна

№ 1133

Серія

«Математика, прикладна математика і механіка»

Випуск 70

Заснована у 1965 р.

Харків

2014

До Віснику включено статті з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (протокол №11 від 24 листопада 2014 р.).

Адреса редакційної колегії: 61022, Харків, майдан Свободи, 4,
ХНУ імені В.Н. Каразіна, механіко-математичний факультет, к.7-27.
Тел. 7075240, 7075135, Email: vestnik@univer.kharkov.ua
Интернет:
http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 11825-696 ПР від 04.10.2006 р.

ЗМІСТ

CONTENTS

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.94 № 1133, 2014, с.4–35

Attractor for a composite system of nonlinear wave and thermoelastic plate equations

T. B. Fastovska
V.N. Karazin Kharkiv National University,
Svobody Sq. 4, 61022, Kharkiv, Ukraine
fastovskaya@karazin.ua

We prove the existence of a compact finite dimensional global attractor for a coupled PDE system comprising a nonlinearly damped semilinear wave equation and a thermoelastic Mindlin-Timoshenko plate system with nonlinear viscous damping. We show the upper semi-continuity of the attractor with respect to the parameters related to the coupling terms and the shear modulus of the plate.
Keywords: acoustic model, attractor, upper semi-continuity.

Фастовская Т. Б., **Глобальный аттрактор нелинейной системы для волнового уравнения и термоупругой системы колебания пластин.** Доказывается существование конечномерного компактного глобального аттрактора системы, состоящей из нелинейного волнового уравнения с нелинейным демпингом и системы Миндлина-Тимошенко, описывающей акустическую камеру с упругой стенкой. Доказана верхняя полунепрерывность аттрактора по параметрам задачи.
Ключевые слова: модель акустики, аттрактор, верхняя полунепрерывность.

Фастовська Т. Б., **Глобальний атрактор нелінійної системи для хвильового рівняння та термопружної системи коливання пластин.** Доведено існування скінченномірного компактного глобального атрактора системи, що складається з нелінійного хвильового рівняння з нелінійним демпінгом та системи Міндліна-Тимошенка, що описує акустичну камеру з пружною стінкою. Доведено верхню напівнеперервність атрактора за параметрами задачі.
Ключові слова: модель акустики, атрактор, верхня напівнеперервність.

2000 Mathematics Subject Classification 35B25, 35B40.

Introduction

The mathematical model considered consists of a semilinear wave equation defined on a bounded domain, which is strongly coupled with thermoelastic Mindlin-Timoshenko plate equation on a part of the boundary. The model includes a weak structural damping and a thermal damping. This kind of models referred to as structural acoustic interactions, arise in the context of modelling gas pressure in an acoustic chamber which is surrounded by a combination of rigid and flexible walls (see, e.g. [13, 22]). The pressure in the chamber is described by the solution to a wave equation, while vibrations of the flexible wall are described by the solution to a plate equation. The Mindlin-Timoshenko model describes dynamics of a plate in view of transverse shear effects (see, e.g., [15, 24] and references therein).

More precisely, let $\Omega \in \mathbb{R}^3$ be a smooth bounded open domain with the boundary $\partial\Omega =: \Gamma = \overline{\Gamma_0 \cup \Gamma_1}$ consisting of two open (in the induced topology) connected disjoint parts Γ_0 and Γ_1 of positive measure. Γ_0 is flat and is referred to as the elastic wall. The dynamics of the acoustic medium in the chamber Ω is described by a interactive system of a semilinear wave equation and a Mindlin-Timoshenko system of thermoelasticity:

$$z_{tt} + g(z_t) - \Delta z + f(z) = 0,\ x \in \Omega, t > 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial n} = 0,\ x \in \Gamma_1,\ \frac{\partial z}{\partial n} = \kappa w_t,\ x \in \Gamma_0 \tag{2}$$

$$v_{tt} - \mathcal{A}v + \mu(v + \nabla w) + \beta\nabla\theta + b(v_t) + v[h(|v|^2) + \gamma w] = 0\ x \in \Gamma_0, t > 0, \tag{3}$$

$$w_{tt} - \mu\mathrm{div}(v + \nabla w) + b_0(w_t) + h_0(w) + \kappa z_t = 0, \tag{4}$$

$$\theta_t - \Delta\theta + \beta\mathrm{div} v_t = 0 \tag{5}$$

$$v = w = \theta = 0\ \ \partial\Gamma_0 \tag{6}$$

supplemented with initial conditions:

$$\begin{array}{c} z(0,\cdot) = z_0,\ \ z_t(0,\cdot) = z_1, \\ v(0,\cdot) = v_0,\ \ v_t(0,\cdot) = v_1, \\ w(0,\cdot) = w_0,\ \ w_t(0,\cdot) = w_1,\ \ \theta(0,\cdot) = \theta_0. \end{array} \tag{7}$$

The variable z describes the dynamics in the acoustic medium, while v denotes the angles of deflection of the filaments, w - the transverse displacement of the middle surface, and θ - the temperature variation averaged with respect to the thickness of the plate. The operator $\mathcal{A}$ is defined as follows

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1} + \frac{1-\nu}{2}\partial^2_{x_2} & \frac{1+\nu}{2}\partial_{x_1x_2} \\ \frac{1+\nu}{2}\partial_{x_1x_2} & \frac{1-\nu}{2}\partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2} \end{pmatrix} = \nabla\mathrm{div} - \frac{1-\nu}{2}\mathrm{rotrot},$$

where $0 < \nu < 1$ is the Poisson ratio.

The non-decreasing functions $b(s)$, $b_0(s)$, and $g(s)$ describe the dissipation effects in the model, the terms $f(z)$, $h(v)$, $h_0(w)$, $vw \cdot v$ represent nonlinear forces acting on the wave and on the plate components respectively. The boundary term $\kappa z_t|_{\Gamma_0}$ represents the pressure exercised by the acoustic medium on the wall.

The parameter $0 \leq \kappa \leq 1$ has been introduced to cover the case of non-interacting wave and plate equations ($\kappa = 0$), while the parameter $0 \leq \beta \leq 1$ - the case of decoupled plate and heat conduction equations. The parameter $\mu > 0$ describes the shear modulus of the plate.

Due to broad engineering applications in aerospace industry, structural acoustic models have recently attracted an ample attention. A very large literature devoted to this model in the context of the control theory, (see e.g. the monograph [16] and references therein). The investigation of the uniform stability of structural acoustic models with thermoelastic wall in the case of a single equilibrium can be found in [17, 18, 19, 21]. The nonlinear structural acoustic model with thermal effects and without mechanical dissipation in the plate component comprising wave and thermoelastic Berger's equations has been studied in [2] in that the existence of a compact global attractor and it's properties were investigated. The same results were obtained for the wave/ Berger's system with mechanical damping without thermal effects [3]. Long-time behavior of a nonlinear structural acoustic model comprising wave and thermoelastic von Karman plate equations has been studied in [9]. We also refer to the paper [23] devoted to the problem of dynamics of a clamped von Karman plate in a gas flow in the presence of thermal effects. The existence and upper semicontinuity of attractors of the elastic and thermoelastic Mindlin-Timoshenko plate system were studied in [5, 10].

We consider the nonlinear acoustic model comprising wave and Mindlin-Timoshenko equations with thermal effects with and without non-conservative nonlinearity in the plate part.
The paper is organized as follows. Section 1 is devoted to the conservative system with monotone energy. We begin with the abstract formulation of the problem and its well-posedness. Our first main result, Theorem 3 states the existence of global attractors for problem (1)-(7) under rather general conditions on the nonlinearities. Since the dynamical system generated by the system without non-conservative nonlinearity is gradient, the main issue to be explored is the asymptotic compactness of the semi-flow. To show this property we use the idea due to Khanmamedov [14] in the form suggested in [8]. In comparison to the acoustic interaction with the Berger's and von Karman plate [3, 9] the existence of the compact global attractor requires the additional condition on the nonlinear damping referred to the elastic component (see Statement 3).

The next main results, Theorem 5 concerns the finite dimensionality of the attractors.

The main result of Section 2, Theorem 9, concerning problem (1)-(7) is the upper semicontinuity of the attractors with respect to the shear modulus and the coupling parameters. In contrast to the system considered in [2] the attractor is upper-semicontinuous not only with respect to the parameter decoupling wave and plate components but also with respect to the parameter decoupling plate and thermal components.

In Section 3 we establish the same results for the system with non-conservative nonlinearity. Due to the lost of monotonicity of the energy the existence of an absorbing ball is proved supplementary.

System with conservative forces ($\gamma = 0$).

In this section we consider the conservative model (the case $\gamma = 0$), which implies the monotonicity of the energy.

Basic assumptions. We impose the following basic assumptions on the nonlinearities of the problem. Note that the listed assumptions on the nonlinearities f, g and b_i, i=0,1,2 were first formulated in [9, Section 6.3, 12.3].

Statement 1

- *$g \in C(\mathbb{R})$ is a non-decreasing function, $g(0) = 0$, and there exists a constant $C > 0$ such that*

$$|g(s)| \leq C(1 + |s|^p), s \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

where $1 \leq p \leq 5$.

- *$f \in Lip_{loc}(\mathbb{R})$ and there exists a positive constant M such that*

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq M(1 + |s_1|^q + |s_2|^q)|s_1 - s_2|, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

where $q \leq 2$. Moreover,

$$\lambda = \frac{1}{2} \lim_{|s|\to\infty} \inf \frac{f(s)}{s} > 0 \tag{10}$$

.

- *$h \in Lip_{loc}(\mathbb{R}_+), h_0 \in Lip_{loc}(\mathbb{R})$ and there exists a positive constant M_1 such that*

$$|h(s_1) - h(s_2)| \leq M_1(1 + s_1^{q_1} + s_2^{q_1})|s_1 - s_2|, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}_+, \tag{11}$$

and

$$|h_0(s_1) - h_0(s_2)| \leq M(1 + |s_1|^{q_2} + |s_2|^{q_2})|s_1 - s_2|, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

where $q_1, q_2 \geq 0$. and

$$h^* = \lim_{s\to\infty} \inf \frac{h(s)}{s} > 0, \quad h_0^* = \lim_{|s|\to\infty} \inf \frac{h_0(s)}{s} > 0. \tag{13}$$

- *$b \in C(\mathbb{R}^2)$, $b_0 \in C(\mathbb{R})$ are non-decreasing functions such that $b(0) = 0$, $b_0(0) = 0$.*

Statement 2 *For any $\varepsilon > 0$ there exists c_ε such that $s \in \mathbb{R}$*

- $$s^2 \le \varepsilon + c_\varepsilon s g(s), \quad s \in \mathbb{R} \tag{14}$$

- $$s^2 \le \varepsilon + c_\varepsilon s b_0(s), \quad s \in \mathbb{R}, \qquad |s|^2 \le \varepsilon + c_\varepsilon s b(s), \quad s \in \mathbb{R}^2 \tag{15}$$

Statement 3 • *There exist $C > 0$ and $1 \le p, p_0 < \infty$ such that*

$$|b(s)| \le C(1 + |s|^p), s \in \mathbb{R}^2, \qquad |b_0(s)| \le C(1 + |s|^{p_0}), s \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Statement 4 • *There exist positive constants $m > 0$, $M > 0$ such that*

$$m \le \frac{g(s_1) - g(s_2)}{s_1 - s_2} \le M(1 + s_1 g(s_1) + s_2 g(s_2))^{2/3}, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}, s_1 \ne s_2. \tag{17}$$

- *There exist $m_i > 0$, $M_i > 0$, $i = 1, 2$ such that*

$$m_1 |s_1 - s_2|^2 \le (b(s_1) - b(s_2))(s_1 - s_2), \tag{18}$$

$$\frac{b_j(s_1) - b_j(s_2)}{s_1 - s_2} \le M_1(1 + s_1 b_j(s_1) + s_2 b_j(s_2)), \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}, s_1 \ne s_2, \tag{19}$$

where $j = 1, 2$, $b = (b_1, b_2)$.

$$m_2 \le \frac{b_0(s_1) - b_0(s_2)}{s_1 - s_2} \le M_2(1 + s_1 b_0(s_1) + s_2 b_0(s_2)), \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}, s_1 \ne s_2. \tag{20}$$

- *$f \in C^2(\mathbb{R})$,*

$$|f''(s)| \le C(1 + |s|), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

- *$h_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^2(\mathbb{R}_+)$ and there exists a constant $c > 0$ and $1 \le p_2 < \infty$, $1 \le p_3 < \infty$ such that*

$$|h''(s)| \le c(1 + s^{p_2}), \; s \in \mathbb{R}_+ \tag{22}$$

and

$$|h_0''(s)| \le c(1 + |s|^{p_3}), \; s \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

Abstract formulation. We represent the system (1)-(7) as an abstract evolution equation in an appropriate Hilbert space. For this purpose we introduce the following spaces and operators.Denote $u = (v, w) = (v_1, v_2, w)$.

Let $A : \mathcal{D}(A) \subset [L_2(\Gamma_0)]^3 \to [L_2(\Gamma_0)]^3$ be the positive self-adjoint operator on $\mathcal{D}(A) = [H^2 \cap H_0^1(\Gamma_0)]^3$ defined by

$$A = \begin{pmatrix} -\mathcal{A} + \mu I & \mu \nabla \\ -\mu div & -\mu \Delta \end{pmatrix}$$

Define also a positive self-adjoint operator $L : \mathcal{D}(L) \in L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ by the formula

$$L = -\Delta + \lambda I,$$

with

$$\mathcal{D}(L) = \{H^2(\Omega) : \frac{\partial}{\partial n}|_\Gamma = 0\}$$

and λ is given by (9). Next, let N_0 be the Neumann map from $L_2(\Gamma_0)$ to $L_2(\Omega)$ defined by

$$\psi = N_0\phi \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (-\Delta + \lambda)\psi = 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial n}|_{\Gamma_0} = \phi, \frac{\partial\psi}{\partial n}|_{\Gamma_1} = 0 \end{array} \right.$$

It is well-known [20] that N_0 is continuous from $L_2(\Gamma_0)$ to $H^{3/2}(\Omega) \subset \mathcal{D}(A^{3/4-\epsilon})$, for any $\epsilon > 0$, and the following trace result takes place

$$N_0^* Lh = h|_{\Gamma_0}, \quad h \in \mathcal{D}(A^{1/2}). \tag{24}$$

We also introduce the operators $R_1 : H_0^1(\Gamma_0) \to [L_2]^3(\Gamma_0)$ and $R_2 : [H_0^1]^2(\Gamma_0) \to L_2(\Gamma_0)$ defined by the formulas

$$R_1\theta = \beta(\partial_1\theta, \partial_2\theta, 0)$$

and

$$R_2 = \beta\partial_1 v_1 + \beta\partial_2 v_2 = \beta divv.$$

Now we are at the point to give the abstract formulation of problem (1)-(7). With the above dynamic operators initial-value problem (1)-(7) can be rewritten as follows

$$z_{tt} + G(z_t) + Lz + F_1(z) - \kappa L N_0 u_t = 0, \ x \in \Omega, t > 0, \tag{25}$$

$$Du_{tt} + Au + R_1\theta + B(u_t) + F_2(u) + \kappa N_0^* L z_t = 0 \tag{26}$$

$$\gamma_1\theta_t - \Delta\theta + R_2 u_t = 0 \tag{27}$$

$$z(0) = z_0, \ \ z_t(0) = z_1, \ \ u(0) = u_0, \ \ u_t(0) = u_1, \ \ \theta(0) = \theta_0. \tag{28}$$

where the nonlinear terms are given by the following operators

$$G(h) = g(h),$$

$$B(u) = (b(v), b_0(w)),$$

here $u = (v, w)$. Denote

$$\Pi(z) = \int_\Omega \int_0^z (f(\xi) - \lambda\xi) d\xi dx. \tag{29}$$

Then

$$F_1(z) = \Pi'(z). \tag{30}$$

The term $F_2(u)$ is represented as follows

$$F_2(u) = (v_1 h(|v|^2), v_2 h(|v|^2), h_0(w)). \tag{31}$$

Denote

$$\Pi_0(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^{|v|^2} h(s)dsdx + \int_\Omega \int_0^{w} h_0(s)ds, \tag{32}$$

It follows from (10) and (13) that

$$\Pi(z) \geq -M_f \tag{33}$$

$$\Pi_0(u) \geq -M_h \tag{34}$$

for some nonnegative constants M_f and M_h. The natural energy functions associated with the solutions to the uncoupled wave and plate models are given respectively by

$$\mathcal{E}_z(z(t), z_t(t)) = E_z^0(z, z_t) + \Pi(z) \tag{35}$$

and

$$\mathcal{E}_{u,\theta}(u(t), u_t(t)) = E_u^0(u, u_t) + E_\theta^0(\theta) + \Pi_0(u). \tag{36}$$

Here we have set

$$E_z^0(z, z_t) = \frac{1}{2}(\|L^{1/2}z\|_\Omega^2 + \|z_t\|_\Omega^2), \tag{37}$$

$$E_u^0(u, u_t) = \frac{1}{2}(\|Au\|_{\Gamma_0}^2 + \|u_t\|_{\Gamma_0}^2), \tag{38}$$

and

$$E_\theta^0(\theta) = \frac{1}{2}\|\theta\|_{\Gamma_0}^2. \tag{39}$$

Denote also

$$E_z(z, z_t) = E_z^0(z, z_t) + \Pi(z) + M_f, \tag{40}$$

$$E_{u,\theta}(u, u_t, \theta) = E_u^0(u, u_t) + E_\theta^0(\theta) + \Pi_0(u) + M_h, \tag{41}$$

Finally we introduce the total energy $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(z(t), z_t(t), u(t), u_t(t), \theta(t))$ of the system

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_z(z, z_t) + \mathcal{E}_{u,\theta}(u, u_t, \theta), \tag{42}$$

where $\mathcal{E}_z(z, z_t)$ and $\mathcal{E}_{u,\theta}(u, u_t, \theta)$ are given by (35) and (36) respectively. Denote also

$$E^0(t) = E(z, z_t, u, u_t, \theta) = E_z^0(z, z_t) + E_u^0(u, u_t) + E_\theta^0(\theta). \tag{43}$$

The positive part of the total energy is given by

$$E(t) = E(z, z_t, u, u_t, \theta) = E_z(z, z_t) + E_{u,\theta}(u, u_t, \theta), \tag{44}$$

where $E_z(z, z_t)$ and $E_{u,\theta}(u, u_t, \theta)$ are given by (40) and (41) respectively.

It follows from (33) and (34) that there exist positive constants c, C, M_0 such that

$$cE(t) - M_0 \le \mathcal{E}(t) \le CE(t) + M_0 \tag{45}$$

The phase spaces Y_1 for the acoustic component $[z, z_t]$ and Y_2 for the plate component $[u, u_t, \theta]$ of system are given by

$$Y_1 = \mathcal{D}(L^{1/2}) \times L_2(\Omega) = H_1(\Omega) \times L_2(\Omega)$$

and

$$Y_2 = \mathcal{D}(A^{1/2}) \times [L_2(\Gamma_0)]^3 \times L_2(\Gamma_0) = [H_0^1(\Gamma_0)]^3 \times [L_2(\Gamma_0)]^3 \times L_2(\Gamma_0)$$

with the norms

$$\|(z_1, z_2)\|_{Y_1}^2 = \|L^{1/2} z_1\|_\Omega^2 + \|z_2\|_\Omega^2$$

and

$$\|(u_1, u_2, \theta)\|_{Y_2}^2 = \|A^{1/2} u_1\|_{\Gamma_0}^2 + \|D^{1/2} u_2\|_{\Gamma_0}^2 + \|\theta\|_{\Gamma_0}^2$$

respectively. The phase space for the problem (25)-(28) is defined as

$$H = Y_1 \times Y_2 \tag{46}$$

with the norm

$$\|y\|_H^2 = \|(z_1, z_2)\|_{Y_1}^2 + \|(u_1, u_2, \theta)\|_{Y_2}^2$$

for $y = (z_1, z_2, u_1, u_2, \theta)$ and the corresponding inner product.

Well-posedness.

Definition 1 *A triplet of functions $(z(t), u(t), \theta(t))$ which satisfy initial conditions (28) and such that*

$$(z(t), u(t)) \in C([0,T]; \mathcal{D}(L^{1/2}) \times \mathcal{D}(A^{1/2})) \cap C^1([0,T]; L_2(\Omega) \times [L_2(\Gamma_0)]^3)$$

and

$$\theta(t) \in C([0,T]; L_2(\Gamma_0))$$

is said to be

(S) *a strong solution to problem (25)-(28) on the interval $[0, T]$, iff*

- *for any $0 < a < b < T$*

$$(z_t, u_t) \in L_1([a,b], \mathcal{D}(L^{1/2}) \times \mathcal{D}(A^{1/2})), \;\; \theta_t \in L_1([a,b], L_2(\Gamma_0))$$

  and

$$(z_{tt}, u_{tt}) \in L_1([a,b], L_2(\Omega) \times [L_2(\Gamma_0)]^3)$$

- *$L[z(t) - \alpha\kappa N_0 u_t] + G(z_t(t)) \in L^2(\Omega)$, $u(t) \in D(A)$, $\theta \in H^2 \cap H_0^1(\Gamma_0)$ for almost all $t \in [0, T]$*

- *equations (25)-(27) are satisfied in* $L_2(\Omega) \times L_2(\Gamma_0) \times L_2(\Gamma_0)$ *for almost all* $t \in [0, T]$

(G) *a generalized solution to problem (25)-(28) on the interval* $[0, T]$*, iff there exists a sequence* $\{(z_n(t), u_n(t), \theta_n(t))\}$ *of strong solutions to (25)-(28) with initial data* $(z_n^0, z_n^1, u_n^0, u_n^1, \theta_n^0)$ *such that*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \{\|\partial_t z(t) - \partial_t z_n(t)\|_\Omega + \|L^{1/2}(z(t) - z_n(t))\|_\Omega\} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \{\|D^{1/2}(\partial_t u(t) - \partial_t u_n(t))\|_{\Gamma_0} + \|A^{1/2}(u(t) - u_n(t))\|_{\Gamma_0}\} = 0$$

and

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \{\|\theta(t) - \theta_n(t)\|_{\Gamma_0}\} = 0$$

Theorem 1 *Under Assumptions 1, 3 for any initial conditions*

$$y_0 = (z^0, z^1, u^0, u^1, \theta^0) \in H$$

there exists a unique generalized solution $y(t) = (z(t), z_t(t), u(t), u_t(t), \theta(t))$ *to the PDE system (25)-(28), which depends continuously on initial data. This solution satisfies the energy inequality*

$$\mathcal{E}(t) + \int_s^t (G(z_t), z_t)_\Omega d\tau + \int_s^t (B(u_t), u_t)_{\Gamma_0} d\tau + \int_s^t \|\nabla\theta\|^2_{\Gamma_0} d\tau \le \mathcal{E}(s), \quad 0 \le s \le t, \quad (47)$$

with the total energy $\mathcal{E}(t)$ *given by (42). Moreover, the generalized solution to problem (25)-(28) is also weak, i.e. it satisfies the following system of variational equations:*

$$\frac{d}{dt}(z_t, \phi)_\Omega + (L^{1/2}z, L^{1/2}\phi)_\Omega + (g(z_t), \phi)_\Omega - \kappa(u_t, N_0^*\phi)_{\Gamma_0} + (f(z), \phi)_\Omega = 0 \quad (48)$$

$$\frac{d}{dt}(u_t + \kappa z, \psi)_{\Gamma_0} + (A^{1/2}u, A^{1/2}\psi)_{\Gamma_0} + (B(u_t), \psi)_{\Gamma_0} + (F_2(u), \psi)_{\Gamma_0} + (R_1\theta, \psi)_{\Gamma_0} = 0 \quad (49)$$

$$\frac{d}{dt}(\theta, \chi)_{\gamma_0} + (\nabla\theta, \nabla\chi)_{\Gamma_0} + (R_2 u_t, \chi)_{\Gamma_0} = 0 \quad (50)$$

for any $\phi \in H^1(\Omega)$, $\psi \in [H_0^1]^3(\Gamma_0)$*, and* $\chi \in H_0^1(\Gamma_0)$ *in the sense of distributions. If initial data are such that*

$$z^0, z^1 \in \mathcal{D}(L^{1/2}), \quad u^0 \in \mathcal{D}(A), \quad u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \theta^0 \in (H^2 \cap H_0^1)(\Gamma_0),$$

and

$$L[z^0 - \kappa N_0 u^1] + G(z^1) \in L_2(\Omega)$$

then there exists a unique strong solution $y(t)$ satisfying the energy identity:

$$\mathcal{E}(t) + \int_s^t (G(z_t), z_t)_\Omega d\tau + \int_s^t (B(u_t), u_t)_{\Gamma_0} d\tau + \int_s^t \|\nabla\theta\|^2_{\Gamma_0} d\tau = \mathcal{E}(s), \quad 0 \le s \le t,$$

Both strong and generalized solutions satisfy the inequalities

$$\mathcal{E}(t) \le \mathcal{E}(s), \quad t \ge s, \tag{51}$$

and

$$E(z(t), z_t(t), u(t), u_t(t), \theta(t)) \le C(1 + E(z^0, z^1, u^0, u^1, \theta^0)), \tag{52}$$

where E is given by (44) and C does not depend on κ, μ, and β.

Proposition 1 *Theorem 1 enables us to define the dynamical system (H, S_t) with the phase space H given by (46) and with the evolution operator $S_t : H \to H$ defined by the formula*

$$S_t y_0 = (z(t), z_t(t), u(t), u_t(t), \theta(t)), \quad y_0 = (z^0, z^1, u^0, u^1, \theta^0)$$

where $(z(t), u(t), \theta(t))$ is a generalized solutions to problem (25)-(28). Moreover, the monotonicity of the damping operators G and B, the Lipschitz conditions on F_1 and F_2 and the energy bound in (52) implies that the semigroup S_t is locally Lipschitz on H. Namely, there exist $a > 0$ and $b(\rho) > 0$ such that

$$\|S_t y_1 - S_t y_2\|_H \le a e^{b(\rho)t} \|y_1 - y_2\|_H, \quad \|y_i\|_H \le \rho, \ t \ge 0. \tag{53}$$

Stationary points. It follows from (45) that the energy $\mathcal{E}(z_0, z_1, u_0, u_1, \theta_0)$ is bounded from below on H and $\mathcal{E}(z_0, z_1, u_0, u_1, \theta_0) \to +\infty$ when $\|(z_0, z_1, u_0, u_1, \theta_0)\|_H \to +\infty$. This implies that there exists $R_* > 0$ such that the set

$$W_R = \{y = (z_0, z_1, u_0, u_1, \theta_0) \in H : \mathcal{E}(z_0, z_1, u_0, u_1, \theta_0) \le R\}$$

is a non-empty bounded set in H for all $R \ge R_*$. Moreover, any bounded set $B \in H$ is contained in W_R for some R and it follows from (51) that the set is forward invariant with respect to the semi-flow S_t , i.e. $S_t W_R \subset W_R$ for all $t > 0$. Thus, we can consider the restriction (W_R, S_t) of the dynamical system (H, S_t) on W_R, $R \ge R_*$.

We introduce the set of stationary points of S_t denoted by $\mathcal{N}$,

$$\mathcal{N} = \{V \in H : S_t V = V,\ t \geq 0\}$$

Every stationary point has the form $V = (z, 0, u, 0, 0)$, where $z \in H^1(\Omega)$ and $u \in H_0^1(\Omega)$ are weak solutions to the problems

$$-\Delta z + f(z) = 0 \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma,$$

and

$$\begin{gathered} -\mathcal{A}v + \mu(v + \nabla w) + h(|v|^2)v = 0 \; x \in \Gamma_0, t > 0, \\ -\mu \mathrm{div}(v + \nabla w) + h_0(w) = 0, \\ v = w = \theta = 0 \;\; \partial\Gamma_0. \end{gathered}$$

It is clear that the set of stationary points does not depend on κ and μ. Therefore, one can easily prove the following assertion.

Lemma 1 *Under Assumption 1 the set $\mathcal{N}$ of stationary points for the semi-group S_t generated by problem (25)-(28) is a closed bounded set in H, and hence there exists $R_{**} \geq R_*$ (independent of κ, β, and μ) such that $\mathcal{N} \subset W_R$ for every $R \geq R_{**}$.*

Later we will also need the notion of unstable manifold $M^u(\mathcal{N})$ emanating from the set of stationary points.

Definition 2 *The unstable manifold $M^u(\mathcal{N})$ emanating from the set of stationary points $\mathcal{N}$ is a set of all $V \in H$ such that there exists a full trajectory $\bar{\gamma} = \{V(t) : t \in \mathbb{R}\}$ with the properties*

$$V(0) = V \quad \textit{and} \quad \lim_{t \to -\infty} dist_H(V(t), \mathcal{N}) = 0.$$

Existence of attractors. The main aim of the paper is to show the existence of a global attractor for the dynamical system generated by problem (25)-(28), and to study its properties.

By definition (see, e.g. [1, 6, 26]) a global attractor is a bounded closed set $\mathfrak{A} \subset H$ such that $S_t\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ for all $t \geq 0$ and

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{y \in \mathcal{B}} \mathrm{dist}(S_t y, \mathfrak{A}) = 0$$

for any bounded set $\mathcal{B} \in H$.

The fractal dimension

$$\dim_f M = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(M, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)},$$

where $N(M, \varepsilon)$ is the minimal number of closed sets of diameter 2ε which cover the set M.

To prove the existence of the compact global attractor of the dynamical system (H, S_t) we need to show some preliminary results.

Lemma 2 *Let Assumptions 1 and 3 hold. Assume that $y_1, y_2 \in H$, such that $\|y_i\|_H \le R, \quad i = 1,2$ and denote*

$$S_t y_1 = (d(t), d_t(t), \nu(t), \nu_t(t), \psi(t))$$

and

$$S_t y_2 = (\zeta(t), \zeta_t(t), \omega(t), \omega_t(t), \xi(t)).$$

Let

$$z(t) = d(t) - \zeta(t), \;\; u(t) = \nu(t) - \omega(t), \;\; \theta(t) = \psi(t) - \xi(t) \tag{54}$$

There exist $T_0 > 0$ and positive constants C_i, $i = \overline{1,4}$ and $C_5(R)$ independent of T, κ, μ, and β such that for every $T \ge T_0$ the following inequality holds:

$$\begin{aligned} TE^0(T) + \int_0^T E^0(t)dt \le C_1[(\int_0^T \|z_t\|^2 + \|\nabla\theta\|^2 + \|u_t\|^2 dt) \\ + G_0^T(z) + R_0^T(u)] + C_2 H_0^T(z) + C_3 Q_0^T(u) + C_4 \Psi_T(z,u) \\ + C_5(R) \int_0^T (\|z\|^2 + \|u\|^2)dt, \end{aligned} \tag{55}$$

where $E^0(t)$ is given by (43). We also introduce the notations

$$G_s^t(z) = \int_s^t (G(\zeta_t + z_t) - G(\zeta_t), \zeta_t)_\Omega d\tau, \tag{56}$$

$$H_s^t(z) = \int_s^t |(G(\zeta_t + z_t) - G(\zeta_t), \zeta)_\Omega d\tau, \tag{57}$$

$$R_s^t(u) = \int_s^t (B(\nu_t + u_t) - B(\nu_t), \nu_t)_{\Gamma_0} d\tau, \tag{58}$$

$$Q_s^t(u) = \int_s^t |(B(\nu_t + u_t) - B(\nu_t), \nu)_{\Gamma_0} d\tau, \tag{59}$$

and

$$\begin{aligned} \Psi_T(z,u) = |\int_0^T (\mathcal{F}_1(z), z_t)dt| + |\int_0^T \int_t^T (\mathcal{F}_1(u), u_t)d\tau dt| + |\int_0^T (\mathcal{F}_2(z), z_t)dt| \\ + |\int_0^T \int_t^T (\mathcal{F}_2(u), u_t)d\tau dt| \end{aligned} \tag{60}$$

with

$$\mathcal{F}_1(z) = F_1(\zeta + z) - F_1(\zeta), \quad \textit{and} \quad \mathcal{F}_2(u) = F_2(\omega + u) - F_2(\omega), \tag{61}$$

where F_1 and F_2 are the same as in (30), (31).

Proof. **Step 1 (Energy identity)** Without loss of generality, we can assume that $(d(t), \omega(t), \psi(t))$ and $(\zeta(t), \nu(t), \xi(t))$ are strong solutions. By (45) there exists a constant $C_R > 0$, independent of κ, μ, and β, such that

$$E_d^0(d(t), d_t(t)) + E_\zeta^0(\zeta(t), \zeta_t(t)) + E_\nu^0(\nu(t), \nu_t(t)) + E_\omega^0(\omega(t), \omega_t(t)) \\ + E_\psi^0(\psi(t)) + E_\xi^0(\xi(t)) \le C_R \tag{62}$$

for all $t \geq 0$. We establish first an energy type equality.

Lemma 3 *For any $T > 0$ and all $0 \le t \le T$ $E^0(t)$ satisfies*

$$E^0(T) + G_t^T(z) + R_t^T(u) + \int_t^T \|\nabla\theta\|^2 d\tau \\ = E^0(t) - \int_t^T (\mathcal{F}_1(z), z_t) d\tau - \int_t^T (\mathcal{F}_2(u), u_t) d\tau, \tag{63}$$

where $G_t^T(z)$ and $R_t^T(u)$ are given by (56), (58) while $\mathcal{F}_1(z)$ and $\mathcal{F}_2(u)$ are defined by (61).

Proof. It is easy to see that the differences (54) satisfy the following system of coupled equations

$$z_{tt} + G(z_t + \zeta_t) - G(\zeta_t) + Lz + \mathcal{F}_1(z) - \kappa L N_0 u_t = 0, \; x \in \Omega, t > 0, \tag{64}$$

$$Du_{tt} + Au + R_1\theta + B(u_t + \omega_t) - B(\omega_t) + \mathcal{F}_2(u) + \kappa N_0^* L z_t = 0 \tag{65}$$

$$\theta_t - \Delta\theta + R_2 u_t = 0. \tag{66}$$

By standard energy methods, taking the inner products in (64)-(66) with z_t, u_t and θ respectively, we obtain

$$E_z^0(T) + G_t^T(z) = E_z^0(t) - \int_t^T (\mathcal{F}_1(z), z_t)_\Omega d\tau + \kappa \int_t^T (L N_0 u_t, z_t)_\Omega d\tau, \; x \in \Omega, t > 0, \tag{67}$$

$$E_u^0(T) + R_t^T(z) = E_u^0(t) + \int_t^T (R_1\theta, u_t)_{\Gamma_0} d\tau \\ - \int_t^T (\mathcal{F}_2(u), u_t)_{\Gamma_0} d\tau + \kappa \int_t^T (N_0^* L z_t, u_t)_{\Gamma_0} d\tau = 0 \tag{68}$$

$$E_\theta^0(T) + \int_t^T \|\nabla\theta\|^2_{\Gamma_0} d\tau = E_\theta^0(t) - \int_t^T (R_2 u_t, \theta)_{\Gamma_0} d\tau = 0. \tag{69}$$

Then, collecting (67)-(69) we readily obtain the statement of the lemma.

Step 2. Reconstruction of the energy integral Multiplying equation (25) by z and integrating between 0 and T we obtain

$$\int_0^T \|L^{1/2}z\|^2 \le C(E_z^0(T) + E_z^0(0)) + \int_0^T \|z_t\|^2 dt + H_0^T(z) + \kappa \int_0^T |(u_t, N_0^* Lz)| dt + \int_0^T |(\mathcal{F}_1(z), z)| dt. \tag{70}$$

It follows from (9) that

$$|(\mathcal{F}_1(z), z)| \le C_R \|L^{1/2} z\|_\Omega \|z\|_\Omega. \tag{71}$$

Besides, using well-known interpolation results we get for $0 < \delta < 1/4$

$$|(u_t, N_0^* Lz)| \le \|u_t\|_{\Gamma_0} \|N_0^* L^{1/2+\delta}\| \|L^{1/2-\delta} z\|_\Omega \le \varepsilon \|u_t\|^2_{\Gamma_0} + \varepsilon_1 \|L^{1/2}z\|^2_\Omega + C_{\varepsilon,\varepsilon_1} \|z\|^2,$$

for any $\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$. Then, by appropriately choosing ε and ε_1 we obtain from (70) and (71) that

$$\int_0^T \|L^{1/2}z\|^2 dt \le C(E_z^0(T) + E_z^0(0)) + \varepsilon \int_0^T \|u_t\|^2 + 2\int_0^T \|z_t\|^2 dt + C_1 H_0^T(z) + C_2(R,\varepsilon) \int_0^T \|z\|^2 dt \tag{72}$$

for any $\varepsilon > 0$.

After multiplication (26) by u and integration between 0 and T

$$\int_0^T \|A^{1/2}u\|^2 \le C(E_u^0(T) + E_u^0(0)) + \int_0^T \|B^{1/2}u_t\|^2 dt + Q_0^T(u) + \int_0^T (\mathcal{F}_2(u), u) d + \int_0^T (R_1\theta, u) dt + \kappa \int_0^T (N_0^* L z_t, u) dt. \tag{73}$$

Multiplying equation (27) by $(-\Delta)^{-1}\theta$ and integrating between 0 and T we obtain

$$\int_0^T \|\theta\|^2 \le C(E_\theta^0(T) + E_\theta^0(0)) + C_3 \int_0^T \|u_t\|^2 dt \tag{74}$$

Combining (73) and (74) we arrive at

$$\int_0^T \|A^{1/2}u\|^2 dt + \int_0^T \|\theta\|^2 dt \le C(E_u^0(T) + E_u^0(0) + E_\theta^0(T) + E_\theta^0(0))$$
$$+ C_1(\int_0^T \|\nabla\theta\|^2 dt + \int_0^T \|u_t\|^2 dt) + Q_0^T(u) + C(R)\int_0^T \|z\|^2 dt$$
$$+ C(R)\int_0^T \|u\|^2 dt. \tag{75}$$

Collecting (72) and (75) we get

$$\int_0^T E^0(t)dt \le C(E^0(T) + E^0(0)) + C_1 \int_0^T (\|z_t\|^2 + \|u_t\|^2 + \|\nabla\theta\|^2)dt + C_2 H_0^T(z)$$
$$+ C_3 Q_0^T(u) + C_4(R)\int_0^T (\|z\|^2 + \|v\|^2)dt, \tag{76}$$

where $H_0^T(z)$ and $Q_0^T(u)$ are defined in (57) and (59). It follows from energy relation (63) that

$$E^0(0) = E^0(T) + G_0^T(z) + R_0^T(u) + \int_0^T \|\nabla\theta\|^2 dt$$
$$+ \int_0^T (\mathcal{F}_1(z), z_t)dt + \int_0^T (\mathcal{F}_2(u), u_t)dt \tag{77}$$

and

$$TE^0(T) \le \int_0^T E^0(t)dt - \int_0^T\int_t^T (\mathcal{F}_1(z), z_t)d\tau - \int_0^T\int_t^T (\mathcal{F}_2(u), u_t)d\tau \tag{78}$$

therefore, combining (77) and (78) with (76) we arrive at (55) .

To prove the existence of a compact global attractor of the dynamical system (H, S_t) we need to show that it is asymptotically smooth. We recall [11] that a dynamical system (H, S_t) is called asymptotically smooth iff for any bounded set $\mathcal{B}$ in H such that $S_t\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ for $t > 0$ there exists a compact set $\mathcal{K}$ in the closure $\overline{\mathcal{B}}$ of $\mathcal{B}$, such that

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{y\in\mathcal{B}} dist_X\{S_t y, \mathcal{K}\} = 0$$

In order to establish this property we apply the compactness criterion due to [14]. This result is recorded below in the abstract formulation given and used in [8].

Proposition 2 *Let (H, S_t) be a dynamical system on a complete metric space H endowed with a metric d. Assume that for any bounded positively invariant set $\mathcal{B}$ in H and for any $\epsilon > 0$ there exists $T = T(\epsilon, \mathcal{B})$ such that*

$$d(S_T y_1, S_T y_2) \le \epsilon + \Psi_{\epsilon,\mathcal{B},T}(y_1, y_2), \quad y_i \in \mathcal{B},$$

where $\Psi_{\epsilon,\mathcal{B},T}(y_1, y_2)$ is a nonnegative function defined on $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ such that

$$\liminf_{m\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \Psi_{\epsilon,\mathcal{B},T}(y_n, y_m) = 0 \tag{79}$$

for every sequence $\{y_n\}$ in $\mathcal{B}$. Then the dynamical system (H, S_t) is asymptotically smooth.

Lemma 4 *Let Assumptions 1-3 hold. Then, for any $\epsilon > 0$ and $T > 1$ there exist constants $C_\epsilon(R)$ and $C(R,T)$ such that*

$$E(T) \le \epsilon + \frac{1}{T}[C_\epsilon(R) + \Psi_T(z,u)] + C(R,T)lot(z,u), \tag{80}$$

where

$$lot(z,u) = \sup_{[0,T]}[\|z(t)\|_\Omega + \|u(t)\|_{\Gamma_0}]$$

Proof. To establish (80) we return to inequality (55) and proceed with the estimate of its right hand side. Preliminary we recall inequalities which hold under Assumptions 1 and 3 only (see, e.g. [3]). There exists a constant $C_0 > 0$ and such that

$$|(G(\zeta+z) - G(\zeta), h)| \le C_0[(G(\zeta),\zeta) + (G(\zeta+z), \zeta+z)]\|L^{1/2}h\| + C_0\|h\| \tag{81}$$

for any $\zeta, z, h \in \mathcal{D}(L^{1/2})$ and

$$|(B(\omega+u) - B(\omega), l)| \le C_0[(B(\omega),\omega) + (B(\omega+u), \omega+u)]\|A^{1/2}l\| + C_0\|l\| \tag{82}$$

for any $\omega, u, l \in \mathcal{D}(A^{1/2})$.

It follows readily from (81), (82) that

$$H_0^T(z) \le C_R + CTlot(z,u) \tag{83}$$

and

$$Q_0^T(z) \le C_R + CTlot(z,u). \tag{84}$$

Next, using Assumption 2 we get

$$\int_0^T (\|z_t\|_\Omega^2 + \|u_t\|_{\Gamma_0}^2 + \|\nabla\theta\|_{\Gamma_0}^2) \le \varepsilon T + C_\varepsilon(R) \tag{85}$$

for every $\varepsilon > 0$. On the other hand, taking $t = 0$ in (63) and using the fact that $E(0) \le C_R$, we get

$$G_0^T(z) + R_0^T(u) + \int_0^T \|\nabla\theta\|^2 dt \le$$

$$C_R + |\int_0^T (\mathcal{F}_1(z), z_t) d\tau| + |\int_0^T (\mathcal{F}_1(u), u_t) d\tau| \tag{86}$$

therefore, (80) follows from Lemma 2 and estimates (83)-(86).

Theorem 2 *Let Assumptions 1-3 hold. Then the dynamical system* (H, S_t) *generated by problem (25)-(28) is asymptotically smooth.*

Proof. It follows from Lemma 4 that given $\epsilon > 0$ there exists $T = T(\epsilon) > 1$ such that for initial data $y_1, y_2 \in \mathcal{B}$ we have

$$\|S_T y_1 - S_T y_2\|_H = \|(z(T), z_t(T), u(T), u_t(T), \theta(T))\|_H \le$$

$$C|E(T)|^{1/2} \le \epsilon + \Psi_{\epsilon,\mathcal{B},T}(y_1, y_2), \tag{87}$$

where

$$\Psi_{\epsilon,\mathcal{B},T}(y_1, y_2) = C_{\epsilon,\mathcal{B},T}\{\Psi_T(z,u) + lot(z,u)\}^{1/2}$$

where $\Psi_T(z,u)$ is given by (60) and satisfies (79) (see e.g. [3]). Then, by Proposition 1 (87) implies the statement of the theorem.

Our first main result provides the existence of a global attractor for problem.

Theorem 3 *Under Assumptions 1-3 the dynamical system* (H, S_t) *generated by problem (25)-(28) possesses a compact global attractor* $\mathfrak{A}$ *which coincides with the unstable manifold* $M^u(\mathcal{N})$ *emanating from the set* $\mathcal{N}$ *of stationary points for* S_t.

The proof is similar to that given in [3].

Stabilizability estimate. In this section we derive a stabilizability estimate which will play a crucial role in the proofs of both finite-dimensionality and regularity of attractors.

The following lemma can be found in [3].

Lemma 5 *Under Assumption 4 the following estimate holds true for some $\delta > 0$*

$$|\int\limits_t^T (\mathcal{F}_1(z), z_t)d\tau| \le C_{R,T} \max_{[0,T]} \|z\|^2_{1-\delta}$$
$$+ \varepsilon \int\limits_0^T \|L^{1/2}z\|^2 d\tau + C_\varepsilon(R) \int\limits_0^T (\|d_t(t)\|^2 + \|\zeta_t(t)\|^2)\|L^{1/2}z\|^2 d\tau$$

for all $t \in [0,T]$, where $\epsilon > 0$ can be taken arbitrarily small. Here, $\mathcal{F}_1$ is given by (61).

Now we state the analogue of Lemma 4 for the plate component which follows immediately from Assumption 1.

Lemma 6 *Under Assumptions 1 and 4 the following estimate holds true for all $t \in [0,T]$*

$$|\int\limits_t^T (\mathcal{F}_2(u), u_t)d\tau| \quad \le \quad C_R \max_{[0,T]} \|u\|^2 \; + \; \varepsilon \int\limits_0^T (\|\mathcal{A}^{1/2}u\|^2 \; + \; \|u_t\|^2)d\tau, \quad (88)$$

where $\varepsilon > 0$ can be taken arbitrarily small. Here, $\mathcal{F}_2$ is given by (61).

Now we are in position to estimate $\Psi_T(z,u)$ defined in (60).

Lemma 7 *For any $\varepsilon > 0$ the following estimate holds true*

$$\Psi_T(z,u) \le \epsilon \int\limits_0^T E^0(t)dt + C(T,R)\Sigma_T(z,u)$$

with $\Sigma_T(z,u)$ given by

$$\Sigma_T(z,u) = C \max_{[0,T]}(\|u\|^2_{1-\delta} + \|z\|^2_{1-\delta}) + \int\limits_0^T G_{d,\zeta}(\tau)\|L^{1/2}z\|^2 d\tau$$
$$+ \int\limits_0^T B_{\omega,\nu}(\tau)\|A^{1/2}u\|^2 d\tau, \quad (89)$$

here $G_{d,\zeta}$ is given by

$$G_{d,\zeta} = m^{-1}[(G(d(t)), d(t))_\Omega + (G(\zeta(t)), \zeta(t))_\Omega] \qquad (90)$$

Proof. It follows by the lower bound in (17) that $ms^2 \le sg(s)$, where $i = 1, 2$ and thus

$$\|d_t(t)\|^2_\Omega + \|\zeta_t(t)\|^2_\Omega \le G_{d,\zeta}, \quad \|\omega_t(t)\|^2_{\Gamma_0} + \|\nu_t(t)\|^2_{\Gamma_0} \le B_{\omega,\nu}.$$

Therefore, using Lemma 5 and Lemma 6 and the elementary inequality $\|\xi\| \le \epsilon + (4\epsilon)^{-1}\|\xi\|^2$, valid for arbitrary small $\epsilon > 0$, we obtain the statement of the lemma.

To proceed we need the following assertion

Lemma 8 *For any $T \ge T_0 > 0$ the following estimate holds true:*

$$TE^0(T) + \int_0^T E^0(t)dt \le C[G_0^T(z) + R_0^T(u) + \int_0^T \|\nabla\theta\|^2 d\tau] + C_2(T,R)\Sigma_T(z,u), \quad (91)$$

where $\Sigma_T(z,u)$ is the same as in (89).

Proof. It follows from Assumption 4 [7] that for every $\epsilon > 0$ there exists $C_\epsilon > 0$ such that

$$|G(\zeta+z) - G(\zeta), l| \le C_\epsilon(G(\zeta+z) - G(\zeta), z) + \epsilon(1 + (G(\zeta),\zeta) + (G(\zeta+z),\zeta+z))\|L^{1/2}l\|^2 \quad (92)$$

for any $\zeta, z, l \in \mathcal{D}(L^{1/2})$ and

$$|B(\omega+u) - B(\omega), l| \le C_\epsilon(B(\omega+u) - B(\omega), u) + \epsilon(1 + (B(\omega),\omega) + (B(\omega+u),\omega+u))\|A^{1/2}l\|^2 \quad (93)$$

for any $\zeta, z, l \in \mathcal{D}(A^{1/2})$.

Owing to estimates (92) and (93) it is immediately seen that

$$H_0^T(z) \le C_\epsilon G_0^T(z) + \epsilon \int_0^T E^0(t)dt + \epsilon m \int_0^T G_{d,\zeta}(\tau)\|L^{1/2}z\|^2 d\tau$$

and

$$Q_0^T(z) \le C_\epsilon R_0^T(z) + \epsilon \int_0^T E^0(t)dt + \epsilon m \int_0^T B_{\omega,\nu}(\tau)\|A^{1/2}u\|^2 d\tau,$$

where

$$B_{\omega,\nu} = \min\{m_1, m_2\}^{-1}[(B(\omega(t)),\omega(t))_{\Gamma_0} + (B(\nu(t)),\nu(t))_{\Gamma_0}]. \quad (94)$$

Consequently,

$$H_0^T(z) + Q_0^T(z) \le \epsilon \int_0^T E^0(t)dt + C_\epsilon[R_0^T(z) + G_0^T(z) + \Sigma_T(z,u)]. \qquad (95)$$

Notice that by the lower bounds in (17), (18), (20) we have

$$\int_0^T \|z_t\|^2 dt \le \frac{1}{m} G_0^T(z), \quad \int_0^T \|u_t\|^2 dt \le \frac{1}{\min\{m_1, m_2\}} R_0^T(u). \qquad (96)$$

Now we apply estimates (95), (96) and Lemma 7 to the basic inequality in Lemma 2. Choosing ε sufficiently small we obtain the statement of the lemma.

Now we are in position to prove the stabilizability inequality for the dynamical system (H, S_t).

Theorem 4 *Let Assumptions 1-4 hold. Then there exist positive constants C_1, C_2 and ω depending on R such that for any $y_1, y_2 \in W_R$ the following estimate holds true for any $\delta < 1$ and independent of κ, β, μ:*

$$\|S_t y_1 - S_t y_2\|_H^2 \le C_1 e^{-\omega t}\|y_1 - y_2\|_H^2 + C_2 \max_{[0,t]}(\|z(\tau)\|_{1-\delta}^2 + \|u(\tau)\|_{1-\delta}^2) \quad (97)$$

Above we have used the notation

$$S_t y_1 = (d(t), d_t(t), \omega(t), \omega_t(t), \psi(t)), \quad S_t y_1 = (\zeta(t), \zeta_t(t), \nu(t), \nu_t(t), \phi(t)).$$

Proof. Using inequality (63) and Lemma 8 we obtain that

$$G_0^T(z) + R_0^T(z) + \int_0^T \|\nabla\theta\|^2 d\tau \le E^0(0) - E^0(T) + \epsilon \int_0^T E^0(\tau)d\tau + C(T,R)\Sigma_T(z,u)$$

for any $\epsilon > 0$. Combining this estimate with (91) we get that there exists $T > 1$ such that

$$E^0(T) \le qE^0(0) + C_{R,T}\Sigma_T(z,u), \quad 0 < q \equiv q(T,R) < 1. \qquad (98)$$

Applying the procedure described in [4] we get from (98) that there exists $\omega > 0$ such that

$$E^0(t) \le C_1 e^{-\omega t} E^0(0)$$
$$+ C_2[\int_0^t e^{-\omega(t-\tau)}[D_{h,\zeta}(\tau) + B_{\omega,\nu}(\tau) + \|\nabla\theta\|^2]E^0(\tau)d\tau + lot_t(z,u)]$$

for all $t \geq 0$. Therefore, by the Gronwall's lemma we get

$$E^0(t) \leq [C_1 e^{-\omega t} E^0(0) + C_2 lot_t(z,u)] e^{\int_0^t e^{-\omega(t-\tau)}[D_{h,\zeta}(\tau)+B_{\omega,\nu}(\tau)+\|\nabla\theta\|^2]d\tau}$$
$$\leq C_1 e^{-\omega t} E^0(0) + C_2 lot_t(z,u).$$

The above estimate and (62) yield estimate (97).

Properties of attractor. In this Subsection we establish the properties of the attractor to problem (25)-(28), namely, the finite dimensionality, boundedness in the higher-order spaces and upper-semicontinuity with respect to the parameters μ, β, κ.

Theorem 5 *Let Assumptions 1-4 hold. Then the attractor $\mathfrak{A}$ has a finite fractal dimension.*

The proof is similar to that given in [3].

Theorem 6 *The attractor $\mathfrak{A}$ is a bounded set in the space*

$$H_* = W^2_{6/p}(\Omega) \times \mathcal{D}(L^{1/2}) \times \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A^{1/2}) \times \mathcal{D}(-\Delta)$$

for $3 < p \leq 5$ and in the space

$$H_{**} = H^2(\Omega) \times \mathcal{D}(L^{1/2}) \times \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A^{1/2}) \times \mathcal{D}(-\Delta)$$

in the other cases. Moreover,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\{\|z\|^2_{W^2_{6/p}(\Omega)} + \|z_t\|^2_{H^1(\Omega)} + \|z_{tt}\|^2\} \leq C \tag{99}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\{\|v_{tt}\|^2 + \|w_{tt}\|^2 + \|v_t\|^2_{[H^1_0(\Omega)]^2} + \|\theta_t\|^2\} \leq C, \tag{100}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|w_t\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq C, \tag{101}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\theta\|_{H^2\cap H^1_0(\Omega)} \leq C, \tag{102}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|w\|_{H^2\cap H^1_0(\Omega)} \leq C, \tag{103}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|v + \nabla w\| \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}} C \tag{104}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|v_t + \nabla w_t\| \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}} C, \tag{105}$$

where C does not depend on κ, μ, and β.

Proof. Estimate (104) follows readily from the uniform, with respect to κ and μ, boundedness of the attractor in H. Let $\{y(t) = (z(t), z_t(t), u(t), u_t(t), \theta(t))\} \in H$

be a full trajectory from the attractor $\mathfrak{A}$. Let $|\sigma| \le 1$. Applying Theorem 4 with $y_1 = y(s+\sigma)$, $y_2 = y(s)$ for the interval $[s,t]$ in place of $[0,t]$ we obtain

$$\|y(t+\sigma) - y(t)\|_H^2 \le C_1 e^{-\omega(t-s)} \|y(s+\sigma) - y(s)\|_H^2 \\ + C_2 \max_{\tau\in[s,t]} (\|z(\tau+\sigma) - z(\tau)\|_{1-\delta}^2 + \|u(\tau+\sigma) - u(\tau)\|_{1-\delta}^2)$$

for any $t, s \in \mathbb{R}$ such that $s \le t$ and $|\sigma| \le 1$. Letting $s \to -\infty$ gives

$$\|y(t+\sigma) - y(t)\|_H^2 \le C_2 \max_{\tau\in[-\infty,t]} (\|z(\tau+\sigma) - z(\tau)\|_{1-\delta}^2 \\ + \|u(\tau+\sigma) - u(\tau)\|_{1-\delta}^2) \quad (106)$$

By interpolation we get

$$\|z(\tau+\sigma) - z(\tau)\|_{1-\delta}^2 + \|u(\tau+\sigma) - u(\tau)\|_{1-\delta}^2 \le \varepsilon \|y(t+\sigma) - y(t)\|_H^2 \\ + C_\varepsilon (\|z(\tau+\sigma) - z(\tau)\|^2 + \|u(\tau+\sigma) - u(\tau)\|^2) \quad (107)$$

for every $\varepsilon > 0$. Therefore we obtain from (106) and (107)

$$\max_{\tau\in[-\infty,t]} \|y(t+\sigma) - y(t)\|_H^2 \le C \max_{\tau\in[-\infty,t]} (\|z(\tau+\sigma) - z(\tau)\|^2 \\ + \|u(\tau+\sigma) - u(\tau)\|^2) \quad (108)$$

for any $t \in \mathbb{R}$ and $|\sigma| < 1$. On the attractor we have

$$\frac{1}{\sigma}\|z(\tau+\sigma) - z(t)\| \le \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma \|z_t(\tau+t)\| d\tau \le C, \quad t \in \mathbb{R},$$

and

$$\frac{1}{\sigma}\|u(\tau+\sigma) - u(t)\| \le \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma \|u_t(\tau+t)\| d\tau \le C, \quad t \in \mathbb{R},$$

which gives with (108)

$$\max_{\tau\in\mathbb{R}} \left\| \frac{y(\tau+\sigma) - y(\tau)}{\sigma} \right\|_H^2 \le C \ \text{ for } |\sigma| < 1.$$

This implies

$$\|z_{tt}\|^2 + \|L^{1/2} z_t\|^2 + \|u_{tt}\|^2 + \|A^{1/2} u_t\|^2 + \|\theta_t\|^2 \le C \quad (109)$$

and (105).

It follows readily from (5) that

$$\|\Delta\theta(t)\| \le C(\|u_t\|_{H^1(\Gamma_0)} + \|\theta_t\|) \le C$$

and from (4) that

$$\|\Delta w\| \le C(\frac{1}{\mu} + \|v\|_{H^1(\Gamma_0)}) \le C,$$

which implies (102) and (103). From (3) and (4) we conclude

$$\|\mathcal{A}u\| \le C(\mu). \tag{110}$$

In case $1 \le p \le 3$ we have for the wave component

$$\|g(z_t)\| \le C(1 + \|z_t\|^2_{L_{2p}(\Omega)}) \le C(1 + \|z_t\|_1^2)$$

Therefore $z(t)$ solves the problem

$$(-\Delta + \lambda)z = h_1(t) \text{ in } \Omega, \ \frac{\partial z}{\partial n} = h_2(t) \text{ on } \Gamma, \tag{111}$$

where $h_1(t) \in L_\infty(\mathbb{R}, L_2(\Omega))$ and $h_2(t) \in L_\infty(\mathbb{R}, H^s(\Omega))$ for any $s < 3/2$. By the elliptic regularity theory we conclude that $z(t)$ is a bounded function with values in $H^2(\Omega)$.

In case $3 < p \le 5$ we have that $g(z_t)$ is bounded in $L_{6/p}(\Omega)$ and therefore, z solves (111) with $h_1(t) \in L_\infty(\mathbb{R}, L_{6/p}(\Omega))$. The elliptic regularity theory gives that $z(t)$ is a bounded function with values in $W^2_{6/p}(\Omega)$, which implies together with (109) estimate (99).

Estimate (110) gives the boundedness of the component v in $H^1 \cap H^1_0(\Gamma_0)$ on the attractor for every $\mu > 1$, but not uniformly.

The following result is a corollary of Theorems 3, 5, 6.

Theorem 7 *Let f and g satisfy the conditions in Assumptions 1 and 2. Then the dynamical system (H_1, S_t^1) generated by the problem*

$$\begin{array}{c} z_{tt} + g(z_t) - \Delta z + f(z) = 0 \ \text{ in } \ \Omega \times (0,T) \\ \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \ \text{ on } \ \Gamma \times (0,T) \end{array} \tag{112}$$

possesses a compact global attractor $\mathfrak{A}_1 \equiv M^u(\mathcal{N}_1)$, where $\mathcal{N}_1$ is the set of equilibria for (112). If f and g satisfy Assumption 4, then the attractor $\mathfrak{A}_1$ has a finite fractal dimension and $\mathfrak{A}_1$ is a bounded set in the space $W^2_{6/p}(\Omega) \times \mathcal{D}(L^{1/2})$ in case $3 < p \le 5$, and in the space $\mathcal{D}(L) \times \mathcal{D}(L^{1/2})$ in other cases.

Arguing as in [10] one can obtain the following result on the existence of attractor.

Theorem 8 *Let b_i, $i = 1, 2$, h, and h_0 satisfy the conditions in Assumptions 1 - 3 and $H_2 = H_0^2(\Gamma_0) \times H_0^1(\Gamma_0)$. Then the dynamical system (H_2, S_t^2) generated by the problem*

$$\begin{array}{c} (1 - \Delta)w_{tt} + div b(-\nabla w_t) + b_0(w_t) + \Delta^2 w - div[h(|\nabla w|^2)\nabla w] + h_0(w) = 0, \\ w(x,t) = 0, \quad \nabla w(x,t) = 0 \qquad x \in \partial\Gamma_0, \ \ t > 0 \end{array} \tag{113}$$

possesses a compact global attractor $\mathfrak{A}_2 \equiv M^u(\mathcal{N}_2)$, where $\mathcal{N}_2$ is the set of equilibria for (113). If f, h, h_0, b_i, $i = 1, 2$ satisfy additionally Assumption 4, then the attractor $\mathfrak{A}_2$ has a finite fractal dimension.

Our last main result consists in the upper-semicontinuity of the family of attractors of problem (25)-(28) with respect to the parameters μ, κ, β.

Theorem 9 *Let Assumptions 1-4 hold. Denote by* $S_t^{\mu,\kappa,\beta}$ *the evolution operator of problem (25)-(28) in the space*

$$H_\mu = H = (L^{1/2}) \times L^2(\Omega) \times \mathcal{D}(A^{1/2}) \times L^2(\Gamma_0) \times H^1(\Gamma_0).$$

Let $\mathfrak{A}^{\mu,\kappa,\beta}$ *be a global attractor for the system* $(S_t^{\mu,\kappa,\beta}, H_\mu)$*. Then the family of the attractors* $\mathfrak{A}^{\mu,\kappa,\beta}$ *is upper semi-continuous on* $\Lambda = [1,\infty) \times [0,1] \times [0,1]$*. Namely, we have that*

$$\lim_{(\mu,\kappa,\beta)\to(\infty,0,0)} \sup_{y\in\mathfrak{A}^{\mu,\kappa,\beta}} \{dist_{H^{\delta_1,\delta_2}}(y, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times 0)\} = 0, \tag{114}$$

where

$$H^{\delta_1,\delta_2} = (L^{1/2-\delta_1}) \times L^2(\Omega) \times [[H^{1-\delta_2}(\Gamma_0)]^2 \times H^1(\Gamma_0)] \times L^2(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0).$$

Here $\delta_2 > 0$, $\delta_1 \geq 0$ *in case* $p < 5$ *and* $\delta_1 > 0$ *in case* $p = 1$.

Proof. We base the proof on the idea presented in [12]. Assume that the statement of the theorem is not true. Then there exists a sequence $\{(\mu^n, \kappa^n, \beta^n\} \to (\infty, 0)$ such that $\mu^n \geq \mu_\infty$, $\kappa^n \leq \kappa_0$, $\beta^n \leq \beta_0$ and for any $n \in \mathbb{N}$ and a sequence $y^n \in \mathfrak{A}_{\mu^n,\kappa^n,\beta^n}$ such that

$$dist_{H^{\delta_1,\delta_2}}(y, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times 0) \geq \varepsilon, \quad n = 1, 2, ... \tag{115}$$

for some $\varepsilon > 0$. Let $y^n(t) = \{z^n(t), z_t^n(t), u^n(t), u_t^n(t), \theta^n(t)\}$ be a full trajectory in $\mathfrak{A}_{\mu^n,\kappa^n,\beta^n}$ passing through y^n ($y^n(0) = y^n$). The functions y^n satisfy equations (25)-(28). It follows from (100), (101), (103) that the sequence $\{z^n(t), w^n(t), \theta^n(t)\}$ is uniformly with respect to n bounded in the space

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_1 = &\big(C_{bnd}(\mathbb{R}; W^2_{6/p}(\Omega)) \cap C^1_{bnd}(\mathbb{R}; \mathcal{D}(L^1/2)) \cap C^2_{bnd}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))\big)\\ &\times \big(C_{bnd}(\mathbb{R}; (H^2 \cap H^1_0)(\Gamma_0)) \cap C^1_{bnd}(\mathbb{R}; H^1_0(\Gamma_0)) \cap C^2_{bnd}(\mathbb{R}; L^2(\Gamma_0))\big) \times\\ &\big(C_{bnd}(\mathbb{R}; H^2 \cap H^1_0(\Omega)) \cap C^1_{bnd}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))\big).\end{aligned}$$

Hence, by Aubin's compactness theorem [25] $\{z^n(t), w^n(t), \theta^n(t)\}$ is a compact sequence in the space

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_1 = &\Big(C([-T,T]; (L^{1/2-\delta_1})) \cap C^1([-T,T]; L^2(\Omega))\Big)\\ &\times \Big(C([-T,T]; H^1_0(\Gamma_0)) \cap C^1([-T,T]; L^2(\Gamma_0))\Big)\\ &\times C([-T,T]; H^1(\Gamma_0))\end{aligned}$$

for every $T > 0$. Estimate (100) yields that the sequence $\{v^n\}$ is uniformly with respect to n bounded in the space

$$\mathfrak{C}_2 = \left(C_{bnd}(\mathbb{R}; [H_0^1(\Omega)]^2) \cap C^1_{bnd}(\mathbb{R}; [H_0^1(\Omega)]^2\right) \cap C^2_{bnd}(\mathbb{R}; [L^2(\Omega)]^2\big).$$

Thus, we deduce that there exists a function $\{\mathbf{z}(t), \mathbf{w}(t), \Theta(t)\} \in \mathfrak{C}_1$ such that

$$\lim_{k\to\infty} \max_{[-T,T]} \{\|z^{n_k}(t) - \mathbf{z}(t)\|^2_{\mathfrak{D}(L^{1/2-\delta_1})} + \|z_t^{n_k}(t) - \mathbf{z}_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ + \|w^{n_k}(t) - \mathbf{w}(t)\|^2_{H_0^1(\Gamma_0)} + \|w_t^{n_k}(t) - \mathbf{w}_t(t)\|^2_{L^2(\Gamma_0)} \\ + \|\theta^{n_k}(t) - \Theta(t)\|^2_{H_0^1(\Gamma_0)} = 0 \quad (116)$$

for any $\delta_1 > 0$ in case $p < 5$ and $\delta_1 \geq 0$. Analogously, the sequence $\{v^n\}$ is compact in the space $C([-T,T]; [H_0^{1-\delta_2}(\Omega)]^2) \cap C^1([-T,T]; [L^2(\Gamma_0)]^2)$. Moreover, by (104), (105) we get that

$$\lim_{k\to\infty} \max_{[-T,T]} \{\|v^{n_k} + \nabla\mathbf{w}\|_{[H_0^{1-\delta_2}(\Gamma_0)]^2} + \|v_t^{n_k} + \nabla\mathbf{w}_t\|_{[L^2(\Gamma_0)]^2}\} = 0 \quad (117)$$

for every $T > 0$. By the trace theorem we infer from (117) that

$$\lim_{k\to\infty} \|v^{n_k} + \nabla\mathbf{w}\|_{[L^2(\partial\Gamma_0)]^2} = 0,$$

therefore,

$$\nabla\mathbf{w}|_{\partial\Gamma_0} = 0.$$

We can choose functions ϕ, ψ and χ in (48)-(50) of the following form: $\psi(t) = (-\partial_{x_1} l, -\partial_{x_2} l, l)\cdot p(t)$ and $\chi(t) = \chi\cdot p(t)$, where $\phi \in (L^{1/2})$, $l \in H_0^2(\Omega)$, $\chi \in H_0^1(\Omega)$ and $p(t)$ is a scalar continuously differentiable function such that $p(T) = 0$. It is easy to see that

$$(\mathcal{A}u^{n_k}, \psi) = [-\nu(\mathrm{div} v^{n_k}, \Delta l) - (1-\nu)\int_\Omega [\partial_{x_1} v_1^{n_k} \cdot \partial^2_{x_1} l + \partial_{x_2} v_2^{n_k} \cdot \partial^2_{x_2} l \\ + (\partial_{x_1} v_2^{n_k} + \partial_{x_2} v_1^{n_k}) \partial_{x_1 x_2} l] dx] p(t). \quad (118)$$

Therefore, passing to the limit $k \to \infty$ we get

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T (\mathcal{A}u^{n_k}, \psi) dt = \int_0^T (\Delta\mathbf{w}, \Delta l) p(t) dt.$$

By Assumptions 1, 2, 3 we pass to the limit in the nonlinear terms. Observing (116) and (118) we get

$$-\int_0^T (\mathbf{z}_t, \phi'(t)) dt + \int_0^T (L^{1/2}\mathbf{z}, L^{1/2}\phi) dt + \int_0^T (g(\mathbf{z}_t), \phi) dt + \int_0^T (f(\mathbf{z}), \phi) dt \\ = (z_1, \phi(0)) \quad (119)$$

$$-\int_0^T (\mathbf{w}_t, l)p'(t)dt - \int_0^T (\nabla\mathbf{w}_t, \nabla l)p'(t)dt + \int_0^T (K\mathbf{w}, Kh)p\,(t)dt$$

$$+\int_0^T (divb(\nabla\mathbf{w}_t) + b_0(\mathbf{w}_t), l)p\,(t)dt$$

$$+\int_0^T (div[l(|\nabla\mathbf{w}|^2)\nabla\mathbf{w}], l)p\,(t)dt = (w_1, l)p\,(0) + (\nabla w_1, \nabla l)p\,(0), \quad (120)$$

$$-\int_0^T (\Theta, \tau)p'(t)dt + \int_0^T (\nabla\Theta, \nabla\tau)p\,(t)dt = (\theta_0, \tau)p\,(0), \quad (121)$$

where $K : H_0^2(\Gamma_0) \to L^2(\Gamma_0)$ such that $K^2 = \Delta^2 : H^4 \cap H_0^2(\Gamma_0) \to L^2(\Gamma_0)$.

One can deduce from (119)-(121) that $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{w}(t)$ are weak solutions to problems (112) and (113) possessing the properties

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\{\|\mathbf{z}(t)\|^2_{\mathcal{D}(L^{1/2})} + \|\mathbf{z}_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\} \le C$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\{\|\mathbf{w}(t)\|^2_{H^2\cap H_0^1(\Gamma_0)} + \|\mathbf{w}_t(t)\|^2_{H_0^1(\Gamma_0)} + \|\mathit{\Theta}(t)\|^2_{L^2(\Gamma_0)}\} \le C$$

and

$$\nabla\mathbf{w}|_{\partial\Gamma_0} = 0.$$

Consequently, $\{\mathbf{z}(t), \mathbf{z}_t(t)\}$ and $\{\mathbf{w}(t), \mathbf{w}_t(t)\}$ are full trajectories to (112) and (113) which belong to the attractor $\mathfrak{A}^1$ and $\mathfrak{A}^2$. The function $\Theta(t)$ is a full trajectory to the problem

$$\begin{gathered}\Theta_t + \Delta\Theta = 0, \quad x \in \Gamma_0,\ t > 0\\ \Theta = 0, \quad x \in \partial\Gamma_0,\end{gathered}$$

which is exponentially stable. Consequently, $\Theta \equiv 0$. Thus, it follows from (116) and (117) that

$$\begin{gathered}\lim_{n_k\to 0}\{\|v^{n_k}(0) + \nabla\mathbf{w}(0)\|^2_{[H_0^{1-\delta_2}(\Gamma_0)]^2} + \|w^{n_k}(0) - \mathbf{w}(0)\|^2_{H_0^1(\Gamma_0)}\\ +\|v_t^{n_k}(0) + \nabla\mathbf{w}_t(0)\|^2_{[L^2(\Gamma_0)]^2} + \|w_t^{n_k}(0) - \mathbf{w}_t(0)\|^2_{L^2(\Gamma_0)}\\ +\|\theta^{n_k}(0)\|^2_{H_0^1(\Gamma_0)}\} = 0\end{gathered}$$

and

$$\lim_{n_k\to 0}\{\|z^{n_k}(0) + \mathbf{z}(0)\|^2_{\mathcal{D}(L^{1/2-\delta_1})} + \|z_t^{n_k}(0) - \mathbf{z}_t(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\} = 0$$

and we obtain a contradiction to (115). Consequently, (114) holds true.

System with non-conservative forces ($\gamma \neq 0$).

Consider now system (1)-(7) with $\gamma \neq 0$. This case corresponds to the non-conservative nonlinearity and non-monotone energy.

Note that Assumption 1 with $h^* h_0^* > 2\gamma^2$ guarantees that there exist a positive constant C_0 such that

$$H(r) = C_0 + \frac{1}{2}\int\limits_0^r h(\xi)d\xi \geq 0, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad H_0(s) = C_0 + \frac{1}{2}\int\limits_0^s h_0(\xi)d\xi \geq 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Moreover, there exist positive constants C, C_1 and C_2 such that

$$\gamma rs + H(r) + H_0(s) + C \geq 0, \quad r \in \mathbb{R}_+, \ s \in \mathbb{R}. \tag{122}$$

and

$$\gamma rs \leq C_1(\sigma^2 + H(r)) + C_2, \quad r \in \mathbb{R}_+, \ s \in \mathbb{R}. \tag{123}$$

The additional assumption for the non-conservative case is the following:

Statement 5

- *There exist positive constants c_1 and c_2 such that*

$$-rh(r) \leq -c_1 H(r) + c_2, \quad r \in \mathbb{R}_+ \tag{124}$$

and

$$-rh_0(r) \leq -c_1 H_0(r) + c_2, \quad s \in \mathbb{R} \tag{125}$$

- *For any $\varepsilon > 0$ there exists a positive constant C_ε such that*

$$-\gamma rs \leq \varepsilon[H(r) + H_0(s)] + C_\varepsilon, \quad r \in \mathbb{R}_+, s \in \mathbb{R} \tag{126}$$

and

$$\gamma r\sigma \leq \varepsilon[\sigma^2 + H(r)] + C_\varepsilon, \quad r \in \mathbb{R}_+, \sigma \in \mathbb{R}. \tag{127}$$

- *There exist positive constants c_1 and c_2 such that*

$$-rf(r) \leq -c_1\Pi(r) + c_2, \quad r \in \mathbb{R} \tag{128}$$

The assumptions (124)-(127) were made to guarantee the existence of the global attractor for the Mindlin plate system in [4]. Now we are in position to give the abstract formulation of system (1)-(7). Denote

$$F^*(u) = (0, 0, \frac{\gamma}{2}|v|^2),$$

$$F_2(u) = (v_1[\gamma w + h(|v|^2)], v_2[\gamma w + h(|v|^2)], h_0(w)). \tag{129}$$

and

$$\Pi_1(u) = \frac{\gamma}{2}\int_\Omega w|v|^2 dx.$$

Let

$$\mathcal{E}_0(t) = E^0_z(z, z_t) + E^0_u(u, u_t) + E^0_\theta(\theta) + \Pi(z) + \Pi_0(u), \tag{130}$$

where E^0_z, E^0_z, E^0_z, Π, Π_0 are given by (37)-(39) and (29), (32) respectively. We define the total energy in the following way:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(t) + \Pi_1(u). \tag{131}$$

It is easy to see from (122) and (123) that

$$-\frac{1}{2}\Pi_0(u) - C_1 \le \Pi_1(u) \le C_2 \int\limits_\Omega [|w|^2 + H(|v|^2)]dx + C_3 \tag{132}$$

Applying the same arguments as in case $\gamma = 0$ we obtain the following theorem.

Theorem 10 *Under Assumptions 1 with $h^* h^*_0 > 2\gamma^2$, 3 for any initial conditions*

$$y_0 = (z^0, z^1, u^0, u^1, \theta^0) \in H$$

there exists a unique generalized solution $y(t) = (z(t), z_t(t), u(t), u_t(t), \theta(t))$ to the PDE system (25)-(28) with F_2 defined by (129), which depends continuously on initial data. This solution satisfies the energy inequality

$$\mathcal{E}(t) + \int\limits_s^t (G(z_t), z_t)_\Omega d\tau + \int\limits_s^t (B(u_t), u_t)_{\Gamma_0} d\tau + \int\limits_s^t \|\nabla\theta\|^2_{\Gamma_0} d\tau \le \mathcal{E}(s) + \int\limits_s^t (F^*(u), u_t) d\tau, \quad 0 \le s \le t,$$

with the total energy $\mathcal{E}(t)$ given by (131). Moreover, if initial data are such that

$$z^0, z^1 \in (L^{1/2}), \quad u^0 \in \mathcal{D}(A), \quad u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \theta^0 \in \mathcal{D}(-\Delta)$$

and

$$L[z^0 - \kappa N_0 u^1] + G(z^1) \in L_2(\Omega)$$

then there exists a unique strong solution $y(t)$ satisfying the energy identity:

$$\mathcal{E}(t) + \int\limits_s^t (G(z_t), z_t)_\Omega d\tau + \int\limits_s^t (B(u_t), u_t)_{\Gamma_0} d\tau + \int\limits_s^t \|\nabla\theta\|^2_{\Gamma_0} d\tau = \mathcal{E}(s) + \int\limits_s^t (F^*(u), u_t) d\tau, \quad 0 \le s \le t. \tag{133}$$

In contrast to the conservative case, the non-conservative system is not gradient and the energy is not monotone, i.e. one cannot guarantee the existence of a bounded absorbing set without additional arguments. To prove the dissipativity of system (25)-(28) in case $\gamma \neq 0$ we resort to the Lapunov's method combined with the barriers method.

Theorem 11 *Let Assumptions 1-3, 5 hold. Then the dynamical system* (H, S_t) *generated by problem (25)-(28) possesses an absorbing ball* $\mathcal{B}(R)$ *of the radius* R *independent of* β, κ, *and* μ.

Proof. Consider the functional

$$V(z, z_t, u, u_t, \theta) = \mathcal{E}(t) + \delta[(z_t, z) + (u_t, u)],$$

where $\delta > 0$ will be chosen later. It follows from (132) that there exist positive constants C_i, $i = \overline{1, 4}$ such that

$$C_1 E^0(z, z_t, u, u_t, \theta) - C_2 \le V(z, z_t, u, u_t, \theta) \le C_3 E^0(z, z_t, u, u_t, \theta) + C_4.$$

After differentiating the Lyapunov function by t we obtain

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V = (G(z_t), z_t) + (B(u_t), u_t) - (F^*(u), u_t) + \delta[\|z_t\|^2 + \|u_t\|^2 \\ - (G(z_t), z) - \|L^{1/2}z\|^2 - \kappa(LN_0u_t, z) - (F_1(z), z) - \|A^{1/2}u\|^2 - (R_1\theta, z) \\ - (B(u_t), u) - (F_2(u), u) - \kappa(N_0^*Lz_t, u)].\end{aligned}$$

Taking under consideration (24), (124)-(126), 128 we get

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V \le -(G(z_t), z_t) - (B(u_t), u_t) - (F^*(u), u_t) - \|\nabla\theta\|^2 + \delta[\|z_t\|^2 + \|u_t\|^2 \\ - (G(z_t), z) - \frac{1}{2}\|L^{1/2}z\|^2 - \frac{1}{2}\|A^{1/2}u\|^2 + \|\nabla\theta\|^2 \\ - (B(u_t), u) + C[\|z_t\|^2 + \|u_t\|^2] - c_1/2[\Pi_0(u) + \Pi(z)] + C]. \quad (134)\end{aligned}$$

It follows from (127) that for any $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}(F^*(u), u_t) = \frac{\gamma}{2}\int_\Omega |v|^2 w_t dx \le \varepsilon \int_{\Gamma_0} [|w|^2 + H(|v|^2)]dx + C_2 \\ \le \varepsilon[\|w_t\|^2 + \Pi_0(u)] + C. \quad (135)\end{aligned}$$

Consider now the term $(B(u_t), u)$. Let $\Gamma_0^1 = \{x \in \Gamma_0 : |u_t(x)| \ge 1\}$ and $\Gamma_0^2 = \Gamma_0 \setminus \Gamma_0^1$. We obviously have that

$$\begin{aligned}|(B(u_t), u)| \le \int_{\Gamma_0} |b(u_t)||u|dx \le \int_{\Gamma_0^1} |b(u_t)||u|dx + C\int_{\Gamma_0^2} |u|dx \\ \le ([\int_{\Gamma_0^1} |b(u_t)|^{\frac{p_1}{1+p_1}} dx]\|A^{1/2}u\| + C\|u\|^2) \\ \le C(B(u_t), u_t)E^0(z, u, \theta) + \bar{C}\|u\|^2 \le C(B(u_t), u_t)[V + 1]^{1/2} + \bar{C}\|u\|^2. \quad (136)\end{aligned}$$

Analogously,

$$|(G(z_t), z)| \leq C(G(z_t), z_t)[V+1]^{1/2} + \bar{C}\|z\|^2. \qquad (137)$$

Consequently, collecting Assumption 2, (134)-(137) and choosing $\delta = 4\varepsilon(1/2 + \bar{C}\max\{\lambda_z, \lambda_u\})$, where λ_z and λ_u are the first eigenvalues of L and A respectively, we get

$$\frac{d}{dt}V(t) + \varepsilon V(t) \leq d_1(\varepsilon + C) + d_2(\varepsilon[1+V(t)]^{1/2} - d_4)[(G(z_t), z_t) + (B(u_t), u_t)]. \qquad (138)$$

Applying to (138) the barriers method described in [7, Th. 3.15] we obtain the statement of the theorem.

Applying the same arguments as in Section 2 we get the following theorem

Theorem 12 *Let Assumptions 1-5 hold. Denote by $S_t^{\mu,\kappa,\beta}$ the evolution operator of problem (25)-(28) in the space*

$$H_\mu = H = \mathcal{D}(L^{1/2}) \times L^2(\Omega) \times \mathcal{D}(A^{1/2}) \times L^2(\Gamma_0) \times H^1(\Gamma_0).$$

Let $\mathfrak{A}^{\mu,\kappa,\beta}$ be a global attractor for the system $(S_t^{\mu,\kappa,\beta}, H_\mu)$. Then the family of the attractors $\mathfrak{A}^{\mu,\kappa,\beta}$ is upper semi-continuous on $\Lambda = [1,\infty) \times [0,1] \times [0,1]$. Namely, we have that

$$\lim_{(\mu,\kappa,\beta)\to(\infty,0,0)} \sup_{y\in\mathfrak{A}^{\mu,\kappa,\beta}} \{dist_{H^{\delta_1,\delta_2}}(y, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_3 \times 0)\} = 0,$$

where

$$H^{\delta_1,\delta_2} = (L^{1/2-\delta_1}) \times L^2(\Omega) \times [[H^{1-\delta_2}(\Gamma_0)]^2 \times H^1(\Gamma_0)] \times L^2(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0).$$

and $\mathfrak{A}_3$ is the attractor of the system

$$\begin{gathered}(1-\Delta)w_{tt} + divb(-\nabla w_t) + b_0(w_t) + \Delta^2 w - div[h(|\nabla w|^2)\nabla w] \\ +h_0(w) - \gamma/2\Delta[w^2] = 0, \\ w(x,t) = 0, \quad \nabla w(x,t) = 0 \qquad x \in \partial\Gamma_0, \quad t > 0\end{gathered}$$

Acknowledgement. The research was partially supported by N.I. Akhiezer Foundation.

REFERENCES

1. Babin A. V., Vishik M. I. Attractors of evolution equations. – North-Holland, 1992. – 293 p.

2. Bucci F, Chueshov I. Long-time dynamics of a coupled system of nonlinear wave and thermoelastic plate equations// Discrete Contin. Dynam. Systems, 2008. – **22**. – P. 557–586.

3. Bucci F, Chueshov I., Lasiecka I. Global attractor for a composite system of nonlinear wave and plate aquations// Commun. Pure Appl. Anal., 2007. – **6**. – P. 113–140.

4. Chueshov I., Lasiecka I. Attractors for second-order evolution equations with a nonlinear damping// J. Dyn. Diff. Eqns, 2004. – **16**, no. 2. – P. 469–512.

5. Chueshov I., Lasiecka I. Global attractors for Mindlin-Timoshenko plates and for their Kirchhoff limits// Milan J. Math., 2006. – **74**. – P. 117 – 138.

6. Chueshov I.D. Introduction to the theory of infinite-dimensional dissipative systems. – Acta, Kharkov, 1999. – 433 p.

7. Chueshov I., Lasiecka I. Long-time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping, Memoirs of AMS 912. – AMS, Providence, RI, 2008. – 188 p.

8. Chueshov I., Lasiecka I. Long-time dynamics of von Karman semi-flows with nonlinear boundary interior damping// J. Differential Equations, 2007. – **233**. – P. 42–86.

9. Chueshov I., Lasiecka I. Von Karman evolution equations. Well-posedness and long-time dynamics. – Springer, New-York, 2010. – 781 p.

10. Fastovska T. Asymptotic properties of global attractors for nonlinear Mindlin-Timoshenko model of thermoelastic plate// Vesnik of Kharkov National University, series "Mathematics, applied mathematics and mechanics", 2006. – **56**, no. 749. – P. 13–29.

11. Hale J. K. Asymptotic behavior of dissipative systems.- Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1988. – 198 p.

12. Hale J. K., Raugel G., Upper semicontinuity of the attractor for a singulary perturbed hyperbolic equation// J. Diff. Equations, 1988. – **73**. – P. 197–214.

13. Howe M.S. Acoustics of fluid-structure interactions. Cambridge Monographs on Mechanics. – Cambridge University Press, Cambridge, 1998. – 560 p.

14. Khanmamedov A.Kh., Global attractors for von Karman equations with nonlinear dissipation// J.Math.Anal.Appl., 2006. – **318**, P. 92–101.

15. Lagnese J. Boundary stabilization of thing plates.-Philadelphia: SIAM, 1989. – 176 p.

16. Lasiecka I. Mathematical Control Theory of coupled PDE's, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 75- Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2002. – 242 p.

17. Lasiecka I., Lebiedzik C. Asymptotic behaviour of nonlinear structural acoustic interactions with thermal effects on the interface// Nonlinear Anal., Ser. A: Theory Methods, 2002. – **49** – P. 703–735.

18. Lasiecka I., Lebiedzik C. Decay rates of interactive hyperbolic-parabolic PDE models with thermal effects on the interface// Appl. Math. Optim., 2000. – **42**. – P. 127–167.

19. Lasiecka I., Lebiedzik C., Uniform stability in structural acoustic systems with thermal effects and nonlinear boundary damping// Control Cybernet., 1999. – **28**. – P. 557–581.

20. Lasiecka I., Triggiani B. Control Theory for Partial Differential Equations: Continuous and Approximation Theories, Vol. 1: Abstract parabolic Systems; Vol. 2: Abstract Hyperbolic-like Systems over a Finite Time Horizon, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Voll. 74–75- Cambrige University Press, 2000. – 1067 p.

21. Lebiedzik C. Exponential stability in structural acoustic models with thermoelasticity// Dynam. Contin. Discrete Impuls. System, 2000. – **7**. – P. 369–383.

22. Morse P.M., Ingard K.U. Theoretical Acoustics- McGraw-Hill, New York, 1968. – 927 p.

23. Ryzhkova I. Dynamics of a thermoelastic von Karman plate in a subsonic gas flow // Z. Angew. Math. Phys, 2007. – **58** – P. 246—261.

24. Schiavone P., Tait R. J. Thermal effects in Mindlin-type plates// Q. Jl. Mech. appl. Math., 1993. – **46**, pt. 1. – P. 27–39.

25. Simon J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ // Ann. Mat. Pura Appl., 1987. – **148**, Ser.4. – P. 65–96.

26. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in Mechanics and Physics-Springer, New-York, 1988. – 500 p.

Article history:
Received: 25.06.2014; Final form: 9.10.2014; Accepted: 15.10.2014.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9:532 № 1133, 2014, с.36–47

Малі коливання капілярної рідини в посудині з перфорованими перегородками

Д. І. Борисов, І. Д. Борисов

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна
м. Свободи 4, Харків, 61022, Україна
dptmech@univer.kharkov.ua,
borisov@univer.kharkov.ua,

Розглядаються малі рухи капілярної рідини в посудині, секціонованій перфорованими перегородками. Наведено математичне формулювання задачі з усередненими умовами на перфорованих ділянках перегородок. Наведено результати досліджень еволюційної і спектральної задач.
Ключові слова: капілярна рідина, перфоровані перегородки, малі коливання, власні частоти коливань.

Борисов Д. И., Борисов И. Д., **Малые колебания капиллярной жидкости в сосуде с перфорированными перегородками.** Рассматриваются малые движения капиллярной жидкости в сосуде, секционированном перфорированными перегородками. Дана математическая формулировка задачи с усредненными граничными условиями на перфорированных участках перегородок. Приведены результаты исследования эволюционной и спектральной задач.
Ключевые слова: капиллярная жидкость, перфорированные перегородки, малые колебания, собственные частоты колебаний.

D. I. Borysov, I. D. Borysov, **Small motions of a capillary fluid in the tank with perforated bafflers.** Small motions of a capillary fluid in the tank partitioned by perforated bafflers are considered. A mathematical formulation of the problem with the averaged boundary conditions on perforated sections of the bafflers is formulated. The results of the study of evolutionary and spectral problems are presented.
Keywords: capillary fluid, perforated bafflers, small oscillations, eigenfrequencies of oscillations.

2000 Mathematics Subject Classification: 76B15.

Вступ

Дослідження коливань рідини в частково заповнених баках мають велике прикладне значення. Отримані до цього часу результати відображені в чисельних публікаціях (див., наприклад, монографії [1]–[11] і вказану в них бібліографію). Із статей, які вийшли порівняно недавно, відзначимо [12]–[17].

В більшості робіт розглядаються баки достатньо простої геометрії. Наявність перегородок та інших пристроїв, розташованих всередині бака, значно ускладнює теоретичний і чисельний аналіз процесів коливань. Приклади розрахунків частот і форм вільних коливань рідини в баках з перегородками наведено в [12]–[15].

В [14]–[15] припускається, що перегородки мають перфораційні отвори. Це додатково ускладнює розрахунки гідродинамічних характеристик баків. Для подолання цих труднощів використовуються усереднені умови на перегородках. При цьому вважається, що кількість перфораційних отворів велика, а їхні розміри й відстані між ними достатньо малі.

В даній роботі, як і в [14]–[15], розглядаються коливання ідеальної рідини в нерухомій посудині з перфорованими перегородками; додатково враховуються сили поверхневого натягу (капілярні сили), які відіграють суттєву роль в умовах невагомості. Встановлені загальні властивості спектру частот власних нормальних коливань рідини. Розглянуті питання розв'язності еволюційної задачі про малі рухи рідини в околі рівноважного стану.

1. Постановка задачі

Нехай рідина частково заповнює нерухомий бак, секціонований перфорованими перегородками (див. рис.1). Будемо вважати, що рідина знаходиться під дією сил поверхневого натягу и зовнішнього однорідного полю масових сил. Форма вільної поверхні рідини в стані рівноваги вважається відомою.

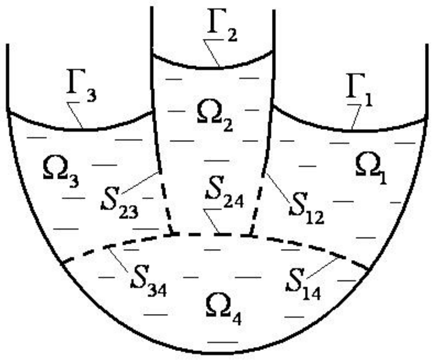

Рис. 1: До постановки задачі

Окремі секції (області) бака позначимо як $\Omega_k,\ k \in \overline{1, N_0}$, де N_0 – загальне число секцій, які містять рідину. Перші N $(N \leq N_0)$ секцій вважаються заповнені рідиною лише частково. Нехай Γ позначає вільну поверхню рідини, Γ_k – вільну поверхню рідини в k-й ($k \leq N$) частково заповненій секції, так що $\Gamma = \cup_{k=1}^{N} \Gamma_k$. Надалі, для простоти, будемо вважати, що поверхня Γ_k при $\forall k \in \overline{1,N}$ складається з одного компонента зв'язності.

Вважаючи товщину перегородок значно меншою характерного лінійного розміру бака, будемо ототожнювати перегородку між двома суміжними областями Ω_j, Ω_k з її серединною поверхнею $S_{jk}\,(j < k)$. Позначимо через S_k поверхню контакту рідини, яка міститься в Ω_k, $k \geq 1$, із зовнішньою стінкою бака S; до S_k будемо відносити також ділянку перегородки, яка розділяє газову порожнину і область Ω_k, $k \geq 1$. Нормалі $\vec{n}$ до поверхонь S_{jk} умовимося спрямовувати в бік області з більшим номером; нормалі до поверхонь Γ і S_k будемо вважати зовнішніми стосовно області $\Omega := \cup_{k=1}^{N_0} \Omega_k$, яка заповнена рідиною.

Позначимо через I_Ω множину пар цілих чисел (jk), які відповідають суміжним областям Ω_j, Ω_k. Відзначимо, що для деяких номерів $j, k \in \overline{1,N}$ поверхні S_{jk}, S_k можуть бути порожніми множинами.

Позначимо через $\varphi(t, \vec{x})$ потенціал поля швидкостей рідини в області Ω, через $\zeta(t, \xi^1, \xi^2)$ – відхилення вільної поверхні рідини $\Gamma(t)$, яке відраховується по нормалі від рівноважного положення Γ (ξ^1, ξ^2 – координатні параметри на Γ). Припустимо, що кількість отворів у перфорованій ділянці перегородки досить велике, а їхні розміри й відстані між ними малі. При цих припущеннях малі потенціальні рухи рідини поблизу рівноважного стану в лінійному наближенні описуються наступними рівняннями, граничними й початковими умовами [14]–[15]:

$$\Delta\varphi^{(k)}(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{в} \;\; \Omega_k, \quad k \in \overline{1, N_0}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \zeta^{(k)}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial n} \quad \text{на} \;\; \Gamma_k, \quad k \in \overline{1,N}; \tag{2}$$

$$\rho \frac{\partial\, \varphi^{(k)}}{\partial\, t} + \sigma(-\Delta_\Gamma^{(k)} + a^{(k)})\zeta^{(k)} = \rho\, f(t, \vec{x}) + c(t) \quad \text{на}\; \Gamma_k,\; k \in \overline{1,N}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial \zeta^{(k)}}{\partial \nu} + æ^{(k)}\zeta^{(k)} = 0 \quad \text{на} \;\; \partial\Gamma_k,\; k \in \overline{1,N}; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \varphi^{(j)}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial n} = q_{jk}(\varphi^{(k)} - \varphi^{(j)}) \quad \text{на} \;\; S_{jk}, \quad (jk) \in I_\Omega; \tag{5}$$

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \;\; S_k, \quad k \in \overline{1, N_0}; \tag{6}$$

$$\zeta^{(k)}\Big|_{t=0} = \zeta_0^{(k)}(\xi^1, \xi^2), \qquad \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial n}\Bigg|_{t=0} = \zeta_1^{(k)}(\xi^1, \xi^2) \quad \text{на} \quad \Gamma_k, \quad k \in \overline{1,N}; \tag{7}$$

$$a := -\frac{\rho}{\sigma}\vec{g} \cdot \vec{n} - (k_1^2 + k_2^2), \quad æ := \frac{k_\Gamma \cos\alpha + k_S}{\sin\alpha}.$$

Тут $\Delta_\Gamma^{(k)}$ – оператор Лапласа—Бельтрамі на поверхні Γ_k; σ – коефіцієнт поверхневого натягу на вільній поверхні Γ; ρ – густина рідини; $q_{jk}(\vec{x})$ – проникність перегородки S_{jk}; k_1, k_2 – головні кривини вільної поверхні Γ; $\partial\Gamma_k$ – контур, який обмежує вільну поверхню Γ_k; k_Γ, k_S – кривина перетинів поверхонь Γ і S площиною, перпендикулярною до контура $\partial\,\Gamma := \cup_{k=1}^N \partial\Gamma_k$; α – кут змочування – двогранний кут, якій створюється рідиною в точках контура $\partial\Gamma$; $\vec{\nu}$ – нормаль до контура $\partial\Gamma$, що розташована в дотичній до Γ площині; $f(t,\vec{x})$ – силова функція збурення зовнішнього поля масових сил; $\vec{g}$ – інтенсивність зовнішнього силового поля; $c(t)$ – довільна функція часу t; $\zeta_0^{(k)}(\xi^1,\xi^2)$, $\zeta_1^{(k)}(\xi^1,\xi^2)$ – задані функції, що визначають початкові відхилення й швидкості точок вільної поверхні рідини.

В (1) – (7) і надалі верхній індекс у круглих дужках означає номер області або поверхні, до якої відноситься та або інша функція.

Поле швидкостей $\vec{v}^{(k)}(t,\vec{x})$ рідини в області Ω_k визначається через потенціал $\varphi^{(k)}(t,\vec{x})$ згідно співвідношення: $\vec{v}^{(k)} := \nabla\varphi^{(k)}(t,\vec{x})$, $k \in \overline{1,N}_0$. Рівняння (1) є наслідком рівняння неперервності $\operatorname{div}\vec{v}^{(k)} = 0$ і потенціальності руху рідини. Рівняння (2), (3) є лінеаризовані кінематичні і динамічні умови на вільній поверхні рідини. Динамічні умови (3) на поверхнях Γ_k, $k \in \overline{1,N}$ записані в припущенні, що всі газові порожнини сполучені між собою. Коефіцієнт поверхневого натягу $\sigma(=\mathrm{const})$ припускається однаковим для всіх поверхонь Γ_k, $k \in \overline{1,N}$. Кут змочування α вважається заданою функцією точок контуру $\partial\Gamma$. При цьому вважається, що кожний контур $\partial\Gamma_k$ перетинається з поверхнею S_k по її непроникненій ділянці.

Умови (5) отримано усередненням точних (у рамках моделі ідеальної рідини) граничних умов на перегородках S_{jk}, що розділяють суміжні області Ω_j, Ω_k. Функції $q_{jk}(\vec{x})$ в цих умовах вважаються заданими, причому $q_{jk}(\vec{x}) \equiv 0$ на неперфорованих ділянках перегородок. Математичне обґрунтування умов (4) наведено в [18]–[20].

Для відхилень вільної поверхні рідини від рівноважного стану повинна виконуватися умова:

$$\sum_{k\in\overline{1,N}} \int_{\Gamma_k} \zeta^{(k)}(t,\xi^1,\xi^2)d\Gamma = 0 \quad \forall t \geq 0. \tag{8}$$

Функції $\zeta_0^{(k)}, \zeta_1^{(k)}$ в (7) повинні задовольняти умові (8).

2. Операторно-диференціальне формулювання еволюційної задачі

Зведемо еволюційну задачу (1) – (7) до задачі Коші для операторно-диференціального рівняння другого порядку в гільбертовому просторі. Введемо N-компонентні функції $\zeta := (\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, ..., \zeta^{(N)})^\tau$, де кожна з функцій $\zeta^{(k)}$ визначена на поверхні Γ_k і є елементом гільбертового простору $L_2(\Gamma_k)$, а верхній индекс τ означає операцію транспонування. Функції ζ, які визначені на вільній поверхні рідини $\Gamma := \cup_{k=1}^{N}\Gamma_k$, будемо вважати елементами гільбертового простору $L_2(\Gamma) := L_2(\Gamma_1) \oplus L_2(\Gamma_2) \oplus ... \oplus L_2(\Gamma_N)$. Скалярний добуток і норма в $L_2(\Gamma)$ мають вигляд:

$$(\zeta, \eta)_0 := \sum_{k\in\overline{1,N}} \int\limits_{\Gamma_k} \zeta^{(k)}\bar{\eta}^{(k)} d\Gamma, \quad \|\zeta\|_0 := (\zeta, \zeta)_0^{1/2} .$$

Позначимо як $H_0(\Gamma)$ підпростір функцій з $L_2(\Gamma)$, що задовольняють умові (8). Підпростір $H_0(\Gamma)$ є ортогональним доповненням у $L_2(\Gamma)$ до одновимірного підпростіру, натягнутому на функцію $e_\Gamma := (1, 1, ..., 1)^\tau$, яка дорівнює тотожно 1 на вільній поверхні Γ, так що $H_0(\Gamma) := L_2(\Gamma) \ominus \{e_\Gamma\}$. Згідно з (8) відхилення вільної поверхні рідини від рівноважного стану є елементом простору $H_0(\Gamma)$, тобто $\zeta(t, \xi^1, \xi^2) \in H_0(\Gamma)\, \forall t \geq 0$.

Розглянемо допоміжну крайову задачу:

$$\Delta\phi^{(k)}(\vec{x}) = 0 \quad \text{в } \ \Omega_k, \quad k \in \overline{1, N}_0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial n} = \chi^{(k)} \quad \text{на } \ \Gamma_k, \quad k \in \overline{1, N}; \tag{10}$$

$$\frac{\partial\phi^{(j)}}{\partial n} = \frac{\partial\phi^{(k)}}{\partial n} = q_{jk}\left(\phi^{(k)} - \phi^{(j)}\right) \quad \text{на } \ S_{jk}, \quad (jk) \in I_\Omega; \tag{11}$$

$$\frac{\partial\phi^{(k)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \ S_k, \quad k \in \overline{1, N}_0; \tag{12}$$

де функції $\chi^{(k)}$ вважаються заданими. Будемо вважати, що серединні поверхні перегородок S_{jk}, поверхня посудини S і вільна поверхня рідини Γ є достатньо гладкими й перетинаються один з одним під кутами, відмінними від нуля. Функції $q_{jk}(\vec{x})$ підпорядкуємо умові: $0 \leq q_{jk} \leq q^0\, \forall (jk) \in I_\Omega$, де q^0 – деяка додатна константа.

Уведемо гільбертовий простір $H^1(\Omega) := H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2) \oplus ... \oplus H^1(\Omega_N)$, де $H^1(\Omega_k)$ означає простір Соболєва функцій, що належать $L_2(\Omega_k)$ разом із узагальненими похідними першого порядку. Нагадаємо, що Ω означає об'єднання областей, зайнятих рідиною: $\Omega := \cup_{k=1}^{N_0}\Omega_k$.

Позначимо через $\gamma_\Gamma^{(k)}$, $k \in \overline{1, N}$ оператор сліду, що зіставляє довільній функції $\varphi^{(k)} \in H^1(\Omega_k)$, $k \in \overline{1, N}$ її значення на поверхні Γ_k: $\gamma_\Gamma^{(k)}\varphi^{(k)} := = \varphi^{(k)}\big|_{\Gamma_k}$. Як відомо [21], оператори $\gamma_\Gamma^{(k)}$ обмежено діють із $H^1(\Omega_k)$ в $H^{1/2}(\Gamma_k)$, де $H^{1/2}(\Gamma_k)$ – простір Соболєва—Слободецького. Визначимо оператор $\gamma_\Gamma := \mathrm{diag}(\gamma_\Gamma^{(1)}, \gamma_\Gamma^{(2)}, ..., \gamma_\Gamma^{(N)})$, що зіставляє довільній функції $\varphi \in H^1(\Omega)$ її значення на поверхні $\Gamma:\ \gamma_\Gamma\varphi := \varphi|_\Gamma$. Оператор γ_Γ, внаслідок обмеженості $\gamma_\Gamma^{(k)}\ \ \forall\, k \in \overline{1, N}$, також є лінійним обмеженим оператором, що діє з гільбертового простору $H^1(\Omega)$ в простір $H^{1/2}(\Gamma) := H^{1/2}(\Gamma_1) \oplus H^{1/2}(\Gamma_2) \oplus ... \oplus H^{1/2}(\Gamma_N)$.

Уведемо гільбертовий простір

$$H_0^1(\Omega) := \left\{\varphi :\ \varphi \in H^1(\Omega),\, \gamma_\Gamma\varphi \in H_0^{1/2}(\Gamma) := H^{1/2}(\Gamma) \cap H_0(\Gamma)\right\}.$$

Можна показати, що в прийнятих припущеннях існує єдиний узагальнений розв'язок $\phi \in H_0^1(\Omega)$ крайової задачі (9)–(12) для довільних функцій $\chi := (\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, ..., \chi^{(N)})^\tau \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$, де $H_0^{-1/2}(\Gamma)$ – простір спряжений до $H_0^{1/2}(\Gamma)$ відносно скалярного добутку в $H_0(\Gamma)$. Під узагальненим розв'язком цієї задачі розуміється функція $\phi := (\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, ..., \phi^{(N_0)})^\tau \in H_0^1(\Omega)$, що задовольняє інтегральній тотожності:

$$\sum_{k\in\overline{1,N}_0}\int\limits_{\Omega_k} \nabla\phi^{(k)}\cdot\nabla\bar{\eta}^{(k)}d\Omega + \sum_{(jk)\in I_\Omega}\int\limits_{S_{jk}} q_{jk}(\phi^{(k)}-\phi^{(j)})(\bar{\eta}^{(k)}-\bar{\eta}^{(j)})dS =$$
$$= (\chi, \gamma_\Gamma\eta)_0 \quad \forall\eta := (\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, ..., \eta^{(N)})^\tau \in H_0^1(\Omega). \qquad (13)$$

Тут і далі $(\cdot,\cdot)_0$ означає продовження скалярного добутку в $H_0(\Gamma)$ на спряжені простори $H_0^{1/2}(\Gamma)$ й $H_0^{-1/2}(\Gamma)$.

Позначимо через A оператор, що розв'язує крайову задачу (9)–(12), так що $\phi = A\chi$. Оператор A – лінійний обмежений оператор, що діє з простору $H_0^{-1/2}(\Gamma)$ в простір $H_0^1(\Omega)$. Уведемо оператор $C := \gamma_\Gamma A$, що обмежено діє з $H_0^{-1/2}(\Gamma)$ в $H_0^{1/2}(\Gamma)$. В [14] доведено, що звуження C на $H_0(\Gamma)$ є самоспряжений додатний та компактний оператор у $H_0(\Gamma)$.

Зіставляючи еволюційну (1)–(8) і допоміжну (9)–(12) задачі, неважко встановити, що потенціал швидкостей φ і відхилення ζ вільної поверхні рідини від рівноважного положення зв'язані співвідношеннями:

$$\varphi = A\frac{\partial\zeta}{\partial t}, \quad \varphi|_\Gamma = \gamma_\Gamma A\frac{\partial\zeta}{\partial t} = C\frac{\partial\zeta}{\partial t}. \qquad (14)$$

Позначимо через $L^{(k)}$ еліптичний диференціальний оператор 2-го порядку:

$$L^{(k)}\zeta^{(k)} := (-\Delta_\Gamma^{(k)} + a^{(k)})\zeta^{(k)}, \quad k \in \overline{1,N},$$

визначений на функціях $\zeta^{(k)} \in H^2(\Gamma_k)$, що задовольняють умовам (4) ($H^2(\Gamma_k)$ – простір Соболєва скалярних функцій, що належать $L_2(\Gamma_k)$ разом з узагальненими похідними до другого порядку включно). Уведемо оператор $L := \mathrm{diag}(L^{(1)}, L^{(2)}, ..., L^{(N)})$ і оператор B,

$$B\zeta := P_{H_0}L\zeta = L\zeta - \frac{e_\Gamma}{|\Gamma|}(L\zeta, e_\Gamma)_0, \qquad (15)$$

з областю визначення

$$D(B) := \left\{\zeta : \zeta \in H^2(\Gamma) \cap H_0(\Gamma_k),\ \left.\left(\frac{\partial\,\zeta}{\partial\,\nu} + æ\,\zeta\right)\right|_{\partial\Gamma} = 0 \text{ на } \partial\Gamma := \bigcup_{k\in\overline{1,N}}\Gamma_k\right\},$$

де P_{H_0} – оператор ортогонального проектування в $L_2(\Gamma)$ на підпростір $H_0(\Gamma)$. Відзначимо, що $|\Gamma|$ в (15) означає площу всієї вільної поверхні Γ, так що $|\Gamma| := \sum_{k=1}^N |\Gamma_k|$.

Як відомо, кожний із операторів $L^{(k)}$, $k \in \overline{1,N}$ – допускає розширення за Фрідріхсом до самоспряженого обмеженого знизу оператора в $L_2(\Gamma)$ з областю визначення $D(L^{(k)}) \subset H^1(\Gamma_k)$ [5, 11]. Звідси випливає, що оператор B можна розширити до самоспряженого обмеженого знизу оператора в $H_0(\Gamma)$ з областю визначення $D(B) \subset H_0^1(\Gamma)$. Надалі це розширення будемо позначати як і раніше через B.

Звертаючись до динамічної умови (3), а також до початкових умов (7), прийдемо до задачі Коші в гільбертовому просторі $H_0(\Gamma)$, що описує малі потенціальні рухи капілярної рідини поблизу рівноважного стану:

$$\rho C \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \sigma B\zeta = \rho f_0(t) \quad (t > 0), \quad \zeta(0) = \zeta_0, \quad \frac{d\zeta(0)}{dt} = \zeta_1. \tag{16}$$

$$\zeta_0 := (\zeta_0^{(1)}, \zeta_0^{(2)}, \ldots, \zeta_0^{(N)})^\tau, \quad \zeta_1 := (\zeta_1^{(1)}, \zeta_1^{(2)}, \ldots, \zeta_1^{(N)})^\tau,$$

$$f_0(t) := f(t) - \frac{1}{|\Gamma|} \int\limits_\Gamma f(t) d\Gamma.$$

Рівноважним станам рідини відповідають стаціонарні значення функціонала потенціальної енергії

$$\Pi := \sum_{k \in \overline{1,N}} \sigma |\Gamma_k| + \sum_{k \in \overline{1,N_0}} (\sigma_g - \sigma_f)|S_k| - \sum_{k \in \overline{1,N_0}} \int\limits_{\Omega_k} \rho(\vec{g} \cdot \vec{x}) d\Omega, \tag{17}$$

так що $\delta\Pi(\Gamma;\zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in H_0(\Gamma)$, де $\delta\,\Pi(\Gamma;\zeta)$ – перша варіація функціонала Π ($\sigma_f, \sigma_g = \mathrm{const}$ – коефіцієнти поверхневого натягу на поверхнях контакту рідини та газу з твердою стінкою). Неважко показати, що друга варіація потенціальної енергії $\delta^2\Pi(\Gamma;\zeta)$ збігається (з точністю до множника) із квадратичною формою оператора B, так що у випадку малих відхилень вільної поверхні рідини від рівноважного положення можна прийняти

$$\Pi \simeq \frac{1}{2}\delta^2\Pi(\Gamma;\zeta) = \frac{\sigma}{2}\,(B\zeta,\zeta)_0 =$$
$$= \frac{\sigma}{2} \sum_{k \in \overline{1,N}} \left[\int\limits_{\Gamma_k} \left(\left|\nabla_\Gamma^{(k)} \zeta^{(k)}\right|^2 + a^{(k)} \left|\zeta^{(k)}\right|^2 \right) d\Gamma + \int\limits_{\partial\Gamma_k} æ^{(k)} \left|\zeta^{(k)}\right|^2 ds \right], \tag{18}$$

де $\nabla_\Gamma^{(k)}(\cdot)$ – поверхневий градієнт функцій, визначених на Γ_k, ds – елемент довжини контуру $\partial\Gamma$.

Кінетична енергія потенціальних рухів рідини представляється у вигляді квадратичної форми, яка сполучена з оператором C:

$$K = \frac{\rho}{2} \sum_{k \in \overline{1,N}} \left(C \frac{\partial \zeta}{\partial t}^{(k)}, \frac{\partial \zeta}{\partial t}^{(k)} \right)_0 =$$

$$= \frac{\rho}{2} \left[\sum_{k \in \overline{1,N}_0} \int_{\Omega_k} \left| \nabla \varphi^{(k)} \right|^2 d\Omega + \sum_{(jk) \in I_\Omega} \int_{S_{jk}} q_{jk} \left| \varphi^{(k)} - \varphi^{(j)} \right|^2 d\,S \right]. \quad (19)$$

Порівняно зі звичайним виразом для кінетичної енергії потенціальних коливань рідини права частина рівності (19) містить додатковий доданок; поява цього доданка пояснюється тим, що кінетична енергія визначена через усереднений потенціал швидкостей рідини.

Внаслідок рівностей (18), (19) оператори B, C будемо називати операторами потенціальної і кінетичної енергій, відповідно.

3. Власні коливання рідини. Розв'язність еволюційної задачі.

Еволюційна задача (16) в точності збігається з операторно-диференціальним формулюванням класичної задачи про малі рухи капілярної рідини в частково заповненої посудині [3, 5, 11]. При цьому зберігаються основні властивості операторів потенціальної і кінетичної єнергій. Це дозволяє перенести результати, отримані в [3, 5, 11], на розглядаємий випадок коливань рідини в посудині з перфорованими перегородками.

Власні нормальні коливання рідини описуються розв'язками однорідного рівняння (16), що залежать від часу t за законом

$$\zeta = \exp{(i\,\omega\,t)} u(\vec{x}),$$

де ω – кругова частота коливань, $u(\vec{x})$, $\vec{x} \in \Gamma$ – мода коливань вільної поверхні рідини. Рівняння (16) при $f_0 \equiv 0$ приводить до спектральної задачі

$$Bu = \lambda C u, \qquad \lambda := \omega^2 \rho / \sigma. \quad (20)$$

Оператор потенціальної енергії B – обмежений знизу оператор з дискретним дійсним спектром. У загальному випадку B має n від'ємних, n^0 нульових і рахункову множину додатних власних значень $\lambda_k(B)$. Всі власні значення оператора B пронумеруємо, як звичайно, у порядку зростання з урахуванням їх кратностей,

$$\lambda_1(B) \le \lambda_2(B) \le \ldots \le \lambda_n(B) < 0, \quad \lambda_{n+1}(B) = ... = \lambda_{n+n^0}(B) = 0,$$
$$0 < \lambda_{n+n^0+1}(B) \le \lambda_{n+n^0+2}(B) \le \lambda_{n+n^0+3}(B) \le \ldots \quad . \quad (21)$$

Скориставшись результатами [5, 11], сформулюємо загальні властивості власних значень і власних функцій задачі (20).

Теорема 1. *Нехай власні значення оператора потенціальної енергії B задовольняють умовам (21). Тоді задача (20) має дискретний спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, *який складається із власних значень λ_k скінченної кратності; усі власні значення дійсні, причому $\lambda_k := \lambda_k^- < 0 \quad \forall\, k \in \overline{1,n}, \quad \lambda_{n+k} := \lambda_k^0 = 0 \quad \forall\, k \in \overline{1,n^0}, \quad \lambda_{n+n^0+k} := \lambda_k^+ > 0 \quad \forall\, k \in \overline{1,\infty}$, $\lambda_k^+ \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Сукупність власних функцій $\{u_k\}_{k=1}^\infty := \left\{u_k^-\right\}_{k=1}^n \cup \left\{u_k^0\right\}_{k=1}^{n^0} \cup \left\{u_k^+\right\}_{k=1}^\infty$ ($u_k^0, u_k^\pm$ – власні функції, які відповідають власним значенням $\lambda_k^0, \lambda_k^\pm$) повна в $H_0(\Gamma)$, створює базис Рисса в цьому просторі і може бути обрана так, щоб виконувалися співвідношення:*

$$(B\,u_j, u_k)_0 = \delta_{jk}\lambda_k, \quad (C\,u_j, u_k)_0 = \delta_{jk}.$$

Спектральна задача (20) допускає варіаційне формулювання. Власні значення цієї задачі можна знайти як послідовні мінімуми співвідношення

$$\frac{(Bu,u)_0}{(Cu,u)_0} = \frac{\sum\limits_{k\in\overline{1,N}} \left[\int\limits_{\Gamma_k} \left(\left|\nabla_\Gamma^{(k)} u^{(k)}\right|^2 + a^{(k)}\left|u^{(k)}\right|^2\right) d\Gamma + \int\limits_{\partial\Gamma_k} æ^{(k)}\left|u^{(k)}\right|^2 ds\right]}{\sum\limits_{k\in\overline{1,N_0}} \int\limits_{\Omega_k} \left|\nabla\varphi^{(k)}\right|^2 d\Omega + \sum\limits_{(jk)\in I_\Omega} \int\limits_{S_{jk}} q_{jk}\left|\varphi^{(k)} - \varphi^{(j)}\right|^2 d\,S}. \quad (22)$$

Введемо позначення:

$$\gamma_k := |\lambda_k^- \sigma/\rho|^{1/2} > 0 \quad \forall k \in \overline{1,n}, \quad \omega_k^0 := 0 \quad \forall k \in \overline{1,n^0},$$

$$\omega_k^+ := (\lambda_k^+ \sigma/\rho)^{1/2} > 0 \quad \forall k \in \overline{1,\infty}.$$

У загальному випадку спектр $\{\omega_k\}$ власних частот коливань рідини містить n пар уявних "частот"$\{\pm\, i\gamma_k\}_{k=1}^n$, а також n^0 нульових $\left\{\omega_k^0 = 0\right\}_{k=1}^{n^0}$ і рахункову множину від'ємних і додатних частот $\pm\left\{\omega_k^+\right\}_{k=1}^\infty$. Точно кажучи, фізичний смисл кругової частоти коливань мають тільки величини ω_k^+. Забігаючи вперед, відзначимо також, що величини γ_k, ω_k^0 відповідають нестійкому стану рівноваги рідини, при цьому γ_k є інкременти росту збурень при втраті стійкості рівноваги.

Узагальненим розв'язком задачі Коші (16) *на відрізку часу $[0,T]$ будемо називати функцію $\zeta(t)$, неперервну по $t \in [0,T]$ у нормі простору $H_0^1(\Gamma)$, з неперервною першою похідною по $t \in [0,T]$ у нормі простору $H_0^{-1/2}(\Gamma)$,*

$$\zeta(t) \in C([0,T]; H_0^1(\Gamma)), \quad \zeta'(t) \in C([0,T]; H_0^{-1/2}(\Gamma)) \quad ({}' := d/dt),$$

яка задовольняє інтегральній тотожності:

$$\int_0^T \big(\rho(C\zeta'(t), \eta'(t))_0 - \sigma(B\zeta(t), \eta(t))_0 + \rho(f_0(t), \eta(t))_0\big)\, dt + \rho(C\zeta_1, \eta(0))_0 = 0,$$

$$\forall\, \eta(t) \in L_2([0,T]; H_0^1(\Gamma)), \quad \eta'(t) \in L_2([0,T]; H_0^{-1/2}(\Gamma)), \quad \eta(T) = 0. \quad (23)$$

Теорема 2. *Нехай виконані умови:* $\zeta_0 \in H_0^1(\Gamma), \zeta_1 \in \mathcal{H}_0^{-1/2}(\Gamma)$, $f_0(t) \in L_2([0,T]; H_0(\Gamma))$. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі Коші (16).*

Доведення теореми неважко одержати, слідуючи схемі наведеній в [5, 11].

Узагальнений розв'язок задачі (16) можна представити у вигляді:

$$\zeta(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j^-(t) u_j^- + \sum_{j=1}^{n^0} c_j^0(t) u_j^0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j^+(t) u_j^+, \tag{24}$$

$$c_j^-(t) := \alpha_j^- \operatorname{ch}(\gamma_j t) + \frac{\beta_j^-}{\gamma_j} \operatorname{sh}(\gamma_j t) + \frac{1}{\gamma_j} \int_0^t \operatorname{sh}(\gamma_j (t-\tau)) f_j^-(\tau) d\tau,$$

$$c_j^0(t) := \alpha_j^0 + \beta_j^0 t + \int_0^t d\tau \int_0^\tau f_j^0(s) ds,$$

$$c_j^+(t) := \alpha_j^+ \cos(\omega_j^+ t) + \frac{\beta_j^+}{\omega_j^+} \sin(\omega_j^+ t) + \frac{1}{\omega_j^+} \int_0^t \sin(\omega_j^+ (t-\tau)) f_j^+(\tau) d\tau,$$

$$\alpha_j^\pm := (C\zeta_0, u_j^\pm)_0, \quad \beta_j^\pm := (C\zeta_1, u_j^\pm)_0, \quad f_j^\pm(t) := (f_0(t), u_j^\pm)_0,$$

$$\alpha_j^0 := (C\zeta_0, u_j^0)_0, \quad \beta_j^0 := (C\zeta_1, u_j^0)_0, \quad f_j^0(t) := (f_0(t), u_j^0)_0.$$

На закінчення даного розділу розглянемо умови стійкості рівноважного стану капілярної рідини. Будемо називати ***рівноважний стан стійким***, *якщо для кожного* $\varepsilon > 0$ *можна вказати* $\delta > 0$ *таке, що для будь-яких початкових збурень* ζ_0, ζ_1, *що задовольняють умовам* $\|\zeta_0\|_{H_0^1(\Gamma)} < \delta$, $\|\zeta_1\|_{H_0^{-1/2}(\Gamma)} < \delta$, *виконуються нерівності:*

$$\|\zeta(t)\|_{H_0^1(\Gamma)} < \varepsilon, \quad \left\|\zeta'(t)\right\|_{H_0^{-1/2}(\Gamma)} < \varepsilon \quad \text{при}\, \forall t > 0.$$

У відсутності збурень зовнішнього поля масових сил ($f \equiv 0$) рівноважний стан капілярної рідини є стійкий, якщо найменше власне значення оператора потенціальної енергії B додатне, тобто $\lambda_1(B) > 0$, і нестійкий, якщо $\lambda_1(B) < 0$. Дійсно, якщо $\lambda_1(B) > 0$, то, звертаючись до (24), неважко переконатися в тому, що при $f \equiv 0$ рівноважний стан стійкий. Якщо $\lambda_1(B) < 0$, то з (24) легко випливає, що в цьому випадку існують як завгодно малі (по нормі простору $H_0^1(\Gamma)$) початкові збурення рівноважного стану такі, що $\|\zeta(t)\|_{H_0^1(\Gamma)} \to \infty$ при $t \to \infty$.

Спектральна ознака стійкості: $\lambda_1(B) > 0$ (або нестійкості: $\lambda_1(B) < 0$) у деяких випадках допускає достатньо ефективну перевірку. Приклади її використання можна знайти в [6], [17].

Згідно (18) у рівноважному стані рідини функціонал потенціальної енергії буде мати локально мінімальне значення, якщо оператор потенціальної енергії B є додатно визначений і отже $\lambda_1(B) > 0$. З (18) випливає також, що у випадку $\lambda_1(B) < 0$ друга варіація потенціальної енергії може приймати від'ємні значення. Таким чином, має місце наступна

Теорема 3. *У відсутності збурень зовнішнього поля масових сил* ($f \equiv 0$) *рівноважний стан капілярної рідини є стійким, якщо йому відповідає ізольований локальний мінімум потенціальної енергії* Π *(див.(17)). Якщо рівноважному стану відповідає стаціонарне значення функціонала потенціальної енергії, що не є локальним мінімумом, і при цьому друга варіація потенціальної енергії може приймати від'ємні значення, то рівноважний стан рідини є нестійким.*

Дана теорема є аналогом відомої теореми Лагранжа (і її обернення) про стійкість рівноваги консервативних систем зі скінченним числом ступенів вільності.

ЛІТЕРАТУРА

1. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. – М: Машиностроение, 1971.– 563 с.

2. Микишев Г. Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.

3. Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Гидромеханика невесомости. – М.: Наука, 1976. – 504 с.

4. Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.Н. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. – К.: Наукова думка, 1984. – 232 с.

5. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. – М.: Наука, 1989. – 416 с.

6. Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Методы решения задач гидродинамики для условий невесомости. – К.: Наукова думка, 1992. – 592 с.

7. Лимарченко О. С., Ясинский В. В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – К.: НТТУ КПІ, 1997. – 338 с.

8. Богомаз Г.И., Сирота С.А. Колебания жидкости в баках (методы и результаты экспериментальных исследований). – Днепропетровск: Инст. технической механики НАН Украины и НКА Украины, 2002. – 306 с.

9. Богомаз Г.И. Динамика железнодорожных вагонов – цистерн. – К: Наукова думка, 2004. – 224 с.

10. Высоцкий М.С., Плескачевский Ю.М., Шимановский А.О. Динамика автомобильных и железнодорожных цистерн.– Минск: Белавтотракторостроение, 2006. – 320 с.

11. Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д. Приложения индефинитной метрики. – Симферополь: ДІАЙПІ, 2014. – 276 с.

12. Галицин Д. А., Троценко В. А. К расчету частот и присоединенных масс жидкости в прямоугольном контейнере с перегородками в поперечной плоскости его симметрии // Прикладна гідромеханіка, 2000, № 1. – С. 20–27.

13. Троценко В. А О влиянии кольцевых перегородок на эффективность гашения волновых движений жидкости в сосуде //Доповіді НАНУ, 2005, № 6. – С. 50–56.

14. Борисов Д. И. Малые движения идеальной жидкости в сосуде с перфорированными перегородками // Вісник Харківського національного університету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка", 2006. – № 749. – С. 86–95.

15. Борисов Д. И., Руднев Ю.И. Собственные колебания идеальной жидкости в сосуде с перфорированными перегородками // Прикладна гідромеханіка, – 2010. – № 2. – С. 8–19.

16. Газиев Э.Л., Копачевский Н.Д., Малые движения и собственные колебания гидросистемы "жидкость–баротропный газ"// Український математичний вісник, 2013. – Т.10, №1. – С.16–53.

17. Копачевский Н.Д., Ситшаева З.З. Равновесие и устойчивость капиллярной жидкости с несвязной свободной поверхностью в открытом сосуде // Нелинейные колебания, 2014. – Т.17, № 1. – С. 46–59.

18. Марченко В. А., Сузиков Г. В. Вторая краевая задача в областях со сложной границей //Матем. сборник, 1966.– Т. 69 (111), № 1. – С. 35–60.

19. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – К.: Наукова думка, 1974. – 280 с.

20. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Усредненные модели микронеоднородных сред. – К.: Наукова думка, 2005. – 550 с.

21. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 455 с.

Стаття одержана: 10.09.2014; перероблений варiант: 10.10.2014; прийнята: 15.10.2014.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.938 № 1133, 2014, с.48–55

Метод расчета устойчивости нелинейных систем с запаздываниями

С. Ю. Пославский
Институт транспортных систем и технологий НАН Украины,
ул. Писаржевского, 5, 49000, Днепропетровск, Украина
sergey.poslavskiy@gmail.com

Предложен простой метод расчета экспоненциальной устойчивости некоторых классов нелинейных систем, содержащих переменные и распределенные запаздывания. Найдена верхняя оценка максимального показателя Ляпунова, характеризующая скорость убывания решений таких систем. Приведены примеры, иллюстрирующие применение разработанной методики.
Ключевые слова: экспоненциальная устойчивость, запаздывание, показатель Ляпунова.

Пославський С. Ю., **Метод розрахунку стійкості нелінійних систем з запізнюваннями.** Запропоновано простий метод розрахунку експоненційної стійкісті деяких класів нелінійних систем, що містять змінні та розподілені запізнювання. Знайдена верхня оцінка максимального показника Ляпунова, що характеризує швидкість спадання рішень таких систем. Наведені приклади, що ілюструють застосування розробленої методики.
Ключові слова: експоненційна стійкість, запізнювання, показник Ляпунова.

S. Yu. Poslavskii, **Method for calculating the stability of nonlinear systems with time-delays.** A simple method for calculating the exponential stability of some classes of nonlinear systems containing varying and distributed delays is proposed. An upper bound for the largest Lyapunov exponent is found. Examples, illustrating application of the developed technique, are given.
Keywords: exponential stability, time-delay, Lyapunov exponent.

2010 Mathematics Subject Classification: 70K20.

1. Введение

В прикладных задачах устойчивости различных систем зачастую нелинейная характеристика объекта точно не известна или меняется со временем в определенных пределах. Требуется найти условия, гарантирующие устойчивость системы для любых нелинейных характеристик, лежащих в допустимых пределах. Такая задача была впервые была поставлена А.И. Лурье и В.Н. Постниковым в [1], где была рассмотрена устойчивость системы автоматического регулирования при любых начальных возмущениях и любой нелинейности сервомотора, лежащей в заданном секторе. Эта статья привлекла внимание многих исследователей и положила начало новому направлению – теории абсолютной устойчивости, где рассматривается устойчивость не одной конкретной системы, а некоторого множества систем, принадлежащих определенному классу. Были рассмотрены новые виды динамических систем, в частности, системы с запаздыванием. В работе Б.С. Разумихина [2] достаточные условия устойчивости таких систем были получены методом функции Ляпунова. Работа В.М. Попова и А. Халаная [3] положила начало развитию частотных методов исследования устойчивости систем с запаздыванием.

Большинство исследований систем с запаздывающим аргументом направлены на поиск условий устойчивости таких систем. Оценкам показателя Ляпунова, характеризующего скорость убывания решений, посвящено значительно меньшее число исследований; классические результаты такого рода [4] относятся к системам с нелинейностью не содержащей запаздывания. В работе [5] для систем с запаздыванием такие оценки получены методом функций Ляпунова. В [6] были найдены условия экспоненциальной устойчивости и получены двусторонние оценки максимального показателя Ляпунова. В данной работе предлагается новый метод, существенно сокращающий вычислительную сложность исследования.

2. Постановка задачи

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau_B(t)) + f(x(t - \tau(t)), t) + C\int_{t-\mu}^{t} x(u)du, \qquad (1)$$

где A, B и C – заданные матрицы в $\mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Матрица A – гурвицева, т. е. все ее собственные значения β_i удовлетворяют неравенству $\mathrm{Re}\beta_i < 0$, $i = 1, ..., n$.

Функции $\tau(t)$, $\tau_B(t)$, $f(x,t)$ и $x_0(t)$ кусочно-непрерывны и удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} \tau(t) \in [0,h],\ \tau_B(t) \in [0,h_B], \\ x(t) = x_0(t) \text{ при } t \in [-H,0],\ H = \max(h, h_B, \mu), \\ \|f(x,t)\| \le k\,\|x\|\,, f(0,t) = 0, \end{gathered} \qquad (2)$$

где $\|\cdot\|$ – норма (здесь и далее используется евклидова норма), k – заданная величина.

В силу $f(0,t) = 0$, система (1) имеет положение равновесия $x(t) \equiv 0$. В данной работе рассматривается устойчивость этого положения.

Функции $x_0(t)$, $f(x,t)$, $\tau_B(t)$ и $\tau(t)$ назовем допустимыми, если они удовлетворяют приведенным выше условиям. Пусть λ' – показатель Ляпунова решения $x(t)$ уравнения (1) при некоторых допустимых $x_0(t)$, $f(x,t)$, $\tau_B(t)$ и $\tau(t)$, т. е.

$$\lambda'(x_0, f, \tau_B, \tau) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln \|x(t)\|}{t}.$$

Максимальный показатель Ляпунова решений $x(t)$ системы (1) равен

$$\bar{\lambda} = \sup \lambda'(x_0, f, \tau_B, \tau),$$

где супремум вычисляется по всем допустимым функциям $x_0(t)$, $f(x,t)$, $\tau_B(t)$ и $\tau(t)$.

Определение 1. Система (1) экспоненциально устойчива, если $\bar{\lambda} < 0$. Тогда при любых $x_0(t)$, $f(x,t)$, $\tau_B(t)$ и $\tau(t)$, удовлетворяющих условиям (2), для соответствующих решений справедливо неравенство

$$\|x(t)\| \le N \|x_0(t)\| \exp(\bar{\lambda} t),\ t \in (0, +\infty),$$

где $N > 0$ – некоторая постоянная.

Цель данной работы – получить простые условия экспоненциальной устойчивости системы (1), выраженные непосредственно с помощью параметров системы, а также найти верхнюю оценку максимального показателя Ляпунова, характеризующую скорость убывания решений.

3. Условия экспоненциальной устойчивости

Будем считать, что матрица A имеет различные собственные значения $\beta_1, ..., \beta_n$ (этого можно достичь произвольно малым возмущением A [7]). Пусть $v_1, ..., v_n$ – соответствующие собственные векторы, нормированные условием

$$(v_i, v_i) = 1, \quad i = 1, ..., n.$$

Обозначим T матрицу, столбцами которой являются векторы v_i:

$$T = (v_1, ..., v_n).$$

Как известно [7],

$$T^{-1}AT = J = \operatorname{diag}(\beta_1, ..., \beta_n).$$

Положив в системе (1) $x = Ty$, получим

$$\begin{gathered} \dot{y}(t) = Jy(t) + T^{-1}BTy(t - \tau_B(t)) + \\ + T^{-1} f(Ty(t - \tau(t)), t) + T^{-1} C \int_{t-\mu}^{t} Ty(u) du. \end{gathered} \tag{3}$$

Следующая теорема дает условие экспоненциальной устойчивости системы (1).

Теорема 1 *При условии*

$$\frac{1}{\beta}\Big(\left\|T^{-1}BT\right\| + \left\|T^{-1}\right\| k \left\|T\right\| + \left\|T^{-1}C\right\| \mu \left\|T\right\| \Big) < 1 \qquad (4)$$

система (1) экспоненциально устойчива, причем

$$\bar{\lambda} < \lambda,$$

где $\beta = \min|\mathrm{Re}\beta_i|$, λ *– корень уравнения*

$$\begin{aligned} V(\lambda) = \frac{1}{\beta+\lambda}\Bigg(&\exp[-\lambda h_B] \left\|T^{-1}BT\right\| + \exp[-\lambda h] \left\|T^{-1}\right\| k \left\|T\right\| + \\ &+ \frac{1-\exp[-\lambda\mu]}{\lambda} \left\|T^{-1}C\right\| \left\|T\right\| \Bigg) = 1. \end{aligned} \qquad (5)$$

Доказательство. Представим решение (3) в виде

$$\begin{aligned} y(t) = W(t,0)y(0) + \textstyle\int_0^t W(t,s)\Big(&T^{-1}BTy(s-\tau_B(s)) + \\ + T^{-1}f(Ty(s-\tau(s)),s) + T^{-1}C \textstyle\int_{s-\mu}^{s} &Ty(u)du\Big)ds \end{aligned} \qquad (6)$$

где $W(t,s)$ – матрицант уравнения $\dot{y}(t) = Jy(t)$.

Покажем сначала, что при условии (4) $y(t)$ ограничено на $(0,+\infty)$. В противном случае найдется последовательность t_q ($t_q \to +\infty$ при $q \to +\infty$), такая, что

$$\|y(t_q)\| \geq \|y(t)\| \text{ при } t \leq t_q. \qquad (7)$$

Из (6), с учетом (2) и (7), имеем

$$\begin{aligned} \|y(t_q)\| \leq \|W(t_q,0)y(0)\| + \textstyle\int_0^{t_q} \|W(t_q,s)\| \Bigg(&\left\|T^{-1}BT\right\| \|y(t_q)\| + \\ + \left\|T^{-1}\right\| k \|T\| \|y(t_q)\| + \left\|T^{-1}C\right\| \textstyle\int_{s-\mu}^{s} &\|T\| \|y(t_q)\| \, du\Bigg)ds. \end{aligned} \qquad (8)$$

В рассматриваемом случае $W(t,s) = \exp[(t-s)J]$, поэтому собственные значения матрицы $W(t,s)$ равны $\exp[(t-s)\beta_i]$, $i = 1,...,n$. Матрица J – диагональная, следовательно, $W(t,s)$ также диагональная, поэтому $\|W(t,s)\| = \exp[-\beta(t-s)]$. Тогда

$$\lim_{t_q\to+\infty} \int_0^{t_q} \|W(t_q,s)\| \, ds = \lim_{t_q\to+\infty} \frac{1}{\beta}(1-\exp[-\beta t_q]) = \frac{1}{\beta}.$$

С учетом этого, неравенство (8) запишем в виде

$$\begin{aligned} &\|y(t_q)\| \leq \|W(t_q,0)y(0)\| + \\ + \|y(t_q)\| \frac{1}{\beta}\Big(&\left\|T^{-1}BT\right\| + \left\|T^{-1}\right\| k \|T\| + \left\|T^{-1}C\right\| \mu \|T\| \Big). \end{aligned} \qquad (9)$$

Так как система $\dot{y}(t) = Jy(t)$ устойчива, то $\|W(t_q, 0)y(0)\| \to 0$ при $t_q \to +\infty$. Следовательно, при условии (4), неравенство (9) не выполняется. Полученное противоречие показывает, что решения системы ограничены.

Максимальный показатель Ляпунова решений системы $\dot{y}(t) = Jy(t)$ равен $\bar{\lambda} = -\beta$. Будем искать верхнюю оценку величины $\bar{\lambda}$ системы (1) в интервале

$$\lambda > -\beta.$$

Для доказательства экспоненциальной устойчивости положим в (3)

$$y(t) = \exp(\lambda t)z(t), \quad -\beta < \lambda < 0, \tag{10}$$

в результате получим

$$\begin{gathered}\dot{z}(t) = (J - \lambda I)z(t) + \exp[-\lambda\tau_B(t)]T^{-1}BTz(t - \tau_B(t)) + \\ + \exp[-\lambda t]T^{-1}f(T\exp[\lambda(t - \tau(t))]z(t - \tau(t)), t) + \\ + \exp[-\lambda t]T^{-1}C\int_{t-\mu}^{t} T\exp[\lambda u]z(u)du.\end{gathered} \tag{11}$$

Аналогично приведенному выше доказательству найдем, что решения (11) ограничены, если

$$\frac{1}{\beta+\lambda}\Bigg(\exp[-\lambda h_B]\left\|T^{-1}BT\right\| + \exp[-\lambda h]\left\|T^{-1}\right\| k\left\|T\right\| + \\ + \frac{1-\exp[-\lambda\mu]}{\lambda}\left\|T^{-1}C\right\|\left\|T\right\|\Bigg) < 1.$$

Функция $V(\lambda)$ убывает по λ; по условию (4) $V(\lambda) < 1$ при $\lambda = 0$, следовательно при $V(\lambda) = 1 \quad \lambda < 0$. Учитывая (10), найдем, что система (1) экспоненциально устойчива с показателем λ. *Теорема доказана.*

4. Примеры

Проиллюстрируем эффективность полученных условий устойчивости на модельных примерах.

Пример 1. Для проверки эффективности разработанной методики, рассмотрим уравнение, для которого условия устойчивости были получены ранее другими методами в [6] и [8]

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau_B(t)) + C\int_{t-\mu}^{t} x(u)du, \\ A = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 \end{bmatrix}.\end{gathered} \tag{12}$$

Матрица A – диагональная, следовательно $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Пусть a_1 – минимальное по модулю собственное значение матрицы A, тогда условие экспоненциальной устойчивости (4) для системы (12) принимает вид

$$a_1 > \sqrt{b_1^2 + b_2^2} + \mu\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \tag{13}$$

Заметим, что такое условие было получено ранее в [6] другим методом. В [8] для уравнения (12) с постоянным запаздыванием τ_B методом функций Ляпунова получено следующее условие устойчивости

$$a_1 > (1+\mu)^{1/2}[(b_1^2+b_2^2)+\mu(c_1^2+c_2^2)]^{1/2}. \tag{14}$$

Нетрудно проверить, что условие (13) менее консервативно, чем (14) (лишь при $b_1^2+b_2^2=\mu(c_1^2+c_2^2)$ они совпадают). При этом условие (13) является более общим, охватывая системы с произвольным переменным запаздыванием $\tau_B(t)$.

Пример 2. Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau_B(t)) + f(x(t-\tau(t)),t),$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0.1 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0.2 & 1 & -2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & -0.2 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

где $\tau(t) \in [0,\ h]$, $\tau_B(t) \in [0,\ h_B]$, $\|f(x,t)\| \le k\,\|x\|$.

Условие устойчивости (4) принимает вид

$$k < \frac{\beta - \left\|T^{-1}BT\right\|}{\|T^{-1}\|\,\|T\|} < 0.0829... \tag{16}$$

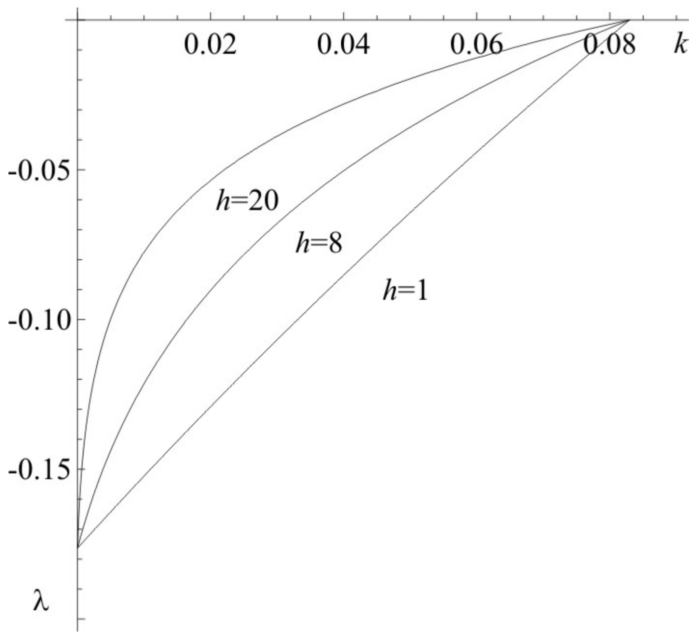

Рис. 1. Верхние оценки $\lambda(k)$ максимального показателя Ляпунова

На рисунке представлены графики верхней оценки максимального показателя Ляпунова $\lambda(k)$ при различных значениях максимальной величины запаздывания h и фиксированной $h_B = 0.5$.

Функции $\lambda(k, h)$ возрастают по k и h, однако $\lim k(\lambda, h) = 0.0829...$ при $\lambda \to 0$ не зависит от h. Поэтому условие $k < 0.0829...$ гарантирует экспоненциальную устойчивость системы при любом конечном h.

Используя метод, предложенный в [6], для системы (15) было получено условие устойчивости

$$k < 0.0483... \tag{17}$$

Очевидно, что условие (16) менее консервативно чем (17). Однако, если положить в (15) $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = 0$, теорема 1 дает условие устойчивости $k < 0.1458...$, в то время как в [6] получено условие $k < 0.5184...$ Таким образом, эти два подхода дополняют друг друга, однако, метод, предлагаемый в данной работе, существенно проще.

5. Выводы

В данной работе предложен простой метод расчета экспоненциальной устойчивости некоторых классов нелинейных систем, содержащих переменные и распределенные запаздывания. Вычислительная трудоемкость предложенного метода практически не зависит от порядка системы. Найдена верхняя оценка максимального показателя Ляпунова, которая позволила оценить скорость убывания решений рассмотренных систем. Эффективность разработанной методики проиллюстрирована на примерах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А.И., Постников В.Н. К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. – 1944. – Т.8. – Вып.3. – С. 246–248.

2. Разумихин Б.С. Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования с запаздыванием // Инженерный сборник. – 1960. – Т.19. – С. 21–29.

3. Попов В.М., Халанай А. Об устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования с запаздывающим аргументом // Автоматика и телемеханика. – 1962. – №7. – С. 849–851.

4. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.:Наука, 1970. — 536 с.

5. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функции Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – К.: Изд-во Киевского унивеситета, 1997. – 236 с.

6. Зевин А.А., Пославский С.Ю. Двусторонние оценки наибольшего показателя Ляпунова и критерии экспоненциальной устойчивости нелинейных систем с произвольным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №1. – С. 82–91.

7. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 367 с.

8. Kolmanovskii V.B., Richard J.-P. Stability of some linear systems with delay // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1999. – V. 44 (5). – P. 984–989.

Статья получена: 20.03.2014; окончательный вариант: 18.08.2014; принята: 25.09.2014.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.574 № 1133, 2014, с.56–75

Теоремы о представлении δ-субгармонических функций

А. Ф. Гришин, Нгуен Ван Куинь, И. В. Поединцева

Механико-математический факультет,
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
grishin@univer.kharkov.ua,
quynhsonla1988@gmail.com,
poedintseva@univer.kharkov.ua

В теории субгармонических и δ-субгармонических функций существенную роль играют теоремы о представлении. В статье предлагается усиление варианта Азарина теоремы о представлении δ-субгармонических функций конечного порядка.
Ключевые слова: δ-субгармоническая функция, полиномы Гегенбауэра, неванлинновская характеристическая функция.

Гришин А. П., Нгуєн Ван Куінь, Поєдинцева І. В., **Теореми про представлення δ-субгармонічних функцій.** У теорії субгармонічних і δ-субгармонічних функцій суттєву роль відіграють теореми про представлення. У статті пропонується посилення варіанту Азаріна теореми про представлення δ-субгармонічних функцій скінченного порядку.
Ключові слова: δ-субгармонічна функція, поліноми Гегенбауера, неванліннівська характеристична функція.

A.F. Grishin, Nguyen Van Quynh, I. V. Poedintseva, **Representation theorems of δ-subharmonic functions.** Representation theorems are important in the theory of subharmonic and δ-subharmonic functions. In the article we sharpen Azarin's variant of representation theorem of δ-subharmonic functions of finite order.
Keywords: δ-subharmonic function, Gegenbauer's polynomials, Nevanlinna's characteristic function.

2000 Mathematics Subject Classification: **31A05, 31B05.**

1. Вступление.

Кроме вступления в статье выделены разделы 2–5. В разделах 2–4 помещены известные или по существу известные результаты, причём приводятся такие формулировки, которые используются в дальнейшем.

В разделе 2 обсуждаются определения субгармонической и δ-субгармонической функций и приводятся некоторые их свойства.

В разделе 3 приводится определение многочленов Гегенбауэра и изучается разложение в ряд Тейлора с центром в нуле функции $\frac{1}{\|x-y\|^{m-2}}$, $x, y \in \mathbb{R}^m$, рассматриваемой как функция переменной x.

В разделе 4 для δ-субгармонических функций w из специального класса определяется неванлинновская характеристическая функция $T(r, \mathrm{w})$ и обсуждаются некоторые её свойства.

В разделе 5, основном разделе статьи, приводятся четыре теоремы о представлении для δ-субгармонических функций во всём пространстве $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Теории субгармонических и δ-субгармонических функций в плоскости и в пространствах $\mathbb{R}^m$, $m \geq 3$ различаются. Поэтому теоремы о представлении для случаев $m = 2$ и $m \geq 3$ доказываются отдельно.

В книге Азарина ([1], теорема 2.9.3.1) доказывается теорема о представлении δ-субгармонических функций конечного порядка в пространстве $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. В книге Хеймана и Кеннеди ([2], теорема 4.2) доказывается аналогичная теорема для субгармонических функций. Предлагаемые доказательства позволяют несколько усилить результаты из [1] и [2]. Об этом подробнее будет сказано в разделе 5.

2. Субгармонические и δ-субгармонические функции.

Пусть G – область в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Обозначим через $\Phi(G)$ линейное пространство непрерывных финитных в G функций φ, то есть таких функций, что *supp* φ — это компакт, лежащий в G. В пространстве $\Phi(G)$ сходимость определяется следующим образом. Последовательность функций $\varphi_n(x)$ сходится к функции $\varphi(x)$ в пространстве $\Phi(G)$, если существует такой компакт $K \subset G$, что для любого n выполняется соотношение *supp* $\varphi_n \subset K$ и последовательность $\varphi_n(x)$ равномерно сходится к $\varphi(x)$.

Обычно ([3], глава 3, §1, пункт 3 или [4], глава 4) пространство $\mathcal{M}(G)$ радоновых мер в области G определяется как пространство линейных непрерывных функционалов на пространстве $\Phi(G)$.

Пусть μ_1 и μ_2 – положительные локально конечные борелевские меры в области G. Тогда линейный функционал

$$(\mu, \varphi) = \int\limits_G \varphi(x) d\mu_1(x) - \int\limits_G \varphi(x) d\mu_2(x)$$

непрерывен в пространстве $\Phi(G)$. Мы будем говорить, что функционал μ представляется в виде разности положительных борелевских мер μ_1 и μ_2 и писать $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Известно, что произвольный линейный непрерывный функционал в пространстве $\Phi(G)$ представляется в таком виде. Представление $\mu = \mu_1 - \mu_2$ не единственно. Например, $\mu = (\mu_1 + \mu_3) - (\mu_2 + \mu_3)$. Однако

([4], теорема 4.3.2), существует единственное представление $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1 и μ_2 – положительные локально конечные взаимно сингулярные борелевские меры. Если $\mu = \mu_1 - \mu_2$ – такое представление, то мера μ_1 называется положительной частью радоновой меры μ и обозначается μ_+, мера μ_2 называется отрицательной частью радоновой меры μ и обозначается μ_-. Мера $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$ называется модулем меры μ.

При использовании радоновых мер μ часто удобно считать μ функцией множеств : $\mu(E) = \mu_+(E) - \mu_-(E)$. Конечно, эта функция множеств не обязана быть борелевской мерой. Она не определена на борелевских множествах E, которые удовлетворяют условию $\mu_+(E) = \mu_-(E) = \infty$. Однако функция множеств μ обладает свойством счётной аддитивности на классе борелевских множеств, компактно вложенных в G. Это позволяет корректно определить $\int\limits_G \varphi(x)d\mu(x)$ для функций φ из класса $\Phi(G)$ и тогда имеем

$$(\mu, \varphi) = \int\limits_G \varphi(x)d\mu(x).$$

Мы будем использовать такие обозначения

$$B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^m : \ \|x - x_0\| \leq R\}, \ m \geq 2;$$
$$C(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^m : \ \|x - x_0\| < R\}, \ m \geq 2;$$
$$S(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^m : \ \|x - x_0\| = R\}, \ m \geq 2.$$

В случае $m = 2$ точки x из $\mathbb{R}^2$ мы иногда будем отождествлять с комплексными числами z, а само $\mathbb{R}^2$ будет отождествляться с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$. Поэтому также будут использоваться обозначения

$$B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| \leq R\};$$
$$C(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < R\};$$
$$S(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| = R\}.$$

Пусть $v(x)$ – субгармоническая функция в области $G \subset \mathbb{R}^m, \ m \geq 2$. Известно, что функция $v(x)$ локально интегрируема в области G и что если сфера $S(x_0, R)$ лежит в области G, то функция $v(x)$ интегрируема по этой сфере.

Так как функция $v(x)$ локально интегрируема по области G, то её можно рассматривать как элемент пространства $\mathcal{D}'(G)$. Поэтому мы можем рассмотреть обобщённую функцию

$$\frac{1}{2\pi} \bigtriangleup v, \ m = 2, \ \frac{1}{(m-2)\sigma_{m-1}} \bigtriangleup v, \ m \geq 3,$$

где $\bigtriangleup$ – оператор Лапласа, σ_{m-1} – площадь сферы $S(0, 1)$.

Известно, что эта обобщённая функция представляется положительной локально конечной борелевской мерой μ в области G. Мера μ называется риссовской мерой субгармонической функции v.

В качестве источника по теории субгармонических функций можно использовать книгу [2]. В качестве источника по теории обобщённых функций можно использовать книгу [5]. Нам будут нужны следующие теоремы о представлении для субгармонических функций ([2], раздел 3.7).

Теорема 1. *Пусть $v(z)$ – субгармоническая функция в области $G \subset \mathbb{C}$, которая содержит круг $B(0,R)$. Пусть μ – риссовская мера функции v. Тогда при $|z| < R$ выполняется равенство*

$$\begin{aligned} v(z) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rrcos(\varphi-\theta) + r^2} v(Re^{i\varphi})d\varphi \\ &+ \int_{B(0,R)} \ln\left|\frac{R(z-\zeta)}{R^2 - z\bar{\zeta}}\right| d\mu(\zeta). \end{aligned} \tag{1}$$

Теорема 2. *Пусть $v(x)$ – субгармоническая функция в области $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 3$, которая содержит шар $B(0,R)$. Пусть μ – риссовская мера функции v. Тогда при $\|x\| < R$ выполняется равенство*

$$\begin{aligned} v(x) =& \frac{1}{\sigma_{m-1}} \int_{S(0,R)} \frac{R^2 - \|x\|^2}{R\|x-y\|^m} v(y) d\sigma_{m-1}(y) \\ &- \int_{B(0,R)} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{m-2}} - \frac{1}{\left(\frac{\|y\|}{R}\left\|x - y\frac{R^2}{\|y\|^2}\right\|\right)^{m-2}} \right) d\mu(y), \end{aligned} \tag{2}$$

где $d\sigma_{m-1}(y)$ – $(m-1)$-мерная мера Хаусдорфа на сфере $S(0,R)$.

Важны также частные случаи формул (1), (2), когда в качестве точки x (z) берётся точка 0.

$$v(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(Re^{i\varphi})d\varphi - \int_0^R \frac{\mu(t)}{t}dt,\ m = 2, \tag{3}$$

$$v(0) = \frac{1}{\sigma_{m-1}R^{m-1}} \int_{S(0,R)} v(y)d\sigma_{m-1}(y) - (m-2)\int_0^R \frac{\mu(t)}{t^{m-1}}dt,\ m \geq 3. \tag{4}$$

В формулах (3) и (4) $\mu(t) = \mu(B(0,t))$.

Удобно иметь аналоги формул (1), (2), когда центр шара (круга) произволен.

Теорема 3. *Пусть $\upsilon(z)$ – субгармоническая функция в области $G \subset \mathbb{C}$, содержащей круг $B(z_0, R)$. Пусть μ – риссовская мера функции $\upsilon(z)$. Тогда в круге $C(z_0, R)$ справедливо представление*

$$\begin{aligned}\upsilon(z) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}\upsilon(z_0 + Re^{i\varphi})d\varphi \\ &+ \int_{B(z_0,R)} \ln\left|\frac{R(z-\zeta)}{R^2 - (z - z_0)(\overline{\zeta - z_0})}\right| d\mu(\zeta),\ z = z_0 + re^{i\theta}.\end{aligned} \tag{5}$$

Теорема 4. *Пусть $\upsilon(x)$ – субгармоническая функция в области $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 3$, содержащей шар $B(x_0, R)$. Пусть μ – риссовская мера функции $\upsilon(x)$. Тогда в шаре $C(x_0, R)$ справедливо представление*

$$\begin{aligned}\upsilon(x) = \frac{1}{\sigma_{m-1}} \int_{S(0,R)} \frac{R^2 - \|x - x_0\|^2}{R\|x - x_0 - y\|^m}\upsilon(x_0 + y)d\sigma_{m-1}(y) \\ - \int_{B(x_0,R)} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{m-2}} - \frac{1}{\left(\frac{\|y-x_0\|}{R}\left\|x - x_0 - (y - x_0)\frac{R^2}{\|y-x_0\|^2}\right\|\right)^{m-2}}\right) d\mu(y).\end{aligned} \tag{6}$$

Напишем ещё аналоги равенств (3) и (4):

$$\upsilon(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \upsilon(z_0 + Re^{i\varphi})d\varphi - \int_0^R \frac{\mu(B(z_0,t))}{t}dt,\ m = 2; \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\upsilon(x_0) =& \frac{1}{\sigma_{m-1}R^{m-1}} \int_{S(0,R)} \upsilon(x_0 + y)d\sigma_{m-1}(y) \\ &- (m-2)\int_0^R \frac{\mu(B(x_0,t))}{t^{m-1}},\ m \geq 3.\end{aligned} \tag{8}$$

Лёгким следствием равенств (7) и (8) является следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть $\upsilon(x)$ – субгармоническая функция в области $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ и пусть μ – её риссовская мера. Тогда множество $E_{-\infty}(\upsilon)$ тех*

$x \in G$, где функция υ обращается в $-\infty$, совпадает с множеством тех x, для которых при любом $\delta > 0$ расходится интеграл

$$\int_0^\delta \frac{\mu(B(x,t))}{t^{m-1}} dt. \tag{9}$$

Пусть $\upsilon(x)$ – субгармоническая функция в области $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Известно (это следует, например, из теоремы 5.32 из [2]), что множество $E_{-\infty}(\upsilon)$ является множеством типа G_δ и имеет ёмкость ноль.

Функция w в области $G \subset \mathbb{R}^m$ называется δ-субгармонической, если выполняются следующие три условия.

1. Существует множество F ёмкости ноль такое, что на множестве $G \setminus F$ справедливо представление

$$\mathrm{w}(x) = \upsilon_1(x) - \upsilon_2(x),$$

где $\upsilon_1(x)$ и $\upsilon_2(x)$ – субгармонические функции в области G.

С помощью этого представления определяется риссовская мера μ функции w по формуле $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1 и μ_2 – риссовские меры функций υ_1 и υ_2.

Определяющее множество H функции w – это множество таких точек $x \in G$, для которых найдётся $\delta > 0$ такое, что выполняется неравенство

$$\int_0^\delta \frac{|\mu|(B(x,t))}{t^{m-1}} dt < \infty.$$

2. Для любой точки $x \in H$ выполняется равенство

$$\mathrm{w}(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\sigma_{m-1}\delta^{m-1}} \int\limits_{S(0,\delta)} \mathrm{w}(x+y) d\sigma_{m-1}(y), \tag{10}$$

где σ_{m-1} – площадь единичной сферы в пространстве $\mathbb{R}^m$, $d\sigma_{m-1}$ – это мера Лебега на сфере.

3. $\mathrm{w}(x) = 0$ для $x \in G \setminus H$.

Теорема 6. *Пусть $\mathrm{w}(x)$– δ-субгармоническая функция в области $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Тогда в области G существуют субгармонические функции $\upsilon_1(x)$ и $\upsilon_2(x)$ с взаимно сингулярными риссовскими мерами такие, что функции $\mathrm{w}(x)$ и $\upsilon_1(x) - \upsilon_2(x)$ совпадают квазивсюду в G.*

Доказательство. Пусть μ – риссовская мера функции w. Имеем $\mu = \mu_+ - \mu_-$. В области G существует субгармоническая функция υ_3 с риссовской мерой μ_+ и существует субгармоническая функция υ_4 с риссовской мерой μ_-. Обозначим $\mathrm{w}_1(x) = \upsilon_3(x) - \upsilon_4(x)$. Для локально интегрируемой в G функции $\mathrm{w}_2(x) = \mathrm{w}(x) - \mathrm{w}_1(x)$ выполняется равенство $\triangle\ \mathrm{w}_2 = 0$. Поэтому функция w_2 является гармонической. Имеем $\mathrm{w}(x) = \mathrm{w}_1(x) + \mathrm{w}_2(x)$. В качестве $v_1(x)$ можно взять функцию $v_3(x)+\mathrm{w}_2(x)$, а в качестве $v_2(x)$ – функцию $v_4(x)$. Теорема доказана.

В заключение раздела заметим, что теоремы 4 – 7 справедливы для δ-субгармонических функций. Равенства (3), (4), (7), (8) также справедливы для δ-субгармонических функций.

3. Многочлены Гегенбауэра.

Функция $f(z) = (1 - 2zt + z^2)^{-\beta}$ голоморфна в некоторой окрестности точки $z = 0$ и поэтому разлагается в степенной ряд с центром в нуле и положительным радиусом сходимости:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\beta}(t) z^n. \tag{11}$$

Известно, что функция $C_n^{\beta}(t)$ является многочленом степени n. Многочлены $C_n^{\beta}(t)$ называются многочленами Гегенбауэра. Изложение свойств многочленов Гегенбауэра можно найти в следующих источниках: ([6], раздел 3.15.1, [7], раздел 10.9, [8], раздел 4.7).

Обозначим $h_m(x,y) = \frac{1}{\|x-y\|^{m-2}},\ x,y \in \mathbb{R}^m,\ m \geq 3$. Как функция переменной x она является гармонической в области $\mathbb{R}^m \setminus \{y\}$.

Теорема 7. *Функция $h_m(x,y)$ как функция переменной x при $y \neq 0$ разлагается в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$. Если это разложение записать в виде*

$$h_m(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,y), \tag{12}$$

где $a_n(x,y)$ – однородный полином степени n переменной $x = (x_1, ..., x_m)$, то выполняются следующие условия:

1) *$a_n(x,y)$ – гармонический полином,*
2) *выполняется равенство*

$$a_n(x,y) = C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma) \frac{\|x\|^n}{\|y\|^{m+n-2}},\ \cos\gamma = \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|},$$

3) *ряд (12) абсолютно сходится при $\|x\| < \|y\|$,*
4) *выполняется оценка*

$$|K_p(x,y)| \leq \frac{1}{\|y\|^{m-2}} \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\Gamma(m+n-2)}{\Gamma(m-2)n!} \left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^n,$$

где $K_p(x,y) = -\frac{1}{\|x-y\|^{m-2}} + \sum\limits_{k=0}^{p} a_p(x,y)$.

Доказательство. Так как функция $h_m(x,y)$ гармонична по переменной x в некоторой окрестности нуля пространства $\mathbb{R}^m$, то разложение 12 имеет место в некоторой окрестности нуля пространства $\mathbb{C}^m$. Поэтому для всех достаточно малых $z \in \mathbb{C}$ выполняются равенства

$$h_m(zx,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,y) z^n, \tag{13}$$

$$\frac{d^k}{dz^k} h_m(zx,y) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1) a_n(x,y) z^{n-k}. \tag{14}$$

Пусть $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$. Так как функция $h_m(zx,y)$ голоморфна по переменным $z, x_1, ..., x_m$ и гармонична по x, то выполняются равенства

$$\triangle \frac{d^k}{dz^k} h_m(zx,y) = \frac{d^k}{dz^k} \triangle h_m(zx,y) = 0.$$

Если в этом равенстве положить $z = 0$, то получим равенство $\triangle \ a_k(x,y) = 0$. Первое утверждение теоремы доказано.

Считая число z и вектор x вещественными, получим

$$\begin{aligned} h_m(zx,y) &= \frac{1}{(z^2\|x\|^2 - 2z(x,y) + \|y\|^2)^{\frac{m-2}{2}}} \\ &= \frac{1}{\|y\|^{m-2}} \left(1 - 2z\frac{\|x\|}{\|y\|}\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|} + \left(z\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^2\right)^{-\frac{m-2}{2}}. \end{aligned}$$

Обозначим $t = \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$. Теперь из равенства (11) следует, что

$$h_m(zx,y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\frac{m-2}{2}}(t) \frac{\|x\|^n}{\|y\|^{m+n-2}} z^n. \tag{15}$$

Теперь, сравнивая (13) и (15), мы видим, что суммы степенных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,y) z^n, \ \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\frac{m-2}{2}}(t) \frac{\|x\|^n}{\|y\|^{m+n-2}} z^n$$

совпадают при малых вещественных z. Из этого следует условие 2) теоремы.

Из формулы (13), пункт 3.15 из [6] следует, что многочлен $C_n^{\frac{m-2}{2}}(t)$ на сегменте $[-1,1]$ максимальное по модулю значение принимает в точке 1. Формула (3) пункт 10.9 из [7] даёт

$$C_n^{\frac{m-2}{2}}(1) = \frac{\Gamma(m+n-2)}{\Gamma(m-2)n!}$$

Поэтому справедливо неравенство

$$|a_n(x,y)| \le \frac{\Gamma(m+n-2)}{\Gamma(m-2)n!}\frac{\|x\|^n}{\|y\|^{m+n-2}}.$$

Из него следуют утверждения 3) и 4) теоремы. Теорема доказана.

4. Характеристические функции Неванлинны.

При изучении субгармонических и δ-субгармонических функций в пространстве $\mathbb{R}^m$ используются неванлинновские характеристические функции. Такие функции мы определим для специального класса $\delta S^{(0)}$ δ-субгармонических функций. Этот класс состоит из δ-субгармонических функций $\mathrm{w}(x)$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ таких, что ноль входит в определяющее множество функции w и выполняется равенство $\mathrm{w}(0) = 0$.

Пусть вначале $m = 2$. Неванлинновские функции приближения определяются так

$$m(r,\infty,\mathrm{w}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{w}_+(re^{i\varphi})d\varphi,$$

$$m(r,0,\mathrm{w}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{w}_-(re^{i\varphi})d\varphi.$$

Неванлинновские считающие функции определяются так

$$N(r,\infty,\mathrm{w}) = \int_0^r \frac{\mu_-(t)}{t}dt,$$

$$N(r,0,\mathrm{w}) = \int_0^r \frac{\mu_+(t)}{t}dt.$$

Функция $T(r,\mathrm{w}) = m(r,\infty,\mathrm{w}) + N(r,\infty,\mathrm{w})$ называется неванлинновской характеристикой δ-субгармонической функции w.

Формулу (3) для функции можно переписать в виде

$$T(r,\mathrm{w}) = m(r,0,\mathrm{w}) + N(r,0,\mathrm{w}) \text{ или } T(r,\mathrm{w}) = T(r,-\mathrm{w}).$$

Важно, что мы рассматриваем не произвольные δ-субгармонические функции в плоскости, а функции из класса $\delta S^{(0)}$.

Рассмотрим случай $m \ge 3$. Неванлинновские функции приближения определяются так

$$m(r,\infty,\mathrm{w}) = \frac{1}{\sigma_{m-1}r^{m-1}} \int\limits_{S(0,r)} \mathrm{w}_+(y)d\sigma_{m-1}(y),$$

$$m(r,0,\mathrm{w}) = \frac{1}{\sigma_{m-1}r^{m-1}} \int\limits_{S(0,r)} \mathrm{w}_-(y)d\sigma_{m-1}(y).$$

Нванлинновские считающие функции определяются так

$$N(r,\infty,\mathrm{w}) = (m-2)\int\limits_0^r \frac{\mu_-(t)}{t^{m-1}}dt,$$

$$N(r,0,\mathrm{w}) = (m-2)\int\limits_0^r \frac{\mu_+(t)}{t^{m-1}}dt.$$

Функция $T(r,\mathrm{w}) = m(r,\infty,\mathrm{w}) + N(r,\infty,\mathrm{w})$ называется неванлинновской характеристикой δ-субгармонической функции w.

Формулу (4) для функции w можно переписать в виде

$$T(r,\mathrm{w}) = m(r,0,\mathrm{w}) + N(r,0,\mathrm{w}) \text{ или } T(r,\mathrm{w}) = T(r,-\mathrm{w}).$$

Пусть w_1 и w_2 – δ-субгармонические функции из класса $\delta S^{(0)}$ и μ_1, μ_2 – их риссовские меры. Тогда риссовской мерой функции $\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2$ будет $\mu_1 + \mu_2$. Имеем $\mu_1 = (\mu_1)_+ - (\mu_1)_-$, $\mu_2 = (\mu_2)_+ - (\mu_2)_-$, $\mu_1 + \mu_2 = ((\mu_1)_+ + (\mu_2)_+) - ((\mu_1)_- + (\mu_2)_-)$. Отсюда следуют неравенства $(\mu_1+\mu_2)_- \leq (\mu_1)_- + (\mu_2)_-$, $N(r,\infty,\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2) \leq N(r,\infty,\mathrm{w}_1) + N(r,\infty,\mathrm{w}_2)$. Кроме того выполняется неравенство $m(r,\infty,\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2) \leq m(r,\infty,\mathrm{w}_1) + m(r,\infty,\mathrm{w}_2)$. Мы получаем неравенство

$$T(r,\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2) \leq T(r,\mathrm{w}_1) + T(r,\mathrm{w}_2).$$

Теорема 8. *Пусть* $\mathrm{w}(x)$ — *δ-субгармоническая функция в пространстве* $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ *из класса* $\delta S^{(0)}$. *Пусть квазивсюду* $\mathrm{w}(x) = \upsilon_1(x) - \upsilon_2(x)$, *где* $\upsilon_1(x)$ *и* $\upsilon_2(x)$ – *субгармонические функции в пространстве* $\mathbb{R}^m$ *с взаимно сингулярными риссовскими мерами, причём* $\upsilon_1(0) = \upsilon_2(0) = 0$. *Тогда выполняется равенство*

$$T(r,\mathrm{w}) = \frac{1}{\sigma_{m-1}r^{m-1}} \int\limits_{S(0,r)} \max(\upsilon_1(x),\upsilon_2(x))d\sigma_{m-1}(x).$$

Доказательство. Квазивсюду выполняется равенство

$$\mathrm{w}_+(x) = \max(\upsilon_1(x),\upsilon_2(x)) - \upsilon_2(x).$$

Из него следует равенство

$$m(r,\infty,\mathrm{w}) = \frac{1}{\sigma_{m-1}r^{m-1}} \int\limits_{S(0,r)} \max(v_1(x), v_2(x))d\sigma_{m-1}(x) - \frac{1}{\sigma_{m-1}r^{m-1}} \int\limits_{S(0,r)} v_2(x)d\sigma_{m-1}(x).$$

Из равенства (4) для функции $v_2(x)$ следует, что последний интеграл равен $N(r,\infty,\mathrm{w})$. Тем самым теорема доказана.

Замечание. В случае $m=2$ формулу для $T(r,\mathrm{w})$ можно записать в виде

$$T(r,\mathrm{w}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \max(v_1(re^{i\varphi}), v_2(re^{i\varphi}))d\varphi.$$

Заметим, что из теоремы 8 и равенств (3), (4) следует, что $T(r,\mathrm{w})$ является возрастающей функцией.

Величина

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln T(r,\mathrm{w})}{\ln r}$$

называется порядком функции $T(r,\mathrm{w})$, а также порядком δ-субгармонической функции из класса $\delta S^{(0)}$.

Если w – произвольная δ-субгармоническая функция в $\mathbb{R}^m$ с риссовской мерой μ, то образуем функции

$$\mathrm{w}_1(z) = \int\limits_{B(0,1)} \ln|z-\zeta|d\mu(\zeta) + c,\ \ \mathrm{w}_2(z) = \mathrm{w}(z) - \mathrm{w}_1(z),\ \ m=2,$$

$$\mathrm{w}_1(x) = -\int\limits_{B(0,1)} \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|^{m-2}} + c,\ \ \mathrm{w}_2(x) = \mathrm{w}(x) - \mathrm{w}_1(x),\ \ m\geq 3,$$

где число c выбирается из условия $\mathrm{w}_2(0)=0$. Функция w_2 принадлежит классу $\delta S^{(0)}$. Порядком функции w называется порядок функции w_2.

Условием $\rho<\infty$ выделяется важный класс δ-субгармонических функций конечного порядка.

5. Теоремы о представлении δ-субгармонических функций.

Нам будет нужна следующая простая лемма.

Лемма 1. *Пусть*

$$b(r,x) = \sum_{|\alpha|\leq n} c_\alpha(r)x^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ *– мультииндекс порядка* m*. Пусть существует поточечный предел* $\lim\limits_{r\to\infty} b(r,x)$*. Тогда для любого мультииндекса* α *существует предел*

$$c_\alpha = \lim_{r\to\infty} c_\alpha(r)$$

и выполняется равенство

$$\lim_{r\to\infty} b(r,x) = \sum_{|\alpha|\le n} c_\alpha x^\alpha.$$

Доказательство. Мы будем применять операторы взятия разности с шагом 1: $\triangle\ f(t) = f(t+1) - f(t)$. Через $\triangle\ (\alpha) =\triangle\ (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ мы будем обозначать такой оператор, что по переменной x_k он применяется α_k раз, $k \in \overline{1,m}$. Имеем

$$\triangle\ (\alpha) x^\alpha = \alpha!.$$

Во множестве мультииндексов α введём лексикографическое упорядочение: $(\alpha_1, ..., \alpha_m) \ge (\beta_1, ..., \beta_m)$ если $(\alpha_1, ..., \alpha_m) = (\beta_1, ..., \beta_m)$ или, если k наименьшее число такое, что $\alpha_k \ne \beta_k$, то $\alpha_k > \beta_k$. Если $\beta < \alpha$, то $\triangle\ (\alpha)x^\beta = 0$.

Пусть $\alpha^{(1)}$ – наибольший мультииндекс такой, что $c_{\alpha^{(1)}}(r) \ne 0$. Тогда справедливо равенство

$$\alpha^{(1)}! c_{\alpha^{(1)}}(r) =\triangle\ (\alpha^{(1)}) b(x,r).$$

Из условия теоремы следует, что существует предел на бесконечности у функции $\triangle\ (\alpha^{(1)}) b(x,r)$, а значит и у функции $c_{\alpha^{(1)}}(r)$.

Дальше наше рассуждение нужно повторить для функции $b(x,r) - c_{\alpha^{(1)}}(r) x^{\alpha^{(1)}}$. Через конечное число шагов мы получим утверждение леммы.

Теорема 9. *Пусть* $\mathrm{w}(z)$ *–* δ*-субгармоническая функция порядка* ρ *в плоскости* $\mathbb{C}$ *из класса* $\delta S^{(0)}$*,* $p = [\rho]$*. Пусть* μ *– риссовская мера функции* w*, для которой сходятся интегралы* $\int\limits_{B(0,1)} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k}$*,* $k = \overline{1,p}$*. Тогда справедливо представление*

$$\mathrm{w}(z) = \int \mathrm{Re}\left(\ln\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) + \frac{z}{\zeta} + ... + \frac{1}{p}\frac{z^p}{\zeta^p}\right) d\mu(\zeta) + \sum_{n=1}^{p} \mathrm{Re}\ c_n z^n, \tag{16}$$

причём имеют место формулы

$$c_n = \lim_{R\to\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi R^n}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{w}(Re^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi + \frac{1}{n}\int\limits_{B(0,R)} \left(\frac{\overline{\zeta}^n}{R^{2n}} - \frac{1}{\zeta^n}\right) d\mu(\zeta)\right). \tag{17}$$

Замечание. Символ $[\rho]$ обозначает целую часть ρ. Если у интеграла не указана область интегрирования, то таковой является всё пространство. Существование предела (17) не является тривиальным фактом. Его существование – одно из утверждений теоремы. Мы даём не только новое доказательство известной теоремы о представлении, но и несколько усиливаем её, давая формулы для коэффициентов c_n.

Функция $\mathrm{w}(z)$, будучи гармонической функцией в круге $C(0,1)$, представляется в этом круге рядом

$$\mathrm{w}(z) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

Равенство (17) даёт формулы для коэффициентов c_n для $n \in \overline{1,p}$. Для $n > p$ справедлива формула, которая следует из формулы (16)

$$c_n = \frac{1}{n}\int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^n}.$$

Доказательство. Перепишем формулу (1) для функции $\mathrm{w}(z)$ в виде

$$\begin{aligned}\mathrm{w}(z) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\upsilon(Re^{i\varphi})d\varphi + \int\limits_{B(0,R)} \mathrm{Re}\ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)d\mu(\zeta)\\ &+ \int\limits_{B(0,R)} \ln\frac{|\zeta|}{R}d\mu(\zeta) - \int\limits_{B(0,R)} \mathrm{Re}\ln\left(1-\frac{z\overline{\zeta}}{R^2}\right)d\mu(\zeta).\end{aligned} \tag{18}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z} &= \mathrm{Re}\frac{1+\frac{z}{Re^{i\varphi}}}{1-\frac{z}{Re^{i\varphi}}} = 1 + 2\mathrm{Re}\frac{z}{Re^{i\varphi}}\frac{1}{1-\frac{z}{Re^{i\varphi}}}\\ &= 1 + 2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{p}\frac{z^n}{R^n e^{in\varphi}} + 2\mathrm{Re}\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{z^n}{R^n e^{in\varphi}},\end{aligned}$$

$$-\mathrm{Re}\ln\left(1-\frac{z\overline{\zeta}}{R^2}\right) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\frac{z^n\overline{\zeta}^n}{R^{2n}} + \mathrm{Re}\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{z^n\overline{\zeta}^n}{R^{2n}}$$

Далее формулу (18) перепишем в виде

$$\mathrm{w}(z) = \int \mathrm{Re}\left(\ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)+\frac{z}{\zeta}+...+\frac{1}{p}\frac{z^p}{\zeta^p}\right)d\mu(\zeta) + b(R,z) + a(R,z), \tag{19}$$

где

$$b(R,z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{w}(Re^{i\varphi})d\varphi+\int\limits_{B(0,R)}\ln\frac{|\zeta|}{R}d\mu(\zeta)$$

$$+\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{p}z^n\left(\frac{1}{\pi R^n}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{w}(Re^{i\varphi})e^{-in\varphi}d\varphi+\frac{1}{n}\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{\overline{\zeta}^n}{R^{2n}}-\frac{1}{\zeta^n}\right)d\mu(\zeta)\right),$$

$$a(R,z)=-\int\limits_{CB(0,R)}\mathrm{Re}\left(\ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)+\frac{z}{\zeta}+...+\frac{1}{p}\frac{z^p}{\zeta^p}\right)d\mu(\zeta)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{Re}\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{z^n}{R^n e^{in\varphi}}\mathrm{w}(Re^{i\varphi})d\varphi+\mathrm{Re}\int\limits_{B(0,R)}\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{z^n\overline{\zeta}^n}{nR^{2n}}d\mu(\zeta).$$

В написанной формуле символ $CB(0,R)$ обозначает дополнение к кругу $B(0,R)$.

Так как функция $\mathrm{w}(z)$ имеет порядок ρ, то для любого ε существует постоянная M_ε такая, что выполняются неравенства

$$|\mu|(B(0,R))<M_\varepsilon R^{\rho+\varepsilon},\ R>0,$$
$$\int|\mathrm{w}(Re^{i\varphi})|d\varphi<M_\varepsilon R^{\rho+\varepsilon},\ R>1.$$

Из этих неравенств легко следует, что для любого z выполняется равенство

$$\lim_{R\to\infty}a(R,z)=0.$$

Теперь из равенства (19) следует, что для любого z существует предел

$$\lim_{R\to\infty}b(R,z).$$

Если $z=x+iy$, то функция $b(R,z)$ как функция переменных x и y является многочленом степени p. Теперь из леммы 1 следует, что функции

$$c_n(R)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi R^n}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{w}(Re^{i\varphi})e^{-in\varphi}d\varphi+\frac{1}{n}\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{\overline{\zeta}^n}{R^{2n}}-\frac{1}{\zeta^n}\right)d\mu(\zeta)\right),\ n\in\overline{1,p}$$

имеют предел при $R\to\infty$.

Заметим, что из формулы (3) для функции $\mathrm{w}(z)$ следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{w}(Re^{i\varphi})d\varphi+\int\limits_{B(0,R)}\ln\frac{|\zeta|}{R}d\mu(\zeta)=0.$$

Переходя в равенстве (19) к пределу при $R \to \infty$, получим утверждения теоремы. Теорема доказана.

В теореме 9 предполагается, что функция $\mathrm{w}(z)$ принадлежит классу $\delta S^{(0)}$. Сформулируем теорему для общего случая.

Теорема 10. *Пусть* $\mathrm{w}(z)$ – *δ-субгармоническая функция порядка ρ в плоскости $\mathbb{C}$, μ – её риссовская мера, $p = [\rho]$. Тогда справедливо представление*

$$\mathrm{w}(z) = \int\limits_{B(0,1)} \ln|z-\zeta| d\mu(\zeta)$$

$$+ \int\limits_{CB(0,1)} \mathrm{Re}\left(\ln\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) + \frac{z}{\zeta} + ... + \frac{1}{p}\frac{z^p}{\zeta^p}\right) d\mu(\zeta) + \sum_{n=0}^{p} \mathrm{Re} c_n z^n.$$

Доказательство. Обозначим

$$\mathrm{w}_1(z) = \mathrm{w}(z) - \int\limits_{B(0,1)} \ln|z-\zeta| d\mu(\zeta) - c,$$

причём постоянную c выбираем из условия $\mathrm{w}_1(0) = 0$. Функция $\mathrm{w}_1 \in \delta S^{(0)}$. Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 9.

Замечание. В общем случае существуют аналоги соотношений (17) при $n \in \overline{1,p}$

$$c_n = \lim_{R\to\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi R^n}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{w}(Re^{i\varphi})e^{-in\varphi}d\varphi + \frac{1}{n}\int\limits_{B(0,R)\setminus B(0,1)} \left(\frac{\overline{\zeta}^n}{R^{2n}} - \frac{1}{\zeta^n}\right) d\mu(\zeta)\right).$$

Теорема 11. *Пусть* $\mathrm{w}(x)$ – *δ-субгармоническая функция в пространстве $\mathbb{R}^m$, $m \geq 3$ из класса $\delta S^{(0)}$ и пусть μ – её риссовская мера, для которой сходятся интегралы* $\int\limits_{B(0,1)} a_k(x,y)d\mu(y)$, $k = \overline{1,p}$. *Пусть функция* w *имеет порядок ρ и $p = [\rho]$. Тогда справедливо представление*

$$\mathrm{w}(x) = \int K_p(x,y)d\mu(y) + \sum_{n=1}^{p} A_n(x),$$

где $A_n(x)$ – однородный гармонический полином степени n, причём выполняются равенства

$$A_1(x) = \lim_{R\to\infty}\Big(\frac{m}{R^{m+1}}\int\limits_{S(0,R)} (x,y)\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y) - (m-2)\int\limits_{B(0,R)} (x,y)\left(\frac{1}{\|y\|^m} - \frac{1}{R^m}\right) d\mu(y)\Big), \tag{20}$$

$$A_n(x) = \lim_{R\to\infty}\Big(\frac{\|x\|^n}{R^{m+n-1}} \int\limits_{S(0,R)} \Big(C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma) - C_{n-2}^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\Big)\, \mathrm{w}(y) d\sigma_{m-1}(y)$$
$$- \|x\|^n \int\limits_{B(0,R)} \left(\frac{1}{\|y\|^{m-2+n}} - \frac{\|y\|^n}{R^{m-2+2n}}\right) C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma) d\mu(y)\Big), n \geq 2. \tag{21}$$

Написанные пределы являются равномерными на любом компакте.

Доказательство. Для функции $\mathrm{w}(x)$ справедливо равенство (2). Имеем при $\|y\| = R,\ \|x\| < R$

$$\frac{R^2 - \|x\|^2}{R\|x-y\|^m} = \frac{R^2 - \|x\|^2}{R} \frac{1}{(\|x\|^2 - 2(x,y) + \|y\|^2)^{\frac{m}{2}}}$$
$$= \frac{R^2 - \|x\|^2}{R^{m+1}} \left(1 - 2\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}\frac{\|x\|}{R} + \left(\frac{\|x\|}{R}\right)^2\right)^{-\frac{m}{2}} = \frac{R^2 - \|x\|^2}{R^{m+1}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n}{R^n}$$
$$= \frac{1}{R^{m-1}} \sum_{n=0}^{p} C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n}{R^n} - \frac{\|x\|^n}{R^{m+1}} \sum_{n=0}^{p-2} C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n}{R^n} \tag{22}$$
$$+ \left(-\frac{\|x\|^2}{R^{m+1}} \sum_{n=p-1}^{\infty} C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n}{R^n} + \frac{1}{R^{m-1}} \sum_{n=p+1}^{\infty} C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n}{R^n}\right).$$

При $\|x\| < R,\ \|y\| \leq R$ выполняется равенство

$$\frac{1}{\left(\frac{\|y\|}{R}\left\|x - y\frac{R^2}{\|y\|^2}\right\|\right)^{m-2}} = \frac{R^{m-2}}{\|y\|^{m-2}\left(\|x\|^2 - 2(x,y)\frac{R^2}{\|y\|^2} + \frac{R^4}{\|y\|^2}\right)^{\frac{m-2}{2}}}$$
$$= \frac{1}{R^{m-2}}\left(1 - 2\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}\frac{\|x\|\|y\|}{R^2} + \left(\frac{\|x\|\|y\|}{R^2}\right)^2\right)^{-\frac{m-2}{2}} \tag{23}$$
$$= \frac{1}{R^{m-2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n\|y\|^n}{R^{2n}}$$
$$= \frac{1}{R^{m-2}} \sum_{n=0}^{p} C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n\|y\|^n}{R^{2n}} + \frac{1}{R^{m-2}} \sum_{n=p+1}^{\infty} C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n\|y\|^n}{R^{2n}}.$$

Из равенств (2), (21), (22) следует, что

$$\mathrm{w}(x) = \int K_p(x,y) d\mu(y) + b(R,x) + a(R,x), \tag{24}$$

где

$$b(R,x)=\frac{1}{\sigma_{m-1}R^{m-1}}\int\limits_{S(0,R)}\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$-\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{1}{\|y\|^{m-2}}-\frac{1}{R^{m-2}}\right)d\mu(y)+\frac{\|x\|}{\sigma_{m-1}R^{m}}\int\limits_{S(0,R)}C_1^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$+\frac{\|x\|}{R^m}\int\limits_{B(0,R)}C_1^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)\|y\|d\mu(y)-\|x\|\int\limits_{B(0,R)}C_1^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)\frac{1}{\|y\|^{m-1}}d\mu(y)$$

$$+\sum_{n=2}^{p}\Big(\frac{\|x\|^n}{\sigma_{m-1}R^{m+n-1}}\int\limits_{S(0,R)}\Big(C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)-C_{n-2}^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\Big)\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$-\|x\|^n\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{1}{\|y\|^{m+n-2}}-\frac{\|y\|^n}{R^{m+2n-2}}\right)C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)d\mu(y)\Big).$$

Функция $a(R,x)$ задаётся равенством

$$a(R,x)=-\int\limits_{CB(0,R)}K_p(x,y)d\mu(y)$$

$$-\frac{\|x\|^2}{\sigma_{m-1}R^{m+1}}\int\limits_{S(0,R)}\sum_{n=p-1}^{\infty}C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n}{R^n}\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$+\frac{1}{\sigma_{m-1}}\frac{R^2-\|x\|^2}{R^{m+1}}\int\limits_{S(0,R)}\sum_{n=p+1}^{\infty}C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n}{R^n}\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$+\frac{1}{R^{m-2}}\int\limits_{B(0,R)}\sum_{n=p+1}^{\infty}C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n\|y\|^n}{R^{2n}}d\mu(y).$$

Из сходимости интеграла $\int K_\rho(x,y)d\mu(y)$, неравенств $|C_n^{\beta}(\cos\gamma)|\le\le\frac{\Gamma(n+2\beta)}{\Gamma(2\beta)n!}$, $\int\limits_{S(0,R)}|\mathrm{w}(y)|d\sigma_{m-1}(y)\le 2T(R,\mathrm{w})R^{m-1}$, $|\mu|(B(0,t))\le MT(2t,\mathrm{w})$ и того, что ρ – порядок функции w, легко следует, что для любого $x\in\mathbb{R}^m$ выполняется равенство

$$\lim_{R\to\infty}a(R,x)=0. \tag{25}$$

Из равенства (4) для функции w следует, что

$$\frac{1}{\sigma_{m-1}R^{m-1}}\int\limits_{S(0,R)}\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)-\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{1}{\|y\|^{m-2}}-\frac{1}{R^{2m-2}}\right)d\mu(y)=0.$$

Из равенства $C_1^{\beta}(\cos\gamma) = 2\beta\cos\gamma = 2\beta\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$ следует, что

$$\frac{\|x\|}{\sigma_{m-1}R^m}\int\limits_{S(0,R)} C_1^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y) + \frac{\|x\|}{R^m}\int\limits_{B(0,R)} C_1^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)\|y\|d\mu(y)$$

$$-\|x\|\int\limits_{B(0,R)} C_1^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)\frac{1}{\|y\|^{m-1}}d\mu(y) = \frac{m}{\sigma_{m-1}R^{m+1}}\int\limits_{S(0,R)}(x,y)\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$-(m-2)\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{1}{\|y\|^m} - \frac{1}{R^m}\right)(x,y)d\mu(y).$$

Поэтому

$$b(R,x) = \frac{m}{\sigma_{m-1}R^{m+1}}\int\limits_{S(0,R)}(x,y)\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$-(m-2)\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{1}{\|y\|^m} - \frac{1}{R^m}\right)(x,y)d\mu(y)$$

$$+\sum_{n=2}^{p}\Big(\frac{\|x\|^n}{\sigma_{m-1}R^{m+n-1}}\int\limits_{S(0,R)}\Big(C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma) - C_{n-2}^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\Big)\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$-\|x\|^n\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{1}{\|y\|^{m+n-2}} - \frac{\|y\|^n}{R^{m+2n-2}}\right)C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)d\mu(y)\Big).$$

Функция $b(R,x)$, как функция переменной x, является гармоническим полином степени не выше p. Из равенств (24), (25) следует, что для каждого $x\in\mathbb{R}^m$ существует предел

$$\lim_{R\to\infty} b(R,x).$$

Из леммы 1 следует, что существуют пределы

$$\lim_{R\to\infty}\Big(\frac{m}{\sigma_{m-1}R^{m+1}}\int\limits_{S(0,R)}(x,y)\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$-(m-2)\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{1}{\|y\|^m} - \frac{1}{R^m}\right)(x,y)d\mu(y)\Big) = A_1(x),$$

$$\lim_{R\to\infty}\Big(\frac{\|x\|^n}{\sigma_{m-1}R^{m+n-1}}\int\limits_{S(0,R)}\Big(C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma) - C_{n-2}^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\Big)\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$-\|x\|^n\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{1}{\|y\|^{m+n-2}} - \frac{\|y\|^n}{R^{m+2n-2}}\right)C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)d\mu(y)\Big) = A_n(x),\ n\in\overline{2,p}.$$

Эти пределы равномерные на любом компакте. Переходя в равенстве (24) к пределу при $R \to \infty$, получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

В теореме 11 требуется, чтобы функция $\mathrm{w}(x)$ принадлежала классу $\delta S^{(0)}$. В следующей теореме мы освобождаемся от этого ограничения.

Теорема 12. *Пусть* $\mathrm{w}(x)$ *– δ-субгармоническая функция в пространстве* $\mathbb{R}^m$, $m \geq 3$ *и* μ *– её риссовская мера. Пусть функция* w *имеет порядок* ρ *и* $p = [\rho]$. *Тогда справедливо представление*

$$\mathrm{w}(x) = -\int\limits_{B(0,1)} \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|^{m-2}} + \int\limits_{CB(0,1)} K_\rho(x,y)d\mu(y) + \sum_{k=0}^{p} A_k(x),$$

где $A_k(x)$*– некоторый однородный гармонический многочлен степени* k.

Замечание. Имеются аналоги формул (20), (21).

$$A_1(x) = \lim_{R\to\infty}\Bigg(\frac{m}{R^{m+1}}\int\limits_{S(0,R)} (x,y)w(y)d\sigma_{m-1}(y) - (m-2)\int\limits_{B(0,R)\setminus B(0,1)} (x,y)\left(\frac{1}{\|y\|^m} - \frac{1}{R^m}\right)d\mu(y)\Bigg),$$

$$A_n(x) = \lim_{R\to\infty}\Bigg(\frac{\|x\|^n}{R^{m+n-1}}\int\limits_{S(0,R)}\Big(C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma) - C_{n-2}^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\Big)w(y)d\sigma_{m-1}(y) - \|x\|^n\int\limits_{B(0,R)\setminus B(0,1)}\left(\frac{1}{\|y\|^{m-2+n}} - \frac{\|y\|^n}{R^{m-2+2n}}\right)C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)d\mu(y)\Bigg), n \geq 2.$$

Доказательство. Обозначим

$$\mathrm{w}_1(x) = \mathrm{w}(x) + \int\limits_{B(0,1)} \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|^{m-2}} - c,$$

где постоянная c определяется из условия $\mathrm{w}_1(0) = 0$. Функция w_1 принадлежит классу $\delta S^{(0)}$. Теперь теорема и замечание к ней следуют из теоремы 11.

ЛИТЕРАТУРА

1. Azarin V. Growth theory of subharmonic functions. – Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2009. – 259 p.

2. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. – М: Мир, 1980. – 304 с.

3. Бурбаки Н. Интегрирование. – М: Наука, ГРФМЛ, 1977. – 396 с.

4. Эдвардс Р. Функциональный анализ. – М: Мир, 1969. – 1071 с.

5. Владимиров В. С. Обобщённые функции в математической физике. – М: Наука, 1979. – 320 с.

6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т1. – М: Наука, ГРФМЛ, 1965. – 296 с.

7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т2. – М: Наука, ГРФМЛ, 1966. – 296 с.

8. Сегё Г. Ортогональные многочлены. – М: ГИФМЛ, 1962. – 500 с.

Статья получена: 16.09.2014; окончательный вариант: 06.10.2014.; принята: 10.11.2014.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.518.88 № 1133, 2014, с.76–94

Пошаговое решение матричной задачи Каратеодори в классе $\mathcal{S}[a,\ b]$

И. Ю. Серикова

Харьковский национальный университет,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина.
Irina.Serikova@karazin.ua

Получено разложение резольвентной матрицы задачи Каратеодори в произведение множителей Бляшке-Потапова. Эти множители выражены через обобщенные параметры Шура, для которых указаны явные формулы. Дано пошаговое решение задачи Каратеодори в классе $\mathcal{S}[a,\ b]$.
Ключевые слова: матричная задача Каратеодори, множители Бляшке-Потапова, обобщенные параметры Шура, пошаговый процесс Шура.

Сєрікова І. Ю., **Покроковий розв'язок матричної задачі Каратеодорі в класі** $\mathcal{S}[a,\ b]$**.** У статті факторизовано резольвентну матрицю задачі Каратеодорі в класі $\mathcal{S}[a,\ b]$, завдяки чому отримано аналог шуровського покрокового процесу розв'язку матричної задачі Каратеодорі. Наведено явні формули для узагальнених параметрів Шура для задачі Каратеодорі в класі $\mathcal{S}[a,\ b]$.
Ключові слова: матрична задача Каратеодорі, множники Бляшке-Потапова, узагальнені параметри Шура, покроковий процес Шура.

I. Yu. Serikova, **Step by step solution of the matrix Caratheodory problem in the class** $\mathcal{S}[a,\ b]$. Decomposition of the resolvent matrix of Caratheodory problem in terms of Blaschke-Potapov factors is obtained. Each such factor is expressed via generalized Schur parameters. Explicit relations between Blaschke-Potapov factors and Schur parameters are given. Step by step process solution matrix Caratheodory problem in the class $\mathcal{S}[a,\ b]$ is given.
Keywords: the matrix Caratheodory problem, Blaschke-Potapov product, generalized Schur parameters, step by step Shur process.

2000 Mathematics Subject Classification: 42A82, 44A60, 47A57.

1. Введение

В статьях И. Шура [1]–[2] впервые была предложена пошаговая схема решения интерполяционных задач. В дальнейшем эти исследования были продолжены и обобщены в работах многих авторов. Особо отметим статьи [3]–[4], выполненные в рамках подхода В.П. Потапова к решению интерполяционных задач для аналитических матриц-функций (далее по тексту - МФ). Аналогичные результаты для случая стилтьесовских МФ были получены в статьях [5]–[7]. Интерполяционные задачи в классах $\mathcal{R}[a,\ b]$ и $\mathcal{S}[a,\ b]$ были рассмотрены в статьях [8]–[12]. Проблема моментов на компактном интервале была решена пошаговым методом в статье [13].

Сформулируем известные определения и теоремы, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Определение 1. ([8]) *Классом $\mathcal{S}[a,\ b]$ называется множество голоморфных МФ $s:\mathbb{C}\setminus[a,\ b]\to\mathbb{C}^{m\times m}$ таких, что*

$$\frac{s(z)-s^*(z)}{z-\bar z}\geq 0 \qquad \forall z\in\mathbb{C}_\pm,$$
$$s(x)\geq 0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}\setminus[a,\ b].$$

Пусть дана последовательность комплексных $(m\times m)$-матриц $\{s_j\}_{j=0}^n$ и фиксированная точка $z_0\in\mathbb{C}_+$. В матричной задаче Каратеодори требуется описать все МФ класса $\mathcal{S}[a,\ b]$, такие, что

$$s(z)=s_0(z)+s_1(z)(z-z_0)+\cdots+s_n(z-z_0)^n+\cdots. \tag{1}$$

Множество решений s этой задачи обозначим через $\mathcal{L}_n$. С задачей (1) свяжем следующие блочные матрицы

$$T_{(n)}=\begin{bmatrix} z_0I_m & \cdots & 0_m & 0_m\\ I_m & \cdots & 0_m & 0_m\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0_m & \cdots & I_m & z_0I_m\end{bmatrix},\ v_{(n)}=\begin{bmatrix} I_m\\ 0_m\\ \vdots\\ 0_m\end{bmatrix}, u_{1,(n)}=\begin{bmatrix} s_0\\ s_1\\ \vdots\\ s_n\end{bmatrix},$$

$$R_{T,(n)}(z)=(T_{(n)}-zI_{m(n+1)})^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{I_m}{z_0-z} & 0_m & \cdots & 0_m\\ \frac{-I_m}{(z_0-z)^2} & \frac{I_m}{z_0-z} & \cdots & 0_m\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{(-1)^nI_m}{(z_0-z)^{n+1}} & \frac{(-1)^{n-1}I_m}{(z_0-z)^n} & \cdots & \frac{I_m}{z_0-z}\end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$u_{2,(n)}=-R^{-1}_{T,(n)}(a)R_{T,(n)}(b)u_{1,(n)}=\begin{bmatrix} \tilde s_0\\ \tilde s_1\\ \vdots\\ \tilde s_n\end{bmatrix},$$
$$K_{1,(n)}=\{P_{ij}\}_{i,j=0}^n,\quad K_{2,(n)}=\{Q_{ij}\}_{i,j=0}^n.$$

Здесь

$$P_{00}=\frac{s_0-s_0^*}{z_0-\bar z_0},\quad P_{0j}=\frac{P_{0j-1}-s_j^*}{z_0-\bar z_0},\qquad 1\le j\le n,$$
$$P_{i0}=\frac{s_i-P_{i-10}}{z_0-\bar z_0},\qquad 1\le i\le n,\qquad P_{ij}=\frac{P_{ij-1}-P_{i-1j}}{z_0-\bar z_0},\qquad 1\le i,j\le n.$$

Аналогичным образом определяются матрицы Q_{ij} с заменой матриц s_j на $\tilde s_j$.

Имеет место *тождество сплетения* (см. [10])

$$(b-a)R_{T,(n)}(b)v_{(n)}u_{1,(n)}^*R_{T,(n)}^*(b)=R_{T,(n)}^{-1}(a)R_{T,(n)}(b)K_{1,(n)}+K_{2,(n)}. \tag{3}$$

Определение 2. *Задача Каратеодори (1) называется вполне неопределенной, если* $K_{1,(n)}>0,\ K_{2,(n)}>0.$

Мы будем рассматривать вполне неопределённую задачу Каратеодори.

Определение 3. *Матрица-функция*

$$U_{(n)}(z)=\left[\begin{array}{c|c}\alpha_{(n)}(z)&\beta_{(n)}(z)\\\hline\gamma_{(n)}(z)&\delta_{(n)}(z)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}I_m+(b-z)u_{2,(n)}^*R_{T,(n)}^*(\bar z)K_{2,(n)}^{-1}R_{T,(n)}(b)v_{(n)}&-(b-z)u_{1,(n)}^*R_{T,(n)}^*(\bar z)K_{1,(n)}^{-1}R_{T,(n)}(b)u_{1,(n)}\\\hline(z-a)v_{(n)}^*R_{T,(n)}^*(\bar z)K_{2,(n)}^{-1}R_{T,(n)}(b)v_{(n)}&I_m-(b-z)v_{(n)}^*R_{T,(n)}^*(\bar z)K_{1,(n)}^{-1}R_{T,(n)}(b)u_{1,(n)}\end{array}\right] \tag{4}$$

называется резольвентной матрицей задачи Каратеодори (1).

Определение 4. *Пара мероморфных в* $\mathbb{C}\setminus[a,\ b]$ *МФ* $\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$ *называется* $\mathcal{S}[a,\ b]$ – *парой, если существует дискретное в* $\mathbb{C}\setminus[a,\ b]$ *множество* $\mathcal{D}_{pq}$, *такое, что*

(*i*) *МФ* p *и* q *голоморфны в* $\mathbb{C}\setminus\{\mathcal{D}_{pq}\cup[a,\ b]\}$,

(*ii*) $[p^*(z),\ q^*(z)]\begin{bmatrix}p(z)\\q(z)\end{bmatrix}>0_m,\ z\in\mathbb{C}\setminus\{\mathcal{D}_{pq}\cup[a,\ b]\}$,

(*iii*) $[p^*(z),\ q^*(z)]\dfrac{J}{\imath(\bar z-z)}\begin{bmatrix}p(z)\\q(z)\end{bmatrix}\ge 0_m,\qquad z\in\mathbb{C}_\pm\setminus\mathcal{D}_{pq}$,

(*iv*) $\left[\dfrac{\bar z-a}{b-\bar z}p^*(z),\ q^*(z)\right]\dfrac{J}{\imath(\bar z-z)}\begin{bmatrix}\dfrac{z-a}{b-z}p(z)\\q(z)\end{bmatrix}\ge 0_m,\ z\in\mathbb{C}_\pm\setminus\mathcal{D}_{pq}.$

Пусть $(m\times m)$-МФ Q мероморфна и мероморфно обратима в $\mathbb{C}\setminus[a,\ b]$. Обозначим через $\mathcal{D}_Q$ дискретное в $\mathbb{C}\setminus[a,\ b]$ множество особых точек МФ Q и Q^{-1}. Две $\mathcal{S}[a,\ b]$-пары $\begin{bmatrix}p_1(z)\\q_1(z)\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}p_2(z)\\q_2(z)\end{bmatrix}$ назовем эквивалентными, если для всех $z\in\mathbb{C}\setminus\{[a,\ b]\cup\mathcal{D}_{p_1q_1}\cup\mathcal{D}_{p_2q_2}\cup\mathcal{D}_Q\}$ выполнены равенства $p_2(z)=p_1(z)Q(z)$, $q_2(z)=q_1(z)Q(z)$. Множество классов эквивалентности $\mathcal{S}[a,\ b]$-пар обозначим через $\mathcal{S}_\infty[a,\ b]$.

Теорема 1 ([10]). *Пусть МФ* $\alpha_{(n)}$, $\beta_{(n)}$, $\gamma_{(n)}$, $\delta_{(n)}$ *определены в (4). Тогда дробно-линейное преобразование*

$$\begin{aligned} s(z) &= U_{(n)}(z)\left\{\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}\right\} \\ &= \left\{\alpha_{(n)}(z)p(z)+\beta_{(n)}(z)q(z)\right\}\left\{\gamma_{(n)}(z)p(z)+\delta_{(n)}(z)q(z)\right\}^{-1} \end{aligned} \tag{5}$$

задает взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{L}_n$ *и* $\mathcal{S}_\infty[a,\ b]$.

2. Мультипликативная структура резольвентной матрицы.

Рассмотрим блочное представление матриц $K_{r,(n)}$

$$\begin{aligned} K_{r,(n)} = \begin{bmatrix} K_{r,(n-1)} & B_{r,(n)} \\ B^*_{r,(n)} & C_{r,n} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ B^*_{r,(n)}K^{-1}_{r,(n-1)} & I_m \end{bmatrix}\times \\ &\times \begin{bmatrix} K_{r,(n-1)} & 0_{nm\times m} \\ 0_{m\times nm} & \hat{K}_{r,n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{nm} & K^{-1}_{r,(n-1)}B_{r,(n)} \\ 0_{m\times nm} & I_m \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{6}$$

здесь

$$\hat{K}_{r,n} = C_{r,n} - B^*_{r,(n)}K^{-1}_{r,(n-1)}B_{r,(n)}, \quad r=1,2. \tag{7}$$

Отсюда и из определения 2 следуют неравенства $\hat{K}_{r,n} > 0_m$, $r=1,2$. Поэтому

$$K^{-1}_{r,(n)}=\begin{bmatrix} I_{nm} & -K^{-1}_{r,(n-1)}B_{r,(n)} \\ 0_{m\times nm} & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K^{-1}_{r,(n-1)} & 0_{nm\times m} \\ 0_{m\times nm} & \hat{K}^{-1}_{r,n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B^*_{r,(n)}K^{-1}_{r,(n-1)} & I_m \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Имеют место очевидные равенства

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)} \\ \frac{w_{1,n}}{z_0-b} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B^*_{1,(n)}K^{-1}_{1,(n-1)} & I_m \end{bmatrix} R_{T,(n)}(b)u_{1,(n)}, \\ \begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)} \\ \frac{\hat{v}_n}{z_0-b} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B^*_{2,(n)}K^{-1}_{2,(n-1)} & I_m \end{bmatrix} R_{T,(n)}(b)v_{(n)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь

$$\begin{aligned} w_{1,n} &= s_n-(z_0-b)B^*_{1,(n)}K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}+\left(\frac{(-1)^nI_m}{(z_0-b)^n},\cdots,\frac{-I_m}{(z_0-b)}\right)u_{1,(n-1)}, \\ \hat{v}_n &= \frac{(-1)^nI_m}{(z_0-b)^n}-(z_0-b)B^*_{2,(n)}K^{-1}_{2,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Теорема 2. *Пусть задана вполне неопределенная задача Каратеодори (1). Тогда имеют место равенства*

$$(b-a)R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)}w^*_{1,n}\frac{1}{\bar{z}_0-b} = B_{2,(n)}-K_{2,(n-1)}K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}, \tag{11}$$

$$\frac{b-a}{z_0-b}\hat{v}_n u^*_{1,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) = -B^*_{2,(n)} K^{-1}_{2,(n-1)} R^{-1}_{T,(n-1)}(a) R_{T,(n-1)}(b) K_{1,(n-1)} - \\ - \frac{b-a}{z_0-b}\left(\frac{(-1)^{n-1} I_m}{(z_0-b)^n}, \cdots, \frac{I_m}{z_0-b}\right) K_{1,(n-1)} + \frac{z_0-a}{z_0-b} B^*_{1,(n)}, \tag{12}$$

$$\frac{b-a}{\bar{z}_0-b}\hat{v}_n w^*_{1,n} = (z_0-a)\hat{K}_{1,n} + (z_0-b)\hat{K}_{2,n}. \tag{13}$$

Здесь $w_{1,n}$ и $\hat{v}_n$ определены в (10).

Доказательство. Домножим тождество сплетения (3) слева и справа на матрицы

$$\begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B^*_{2,(n)} K^{-1}_{2,(n-1)} & I_m \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} I_{nm} & -K^{-1}_{1,(n-1)} B_{1,(n)} \\ 0_{m\times nm} & I_m \end{bmatrix},$$

соответственно. Отсюда (9) следует, что

$$(b-a)\begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}(b) v_{(n-1)} \\ \frac{1}{z_0-b}\hat{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^*_{1,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b), & \frac{w^*_{1,n}}{\bar{z}_0-b} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} K_{2,(n-1)} & B_{2,(n)} \\ 0_{m\times nm} & \hat{K}_{2,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{nm} & -K^{-1}_{1,(n-1)} B_{1,(n)} \\ 0_{m\times nm} & I_m \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B^*_{2,(n)} K^{-1}_{2,(n-1)} & I_m \end{bmatrix} R^{-1}_{T,(n)}(a) R_{T,(n)}(b) \begin{bmatrix} K_{1,(n-1)} & 0_{nm\times m} \\ B^*_{1,(n)} & \hat{K}_{1,n} \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$(b-a)\begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}(b) v_{(n-1)} u^*_{1,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) & R_{T,(n-1)}(b) v_{(n-1)} w^*_{1,n} \frac{1}{\bar{z}_0-b} \\ \frac{1}{z_0-b}\hat{v}_n u^*_{1,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) & \frac{1}{|z_0-b|^2}\hat{v}_n w^*_{1,n} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} K_{2,(n-1)} & -K_{2,(n-1)} K^{-1}_{1,(n-1)} B_{1,(n)} + B_{2,(n)} \\ 0_{m\times nm} & \hat{K}_{2,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B^*_{2,(n)} K^{-1}_{2,(n-1)} & I_m \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} R^{-1}_{T,(n-1)}(a) R_{T,(n-1)}(b) K^{-1}_{1,(n-1)} & 0_{nm\times m} \\ (b-a)\left(\frac{(-1)^n I_m}{(z_0-b)^{n+1}}, \cdots, \frac{-I_m}{(z_0-b)^2}\right) K^{-1}_{1,(n-1)} + \frac{z_0-a}{z_0-b} B^*_{1,(n)} & \frac{z_0-a}{z_0-b}\hat{K}_{1,n} \end{bmatrix}.$$

Сравнивая блоки в этих равенствах, получаем тождества (11)–(13). Теорема 2 доказана.

Пусть матрицы $w_{1,p}$ и $\hat{v}_p$, $0 < p \le n$ определены в (10), $w_{1,0} = s_0$, $\hat{v}_0 = I_m$, $w_{2,p} = -\frac{z_0-a}{z_0-b} w_{1,p}$.

Определение 5. *Матрицы-функции*

$$b_0(z) = U_{(0)}(z), \qquad b_p(z) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\alpha}_p(z) & \hat{\beta}_p(z) \\ \hline \hat{\gamma}_p(z) & \hat{\delta}_p(z) \end{array}\right] = \\ = \left[\begin{array}{c|c} I_m + (b-z)\frac{w^*_{2,p}}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,p}\frac{\hat{v}_p}{z_0-b} & -(b-z)\frac{w^*_{1,p}}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{1,p}\frac{w_{1,p}}{z_0-b} \\ \hline (z-a)\frac{\hat{v}^*_p}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,p}\frac{\hat{v}_p}{z_0-b} & I_m - (b-z)\frac{\hat{v}^*_p}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{1,p}\frac{w_{1,p}}{z_0-b} \end{array}\right], \ (1 \le p \le n) \tag{14}$$

называются множителями Бляшке-Потапова задачи Каратеодори (1).

Теорема 3. *Резольвентная матрица $U_{(n)}(z)$ вполне неопределенной задачи Каратеодори (1) допускает представление вида*

$$U_{(n)}(z) = U_{(n-1)}(z)b_n(z), \tag{15}$$

здесь множитель Бляшке-Потапова $b_n(z)$ задается формулой (14).

Доказательство. Для доказательства формулы (15) достаточно убедиться в справедливости равенств

$$\alpha_{(n)}(z) = \alpha_{(n-1)}(z)\hat{\alpha}_n(z) + \beta_{(n-1)}(z)\hat{\gamma}_n(z), \tag{16}$$

$$\beta_{(n)}(z) = \alpha_{(n-1)}(z)\hat{\beta}_n(z) + \beta_{(n-1)}(z)\hat{\delta}_n(z), \tag{17}$$

$$\gamma_{(n)}(z) = \gamma_{(n-1)}(z)\hat{\alpha}_n(z) + \delta_{(n-1)}(z)\hat{\gamma}_n(z), \tag{18}$$

$$\delta_{(n)}(z) = \gamma_{(n-1)}(z)\hat{\beta}_n(z) + \delta_{(n-1)}(z)\hat{\delta}_n(z). \tag{19}$$

Докажем равенство (16). Имеем

$$\alpha_{(n)}(z) = I_m + (b-z)u^*_{2,(n)}R^*_{T,(n)}(\bar{z})K^{-1}_{2,(n)}R_{T,(n)}(b)v_{(n)} = I_m + (b-z)u^*_{2,(n)}\times$$

$$\times R^*_{T,(n)}(\bar{z})\begin{bmatrix} K^{-1}_{2,(n-1)} & -K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\hat{K}^{-1}_{2,n} \\ 0_{m\times nm} & \hat{K}^{-1}_{2,n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B^*_{2,(n)}K^{-1}_{2,(n-1)} & I_m\end{bmatrix}R_{T,(n)}(b)v_{(n)}.$$

Из (9) и аналогичного равенства

$$\begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}(a)u_{2,(n-1)} \\ \frac{w_{2,n}}{z_0-a}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B^*_{1,(n)}K^{-1}_{1,(n-1)} & I_m\end{bmatrix}R_{T,(n)}(a)u_{2,(n)}$$

получим

$$\alpha_{(n)}(z) = I_m + (b-z)\begin{bmatrix} u^*_{2,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(a) & \frac{w^*_{2,n}}{\bar{z}_0-a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{nm} & K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)} \\ 0_{m\times nm} & I_m\end{bmatrix}\times$$

$$\times R^{-1^*}_{T,(n)}(a)R^*_{T,(n)}(\bar{z})\begin{bmatrix} K^{-1}_{2,(n-1)} & -K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\hat{K}^{-1}_{2,n} \\ 0_{m\times nm} & \hat{K}^{-1}_{2,n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)} \\ \frac{\hat{v}_n}{z_0-b}\end{bmatrix} =$$

$$= I_m + (b-z)\left[u^*_{2,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(a) \quad u^*_{2,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(a)K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)} + \frac{w^*_{2,n}}{\bar{z}_0-a}\right]\times$$

$$\times\left[\begin{array}{c|c} R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)R^*_{T,(n-1)}(\bar{z}) & \begin{array}{c}\frac{(-1)^n(z-a)}{(\bar{z}_0-z)^{n+1}}I_m \\ \vdots \\ \frac{-(z-a)}{(\bar{z}_0-z)^2}I_m\end{array} \\ \hline 0_{m\times nm} & \frac{\bar{z}_0-a}{\bar{z}_0-z}I_m\end{array}\right]\times$$

$$\times\left[\begin{array}{c} K^{-1}_{2,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)} - K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b} \\ \hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}\end{array}\right] = I_m + (b-z)\times$$
$$\times\left[u^*_{2,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z}) \qquad (z-a)u^*_{2,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(a)\left[\begin{array}{c}\frac{(-1)^n}{(\bar{z}_0-z)^{n+1}}I_m \\ \vdots \\ \frac{-1}{(\bar{z}_0-z)^2}I_m\end{array}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\bar{z}_0-a}{\bar{z}_0-z}u^*_{2,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(a)K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)} + \frac{1}{\bar{z}_0-z}w^*_{2,n}\right]\times$$
$$\times\left[\begin{array}{c} K^{-1}_{2,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)} - K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b} \\ \hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}\end{array}\right].$$

Здесь мы воспользовались очевидным равенством

$$R^{-1^*}_{T,(n)}(a)R^*_{T,(n)}(\bar{z}) = \left[\begin{array}{c|c} R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a) & \begin{array}{c}0_m\\ \vdots \\ I_m\end{array} \\ \hline 0_{m\times nm} & (\bar{z}_0-a)I_m\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} R^*_{T,(n-1)}(\bar{z}) & \begin{array}{c}\frac{(-1)^n}{(\bar{z}_0-z)^{n+1}}I_m\\ \vdots \\ \frac{-1}{(\bar{z}_0-z)^2}I_m\end{array} \\ \hline 0_{m\times nm} & \frac{1}{\bar{z}_0-z}I_m\end{array}\right]=$$
$$=\left[\begin{array}{c|c} R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)R^*_{T,(n-1)}(\bar{z}) & \begin{array}{c}\frac{(-1)^n(z-a)}{(\bar{z}_0-z)^{n+1}}I_m\\ \vdots \\ \frac{-(z-a)}{(\bar{z}_0-z)^2}I_m\end{array} \\ \hline 0_{m\times nm} & \frac{\bar{z}_0-a}{\bar{z}_0-z}I_m\end{array}\right].$$

Окончательно получим

$$\alpha_{(n)}(z) = \alpha_{(n-1)}(z) - (b-z)u^*_{2,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}+$$
$$+(b-z)\left((z-a)u^*_{2,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(a)\left(\begin{array}{c}\frac{(-1)^n}{(\bar{z}_0-z)^{n+1}}I_m \\ \vdots \\ \frac{-1}{(\bar{z}_0-z)^2}I_m\end{array}\right)+\right. \tag{20}$$
$$\left.+\frac{\bar{z}_0-a}{\bar{z}_0-z}u^*_{2,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(a)K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)} + \frac{1}{\bar{z}_0-z}w^*_{2,n}\right)\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}.$$

Вычислим теперь правую часть равенства (16). Пусть

$$X_{11} = \alpha_{(n-1)}(z)\hat{\alpha}_n(z) + \beta_{(n-1)}(z)\hat{\gamma}_n(z).$$

Имеем

$$X_{11}=\Big(I_m + (b-z)u^*_{2,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})K^{-1}_{2,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)}\Big)\times$$
$$\times\left(I_m + (b-z)\frac{w^*_{2,n}}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}\right) - (b-z)(z-a)u^*_{1,(n-1)}\times$$

$$\times R^*_{T,(n-1)}(\bar z)K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}\frac{\hat v^*_n}{\bar z_0 - z}\hat K^{-1}_{2,n}\frac{\hat v_n}{z_0-b} =$$

$$=\alpha_{(n-1)}(z)+(b-z)\frac{w^*_{2,n}}{\bar z_0 - z}\hat K^{-1}_{2,n}\frac{\hat v_n}{z_0-b}+(b-z)^2u^*_{2,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\times$$

$$\times K^{-1}_{2,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)}\frac{w^*_{2,n}}{\bar z_0 - z}\hat K^{-1}_{2,n}\frac{\hat v_n}{z_0-b} - (b-z)(z-a)\times$$

$$\times u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}\frac{\hat v^*_n}{\bar z_0 - z}\hat K^{-1}_{2,n}\frac{\hat v_n}{z_0-b}.$$

Из равенств (11), (12) и $w_{2,n} = -\frac{z_0-a}{z_0-b}w_{1,n}$ получим

$$X_{11}=\alpha_{(n-1)}(z)+(b-z)\frac{w^*_{2,n}}{\bar z_0 - z}\hat K^{-1}_{2,n}\frac{\hat v_n}{z_0-b}+(b-z)^2u^*_{2,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\times$$

$$\times K^{-1}_{2,(n-1)}\Big\{-B_{2,(n)}+K_{2,(n-1)}K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\Big\}\frac{\bar z_0 - a}{(b-a)(\bar z_0 - z)}\hat K^{-1}_{2,n}\frac{\hat v_n}{z_0-b}-$$

$$-(b-z)(z-a)u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)K^{-1}_{1,(n-1)}\left\{\frac{\bar z_0 - a}{b-a}B_{1,(n)} - \frac{\bar z_0 - b}{b-a}\times\right.$$

$$\left.\times K_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)} - K_{1,(n-1)}\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}}{(\bar z_0-b)^n}I_m\\ \vdots \\ \frac{-1}{\bar z_0 - b}I_m\end{pmatrix}\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{\bar z_0 - z}\hat K^{-1}_{2,n}\frac{\hat v_n}{z_0-b} = \alpha_{(n-1)}(z)+(b-z)\frac{w^*_{2,n}}{\bar z_0 - z}\hat K^{-1}_{2,n}\frac{\hat v_n}{z_0-b}+$$

$$+\frac{(\bar z_0 - a)(b-z)^2}{(b-a)(\bar z_0 - z)(z_0-b)}u^*_{2,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\times$$

$$\times\left\{-K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}+K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\right\}\hat K^{-1}_{2,n}\hat v_n-$$

$$-\frac{(b-z)(z-a)}{(\bar z_0 - z)(z_0-b)}u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\left\{\frac{\bar z_0 - a}{b-a}K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)} - \frac{\bar z_0 - b}{b-a}\times\right.$$

$$\left.\times R^*_{T,(n-1)}(b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)} - \begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}}{(\bar z_0-b)^n}I_m\\ \vdots \\ \frac{-1}{\bar z_0 - b}I_m\end{pmatrix}\right\}\hat K^{-1}_{2,n}\hat v_n =$$

$$=\alpha_{(n-1)}(z)+(b-z)\frac{w^*_{2,n}}{\bar z_0 - z}\hat K^{-1}_{2,n}\frac{\hat v_n}{z_0-b}+\frac{(b-z)(\bar z_0 - a)}{(b-a)(\bar z_0 - z)(z_0-b)}u^*_{2,(n-1)}\times$$

$$\times R^*_{T,(n-1)}(\bar z)R^*_{T,(n-1)}(a)\Big\{(b-z)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)+(z-a)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(b)\Big\}K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\times$$

$$\times\hat K^{-1}_{2,n}\hat v_n - \frac{b-z}{(\bar z_0 - z)(z_0-b)(b-a)}u^*_{2,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\left\{(\bar z_0 - a)(b-z)+\right.$$

$$\left.+(\bar z_0 - b)(z-a)\right\}K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\hat K^{-1}_{2,n}\hat v_n + \frac{(b-z)(z-a)}{(\bar z_0 - z)(z_0-b)}u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1}}{(\bar{z}_0-b)^n} I_m \\ \vdots \\ \frac{-1}{\bar{z}_0-b} I_m \end{pmatrix} \hat{K}_{2,n}^{-1} \hat{v}_n = \alpha_{(n-1)}(z) + (b-z)\frac{w_{2,n}^*}{\bar{z}_0 - z}\hat{K}_{2,n}^{-1}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b} +$$
$$+ \frac{(b-z)(\bar{z}_0-a)}{(\bar{z}_0-z)(z_0-b)} u_{2,(n-1)}^* R_{T,(n-1)}^*(a) K_{1,(n-1)}^{-1} B_{1,(n)} \hat{K}_{2,n}^{-1}\hat{v}_n -$$
$$- \frac{b-z}{z_0-b} u_{2,(n-1)}^* R_{T,(n-1)}^*(\bar{z}) K_{2,(n-1)}^{-1} B_{2,(n)} \hat{K}_{2,n}^{-1}\hat{v}_n +$$
$$+ \frac{(b-z)(z-a)}{(\bar{z}_0-z)(z_0-b)} u_{1,(n-1)}^* R_{T,(n-1)}^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1}}{(\bar{z}_0-b)^n} I_m \\ \vdots \\ \frac{-1}{\bar{z}_0-b} I_m \end{pmatrix} \hat{K}_{2,n}^{-1}\hat{v}_n.$$

Окончательно, из равенства

$$R_{T,(n-1)}^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1}}{(\bar{z}_0-b)^n} I_m \\ \vdots \\ \frac{-1}{\bar{z}_0-b} I_m \end{pmatrix} = R_{T,(n-1)}^*(b) \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1}}{(\bar{z}_0-z)^n} I_m \\ \vdots \\ \frac{-1}{\bar{z}_0-z} I_m \end{pmatrix} \tag{21}$$

следует, что

$$X_{11}(z) = \alpha_{(n-1)}(z) + (b-z)\frac{w_{2,n}^*}{\bar{z}_0-z}\hat{K}_{2,n}^{-1}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b} + \frac{(b-z)(\bar{z}_0-a)}{(\bar{z}_0-z)(z_0-b)} u_{2,(n-1)}^* R_{T,(n-1)}^*(a) \times$$
$$\times K_{1,(n-1)}^{-1} B_{1,(n)} \hat{K}_{2,n}^{-1}\hat{v}_n - \frac{b-z}{z_0-b} u_{2,(n-1)}^* R_{T,(n-1)}^*(\bar{z}) K_{2,(n-1)}^{-1} B_{2,(n)} \hat{K}_{2,n}^{-1}\hat{v}_n +$$
$$- \frac{(b-z)(z-a)}{(z_0-b)} u_{2,(n-1)}^* R_{T,(n-1)}^*(a) \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1}}{(\bar{z}_0-z)^{n+1}} I_m \\ \vdots \\ \frac{-1}{(\bar{z}_0-z)^2} I_m \end{pmatrix} \hat{K}_{2,n}^{-1}\hat{v}_n. \tag{22}$$

Из (20) и (22) получаем (16).

Докажем равенство (17). Имеем

$$\beta_{(n)}(z) = -(b-z) u_{1,(n)}^* R_{T,(n)}^*(\bar{z}) K_{1,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(b) u_{1,(n)} = -(b-z)\times$$
$$\times \begin{pmatrix} u_{1,(n-1)}^* R_{T,(n-1)}^*(b) & \frac{w_{1,n}^*}{\bar{z}_0-b} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_{nm} & K_{1,(n-1)}^{-1} B_{1,(n)} \\ 0_{m\times nm} & I_m \end{bmatrix} R_{T,(n)}^{-1^*}(b) R_{T,(n)}^*(\bar{z}) \times$$
$$\times \begin{bmatrix} K_{1,(n-1)}^{-1} & -K_{1,(n-1)}^{-1} B_{1,(n)} \hat{K}_{1,n}^{-1} \\ 0_{m\times nm} & \hat{K}_{1,n}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}(b) u_{1,(n-1)} \\ \frac{w_{1,n}}{z_0-b} \end{bmatrix} = -(b-z)\times$$
$$\times \begin{pmatrix} u_{1,(n-1)}^* R_{T,(n-1)}^*(b) & u_{1,(n-1)}^* R_{T,(n-1)}^*(b) K_{1,(n-1)}^{-1} B_{1,(n)} + \frac{w_{1,n}^*}{\bar{z}_0-b} \end{pmatrix} \times$$

$$\times\left[\begin{array}{c|c} R^{-1^*}_{T,(n-1)}(b)R^*_{T,(n-1)}(\bar z) & \begin{matrix}\frac{(-1)^n(z-b)}{(\bar z_0-z)^{n+1}}I_m\\ \vdots \\ \frac{-(z-b)}{(\bar z_0-z)^2}I_m\end{matrix} \\ \hline 0_{m\times nm} & \frac{\bar z_0-b}{\bar z_0-z}I_m \end{array}\right]\left[\begin{matrix}K_1^{-1}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}-K_1^{-1}B_1\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}\\ \hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}\end{matrix}\right]=$$

$$=-(b-z)\left(u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\quad (z-b)u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)\begin{pmatrix}\frac{(-1)^n}{(\bar z_0-z)^{n+1}}I_m\\ \vdots \\ \frac{-1}{(\bar z_0-z)^2}I_m\end{pmatrix}+\right.$$

$$\left.+u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\frac{\bar z_0-b}{\bar z_0-z}+\frac{w^*_{1,n}}{\bar z_0-z}\right)\times$$

$$\times\left[\begin{matrix}K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}-K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}\\ \hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}\end{matrix}\right]=$$

$$=\beta_{(n-1)}(z)+(z-b)^2u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)\begin{pmatrix}\frac{(-1)^n}{(\bar z_0-z)^{n+1}}I_m\\ \vdots \\ \frac{-1}{(\bar z_0-z)^2}I_m\end{pmatrix}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}-$$

$$-(b-z)u^*_{1,(n-1)}\left(-(\bar z_0-z)R^*_{T,(n-1)}(\bar z)+R^*_{T,(n-1)}(b)(\bar z_0-b)\right)K^{-1}_{1,(n-1)}\times$$

$$\times B_{1,(n)}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}+\hat\beta_n(z).$$

Из очевидного тождества

$$-(\bar z_0-z)R^*_{T,(n-1)}(\bar z)+R^*_{T,(n-1)}(b)(\bar z_0-b)=(z-b)R^*_{T,(n-1)}(\bar z)R^*_{T,(n-1)}(b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(z_0)$$

получим

$$\beta_{(n)}(z)=\beta_{(n-1)}(z)+(z-b)^2u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)\begin{pmatrix}\frac{(-1)^n}{(\bar z_0-z)^{n+1}}I_m\\ \vdots \\ \frac{-1}{(\bar z_0-z)^2}I_m\end{pmatrix}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}+$$

$$+(z-b)^2u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)R^*_{T,(n-1)}(b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(z_0)K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\hat K^{-1}_{1,n}\times$$

$$\times\frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}+\hat\beta_n(z). \tag{23}$$

А теперь вычислим правую часть равенства (17). Имеем

$$X_{12}=\alpha_{(n-1)}(z)\hat\beta_n(z)+\beta_{(n-1)}(z)\hat\delta_n(z)=\hat\beta_n(z)+\beta_{(n-1)}(z)+(b-z)^2\times$$

$$\times u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\left[R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)R^*_{T,(n-1)}(b)K^{-1}_{2,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)}w^*_{1,n}+\right.$$

$$\left.+K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}\hat v^*_n\right]\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}=\hat\beta_n(z)+\beta_{(n-1)}(z)+$$

$$+(b-z)^2 u^*_{1,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\Big[R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a) R^*_{T,(n-1)}(b) K^{-1}_{2,(n-1)}\big(B_{2,(n)} - K_{2,(n-1)}\times$$
$$\times K^{-1}_{1,(n-1)} B_{1,(n)}\big)\frac{\bar z_0 - b}{b-a} + K^{-1}_{1,(n-1)}\Big(-K_{1,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a) K^{-1}_{2,(n-1)} B_{2,(n)} -$$
$$-\frac{b-a}{\bar z_0 - b} K_{1,(n-1)} \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1} I_m}{(\bar z_0 - b)^n} \\ \vdots \\ \frac{I_m}{\bar z_0 - b} \end{pmatrix} + \frac{\bar z_0 - a}{\bar z_0 - b} B_{1,(n)}\Big)\Big] \frac{\bar z_0 - b}{b-a} \hat K^{-1}_{1,n} \frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0 - z)}.$$

Последнее равенство следует из (11) и (12). Далее имеем

$$X_{12} = \hat\beta_n(z) + \beta_{(n-1)}(z) + (b-z)^2 u^*_{1,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\Big[R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a) R^*_{T,(n-1)}(b)\times$$
$$\times\left(K^{-1}_{2,(n-1)} B_{2,(n)} - K^{-1}_{1,(n-1)} B_{1,(n)}\right)\Big(-R^*_{T,(n-1)}(b) R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a) K^{-1}_{2,(n-1)} B_{2,(n)} -$$
$$-\frac{b-a}{\bar z_0 - b}\begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1} I_m}{(\bar z_0 - b)^n} \\ \vdots \\ \frac{I_m}{\bar z_0 - b} \end{pmatrix} + \frac{\bar z_0 - a}{\bar z_0 - b} K^{-1}_{1,(n-1)} B_{1,(n)}\Big)\Big]\frac{\bar z_0 - b}{b-a}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0 - z)} =$$
$$=\hat\beta_n(z) + \beta_{(n-1)}(z) + (b-z)^2 u^*_{1,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\Bigg[- R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a) R^*_{T,(n-1)}(b) K^{-1}_{1,(n-1)}\times$$
$$\times B_{1,(n)}\frac{\bar z_0 - b}{b-a} - \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1} I_m}{(\bar z_0 - b)^n} \\ \vdots \\ \frac{I_m}{\bar z_0 - b} \end{pmatrix} + \frac{\bar z_0 - a}{b-a} K^{-1}_{1,(n-1)} B_{1,(n)}\Bigg]\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0 - z)}.$$

Из (21) следует, что

$$X_{12} = \hat\beta_n(z) + \beta_{(n-1)}(z) + (b-z)^2 u^*_{1,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b)\begin{pmatrix} \frac{(-1)^n I_m}{(\bar z_0 - z)^{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{-I_m}{(\bar z_0 - z)^2} \end{pmatrix}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0 - b} +$$
$$+ (b-z)^2 u^*_{1,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(\bar z) R^*_{T,(n-1)}(b)\left[-R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)(\bar z_0 - b) +\right.$$
$$\left.+(\bar z_0 - a) R^{-1*}_{T,(n-1)}(b)\right] K^{-1}_{1,(n-1)} B_{1,(n)}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{(b-a)(z_0-b)(\bar z_0 - z)}.$$

Из равенства

$$-(\bar z_0 - b) R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a) + (\bar z_0 - a) R^{-1*}_{T,(n-1)}(b) = (b-a) R^{-1^*}_{T,(n-1)}(z_0)$$

получим

$$X_{12} = \hat\beta_n(z) + \beta_{(n-1)}(z) + (b-z)^2 u^*_{1,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b)\begin{pmatrix} \frac{(-1)^n I_m}{(\bar z_0 - z)^{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{-I_m}{(\bar z_0 - z)^2} \end{pmatrix}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0 - b} +$$

$$+(b-z)^2 u^*_{1,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(\bar z) R^*_{T,(n-1)}(b) R^{-1^*}_{T,(n-1)}(z_0) K^{-1}_{1,(n-1)} B_1 \hat K^{-1}_{1,n} \frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}.$$

Отсюда и из (23) следует равенство (17).

Докажем равенство (18). Имеем

$$\gamma_{(n)}(z) = (z-a) v^*_{(n)} R^*_{T,(n)}(\bar z) K^{-1}_{2,(n)} R_{T,(n)}(b) v_{(n)} = (z-a) v^*_{(n)} R^*_{T,(n)}(\bar z) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} K^{-1}_{2,(n-1)} & -K^{-1}_{2,(n-1)} B_{2,(n)} \hat K^{-1}_{2,n} \\ 0_{m\times nm} & \hat K^{-1}_{2,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B^*_{2,(n)} K^{-1}_{2,(n-1)} & I_m \end{bmatrix} R_{T,(n)}(b) v_{(n)} =$$

$$= (z-a) \begin{pmatrix} v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) & \dfrac{\hat v^*_n}{\bar z_0 - b} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_{nm} & K^{-1}_{2,(n-1)} B_{2,(n)} \\ 0_{m\times nm} & I_m \end{bmatrix} R^{-1^*}_{T,(n)}(b) \times$$

$$\times R^*_{T,(n)}(\bar z) \begin{bmatrix} K^{-1}_{2,(n-1)} & -K^{-1}_{2,(n-1)} B_{2,(n)} \hat K^{-1}_{2,n} \\ 0_{m\times nm} & \hat K^{-1}_{2,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}(b) v_{(n-1)} \\ \frac{\hat v_n}{z_0-b} \end{bmatrix} =$$

$$= (z-a) \left(v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) \quad v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) K^{-1}_{2,(n-1)} B_{2,(n)} + \frac{\hat v^*_n}{\bar z_0 - b} \right) \times$$

$$\times \left[\begin{array}{c|c} R^{-1^*}_{T,(n-1)}(b) R^*_{T,(n-1)}(\bar z) & \begin{matrix} \frac{(-1)^n (z-b)}{(\bar z_0 - z)^{n+1}} I_m \\ \vdots \\ \frac{-(z-b)}{(\bar z_0-z)^2} I_m \end{matrix} \\ \hline 0_{m\times nm} & \frac{\bar z_0 - b}{\bar z_0 - z} I_m \end{array}\right] \begin{pmatrix} K_2^{-1} R_{T,(n-1)}(b) v_{(n-1)} - K_2^{-1} B_2 \hat K^{-1}_{2,n} \frac{\hat v_n}{z_0-b} \\ \hat K^{-1}_{2,n} \frac{\hat v_n}{z_0-b} \end{pmatrix} =$$

$$= (z-a) \left(v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(\bar z) \quad v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n (z-b)}{(\bar z_0 - z)^{n+1}} I_m \\ \vdots \\ \frac{-(z-b)}{(\bar z_0-z)^2} I_m \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) K^{-1}_{2,(n-1)} B_{2,(n)} \frac{\bar z_0 - b}{\bar z_0 - z} + \frac{\hat v^*_n}{\bar z_0 - z} \right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} K^{-1}_{2,(n-1)} R_{T,(n-1)}(b) v_{(n-1)} - K^{-1}_{2,(n-1)} B_{2,(n)} \hat K^{-1}_{2,n} \frac{\hat v_n}{z_0-b} \\ \hat K^{-1}_{2,n} \frac{\hat v_n}{z_0-b} \end{pmatrix} =$$

$$= \gamma_{(n-1)}(z) + \hat\gamma_n(z) + (z-a) v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n (z-b)}{(\bar z_0 - z)^{n+1}} I_m \\ \vdots \\ \frac{-(z-b)}{(\bar z_0-z)^2} I_m \end{bmatrix} \hat K^{-1}_{2,n} \frac{\hat v_n}{z_0 - b} +$$

$$+ (z-a) v^*_{(n-1)} \left(-(\bar z_0 - z) R^*_{T,(n-1)}(\bar z) + (\bar z_0 - b) R^*_{T,(n-1)}(b) \right) K^{-1}_{2,(n-1)} \times$$

$$\times B_{2,(n)} \hat K^{-1}_{2,n} \frac{\hat v_n}{(z_0-b)(\bar z_0 - z)}.$$

Из равенства

$$-(\bar z_0 - z) R^*_{T,(n-1)}(\bar z) + (\bar z_0 - b) R^*_{T,(n-1)}(b) = (z-b) R^*_{T,(n-1)}(\bar z) R^*_{T,(n-1)}(b) R^{-1^*}_{T,(n-1)}(z_0)$$

получим

$$\gamma_{(n)}(z)=\gamma_{(n-1)}(z)+\hat{\gamma}_n(z)+(z-a)(z-b)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)\begin{bmatrix}\frac{(-1)^n}{(\bar{z}_0-z)^{n+1}}I_m\\ \vdots\\ \frac{-1}{(\bar{z}_0-z)^2}I_m\end{bmatrix}\times$$

$$\times\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}+(z-b)(z-a)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})R^*_{T,(n-1)}(b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(z_0)K^{-1}_{2,(n-1)}\times$$

$$\times B_{2,(n)}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{(z_0-b)(\bar{z}_0-z)}. \tag{24}$$

Вычислим теперь правую часть равенства (18). Имеем

$$X_{21}=\gamma_{(n-1)}(z)\hat{\alpha}_n(z)+\delta_{(n-1)}(z)\hat{\gamma}_n(z)=(z-a)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})K^{-1}_{2,(n-1)}\times$$

$$\times R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)}\left(I_m+(b-z)\frac{w^*_{2,n}}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}\right)+\Big(I_m-(b-z)v^*_{(n-1)}\times$$

$$\times R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}\Big)(z-a)\frac{\hat{v}^*_n}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}=$$

$$=\gamma_{(n-1)}(z)+\hat{\gamma}_n(z)+(b-z)(z-a)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})K^{-1}_{2,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)\times$$

$$\times v_{(n-1)}\frac{w^*_{2,n}}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}-(z-a)(b-z)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)\times$$

$$\times u_{1,(n-1)}\frac{\hat{v}^*_n}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}=\gamma_{(n-1)}(z)+\hat{\gamma}_n(z)+(b-z)(z-a)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})\times$$

$$\times\frac{\bar{z}_0-a}{a-b}\Big(K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}-K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\Big)\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{(z_0-b)(\bar{z}_0-z)}-(z-a)(b-z)\times$$

$$\times v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})\frac{\bar{z}_0-b}{b-a}\Big(-R^*_{T,(n-1)}(b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}-$$

$$-\frac{b-a}{\bar{z}_0-b}\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}I_m}{(\bar{z}_0-b)^n}\\ \vdots\\ \frac{I_m}{\bar{z}_0-b}\end{pmatrix}+\frac{\bar{z}_0-a}{\bar{z}_0-b}K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\Bigg)\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{(z_0-b)(\bar{z}_0-z)}.$$

Здесь мы воспользовались равенствами (11) и (12). Далее имеем

$$X_{21}=\gamma_{(n-1)}(z)+\hat{\gamma}_n(z)-(z-a)(z-b)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}I_m}{(\bar{z}_0-b)^n}\\ \vdots\\ \frac{I_m}{\bar{z}_0-b}\end{pmatrix}\hat{K}^{-1}_{2,n}\times$$

$$\times\frac{\hat{v}_n}{(z_0-b)(\bar{z}_0-z)}+\frac{(b-z)(z-a)}{a-b}v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})\times$$

$$\times\left(-(\bar{z}_0-a)K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}+(\bar{z}_0-a)K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\right)\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{(z_0-b)(\bar{z}_0-z)}+$$

$$+\frac{(b-z)(z-a)}{a-b}v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})R^*_{T,(n-1)}(b)\times$$

$$\times\Big((\bar z_0-a)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(b)-(\bar z_0-b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)\Big)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\hat K^{-1}_{2,n}\frac{\hat v_n}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}=$$

$$=\gamma_{(n-1)}(z)+\hat\gamma_n(z)-(z-a)(z-b)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}I_m}{(\bar z_0-b)^n}\\ \vdots\\ \frac{I_m}{\bar z_0-b}\end{pmatrix}\hat K^{-1}_{2,n}\times$$

$$\times\frac{\hat v_n}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}+(z-b)(z-a)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)R^*_{T,(n-1)}(b)\times$$

$$\times R^{-1^*}_{T,(n-1)}(z_0)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\hat K^{-1}_{2,n}\frac{\hat v_n}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}.$$

Последнее равенство получено из

$$(\bar z_0-a)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(b)-(\bar z_0-b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)=(b-a)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(z_0).$$

Из (21) имеем

$$X_{21}=\gamma_{(n-1)}(z)+\hat\gamma_n(z)+(z-a)(z-b)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)\begin{pmatrix}\frac{(-1)^nI_m}{(\bar z_0-z)^{n+1}}\\ \vdots\\ \frac{-I_m}{(\bar z_0-z)^2}\end{pmatrix}\hat K^{-1}_{2,n}\times$$

$$\times\frac{\hat v_n}{z_0-b}+(z-b)(z-a)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)R^*_{T,(n-1)}(b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(z_0)K^{-1}_{2,(n-1)}\times$$

$$\times B_{2,(n)}\hat K^{-1}_{2,n}\frac{\hat v_n}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}.$$

Отсюда и из (24) следует равенство (18).

Докажем равенство (19). Имеем

$$\delta_{(n)}(z)=I_m-(b-z)v^*_{(n)}R^*_{T,(n)}(\bar z)K^{-1}_{1,(n)}R_{T,(n)}(b)u_{1,(n)}=$$

$$=I_m-(b-z)\begin{pmatrix}v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b) & \frac{\hat v^*_n}{\bar z_0-b}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}I_{nm} & K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\\ 0_{m\times nm} & I_m\end{bmatrix}\times$$

$$\times\left[\begin{array}{c|c} R^{-1^*}_{T,(n-1)}(b)R^*_{T,(n-1)}(\bar z) & \begin{matrix}\frac{(-1)^n(z-b)}{(\bar z_0-z)^{n+1}}I_m\\ \vdots\\ \frac{-(z-b)}{(\bar z_0-z)^2}I_m\end{matrix}\\ \hline 0_{m\times nm} & \frac{\bar z_0-b}{\bar z_0-z}I_m\end{array}\right]\begin{bmatrix}K^{-1}_{1,(n-1)} & -K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\hat K^{-1}_{1,n}\\ 0_{m\times nm} & \hat K^{-1}_{1,n}\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}\\ \frac{w_{1,n}}{z_0-b}\end{bmatrix}=I_m-(b-z)\times$$

$$\times\Bigg(v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\quad v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)\begin{bmatrix}\frac{(-1)^n(z-b)}{(\bar z_0-z)^{n+1}}I_m\\ \vdots\\ \frac{-(z-b)}{(\bar z_0-z)^2}I_m\end{bmatrix}+$$

$$+v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\frac{\bar z_0-b}{\bar z_0-z}+\frac{\hat v^*_n}{\bar z_0-z}\Big)\times$$

$$\times\begin{bmatrix} K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}-K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}\\ \hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}\end{bmatrix}=\delta_{(n-1)}(z)-$$

$$-(b-z)\frac{\hat v^*_n}{\bar z_0-z}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}-(b-z)v^*_{(n-1)}\Big(-R^*_{T,(n-1)}(\bar z)K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}+$$

$$+R^*_{T,(n-1)}(b)\begin{bmatrix}\frac{(-1)^n(z-b)}{(\bar z_0-z)^{n+1}}I_m\\ \vdots\\ \frac{-(z-b)}{(\bar z_0-z)^2}I_m\end{bmatrix}+R^*_{T,(n-1)}(b)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\frac{\bar z_0-b}{\bar z_0-z}\Big)\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}.$$

Из (21) получим

$$\delta_{(n)}(z)=\delta_{(n-1)}(z)-(b-z)\frac{\hat v^*_n}{\bar z_0-z}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}-(b-z)v^*_{(n-1)}\Big(-R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\times$$

$$\times K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}-R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\frac{z-b}{\bar z_0-z}\begin{bmatrix}\frac{(-1)^{n-1}}{(\bar z_0-b)^n}I_m\\ \vdots\\ \frac{1}{(\bar z_0-b)}I_m\end{bmatrix}+$$

$$+R^*_{T,(n-1)}(b)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\frac{\bar z_0-b}{\bar z_0-z}\Big)\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}. \qquad (25)$$

Вычислим теперь правую часть равенства (19). Имеем

$$X_{22}=\gamma_{(n-1)}(z)\hat\beta_n(z)+\delta_{(n-1)}(z)\hat\delta_n(z)=-(z-a)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)K^{-1}_{2,(n-1)}\times$$

$$\times R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)}(b-z)\frac{w^*_{1,n}}{\bar z_0-z}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}+\Big(I_m-(b-z)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\times$$

$$\times K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}\Big)\Big(I_m-(b-z)\frac{\hat v^*_n}{\bar z_0-z}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}\Big)=$$

$$=\delta_{(n-1)}(z)-(z-a)(b-z)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)K^{-1}_{2,(n-1)}\times$$

$$\times R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)}\frac{w^*_{1,n}}{\bar z_0-z}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}+(b-z)^2v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\times$$

$$\times K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}\frac{\hat v^*_n}{\bar z_0-z}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}-(b-z)\frac{\hat v^*_n}{\bar z_0-z}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}=$$

$$=\delta_{(n-1)}(z)-(z-a)(b-z)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\Big(K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}-K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\Big)\times$$

$$\times\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}\frac{\bar z_0-b}{b-a}+(b-z)^2v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\times$$

$$\times\left(-R^*_{T,(n-1)}(b)R^{-1*}_{T,(n-1)}(a)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}-\frac{b-a}{\bar z_0-b}\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}I_m}{(\bar z_0-b)^n}\\ \vdots\\ \frac{I_m}{\bar z_0-b}\end{pmatrix}+\right.$$

$$\left.+\frac{\bar z_0-a}{\bar z_0-b}K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\right)\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}\frac{\bar z_0-b}{b-a}-(b-z)\frac{\hat v^*_n}{\bar z_0-z}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}.$$

Последнее равенство получено с использованием (11) и (12). Далее имеем

$$X_{22} = \delta_{(n-1)}(z) - (b-z)^2 v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(\bar z) \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1} I_m}{(\bar z_0 - b)^n} \\ \vdots \\ \frac{I_m}{\bar z_0 - b} \end{pmatrix} \hat K^{-1}_{1,n} \frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0 - z)} +$$

$$+ (b-z) v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(\bar z) \left((z-a)(\bar z_0 - b) + (b-z)(\bar z_0 - a)\right) K^{-1}_{1,(n-1)} B_{1,(n)} \hat K^{-1}_{1,n} \times$$

$$\times \frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0 - z)(b-a)} - (b-z) v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(\bar z) R^*_{T,(n-1)}(b) \Big((z-a) R^{-1*}_{T,(n-1)}(b) +$$

$$+ (b-z) R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)\Big) \frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0 - z)} \frac{\bar z_0 - b}{b-a} - (b-z) \frac{\hat v^*_n}{\bar z_0 - z} \hat K^{-1}_{1,n} \frac{w_{1,n}}{z_0 - b}.$$

Из

$$(z-a) R^{-1*}_{T,(n-1)}(b) + (b-z) R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a) = (b-a) R^{-1^*}_{T,(n-1)}(\bar z)$$

получим

$$X_{22} = \delta_{(n-1)}(z) - (b-z)^2 v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(\bar z) \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1} I_m}{(\bar z_0 - b)^n} \\ \vdots \\ \frac{I_m}{\bar z_0 - b} \end{pmatrix} \hat K^{-1}_{1,n} \times$$

$$\times \frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0 - z)} + (b-z) v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(\bar z) K^{-1}_{1,(n-1)} B_{1,(n)} \hat K^{-1}_{1,n} \frac{w_{1,n}}{z_0 - b} -$$

$$- (b-z) v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) K^{-1}_{2,(n-1)} B_{2,(n)} \hat K^{-1}_{1,n} \frac{(\bar z_0 - b) w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0 - z)} -$$

$$- (b-z) \frac{\hat v^*_n}{\bar z_0 - z} \hat K^{-1}_{1,n} \frac{w_{1,n}}{z_0 - b}.$$

Отсюда и из (25) следует (19). Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 непосредственно следует

Теорема 4. *Резольвентная матрица $U_{(n)}(z)$ вполне неопределенной задачи Каратеодори (1) допускает мультипликативное представление*

$$U_{(n)}(z) = b_0(z) \times b_1(z) \times \cdots \times b_n(z). \tag{26}$$

2. Обобщенные параметры Шура.

Из равенства (13)

$$\frac{b-a}{\bar z_0 - b} \hat v_p w^*_{1,p} = (z_0 - a) \hat K_{1,p} + (z_0 - b) \hat K_{2,p} > 0_m$$

следует обратимость матриц $\hat v_p$.

Определение 6. *Обобщенными параметрами Шура для вполне неопределенной задачи Каратеодори (1) называются матрицы*

$$\hat s_0 = s_0, \ \hat s_p = \frac{z_0 - b}{b-a} \hat v_p^{-1} \left((\bar z_0 - a) \hat K_{1,p} + (\bar z_0 - b) \hat K_{2,p}\right) \hat v_p^{-1*}, \ p > 0. \tag{27}$$

Здесь $\hat K_{1,p}$, $\hat K_{2,p}$, $\hat v_p$ определяются формулами (7) и (10).

Лемма 1. *Имеют место следующие представления*

$$w_{1,p} = \hat{v}_p \hat{s}_p, \tag{28}$$

$$w_{2,p} = -\frac{z_0 - a}{z_0 - b}\hat{v}_p \hat{s}_p, \tag{29}$$

$$\hat{K}_{1,p} = \hat{v}_p \frac{\hat{s}_p - \hat{s}_p^*}{z_0 - \bar{z}_0}\hat{v}_p^*, \tag{30}$$

$$\hat{K}_{2,p} = \hat{v}_p \frac{-\frac{z_0-a}{z_0-b}\hat{s}_p + \frac{\bar{z}_0-a}{\bar{z}_0-b}\hat{s}_p^*}{z_0 - \bar{z}_0}\hat{v}_p^*. \tag{31}$$

Доказательство. Равенство (28) следует из (13). Отсюда и из равенства $w_{2,p} = -\frac{z_0-a}{z_0-b}w_{1,p}$ получим (29).

Докажем равенство (30). В силу (27), имеем

$$\hat{v}_p \frac{\hat{s}_p - \hat{s}_p^*}{z_0 - \bar{z}_0}\hat{v}_p^* = \frac{1}{(z_0 - \bar{z}_0)(b-a)}\Big[(z_0 - b)\Big((\bar{z}_0 - a)\hat{K}_{1,p} + (\bar{z}_0 - b)\hat{K}_{2,p}\Big) -$$

$$-(\bar{z}_0 - b)\Big((z_0 - a)\hat{K}_{1,p} + (z_0 - b)\hat{K}_{2,p}\Big)\Big] = \frac{1}{(z_0 - \bar{z}_0)(b-a)}\times$$

$$\times\left[(z_0 - b)(\bar{z}_0 - a) - (\bar{z}_0 - b)(z_0 - a)\right]\hat{K}_{1,p} = \hat{K}_{1,p}.$$

Докажем равенство (31). Из (27) получим

$$\hat{v}_p \frac{-\frac{z_0-a}{z_0-b}\hat{s}_p + \frac{\bar{z}_0-a}{\bar{z}_0-b}\hat{s}_p^*}{z_0 - \bar{z}_0}\hat{v}_p^* = \frac{1}{(z_0 - \bar{z}_0)(b-a)}\Big[-\frac{z_0 - a}{z_0 - b}(z_0 - b)\Big((\bar{z}_0 - a)\hat{K}_{1,p}+$$

$$+\ (\bar{z}_0 - b)\hat{K}_{2,p}\Big) + \frac{\bar{z}_0 - a}{\bar{z}_0 - b}(\bar{z}_0 - b)\Big((z_0 - a)\hat{K}_{1,p} + (z_0 - b)\hat{K}_{2,p}\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{(z_0 - \bar{z}_0)(b-a)}\left[-(z_0 - a)(\bar{z}_0 - b) + (\bar{z}_0 - a)(z_0 - b)\right]\hat{K}_{2,p} = \hat{K}_{2,p}.$$

Лемма 1 доказана.

Теорема 5. *Множители Бляшке–Потапова (14) представимы в виде*

$$b_p(z) = \left[\begin{array}{c|c} I_m - \frac{(b-z)(\bar{z}_0-a)(z_0-\bar{z}_0)}{|z_0-b|^2(\bar{z}_0-z)}\hat{s}_p^*\left(-\frac{z_0-a}{z_0-b}\hat{s}_p + \frac{\bar{z}_0-a}{\bar{z}_0-b}\hat{s}_p^*\right)^{-1} & -\frac{(b-z)(z_0-\bar{z}_0)}{(\bar{z}_0-z)(z_0-b)}\hat{s}_p^*\left(\hat{s}_p - \hat{s}_p^*\right)^{-1}\hat{s}_p \\ \hline \frac{(z-a)(z_0-\bar{z}_0)}{(\bar{z}_0-z)(z_0-b)}\left(-\frac{z_0-a}{z_0-b}\hat{s}_p + \frac{\bar{z}_0-a}{\bar{z}_0-b}\hat{s}_p^*\right)^{-1} & I_m - \frac{(b-z)(z_0-\bar{z}_0)}{(\bar{z}_0-z)(z_0-b)}\left(\hat{s}_p - \hat{s}_p^*\right)^{-1}\hat{s}_p \end{array}\right], \tag{32}$$

здесь $\hat{s}_p$ *– обобщенные параметры Шура (27).*

Теорема 5 получается прямой подстановкой формул (28)–(31) в равенство (14).

3. Пошаговый процесс Шура.

Теорема 6. *Пусть дана вполне неопределенная задача Каратеодори (1) и множители Бляшке-Потапова b_p $(0 \le p \le n)$ определены формулой (14). Тогда множество всех решений $\mathcal{L}_n$ описывается суперпозиций дробно-линейных преобразований*

$$s(z) = b_0(z)\left\{\cdots b_{n-1}(z)\left\{b_n(z)\left\{\left[\begin{array}{c} p(z) \\ q(z) \end{array}\right]\right\}\right\}\cdots\right\}, \qquad \left[\begin{array}{c} p(z) \\ q(z) \end{array}\right] \in \mathcal{S}_\infty[a,\ b].$$

Здесь

$$b_p(z)\left\{\left[\begin{array}{c} p(z) \\ q(z) \end{array}\right]\right\} := \Big[\hat{\alpha}_p(z)p(z) + \hat{\beta}_p(z)q(z)\Big]\Big[\hat{\gamma}_p(z)p(z) + \hat{\delta}_p(z)q(z)\Big]^{-1}, \quad (33)$$

а $\hat{\alpha}_p$, $\hat{\beta}_p$, $\hat{\gamma}_p$, $\hat{\delta}_p$ определены в (14).

Доказательство. При $p = 0$ корректность дробно-линейного преобразования (33) следует из равенства $b_0(z) = U_0(z)$ и теоремы 1. Из формулы (32) следует, что все множители Бляшке–Потапова $b_p(z)$ имеют структуру аналогичную структуре резольвентной матрицы $U_0(z)$. Таким образом, преобразование (33) определено корректно для всех $p \ge 0$. В частности, определены дробно-линейные преобразования над парой $\mathrm{col}[s(z),\ I_m] \in \mathcal{S}_\infty[a,\ b]$, здесь $s(z) \in \mathcal{S}[a,\ b]$, которые обозначим

$$b_p(z)\{s(z)\} := b_p(z)\left\{\left[\begin{array}{c} s(z) \\ I_m \end{array}\right]\right\}.$$

Таким образом, корректно определена суперпозиция дробно-линейных преобразований

$$b_0(z)\left\{\cdots b_{p-1}(z)\left\{b_p(z)\left\{\left[\begin{array}{c} p(z) \\ q(z) \end{array}\right]\right\}\right\}\cdots\right\}$$

для $\mathrm{col}[p(z),\ q(z)] \in \mathcal{S}_\infty[a,\ b]$, $p \ge 0$. Эта суперпозиция является дробно-линейным преобразованием, матрица которого равна произведению

$$b_0(z) \times b_1(z) \times \cdots \times b_n(z).$$

Далее имеем

$$b_0(z)\left\{\cdots b_{n-1}(z)\left\{b_n(z)\left\{\left[\begin{array}{c} p(z) \\ q(z) \end{array}\right]\right\}\right\}\cdots\right\} =$$
$$= (b_0(z) \times b_1(z) \times \cdots \times b_n(z))\left\{\left[\begin{array}{c} p(z) \\ q(z) \end{array}\right]\right\} = U_{(n)}(z)\left\{\left[\begin{array}{c} p(z) \\ q(z) \end{array}\right]\right\} = s(z).$$

Здесь второе равенство следует из (26), а третье – из (5).

Теорема 6 доказана.

Список литературы

1. Schur I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind / Schur I. // J. reine u. angew. Math., 1917. – Vol. 147. – P. 205-232.

2. Schur I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind / Schur I. // J. reine u. angew. Math., 1918. – Vol. 148. – P. 122-145.

3. Ковалишина И.В. Метод триады в теории продолжения эрмитово-положительных функций / Ковалишина И.В., Потапов В.П. // Известия Акад. Наук Армян. ССР, 1989. – Т. 23, № 4. – С. 269-292.

4. Ковалишина И.В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач / Ковалишина И.В. // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1983. – Т. 47, № 3. – С. 455–497.

5. Дюкарев Ю.М. Мультипликативные и аддитивные классы Стилтьеса аналитических матриц-функций и связанные с ними интерполяционные задачи / Дюкарев Ю.М., Кацнельсон В.Э. // Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1981. – Вып.36. – С.13-27.

6. Дюкарев Ю.М. Общая схема решения интерполяционных задач в классе Стилтьеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов. 1 / Дюкарев Ю.М. // Математическая физика, анализ, геометрия, 1999. – Т. 6. – № 1/2. – С. 30-54.

7. Дюкарев Ю.М. Мультипликативная структура резольвентных матриц интерполяционных задач в классе Стилтьеса / Дюкарев Ю.М. // Вісник Харківського національного університету, серія «Математика, прикладна математика і механіка», 1999. – № 458. – С. 143-153.

8. Дюкарев Ю.М. Интерполяционная задача в классе $\mathcal{R}[a,\ b]$ / Ю.М. Дюкарев, А.Е. Чоке Риверо // Український математичний журнал, 2003. – Т. 55, № 8. – С. 1044–1057.

9. Дюкарев Ю.М. Задача Неванлинны-Пика в классе $S[a,\ b]$ / Ю.М. Дюкарев, А.Е. Чоке Риверо // Известия высших учебных заведений, математика, 2003. – №2. – С. 36–45.

10. Чоке Риверо А. Е. Задача Каратеодори в классе $S[a,\ b]$ / А.Е. Чоке Риверо // Известия высших учебных заведений, математика, 2006. – №11. – С. 61 – 76.

11. Дюкарев Ю. М. О вполне неопределенности задачи Неванлинны-Пика в классе $\mathcal{S}[a,\ b]$ / Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова // Известия высших учебных заведений, математика, 2007. – № 11. – С. 19–30.

12. Choque Rivero A.E. Multiplicative Structure of the Resolvent Matrix for the Truncated Hausdorff Matrix Moment Problem / A.E. Choque Rivero // Operator Theory: Advanced and Application, 2012. – Vol. 226. – P. 193–210.

13. Серикова И.Ю. Пошаговое решение матричной проблемы моментов на компактном интервале. 1 / И.Ю. Серикова // Вісник Харківського національного університету, серія «Математика, прикладна математика і механіка», 2012. – № 1030. – С. 71–78.

Статья получена: 24.03.2014; окончательный вариант: 3.10.2014; принята: 20.10.2014.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.948 № 1133, 2014, с.95–102

О функциональной модели ограниченного оператора

О. В. Розуменко

Харьковский национальный университет,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина.
ovrozumenko@gmail.com

Для функциональной модели ограниченного недиссипативного оператора, которая реализуется оператором умножения на независимую переменную в специальном гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых с некоторым весом функций, найден конкретный вид соответствующего веса.
Ключевые слова: функциональная модель, недиссипативный оператор.

Розуменко О. В., **Про функціональну модель обмеженого оператору.** Для функціональної моделі обмеженого недисипативного оператора, яка реалізується оператором множення на незалежну змінну в спеціальному гільбертовому просторі квадратично інтегровних з деякою вагою функцій, знайдено конкретний вигляд відповідної ваги.
Ключові слова: функціональна модель, недисипативний оператор.

O. V. Rozumenko, **On functional model of a bounded operator.** For the functional model of a bounded non-dissipative operator that is realized by the operator of multiplication by an independent variable in the special Hilbert space of quadratically integrable functions, the concrete form of the corresponding weight is obtained.
Keywords: functional model, non-dissipative operator.

2000 Mathematics Subject Classification: 47A40.

Функциональные модели уже более полувека играют важную роль в теории операторов и являются естественными аналогами спектральных разложений в несамосопряжённом (неунитарном) случае. Эти модельные реализации изометрий хорошо изучены для диссипативных (сжимающих) операторов [1, 4]. Для операторов, не принадлежащих этому классу (недиссипативных или несжимающих) аналогичные построения были осуществлены в [1, 2]. Данная работа является продолжением исследований, начатых в статье [2], найден конкретный вид веса соответствующего модельного пространства и модельных реализаций.

I. Совокупность гильбертовых пространств H, E, и операторов $A \in [H,H]$, $\varphi \in [H,E]$, $J \in [E,E]$, где J — инволюция, $J = J^* = J^{-1}$, называется [1] локальным узлом

$$\Delta = (A, H, \varphi, E, J), \tag{1}$$

если выполняется условие

$$A - A^* = i\varphi^* J\varphi. \tag{2}$$

Оператор-функция $Z_t \in [H,H]$ аргумента $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ называется полугруппой [4], если

$$Z_0 = I, \quad Z_{t+s} = Z_t \cdot Z_s.$$

Если Z_t непрерывна в равномерной топологии H, то $Z_t = \exp(itA)$, где $A \in [H,H]$ — инфинитезимальный оператор полугруппы Z_t [4] задается формулой

$$iA = s - \lim_{t\to 0} \frac{Z_t - I}{t}.$$

Полугруппа U_t, действующая в пространстве $\mathcal{H}$, называется дилатацией полугруппы Z_t в H [3], если

$$\mathcal{H} \supseteq H; \quad Z_t = P_H U_t|_H \quad (t \geq 0), \tag{3}$$

где P_H — ортопроектор на H. Дилатация U_t называется унитарной [3], если U_t унитарна при каждом $t \in \mathbb{R}_+$. Дилатация U_t в $\mathcal{H}$ полугруппы Z_t в H называется минимальной [3], если

$$\mathcal{H} = span\{U_t h : h \in H, t \in \mathbb{R}\}.$$

Обозначим через $\mathcal{M}$ линейную оболочку вектор-функций вида

$$f(\xi) = (u_+(\xi), h, u_-(\xi)), \tag{4}$$

где $u_\pm(\xi)$ — вектор-функции из E такие, что $\operatorname{supp} u_\pm(\xi) \in \mathbb{R}_\mp$, а $h \in H$. Зададим на $\mathcal{M}$ норму

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{0} \|u_+(\xi)\|_E^2 d\xi + \|h\|^2 + \int_{0}^{\infty} \|u_-(\xi)\|_E^2 d\xi < \infty. \tag{5}$$

Замыкание многообразия $\mathcal{M}$ в этой метрике и образует гильбертово пространство, которое мы обозначим через $\mathcal{H}$. Зададим [1] в пространстве $\mathcal{H}$ полугруппу U_t, –

$$(U_t f)(\xi) = f_t(\xi) = (u_+(t,\xi), h_t, u_-(t,\xi)), \quad (t \geq 0). \tag{6}$$

Вектор-функция $u_-(t,\xi)$ имеет вид:

$$u_-(t,\xi) = P_{\mathbb{R}_+} u_-(\xi + t). \tag{7}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{d\xi} y_t(\xi) + Ay_t(\xi) = \varphi^* J P_{(-t,0)} u_-(\xi + t); & \xi \in (-t, 0); \\ y_t(-t) = h; \end{cases} \tag{8}$$

и положим $h_t = y_t(0)$. Наконец,

$$u_+(t,\xi) = u_+(\xi + t) + P_{(-t,0)}\{u_-(\xi + t) - i\varphi y_t(\xi)\}, \tag{9}$$

где $y_t(\xi)$ — решение задачи Коши (8). Введем метрику

$$\langle f(\xi)\rangle_J^2 = \int\limits_{\mathbb{R}_-} \langle Ju_+(\xi), u_+(\xi)\rangle_E \, d\xi + \|h\|^2 + \int\limits_{\mathbb{R}_+} \langle Ju_-(\xi), u_-(\xi)\rangle_E \, d\xi. \tag{10}$$

Полугруппа U_t называется J-унитарной [1], если U_t унитарна в J-метрике (10), то есть

$$U_t^* J U_t = J, \quad U_t J U_t^* = J. \tag{11}$$

Теорема 1. [2] *Полугруппа $Z_t = \exp(itA)$ в H, где A — ограниченный оператор в H, обладает J-унитарной дилатацией U_t (6) в $\mathcal{H}$.*

II. Подпространства D_+ и D_- в $\mathcal{H}$ называются [6] уходящим и приходящим подпространствами группы U_t в $\mathcal{H}$ в смысле П. Лакса и Р. Филлипса, если $D_- \perp D_+$ и

$$\begin{array}{ll} U_t D_+ \subset D_+ & (\forall t \in \mathbb{R}_+); \\ U_{-t} D_- \subset D_- & (\forall t \in \mathbb{R}_+). \end{array} \tag{12}$$

Отметим, что подпространства

$$D_+ = \{f(\xi) = (u_+(\xi), 0, 0) \in \mathcal{H}\}; \quad D_- = \{f(\xi) = (0, 0, u_-(\xi)) \in \mathcal{H}\}$$

являются уходящим и приходящим подпространствами для U_t, кроме того имеет место

$$\mathcal{H} = D_+ \oplus H \oplus D_-. \tag{13}$$

Зададим в гильбертовом пространстве

$$L^2_{\mathbb{R}}(E) = \left\{ g(\xi) \in E : \xi \in \mathbb{R} : \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|g(\xi)\|_E^2 d\xi < \infty \right\} \tag{14}$$

свободную [5] унитарную группу сдвигов

$$(V_t g)(\xi) = g(\xi + t). \tag{15}$$

Определим [5] волновые операторы $W_{\mp}$,

$$W_{\mp} = s - \lim_{t\to\pm\infty} U_t P_{D_{\mp}} V_{-t}. \tag{16}$$

Как известно [3], для равномерно непрерывной полугруппы U_t имеет место оценка $\|U_t\| \le e^{\beta t}$, где $\beta \ge 0$.

Определим гильбертово пространство

$$L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^-\right) = \left\{ g(\xi)\in E : \xi\in\mathbb{R}; \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-2\alpha^-\xi}\,\|g(\xi)\|^2_E\,d\xi + \int\limits_{0}^{\infty}\|g(\xi)\|^2_E d\xi < \infty \right\}, \tag{17$_-$}$$

где $\alpha^- > \beta$. Если $\alpha^- > \beta > 0$, то для функций $g(\xi)$ из $L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^-\right)$ предел $W_- g(\xi)$ (16) существует [2].

Предел $W_+ g(\xi)$ существует [2], если $g(\xi)\in L^2_{\mathbb{R}}(E,\alpha^+)$, где

$$L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^+\right) = \left\{ g(\xi)\in E : \xi\in\mathbb{R}; \int\limits_{0}^{\infty} e^{-2\alpha^+\xi}\,\|g(\xi)\|^2_E\,d\xi + \int\limits_{-\infty}^{0}\|g(\xi)\|^2_E d\xi < \infty \right\}, \tag{17$_+$}$$

$\alpha^+ > \beta' > 0$, причем $\|U_{-t}\| \le e^{\beta' t}$.

Оператор рассеяния S определим [5, 6] следующим образом:

$$S = W_+^* W_- \quad \left(L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^-\right) \to L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^+\right)\right). \tag{18}$$

Рассмотрим отображение B_p из $L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^-\right)+L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^+\right)$ в пространство $\mathcal{H}$, задаваемое формулой

$$B_p f = B_p \begin{pmatrix} f_- \\ f_+ \end{pmatrix} = W_- f_- + W_+ f_+, \tag{19}$$

где $f_+ \in L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^+\right)$, $f_- \in L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^-\right)$. Прообразы подпространств D_- и D_+ (12) при отображении B_p (19) имеют вид

$$\widehat{D}_-(E) = \begin{pmatrix} L^2_{\mathbb{R}_+}(E) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{D}_+(E) = \begin{pmatrix} 0 \\ L^2_{\mathbb{R}_-}(E) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

в силу (16). Очевидно, что

$$\|B_p f\|^2_{\mathcal{H}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\langle \begin{bmatrix} W_-^* W_- & W_-^* W_+ \\ W_+^* W_- & W_+^* W_+ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_-(\xi) \\ f_+(\xi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_-(\xi) \\ f_+(\xi) \end{pmatrix} \right\rangle_{E\oplus E} d\xi, \tag{20}$$

поэтому естественно определить гильбертово пространство

$$\begin{aligned} L^2_\alpha(W) = \Bigg\{ f(\xi) = \begin{pmatrix} f_-(\xi) \\ f_+(\xi) \end{pmatrix} &: f_-(\xi)\in L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^-\right), \\ f_+(\xi)\in L^2_{\mathbb{R}}(E,\alpha^+); &\int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle Wf(\xi), f(\xi)\rangle_{E\oplus E} d\xi < \infty \Bigg\}, \end{aligned} \tag{21}$$

где W, в силу (20), имеет вид

$$W = \begin{bmatrix} W_-^* W_- & W_-^* W_+ \\ W_+^* W_- & W_+^* W_+ \end{bmatrix}. \tag{22}$$

В формуле (22) оператор W можно записать в виде

$$W = \begin{bmatrix} I & S^* \\ S & I \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} W_-^* Q^- W_- - Q_E^- & W_-^* Q^- W_+ - S^* Q_E^- \\ W_+^* Q^- W_- - Q_E^- S & W_+^* Q^- W_+ - Q_E^-, \end{bmatrix}, \tag{23}$$

где $2Q^\pm = I \pm J$ — ортопроекторы в E. В случае сжатия Z_t ($Q^- = Q_E^- = 0$) оператор W имеет традиционный [1] вид

$$W = \begin{bmatrix} I & S^* \\ S & I \end{bmatrix}.$$

Дилатация U_t в пространстве $L^2_\alpha(W)$ (21) действует трансляционным образом [2]:

$$\widehat{U}_t f(\xi) = f(\xi + t). \tag{24}$$

Очевидно, что в силу структуры пространства дилатации $\mathcal{H}$ и вида $\widehat{D}_-(E)$, $\widehat{D}_+(E)$ (19) в пространстве $L^2_\alpha(W)$ (21) исходное пространство H изоморфно

$$\widehat{H}_p = L^2_\alpha(W) \ominus \begin{pmatrix} L^2_{\mathbb{R}_+}(E) \\ L^2_{\mathbb{R}_-}(E) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

а действие полугруппы Z_t преобразуется в полугруппу сдвигов

$$\widehat{Z}_t f(\xi) = P_{\widehat{H}_p} f(\xi + t), \tag{26}$$

где $f(\xi) \in \widehat{H}_p$ (25).

Теорема 2. [2] *Минимальная J-унитарная дилатация U_t (6) в $\mathcal{H}$ полугруппы $Z_t = \exp\{itA\}$ в H, где A — вполне-несамосопряжённый оператор, унитарно эквивалентна группе трансляций $\widehat{U}_t$ (24) в пространстве $L^2_\alpha(W)$ (21), а полугруппа Z_t эквивалентна, соответственно, полугруппе сдвигов $\widehat{Z}_t$ (26) в пространстве $\widehat{H}_p$ (25).*

III. Рассмотрим преобразование Фурье

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f(\xi) d\xi \tag{27}$$

Справедлива следующая теорема [2].

Теорема 3. *Преобразование Фурье (27) действие оператора W (23) переводит в оператор умножения на оператор-функцию $\widetilde{W}(\lambda)$:*

$$\widetilde{Wg}(\xi) = \widetilde{W}(\lambda) \tilde{g}(\lambda), \tag{28}$$

где $g(\xi) \in L^2_\alpha(W)$, $\tilde{g}(\lambda) \in H^2_{(0,\alpha^-)}(E) + H^2_{(-\alpha^+,0)}(E)$. *Оператор-функция* $\widetilde{W}(\lambda)$ *при этом имеет вид*

$$\widetilde{W}(\lambda) = \begin{bmatrix} I & S^*_\Delta(\lambda) \\ S_\Delta(\lambda) & I \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \widetilde{W}_{11} & \widetilde{W}_{12} \\ \widetilde{W}_{21} & \widetilde{W}_{22} \end{bmatrix}, \tag{29}$$

где

$$\widetilde{W}_{11} = \left\{S^*_\Delta(\lambda)Q^-_E P_+ S_\Delta(\lambda) - Q^-_E\right\} P_+;$$

$$\widetilde{W}_{12} = \left\{S^*_\Delta(\lambda)P_- Q^-_E - Q^-_E P_- S^*_\Delta(\lambda)\right\} J_E;$$

$$\widetilde{W}_{21} = J_E\left\{Q^-_E P_- S_\Delta(\lambda) - S_\Delta(\lambda)P_- Q^-_E\right\};$$

$$\widetilde{W}_{22} = J_E\left\{S_\Delta(\lambda)Q^-_E P_- S^*_\Delta(\lambda) - Q^-_E\right\} J_E P_-;$$

$S_\Delta(\lambda)$ — *характеристическая функция узла* Δ, P_+ *и* P_- — *ортопроекторы на подпространства Харди, отвечающие верхней и нижней полуплоскости относительно соответствующей полосы, и, наконец,* $Q^-_E = \dfrac{1}{2}(I - J_E)$ — *ортопроектор.*

Очевидно, что преобразование Фурье (27) отображает гильбертово пространство $L^2_\alpha(W)$ (21) в пространство

$$\begin{gathered} H^2_\alpha(W) = \left\{ f(\lambda) = \begin{pmatrix} f_-(\lambda) \\ f_+(\lambda) \end{pmatrix} : f_-(\lambda) \in H^2_{(0,\alpha^-)}(E), \right. \\ \left. f_+(\lambda) \in H^2_{(-\alpha^+,0)}(E); \int\limits_0^{2\pi} \langle \widetilde{W}(\lambda) f(\lambda), f(\lambda)\rangle d\lambda < \infty \right\}, \end{gathered} \tag{30}$$

где $\widetilde{W}(\lambda)$ имеет вид (29). Дилатация U_t в пространстве $H^2_\alpha(W)$ (30) будет иметь вид

$$\widetilde{U}_t f(\lambda) = e^{i\lambda t} f(\lambda). \tag{31}$$

Пространство $\widehat{H}_p$ (25) в этом случае будет иметь вид

$$\widetilde{H}_p = H^2_\alpha(W) \ominus \begin{bmatrix} H^2_-(E) \\ H^2_+(E) \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Наконец, полугруппа Z_t и оператор A в модельном пространстве $\widetilde{H}_p$ (32) будут задаваться формулами

$$\widetilde{Z}_t f(\lambda) = P_{\widetilde{H}_p} e^{i\lambda t} f(\lambda); \quad \widetilde{A} f(\lambda) = P_{\widetilde{H}_p} \lambda f(\lambda). \tag{33}$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 4. [2] *Минимальная* J*-унитарная дилатация* U_t *полугруппы* $Z_t = \exp(itA)$, *где* A *вполне несамосопряжен, унитарно эквивалентна функциональной модели* $\widetilde{U}_t$ *(31) в пространстве* $H^2_\alpha(W)$ *(30), а* Z_t *эквивалентна*

$\widetilde{Z}_t$ (33) в пространстве $\widetilde{H}_p$ (32) и, наконец, A эквивалентен $\widetilde{A}$ (33), соответственно, в $\widetilde{H}_p$ (32), где $S_\Delta(\lambda) = I - i\varphi(A-\lambda I)^{-1}\varphi^* J$ — характеристическая функция узла Δ.

IV. Рассмотрим случай $\dim E = 2$, $J_E = J_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Пусть

$$S_\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$T_1 = \begin{pmatrix} s_{12} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{pmatrix}; \quad T_2 = \begin{pmatrix} s_{21} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда нетрудно видеть, что

$$\widetilde{W}_{11} = T_2^* P_+ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} T_2 P_+ - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_- \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{W}_{12} = P_- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} T_1^* - T_1^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_-;$$

$$\widetilde{W}_{21} = T_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_- - P_- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \tag{34}$$

$$\widetilde{W}_{22} = T_1 P_- \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} T_2 P_+ - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае найден явный вид элементов $\widetilde{W}_{ik}$. Использование теоремы 4 приводит к утверждению.

Теорема 5. *При $\dim E = 2$ и $J_E = J_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ оператор-функция $\widetilde{W}(\lambda)$ имеет вид (29), W_{ik} задаются формулами (34);*

$$S_\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

— характеристическая функция узла Δ,

$$T_1 = \begin{pmatrix} s_{12} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{pmatrix}; \quad T_2 = \begin{pmatrix} s_{21} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{pmatrix};$$

P_+ и P_- — ортопроекторы на подпространства Харди, отвечающие верхней и нижней полуплоскости относительно соответствующей полосы, и, наконец, $Q_E^- = \dfrac{1}{2}(I - J_E)$ — ортопроектор. Модельные реализации A и Z_t в этом случае имеют вид (33).

ЛИТЕРАТУРА

1. Золотарев В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. Харьков: Изд. ХНУ, 2003. — 342 с.

2. Золотарев В. А., Розуменко О. В. Функциональная модель Павлова ограниченного несамосопряженного оператора. // Харьков: Вісник Харківського національного університету, серія «Математика, прикладна математика і механіка», 2006. — **749**. — С. 30–49.

3. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. — 464 с.

4. Рисс Ф., Надь Б. С. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. — 587 с.

5. Адамян В. М., Аров Д. З. Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов. // Кишинев: Математические исследования, 1966. — Т. 1, вып. 2. — С. 3 – 64.

6. Лакс П. Д., Филлипс Р. С. Теория рассеяния. М: Мир, 1971. — 312 с.

Статья получена: 8.05.2014; окончательный вариант: 17.10.2014; принята: 22.10.2014.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.982.22 № 1133, 2014, с.103–113

Stability of unconditional Schauder decompositions in Hilbert spaces

V. A. Marchenko
V.N. Karazin Kharkiv National University,
Svobody Sq., 4, 61022, Kharkiv, Ukraine
vitalii.marchenko@karazin.ua

We obtain the stability theorem for unconditional Schauder decompositions in Hilbert spaces. This result is a generalization of the classical theorem of T. Kato on similarity for sequences of projections in Hilbert spaces to the case of unconditional Schauder decompositions. Also we sharpen one theorem of V.N. Vizitei on the stability of Schauder decompositions in the case of unconditional Schauder decompositions.
Keywords: unconditional Schauder decomposition, projection, isomorphism.

Марченко В. А., **Стійкість безумовних розкладів Шаудера у гільбертових просторах.** Отримано теорему стійкості для безумовних розкладів Шаудера у гільбертових просторах. Цей результат є узагальненням класичної теореми Т. Като про подібність послідовностей проекторів у гільбертових просторах на випадок безумовних розкладів Шаудера. Також ми уточнюємо одну теорему В. Н. Візітея про стійкість розкладів Шаудера у випадку безумовних розкладів Шаудера.
Ключові слова: безумовний розклад Шаудера, проектор, ізоморфізм.

Марченко В. А., **Устойчивость безусловных разложений Шаудера в гильбертовых пространствах.** Получена теорема устойчивости для безусловных разложений Шаудера в гильбертовых пространствах. Этот результат является обобщением классической теоремы Т. Като о подобии последовательностей проекторов в гильбертовых пространствах на случай безусловных разложений Шаудера. Также мы уточняем одну теорему В.Н. Визитея об устойчивости разложений Шаудера.
Ключевые слова: безусловное разложение Шаудера, проектор, изоморфизм.

2000 Mathematics Subject Classification: 47A46, 46B15, 47B40.

1. Introduction

In 1940 came the publication of the work [14], dedicated to the well known S. Banach's problem – basis problem. In this paper an abstract theorem of stability of arbitrary bases in Banach spaces was first obtained. One of the main consequences of this Krein-Milman-Rutman theorem says that, in any Banach space with a basis, a basis may be formed from arbitrary dense set. In the present time this theorem has many generalizations, analogs and applications, see, e.g., [15, 23]. In 1951 N.K. Bari [3] opened the topic of the stability of bases, introduced the term and studied the properties of Riesz basis, and showed, inter alia, that any minimal system, quadratically close to the Riesz basis, is itself a Riesz basis.

The concept of Schauder decomposition (or basis of subspaces) is a natural generalization of the Schauder basis concept and was first introduced in 1950 by M.M. Grinblyum in [10]. In the same year, independently, M.K. Fage in [7, 8] proposed and studied this concept in Hilbert spaces. In 1960 A.S. Marcus generalize some results of N.K. Bari to the case of unconditional Schauder decompositions and, using the results obtained, establish certain conditions under which a dissipative operator has Bari basis of root subspaces, and the union of orthonormal bases from these subspaces forms Riesz basis or Bari basis, see [17].

Nowadays, Schauder decompositions together with Schauder bases are powerful tools of functional analysis and infinite dimensional linear systems theory, see [6, 20, 21, 22, 27]. About Schauder decompositions see, e.g., [15, 24, 4, 9].

Throughout what follows H will denote a Hilbert space with norm $\|\cdot\|$ and a scalar product $\langle\cdot,\cdot\rangle$, and $\mathbb{Z}_+$ will denote a set of nonnegative integers. In 1967 T. Kato published the following result.

Theorem 1 (T. Kato [13]) *Suppose that $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ is a sequence of nonzero selfadjoint projections in H satisfying $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n = I$, $P_nP_m = \delta_n^m P_n$ for $n, m \in \mathbb{Z}_+$, and let $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a sequence of nonzero projections in H, such that $J_nJ_m = \delta_n^m J_n$ for $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Also assume that*

$$\dim P_0 = \dim J_0 = m < \infty, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|P_n(J_n - P_n)x\|^2 \le c^2\|x\|^2 \quad \text{for all } x \in H, \tag{2}$$

where c is a constant satisfying $0 \le c < 1$. Then $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ is similar to $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, that is, there exists an isomorphism S, such that $J_n = S^{-1}P_nS$ for $n \in \mathbb{Z}_+$.

This result gave a new impetus to the development of the spectral theory. It is an effective tool for the analysis of spectral properties of various perturbations of operators in H and even 45 years later retains its relevance. In 1968 C. Clark [5] applied Theorem 1 to the study of spectral properties of relatively bounded perturbations of ordinary differential operators. In 1972 E. Hughes [11] used Theorem 1 in the proof of some perturbation theorems for relative spectral problems. T. Kato in [12] considered the problem of completeness of eigenprojections for slightly nonselfadjoint operators as a perturbation problem for selfadjoint operators and based the solution of this problem on his Theorem 1.

In 2012 J. Adduci and B. Mityagin applied Theorem 1 to the study of eigenfunction expansions of the perturbed harmonic oscillator $L = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + B$, $B = b(x)$, with dense domain in $L_2(\mathbb{R})$ [1], and to the analysis of the perturbation $A = T + B$ of a selfadjoint operator T in a Hilbert space H with discrete spectrum [2]. Just recently, Theorem 1 was applied by B. Mityagin and P. Siegl to the study of the root system of singular perturbations of the harmonic oscillator type operators [18].

The purpose of the present paper is the study of stability of unconditional Schauder decompositions in Hilbert spaces. More precisely, the aim is to generalize Theorem 1, considering unconditional Schauder decompositions instead of orthogonal Schauder decompositions. It was found that the sequence of subspaces, corresponding to mutually disjoint projections, which are close in a certain sense to projections of unconditional Schauder decomposition of given structure, is itself an unconditional Schauder decomposition. As a direct consequence of this result we obtain one stability theorem for Riesz bases of sufficiently general structure in H. Also we sharpen one theorem of V.N. Vizitei on the stability of Schauder decompositions, which was published in [25], in the case of unconditional Schauder decompositions in H.

2. One lemma on unconditional Schauder decompositions in H

Throughout the paper we will use the following definitions.

Definition 1 ([24]) *A sequence $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ of closed nonzero linear subspaces of H is called a Schauder decomposition of H provided each $x \in H$ has a unique, norm convergent expansion $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, where $x_n \in \mathfrak{M}_n$ for $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Definition 2 ([24]) *A Schauder decomposition $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ of H is called 2-Besselian provided the convergence of $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ in H, where $x_n \in \mathfrak{M}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, implies the convergence of $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2$.*

Definition 3 ([24]) *A pair of sequences $(\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}, \{P_n\}_{n=0}^{\infty})$, where $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ is a sequence of closed nonzero linear subspaces of H and $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ is a sequence of bounded linear projections satisfying $P_n H = \mathfrak{M}_n$ for all n, will be called a generalized biorthogonal system provided it satisfies $P_i P_j = \delta_i^j P_i$ for $i, j \in \mathbb{Z}_+$. The generalized biorthogonal system $(\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}, \{P_n\}_{n=0}^{\infty})$ is said to be H-complete, if $\overline{Lin}\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty} = H$.*

Definition 4 ([24]) *A sequence of nonzero subspaces of H is said to be ω-linearly independent, if the relations $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = 0$, $x_n \in \mathfrak{M}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, imply $x_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Definition 5 *A Schauder decomposition $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ will be called unconditional with constant M provided there exists $M \geq 1$ such that*

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} \delta_i y_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=0}^{n} y_i \right\| \text{ for all } n \in \mathbb{Z}_+,\ y_n \in \mathfrak{M}_n,\ \{\delta_i\}_{i=0}^{n} \in \{0,1\}.$$

For example, every orthogonal Schauder decomposition in H is unconditional with constant $M = 1$. The following lemma provides some properties of unconditional Schauder decompositions in H and will be used further.

Lemma 1 *Assume that $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ is an unconditional Schauder decomposition in H with constant M and corresponding sequence of projections $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$. Then for every $x \in H$ we have*

$$\frac{1}{2M} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|P_n x\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\| \leq 2M \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|P_n x\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Proof. We note that, by the parallelogram identity, for each $x \in H$ and for every finite set of elements $\{P_j x\}_{j=0}^{n} \subset H$ there exists a set of numbers $\{\underline{\varepsilon}_j\}_{j=0}^{n} \subset \{-1,1\}$ such that

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} \underline{\varepsilon}_j P_j x \right\|^2 = \min_{\varepsilon_j = \pm 1} \left\| \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j P_j x \right\|^2 \leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \left\| \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j P_j x \right\|^2 = \sum_{j=0}^{n} \|P_j x\|^2. \tag{4}$$

Construct the following operators: $P_n^+ = \sum\limits_{j:\underline{\varepsilon}_j = 1} P_j$, $P_n^- = \sum\limits_{j:\underline{\varepsilon}_j = -1} P_j$. Further, applying (4), we obtain that

$$\|x\|^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=0}^{n} P_j x \right\| \right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \left\| \left(P_n^+ + P_n^-\right) x \right\| \right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| (P_n^+ - P_n^-)^2 x \right\|^2$$

$$\leq 4M^2 \lim_{n\to\infty} \left\| (P_n^+ - P_n^-) x \right\|^2 = 4M^2 \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=0}^{n} \underline{\varepsilon}_j P_j x \right\|^2 \leq 4M^2 \sum_{j=0}^{\infty} \|P_j x\|^2.$$

Hence, a right-hand side of the inequality (3) is proved.

To prove a left-hand side of the inequality (3) we observe that, by the parallelogram identity, for each $x \in H$ and for every finite set of elements $\{P_j x\}_{j=0}^{n} \subset H$ there exists a set of numbers $\{\overline{\varepsilon}_j\}_{j=0}^{n} \subset \{-1,1\}$ such that

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} \overline{\varepsilon}_j P_j x \right\|^2 = \max_{\varepsilon_j = \pm 1} \left\| \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j P_j x \right\|^2 \geq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \left\| \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j P_j x \right\|^2 = \sum_{j=0}^{n} \|P_j x\|^2. \tag{5}$$

Further, for every set of numbers $\{\overline{\varepsilon}_j\}_{j=0}^n \subset \{-1,1\}$ there exist two sets of numbers $\{\delta_j^+\}_{j=0}^n \subset \{0,1\}$ and $\{\delta_j^-\}_{j=0}^n \subset \{0,1\}$ such that

$$\left\|\sum_{j=0}^n \overline{\varepsilon}_j P_j x\right\| = \left\|\sum_{j=0}^n \delta_j^+ P_j x - \sum_{j=0}^n \delta_j^- P_j x\right\| \leq 2M\|x\|.$$

Taking into account (5), we obtain

$$\sum_{j=0}^\infty \|P_j x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^n \|P_j x\|^2 \leq 4M^2\|x\|^2,$$

which completes the proof of left-hand side of (3).

The lemma just proved is a slight variation of one lemma from [16, 26]. Note that Lemma 1 without specification of the constants in (3) follows from one lemma, which was obtained by W. Orlicz in [19]. Lemma 1 leads to the following remark of geometric nature.

Corollary 1 *Let Schauder decomposition $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^\infty$ in H is unconditional with constant M and corresponding sequence of projections $\{P_n\}_{n=0}^\infty$. Then every $x \in H$ is contained outside the open ball $B\left(0, \frac{1}{2M}\left(\sum\limits_{n=0}^\infty \|P_n x\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ and inside the closed ball $B\left[0, 2M\left(\sum\limits_{n=0}^\infty \|P_n x\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ of the space H, i.e. in the closed ring.*

3. Theorem of V.N. Vizitei and unconditional decompositions in H

Lemma 1, together with Theorem 15.17 from [24], which was obtained by V.N. Vizitei in 1965 [25], allow us to obtain the following stability theorem, which is valid for every unconditional Schauder decomposition in H. Thereby, we sharpen a theorem of V.N. Vizitei in a following way.

Theorem 2 *Assume that $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^\infty$ is an unconditional Schauder decomposition in H with corresponding sequence of projections $\{P_n\}_{n=0}^\infty$. Then the following statements hold.*

(i) There exists a constant $\lambda \in (0,1)$, such that every sequence of subspaces $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^\infty$ in H satisfying

$$\left(\sum_{n=0}^\infty \theta\left(\mathfrak{M}_n, \mathfrak{N}_n\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda, \tag{6}$$

where $\theta(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \max\left\{\sup\limits_{x\in\mathfrak{M}, \|x\|=1} dist(x, \mathfrak{N}), \sup\limits_{y\in\mathfrak{N}, \|y\|=1} dist(y, \mathfrak{M})\right\}$ is the opening of the subspaces $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, is a Schauder decomposition in H, isomorphic to

$\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$. *Moreover, a constant* λ *may be chosen as*

$$\lambda = \left(4 \sup_{0\le n<\infty} \left\| \sum_{j=0}^{n} P_j \right\| \left(1 + \sup_{0\le n<\infty} \|P_n\|\right)^2\right)^{-1}.$$

(ii) Every sequence of subspaces $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *in* H*, satisfying*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta\left(\mathfrak{M}_n, \mathfrak{N}_n\right)^2 < \infty, \tag{7}$$

and admitting a sequence of projections $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$*, such that* $(\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}, \{J_n\}_{n=0}^{\infty})$ *is an* H*-complete generalized biorthogonal system, is* 2*-Besselian Schauder decomposition of* H*. If, additionally,* $\dim \mathfrak{M}_n < \infty$*,* $n \in \mathbb{Z}_+$*, then the same conclusion holds for every* ω*-linearly independent sequence of subspaces* $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *satisfying (7).*

Note that every sequence of subspaces $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$, isomorphic to unconditional Schauder decomposition $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ with constant M, is itself an unconditional Schauder decomposition with constant $M\|S\|\|S^{-1}\|$, where $\mathfrak{N}_n = S\mathfrak{M}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

4. A generalization of a theorem of T. Kato

The main result of the paper is formulated as follows.

Theorem 3 *Let* $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *is an orthogonal Schauder decomposition in* H *with corresponding sequence of projections* $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$*, where* $\dim F_0 < \infty$*, and assume that* $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *is an unconditional Schauder decomposition in* H *with constant* M *and corresponding sequence of projections* $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$*, where* $P_0 = F_0$*. Also suppose that* $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ *is a sequence of nonzero projections in* H *such that* $J_nJ_m = \delta_n^m J_n$ *for* $n, m \in \mathbb{Z}_+$*. If the condition (1) holds and for all* $x \in H$ *we have*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|P_n(J_n - P_n)x\|^2 \le \varsigma^2 \|x\|^2, \tag{8}$$

where $\varsigma \in \left[0, \frac{1}{2M}\right)$*, then* $\{J_nH\}_{n=0}^{\infty}$ *is also an unconditional Schauder decomposition in* H*, isomorphic to* $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$*.*

Proof. To prove the theorem we use the method which was used in [13]. Consider the operator S defined on H by

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} P_n J_n. \tag{9}$$

To prove the existence of S in the strong sense we show that

$$\sum_{n=0}^{\infty} (P_n - P_nJ_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \left(P_n - J_n\right)$$

converges in the strong sense. Indeed, since $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ is an unconditional Schauder decomposition in H with constant M, for each $x \in H$ and for every $N \in \mathbb{Z}_+$ we have by virtue of Lemma 1, using (8), that

$$\left\| \sum_{n=k}^{k+N} P_n (P_n - J_n) x \right\|^2 \leq (2M)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left\| P_j \left(\sum_{n=k}^{k+N} P_n (P_n - J_n) x \right) \right\|^2 =$$

$$= (2M)^2 \sum_{n=k}^{k+N} \|P_n (P_n - J_n) x\|^2 \to 0,$$

when $k \to \infty$. Hence, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n (P_n - J_n) x$ converges and, consequently, the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n J_n x = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x - \sum_{n=0}^{\infty} P_n (P_n - J_n) x$$

also converges. Consider the operator

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} P_n (P_n - J_n) = I - P_0 - \sum_{n=1}^{\infty} P_n J_n$$

and note that $\|R\| < 1$, since for every $x \in H$,

$$\|Rx\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} P_n (P_n - J_n) x \right\|^2 \leq (2M)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left\| P_j \left(\sum_{n=1}^{\infty} P_n (P_n - J_n) x \right) \right\|^2 =$$

$$= (2M)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n (P_n - J_n) x\|^2 \leq (2M)^2 \varsigma^2 \|x\|^2,$$

by virtue of Lemma 1 and applying (8). Further observe that, since

$$S = P_0 J_0 + I - P_0 - R, \qquad \|S\| < \|J_0\| + 3 < \infty.$$

Thus, a theorem will be proved if we show that S is continuously invertible. To this end we consider the operator

$$\widetilde{S} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n J_n = I - P_0 - R. \tag{10}$$

Since $\dim P_0 = m < \infty$ by (1) we have that $(I - P_0)$ is Fredholm operator with

$$nul\,(I - P_0) = m, \quad ind\,(I - P_0) = 0, \quad \gamma\,(I - P_0) = 1,$$

where $nul\,T$ denotes the nullity, $ind\,T$ the index, and $\gamma\,(T)$ the reduced minimum modulus, of the operator T (for these notions see, e.g., [12], Chapter IV, §5.1). Indeed, first we note that $nul\,(I - P_0) = \dim P_0 = m$,

$$def\,(I - P_0) = \dim H|_{Im(I-P_0)} = \dim H|_{\overline{Im(I-P_0)}} =$$

$$= \dim co\ker(I-P_0) = \dim(Im(I-P_0))^{\perp} = m,$$

$ind\,(I-P_0) = nul\,(I-P_0) - def\,(I-P_0) = 0$, where $defT$ denotes the deficiency of T, see, e.g., [12, 4]. Second, since $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ is a sequence of orthoprojections corresponding to orthogonal Schauder decomposition $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$, where $P_0 = F_0$, we have that

$$\inf_{v\in\ker\left(I-P_0\right)} \|x-v\| = \inf_{v\in ImF_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|F_n(x-v)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|F_n(x-F_0x)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|F_n(x-F_0x)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|(I-P_0)x\|.$$

Consequently, $\gamma\,(I-P_0) =$

$$= \sup\left\{\gamma :\ \|\,(I-P_0)\,x\| \ge \gamma \inf_{v\in\ker\left(I-P_0\right)} \|x-v\|,\ x\in D\,(I-P_0) = H\right\} = 1.$$

Furthermore, since $\|R\| < 1 = \gamma\,(I-P_0)$, $\widetilde{S} = (I-P_0) - R$ is also Fredholm with

$$nul\,\widetilde{S} \le nul\,(I-P_0) = m, \quad ind\,\widetilde{S} = ind\,(I-P_0) = 0 \tag{11}$$

(see [12], Chapter IV, Theorem 5.22). Since $S = P_0J_0 + \widetilde{S}$, where P_0J_0 is compact, S is also Fredholm and $ind\,S = ind\,\widetilde{S} = 0$ (see [12], Chapter IV, Theorem 5.26). Therefore we obtain that $nul\ S = def\ S$, and S will be invertible if and only if $nul\ S = def\ S = 0$. Thus it is sufficient to show that $nul\ S = 0$. To this end we first show that

$$\ker\widetilde{S} = ImJ_0. \tag{12}$$

If $x \in ImJ_0$, i.e. $x = J_0y$, then $\widetilde{S}x = \widetilde{S}J_0y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_nJ_nJ_0y = 0$ and, consequently, $x \in \ker\widetilde{S}$. On the other hand, $\ker\widetilde{S} \subset ImJ_0$, since $\ker\widetilde{S}$ and ImJ_0 are linear subspaces, $\dim ImJ_0 = m$ and $\dim\ker\widetilde{S} \le m$ by (11). Assume now that $x \in \ker S$. Then,

$$0 = P_0Sx = P_0\sum_{n=0}^{\infty} P_nJ_nx = P_0J_0x$$

and $\widetilde{S}x = Sx - P_0J_0x = 0$. Hence, $x \in \ker\widetilde{S}$, $x = J_0y$ by (12) and, therefore,

$$P_0x = P_0J_0y = P_0\sum_{n=0}^{\infty} P_nJ_nJ_0y = P_0\sum_{n=0}^{\infty} P_nJ_nx = 0.$$

As a result, $(I-R)x = (\widetilde{S}+P_0)x = 0$. Since $\|R\| < 1$, we obtain $x = 0$. Thus, $\ker S = \{0\}$, $nul\ S = 0$ and S is continuously invertible. Finally, we note that $J_n = S^{-1}P_nS$, $n \in \mathbb{Z}_+$, implies $\mathfrak{M}_n = SJ_nH$, $n \in \mathbb{Z}_+$, which completes the proof.

Definition 6 *We will say that $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ is a Riesz basis in H with constant M provided the sequence of corresponding subspaces $\{Lin\{\phi_n\}\}_{n=0}^{\infty}$ forms an unconditional Schauder decomposition with constant M.*

In the case when all the subspaces $\mathfrak{M}_n$ are one dimensional, we deduce from Theorem 3 the following stability theorem for Riesz bases in H.

Theorem 4 *Let $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ be an orthonormal basis of H and assume that $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ is a Riesz basis in H with constant M and corresponding sequence of coordinate functionals $\{\phi_n^*\}_{n=0}^{\infty}$, where $\phi_0 = \phi_0^* = h_0$. Consider a biorthogonal sequence $(\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty})$ in H such that $0 < \inf_n \|\psi_n\| \leq \sup_n \|\psi_n\| < \infty$. If for all $x \in H$ we have*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \psi_n^*, x\rangle \langle \phi_n^*, \psi_n\rangle - \langle \phi_n^*, x\rangle|^2 \|\phi_n\|^2 \leq \varsigma^2 \|x\|^2,$$

where $\varsigma \in [0, (2M)^{-1})$, then $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ is also a Riesz basis of H.

5. Conclusions

We obtain a stability theorem for unconditional Schauder decompositions in H, which is a generalization of the classical theorem of T. Kato [13]. More precisely, it is proved that the sequence of mutually disjoint projections, which is close in some sense to the sequence of projections corresponding to unconditional Schauder decomposition of given structure, itself generates an unconditional Schauder decomposition isomorphic to the original. As a direct consequence of this result, we obtain a stability theorem for Riesz bases. Also we sharpen one stability theorem of V.N. Vizitei in the case of unconditional Schauder decompositions.

In conclusion, we note the following. Just as Theorem 1 plays a special role in the study of spectral properties of nonselfadjoint and unbounded operators in H (see, e.g., [1, 2, 5, 11, 12, 18]), Theorem 2 and Theorem 3 may be very useful in the analysis of spectral properties of different type operators in H. It is enough to do the following. We should consider perturbations of nonselfadjoint operators generating unconditional spectral Schauder decompositions, instead of perturbations of selfadjoint operators generating an orthogonal spectral Schauder decompositions. And this, in turn, allows us to extend in qualitative manner the class of spectral problems which we can solve via known methods.

REFERENCES

1. Adduci J., Mityagin B. Eigensystem of an L^2-perturbed harmonic oscillator is an unconditional basis // Cent. Eur. J. Math., 2012. – **10**, no 2. – P. 569–589.

2. Adduci J., Mityagin B. Root system of a perturbation of a selfadjoint operator with discrete spectrum // Integral Equations Operator Theory, 2012. – **73**, no 2. – P. 153–175.

3. Bari N.K. Biorthogonal systems and bases in Hilbert space // Moskov. Gos. Univ. Učenye Zapiski. Matematika, 1951. – **148**, no 4. – P. 69—107 (in Russian)

4. Bilalov B.T., Veliev S.G. Some Questions of Bases, – Baku: Elm, 2010. – 304 p. (in Russian).

5. Clark C. On relatively bounded perturbations of ordinary differential operators // Pacific J. Math., 1968. – **25**, no 1. – P. 59–70

6. Curtain R.F., Zwart H.J. An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory, Texts in Applied Mathematics, Volume 21.– New-York: Springer-Verlag, 1995. – 698 p.

7. Fage M.K. Idempotent operators and their rectification // Dokl. Akad. Nauk, 1950. – **73**, – P. 895–897 (in Russian).

8. Fage M.K. The rectification of bases in Hilbert space // Dokl. Akad. Nauk, 1950. – **74**, – P. 1053–1056 (in Russian).

9. Gohberg I.C., Krein M.G. Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space, Transl. Math. Monogr., 18, – Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1969. – 378 p.

10. Grinblyum M.M. On the representation of a space of type B in the form of a direct sum of subspaces // Dokl. Akad. Nauk, 1950. – **70**, – P. 749–752 (in Russian).

11. Hughes E. Perturbation theorems for relative spectral problems // Canad. J. Math., 1972. – **24**, no 1. – P. 72–81.

12. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators, 2nd ed. (reprint), Classics Math.,– Berlin: Springer-Verlag, 1995. – 619 p.

13. Kato T. Similarity for sequences of projections // Bull. Amer. Math. Soc., 1967. – **73**, no 6. – P. 904–905.

14. Krein M., Milman D., Rutman M. On a property of a basis in a Banach space // Comm. Inst. Sci. Math. Mec. Univ. Kharkoff [Zapiski Inst. Mat. Mech.], 1940. – **16**, no 4. – P. 106–110 (in Russian, with English summary).

15. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces I and II.– Reprint of the 1977, 1979 ed., Berlin: Springer-Verlag, 1996. – 188 p.

16. Mackey G.W. Commutative Banach algebras, Lecture notes (multigraphed),– Harvard University, edited by A. Blair, 1952. – 95 p.

17. Marcus A.S. A basis of root vectors of a dissipative operator // Dokl. Akad. Nauk, 1960. – **132**, no 3. – P. 524–527 (in Russian)

18. Mityagin B., Siegl P. Root system of singular perturbations of the harmonic oscillator type operators // preprint available at http://arxiv.org/abs/1307.6245.

19. Orlicz W. Über die Divergenz von allgemeinen Orthogonalreihen & Über unbedingte Convergenz in Funktionraümen, Studia Math., 1933. – **4**. – P. 27–37.

20. Rabah R., Sklyar G.M., Rezounenko A.V. Generalized Riesz basis property in the analysis of neutral type systems // C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 2003. – **337**. – P. 19–24.

21. Rabah R., Sklyar G.M., Rezounenko A.V. Stability analysis of neutral type systems in Hilbert space // J. Differential Equations, 2005. – **214**. – P. 391–428.

22. Rabah R., Sklyar G.M. The analysis of exact controllability of neutral-type systems by the moment problem approach // SIAM J. Control Optim., 2007. – **46**, no 6. – P. 2148–2181.

23. Singer I. Bases in Banach Spaces I,– Berlin: Springer-Verlag, 1970. – 668 p.

24. Singer I. Bases in Banach Spaces II,– Berlin: Springer-Verlag, 1981. – 880 p.

25. Vizitei V.N. On the stability of bases of subspaces in a Banach space, Studies on Algebra and Mathematical Analysis, Moldov. Acad. Sci., – Chişinău: Kartja Moldovenjaska, 1965. – P. 32–44 (in Russian)

26. Wermer J. Commuting spectral measures on Hilbert space // Pacific J. Math., 1954. – **4**. – P. 355–361.

27. Zwart H. Riesz basis for strongly continuous groups // J. Differential Equations, 2010. – **249**. – P. 2397–2408.

Article history: Received: 14 April 2014; Final form: 25 October 2014;
Accepted: 28 October 2014.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 533.72 № 1133, 2014, с.114–130

Двухпотоковое распределение в газе из твердых сфер с модами типа "ускорение-уплотнение"

В. Д. Гордевский, Н. В. Лемешева

Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина
пл.Свободы 4, 61022, Харьков, Украина
gordevskyy2006@yandex.ru, lemesheva.kharkov@rambler.ru

Для модели твердых сфер построены приближенные явные решения уравнения Больцмана, которые имеют вид бимодального распределения, то есть линейной комбинации нестационарных неоднородных максвеллианов. Они описывают взаимодействие двух потоков газа, которые ускоряются и уплотняются при движении вдоль неподвижной оси. Найдены достаточные условия минимизации интегральной невязки между частями уравнения Больцмана.
Ключевые слова : уравнение Больцмана, твердые сферы, Максвеллиан, приближенные явные решения, бимодальное распределение, "ускорение-уплотнение", интегральная невязка.

Гордевський В. Д., Лемешева Н. В., **Двопотоковий розподіл в газі з твердих куль з модами типу "прискорення-ущільнення".** Для моделі твердих куль побудовано наближені явні розв'язки рівняння Больцмана, які мають вигляд бімодального розподілу, тобто лінійної комбінації нестаціонарних неоднорідних максвеліанів. Вони описують взаємодію між двома течіями газу, які прискорюються та згущуються при русі вздовж нерухомої осі. Знайдено достатні умови мінімізації інтегрального відхилу між частинами рівняння Больцмана.
Ключові слова: рівняння Больцмана, тверді кулі, Максвеліан, наближені явні розв'язки, бімодальний розподіл, "прискорення-ущільнення", інтегральний відхил.

V. D. Gordevskyy, N. V. Lemesheva, **Biflow distribution in a gas of hard spheres with modes of the "accelerating-packing" type.** We constructed explicit approximate solutions of the Boltzmann equation for the hard-sphere model, which have the form of bimodal distribution, i.e. linear combination of nonstationary inhomogeneous Maxwellians. They describe the interaction of two gas flows, which are accelerated and packed when moving along a fixed axis. Sufficient conditions for the minimization of the integral error between the sides of Boltzmann equation are found.
Keywords: Boltzmann equation, hard spheres, Maxwellian, approximate explicit solutions, bimodal distribution, "accelerating-packing", the integral error.

2000 Mathematics Subject Classification: 76P05, 45K05, 82C40, 35Q55.

Введение

Данная работа посвящена проблеме поиска приближенных решений нелинейного кинетического уравнения Больцмана, которое описывает поведение достаточно разреженного газа и в случае модели твердых сфер имеет вид [1-3]:

$$D(f) = Q(f,f); \tag{1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x}; \tag{2}$$

$$\begin{gathered} Q(f,f) = \frac{d^2}{2}\int\limits_{R^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v_1 - v, \alpha)| \cdot \\ \cdot [f(t, v_1^{'}, x) f(t, v^{'}, x) - f(t, v_1, x) f(t, v, x)], \end{gathered} \tag{3}$$

где d - диаметр молекулы, $t \in R^1$ - время, $x = \left(x^1, x^2, x^3\right) \in R^3$ - координата молекулы, $v = \left(v^1, v^2, v^3\right) \in R^3$ - ее скорость; $f = f(t, v, x)$ - искомая функция распределения молекул, α - вектор на единичной сфере Σ в R^3; $\frac{\partial f}{\partial x}$ - пространственный градиент функции f; v, v_1 и $v^{'}, v_1^{'}$ - скорости двух молекул до и после столкновения соответственно.

Единственными точными решениями уравнения (1)-(3), известными на данный момент для модели твердых сфер, являются глобальные и локальные максвеллианы $M(t, v, x)$ [1, 2, 3], т. е. решения системы $D(M) = Q(M, M) = 0$. Другие, не максвелловские, точные решения удается найти только для определенных моделей взаимодействия между частицами газа — максвелловских молекул и некоторых их обобщений [4-9].

Вместе с тем, актуальной остается проблема описания взаимодействия между двумя и более максвелловскими потоками в разреженном газе.

Например, в работах [10, 11] дано приближенное описание взаимодействия двух потоков газа из твердых сфер, которые представляют собой глобальные максвеллианы (т. е. не зависят ни от t ни от x); в работе [12] изучено поведение бимодального распределения, в которое входят локальные стационарные (зависящие только от x) максвеллианы частного вида. При этом в качестве невязки между частями уравнения Больцмана во всех вышеупомянутых случаях использовалась "смешанная" (равномерная по t, x и интегральная по v) норма разности.

Однако, при попытках перехода к более общему виду локальных максвеллианов, зависящих еще и от t, т. е. к неравновесным процессам в газе, возникли технические трудности, что обуславливается их достаточно сложным видом. Подробный анализ и классификация таких решений с точки зрения их физического смысла и геометрической структуры были проведены в работе [13].

Таким образом, все вышесказанное приводит к необходимости построения таких бимодальных и многомодальных распределений с произвольными гидродинамическими параметрами мод, которые бы описывали процесс взаимодействия между двумя и более максвелловскими потоками в газе из твердых сфер и в то же время удовлетворяли уравнению Больцмана с какой угодно степенью точности.

Именно поэтому целью данной работы является поиск явных приближенных решений уравнения Больцмана для модели твердых сфер, которые будут иметь следующий бимодальный вид:

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \tag{4}$$

где φ_i, $i = 1, 2$ - некоторые положительные гладкие коэффициентные функции, т. е.

$$\varphi_i = \varphi_i(t, x) \geqslant 0; \quad \varphi_i \in C^1 \left(R^4\right), \ i = 1, 2, \tag{5}$$

а максвеллианы M_i, $i = 1, 2$ относятся к потокам типа "ускорение-уплотнение" [13, 14] и задаются формулами

$$M_i = \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} \cdot e^{-\beta_i (v - \widetilde{v}_i)^2}, \ i = 1, 2, \tag{6}$$

$$\rho_i = \overline{\rho}_i \cdot e^{\beta_i \left(\widetilde{v}_i^2 + 2\overline{u}_i x\right)}, \ i = 1, 2, \tag{7}$$

$$\widetilde{v}_i = \overline{v}_i - \overline{u}_i t, \ i = 1, 2, \tag{8}$$

где ρ_i — плотность i-го потока, $\overline{\rho} = const$; $\beta = \frac{1}{2T}$ — обратная температура газа (T — абсолютная температура), $\widetilde{v}_i$ — массовая скорость i-го потока, $\overline{u}_i$ и $\overline{v}_i$ — произвольные фиксированные векторы в R^3.

С физической точки зрения каждое из распределений (6)–(8) описывает поступательное движение газа вдоль оси $\overline{u}$ с линейной массовой скоростью $\overline{v}$ и массовым ускорением $-\overline{u}$ в произвольной точке x пространства. Плотность ρ меняется от 0 до $+\infty$, при этом минимального значения она достигает при $t = t_0$, где $t_0 = \frac{1}{\overline{u}^2} \left(\overline{u}, \overline{v}\right)$ для любого фиксированного $x \in R^3$, а для произвольного фиксированного $t \in R^1$ увеличивается только вдоль вектора $\overline{u}$.

Другими словами, с ростом времени t число молекул в единице объема увеличивается и при этом постепенно движется быстрее вдоль оси $\overline{u}$, т. е. поток газа уплотняется и ускоряется.

Постановка задачи. Будем рассматривать неоднородную, нестационарную, линейную комбинацию двух максвеллианов вида (4)–(8). Требуется найти такой вид функций (5) и такое поведение всех имеющихся параметров, чтобы при низкотемпературном предельном переходе ($\beta_i \to +\infty$, $i = 1, 2$) интегральная невязка

$$\Delta_1 = \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx \int\limits_{R^3} \left|D(f) - Q(f, f)\right| dv \tag{9}$$

была сколь угодно мала, т. е. стремилась к нулю.

В следующем разделе получено несколько результатов, которые дают решение этой задачи, а именно, найдены некоторые условия, достаточные для минимизации невязки Δ_1.

Основные результаты

Прежде чем перейти к изучению поведения невязки Δ_1 при параметрах $\beta_i \to +\infty$, $i = 1, 2$, проведем несколько предварительных преобразований правой части выражения (9).

Подставим распределение (4) в уравнение (1)–(3), учитывая, что $D(M_i) = Q(M_i, M_i) = 0$, $i = 1, 2$; мы получим:

$$D(f) = M_1 D(\varphi_1) + M_2 D(\varphi_2),$$

$$Q(f, f) = \varphi_1 \varphi_2 \left[Q(M_1, M_2) + Q(M_2, M_1) \right],$$

а значит, интеграл по переменной v из (9) можно переписать в виде

$$\int\limits_{R^3} |D(f) - Q(f, f)| \, dv = \\ = \int\limits_{R^3} \left| \sum_{i=1}^{2} M_i D(\varphi_i) - \varphi_1 \varphi_2 \sum_{i,j=1, i \neq j}^{2} Q(M_i, M_j) \right| dv. \tag{10}$$

Используем представление интеграла столкновений в виде разбиения $Q(f, g) = G(f, g) - fL(g)$ (как это сделано, например, в [1, 3, 15]), где

$$G(f, f) = \frac{d^2}{2} \int\limits_{R^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v_1 - v, \alpha)| \cdot f(t, v_1', x) f(t, v', x),$$

$$fL(f) = f(t, v, x) \frac{d^2}{2} \int\limits_{R^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v_1 - v, \alpha)| \cdot f(t, v_1, x);$$

подставляя вместо функции f максвеллианы M_1, M_2, и учитывая, что $G \geqslant 0$ и $M_i > 0$, получим следующую оценку сверху для выражения (10):

$$\int\limits_{R^3} |D(f) - Q(f, f)| \, dv = \int\limits_{R^3} |M_1 D(\varphi_1) + M_2 D(\varphi_2) - \\ - \varphi_1 \varphi_2 \left[G(M_1, M_2) + G(M_2, M_1) - M_1 L(M_2) - M_2 L(M_1) \right] | \, dv \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{R^3} \left[M_1 |D(\varphi_1)| + M_2 |D(\varphi_2)| + \varphi_1 \varphi_2 \left(G(M_1, M_2) + G(M_2, M_1) \right) + \right. \\ \left. + \varphi_1 \varphi_2 \left(M_1 |L(M_2)| + M_2 |L(M_1)| \right) \right] dv. \tag{11}$$

Далее, с учетом того, что $G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1)$, справедливы равенства [1, 3]:

$$\int\limits_{R^3} G(M_1, M_2) dv = \int\limits_{R^3} M_1 L(M_2) dv = \int\limits_{R^3} G(M_2, M_1) dv = \int\limits_{R^3} M_2 L(M_1) dv.$$

Следовательно, выражение (11) можно представить следующим образом:

$$\int\limits_{R^3} |D(f) - Q(f,f)|\, dv \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{R^3} [M_1|D(\varphi_1)| + M_2|D(\varphi_2)|]\, dv + 4\varphi_1\varphi_2 \int\limits_{R^3} M_1\, |L(M_2)|\, dv. \tag{12}$$

Так как [15]

$$L(M_i) = \frac{d^2\rho_i}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{R^3} \left| v - \widetilde{v}_i - \frac{w}{\sqrt{\beta_i}} \right| \cdot e^{-w^2} dw,$$

то ввиду (2) и (6) сумма интегралов в (12) примет вид:

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{R^3} \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^{3/2} \cdot e^{-\beta_i (v-\widetilde{v}_i)^2} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| dv +$$
$$+ 4\varphi_1\varphi_2 \frac{\rho_1\rho_2}{\pi^2} d^2 \int\limits_{R^6} \beta_1^{3/2} \cdot e^{-\beta_1 (v-\widetilde{v}_1)^2} \left| v - \widetilde{v}_2 - \frac{w}{\sqrt{\beta_2}} \right| \cdot e^{-w^2} dw dv.$$

После замены $u = \sqrt{\beta_i}(v - \widetilde{v}_i)$, с учетом (8), получим основной вид оценки сверху для выражения (10):

$$\int\limits_{R^3} |D(f) - Q(f,f)|\, dv \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{R^3} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{v}_i - \overline{u}_i t \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \rho_i(t,x) \pi^{-3/2} e^{-u^2} du + \tag{13}$$
$$+ 4\varphi_1\varphi_2 \frac{\rho_1(t,x)\rho_2(t,x)}{\pi^2} d^2 \int\limits_{R^6} F_{12} \cdot e^{-w^2-u^2} dw du,$$

где

$$F_{12} = \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{w}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{v}_1 - \overline{v}_2 + (\overline{u}_2 - \overline{u}_1) t \right|. \tag{14}$$

Для полноты изложения последующих результатов приведем несколько определений, которые были введены в работе [16] и использованы в [17].

Определение 1. *Пусть G — такая ограниченная область в R^n, что число компонент связности пересечения G с любой прямой, параллельной какой-либо из координатных осей, конечно. Для всякого $\delta > 0$ обозначим через G_δ множество точек из R^n, отстоящих от G не более чем на δ.*

Если $n = 4$ и координаты обозначаются как $t,\ x^k$ $(k = 1,2,3)$, то через G^x - обозначим проекцию G на гиперплоскость $t = 0$, а через G^k - проекцию G на гиперплоскость $x^k = 0$ $(k = 1,2,3)$.

Определение 2. *Финитным "δ-плато" над областью $G \subset R^4$, $\delta > 0$ называется такая функция $\varphi_\delta(G,t,x) \in C^1(R^4)$, что*

$$\varphi_\delta(G,t,x) = \left[\begin{array}{l} 1,\ (t,x) \in G, \\ 0,\ (t,x) \in R^4 \setminus G_\delta, \\ 0 \leqslant \varphi_\delta \leqslant 1,\ (t,x) \in G_\delta \setminus G, \end{array} \right. \tag{15}$$

и, кроме того, на любой прямой, параллельной одной из координатных осей, функция φ_δ имеет не более чем конечное число строгих экстремумов.

Теперь вернемся непосредственно к поставленной задаче и рассмотрим несколько вариантов ее решения, которые дают различные достаточные условия стремления невязки (9) к нулю при определенном выборе функций φ_i, $i = 1,2$ и гидродинамических параметров.

Теорема 1. *Пусть $G_1, G_2 \subset R^4$ — ограниченные области из Определения 1, и $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $G_{1,\delta_1} \cap G_{2,\delta_2} = \emptyset$. Пусть функции φ_i, $i = 1,2$ из распределения (4) имеют вид "δ-плато" (15), причем $\varphi_{\delta_1}(G_1,t,x)$ и $\varphi_{\delta_2}(G_2,t,x)$ таковы, что общее количество их экстремумов из Определения 2, ограничено равномерно относительно всех аргументов константой $K > 0$ при $\delta_1, \delta_2 \to 0$.*

Кроме этого, пусть выполняются следующие условия:

$$\overline{u}_i = \frac{\overline{u}_{oi}}{\beta_i^{n_i}},\ i = 1,2, \tag{16}$$

$$\overline{v}_i = \frac{\overline{v}_{oi}}{\beta_i^{k_i}},\ i = 1,2, \tag{17}$$

где $\overline{u}_{oi}$, $\overline{v}_{oi}$ — произвольные фиксированные векторы, а числа n_i, k_i удовлетворяют неравенствам

$$n_i \geqslant 1,\ k_i \geqslant \frac{1}{2},\ i = 1,2.$$

Тогда существует такое Δ_1', для которого верно

$$\Delta_1 \leqslant \Delta_1'. \tag{18}$$

Причем при любом фиксированном $d > 0$

$$\lim_{m(G_i^x) \to 0} \lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0}} \lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta_1' = 0, \tag{19}$$

где $m(G_i^x)$, $i = 1,2$ - объем (мера) проекции множества G_i на подпространство $t = 0$.

Доказательство. Проинтегрировав выражение (13) по x и t, получим следующий вид оценки для невязки (9):

$$\Delta_1 \leqslant \Delta_1' =$$
$$= \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{R^3} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{v}_i - \overline{u}_i t \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \rho_i(t,x) \pi^{-3/2} e^{-u^2} du + \tag{20}$$
$$+4\frac{d^2}{\pi^2} \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} \varphi_1 \varphi_2 \rho_1(t,x) \rho_2(t,x) dx \int\limits_{R^6} F_{12} \cdot e^{-w^2-u^2} dw du,$$

где F_{12} имеет вид (14).

Эта оценка корректно определена, так как величины $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$; $\left(\overline{u}_i, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right) t$; $\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right|$; φ_i; $(\varphi_i, \overline{u}_i)t$; $\varphi_1 \varphi_2$ после умножения на $\rho_i(t,x)$ принадлежат пространству $L_1(R^4)$ при всех $\beta_i > 0, \ i = 1,2$ благодаря финитности функций φ_i, $i = 1,2$.

Равномерная сходимость всех интегралов, входящих в правую часть неравенства (20), которая следует из условий корректности оценки, описаных выше, и финитности функций φ_i, а также благодаря тому, что функции e^{-w^2} и e^{-u^2} — быстроубывающие, позволяет перейти к низкотемпературному пределу в этом выражении.

Таким образом, с учетом (7), (8), (16), (17) и (14), мы получим:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \rho_i(t,x) = \overline{\rho}_i \mu_i(x), \ i = 1,2,$$

где

$$\mu_i(x) = \left[\begin{array}{l} 1, \ n_i > 1, \ k_i > \frac{1}{2}, \ i = 1,2, \\ e^{2\overline{u}_{oi} x}, \ n_i = 1, \ k_i > \frac{1}{2}, \ i = 1,2, \\ e^{\overline{v}_{oi}^2 + 2\overline{u}_{oi} x}, \ n_i = 1, \ k_i = \frac{1}{2}, \ i = 1,2; \end{array} \right. \tag{21}$$

а

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} F_{12} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta_1' = \int\limits_{R^4} dt dx \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{R^3} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right| \overline{\rho}_i \mu_i(x) \pi^{-3/2} e^{-u^2} du,$$

который после вычисления интеграла по переменной u, будет иметь вид:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta_1' = \int\limits_{R^4} dt dx \sum_{i=1}^{2} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right| \overline{\rho}_i \mu_i(x). \tag{22}$$

Возвращаясь непосредственно к виду функций φ_i, $i = 1,2$, т. е. условию (15), ввиду (21) мы получим следующие результаты.

1) Если $\mu_i(x) = 1$, то предел (22) будет иметь вид:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta_1^{'} = \overline{\rho}_1 \int\limits_{R^3} dx \int\limits_{R^1} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right| dt + \overline{\rho}_2 \int\limits_{R^3} dx \int\limits_{R^1} \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right| dt. \qquad (23)$$

Опираясь на условия теоремы, рассмотрим первый интеграл из (23) (обозначим $\mathfrak{D}_{13} = G_{1,\delta_1} \backslash G_1$) и оценим его таким же образом как это было сделано с аналогичным интегралом в работе [16]:

$$\begin{gathered}
\int\limits_{R^3} dx \int\limits_{R^1} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right| dt = \\
= \int\limits_{G_1} \left| \frac{\partial 1}{\partial t} \right| dt dx + \int\limits_{R^4 \backslash G_{\delta_1}} \left| \frac{\partial 0}{\partial t} \right| dt dx + \int\limits_{G_{1,\delta_1} \backslash G_1} \left| \frac{\partial \varphi_{\delta_1}}{\partial t} \right| dt dx = \\
= \int\limits_{\mathfrak{D}_{13}} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right| dt dx = \int\limits_{\mathfrak{D}_{13}^x} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right| dt = \\
= \int\limits_{\mathfrak{D}_{13}^x} dx \sum_{s=1}^{N(x,\delta_1)} \int\limits_{a_s}^{a_{s+1}} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right| dt = \int\limits_{\mathfrak{D}_{13}^x} dx \sum_{s=1}^{N(x,\delta_1)} \left| \int\limits_{a_s}^{a_{s+1}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} dt \right| = \\
\int\limits_{\mathfrak{D}_{13}^x} dx \sum_{s=1}^{N(x,\delta_1)} |\varphi_1(a_{s+1}, x) - \varphi_1(a_s, x)| \leqslant \\
\leqslant 2 \int\limits_{\mathfrak{D}_{13}^x} N(x, \delta_1) dx \leqslant 2Km(\mathfrak{D}_{13}^x),
\end{gathered} \qquad (24)$$

где $a_s,\ s = 1, ..., N(x, \delta_1)$ — строгие экстремумы функции φ_1, принадлежащие прямым, параллельным оси t, для некоторых фиксированных x и δ_1; K — константа из условия теоремы; оценка φ_1 следует из (15).

Аналогичным образом оценивается второй интеграл из (23), где $\mathfrak{D}_{23} = G_{2,\delta_2} \backslash G_2$:

$$\int\limits_{R^3} dx \int\limits_{R^1} \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right| dt = \int\limits_{\mathfrak{D}_{23}^x} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right| dt \leqslant 2Km(\mathfrak{D}_{23}^x). \qquad (25)$$

Вспоминая обозначения для $\mathfrak{D}_{13}^x$ и $\mathfrak{D}_{23}^x$, мы можем написать, что

$$\lim_{\delta_1 \to 0} m(\mathfrak{D}_{13}^x) = m(G_1^x), \qquad (26)$$

$$\lim_{\delta_2 \to 0} m(\mathfrak{D}_{23}^x) = m(G_2^x). \qquad (27)$$

Таким образом, из (23)–(27) мы получим:

$$\lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}} \lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ (i=1,2)}} \Delta_1^{'} \leqslant 2\overline{\rho}_1 K m(G_1^x) + 2\overline{\rho}_2 K m(G_2^x) = 2K\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i m(G_i^x).$$

Откуда следует (19).

2) Если $\mu_i(x) = e^{2\overline{u}_{oi}x}$, то выражение (22) примет вид:

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ (i=1,2)}} \Delta_1^{'} = \overline{\rho}_1 \int\limits_{R^4} \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right| e^{2\overline{u}_{o1}x} dt dx + \overline{\rho}_2 \int\limits_{R^4} \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right| e^{2\overline{u}_{o2}x} dt dx. \tag{28}$$

Преобразуем интегралы в (28) аналогично тому, как это было сделано в случае 1), с учетом того, что в силу ограниченности множеств $\mathfrak{D}_{13}^x$ и $\mathfrak{D}_{23}^x$ существует константа $q > 0$ такая, что $|x| \leqslant q$ и, значит $e^{2\overline{u}_{oi}x} \leqslant e^{2|\overline{u}_{oi}|q}$:

$$\int\limits_{R^4} \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right| e^{2\overline{u}_{o1}x} dt dx = \int\limits_{\mathfrak{D}_{13}^x} e^{2\overline{u}_{o1}x} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right| dt \leqslant$$

$$\leqslant e^{2|\overline{u}_{o1}|q} \int\limits_{\mathfrak{D}_{13}^x} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right| dt \leqslant 2Km(\mathfrak{D}_{13}^x) e^{2|\overline{u}_{o1}|q},$$

$$\int\limits_{R^4} \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right| e^{2\overline{u}_{o2}x} dt dx \leqslant 2Km(\mathfrak{D}_{23}^x) e^{2|\overline{u}_{o2}|q}.$$

Поэтому, учитывая (26) и (27)

$$\lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}} \lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ (i=1,2)}} \Delta_1^{'} \leqslant 2K\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i e^{2|\overline{u}_{oi}|q} m(G_i^x),$$

откуда получаем необходимое утверждение (19).

3) Если $\mu_i(x) = e^{\overline{v}_{oi}^2 + 2\overline{u}_{oi}x}$, то, используя выкладки, полученные в случаях 1) и 2), имеем:

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ (i=1,2)}} \Delta_1^{'} \leqslant 2K\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i e^{\overline{v}_{oi}^2 + 2|\overline{u}_{oi}|q} m(\mathfrak{D}_{i3}^x).$$

Переходя к пределу при $\delta_1 \to 0$ и $\delta_2 \to 0$ в последнем неравенстве, мы получим:

$$\lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}}\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ (i=1,2)}}\Delta_1^{'}\leqslant 2K\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i e^{\overline{v}_{oi}^2+2|\overline{u}_{oi}|q}m(G_i^x),$$

что в дальнейшем приводит нас к необходимому результату, т. е. снова к утверждению (19).

Таким образом, при любых $\mu_i(x)$ из (21) справедливо (19), что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть функции φ_i в распределении (4) имеют вид*

$$\varphi_i(t,x)=\psi_i(t,x)e^{-\beta_i((\overline{v}_i-\overline{u}_i t)^2+2\overline{u}_i x)},\ i=1,2, \tag{29}$$

где функции ψ_i такие, что выражения

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t};\ \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|;\ \psi_1\psi_2;\ \psi_i;\ \psi_i t;\ \left(\overline{u}_i,\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right)t,\ i=1,2 \tag{30}$$

принадлежат пространству $L_1(R^4)$.

Кроме того, пусть выполняется (16) при $n_i>\frac{1}{2}$.

Тогда справедлива оценка (18), причем существует конечный предел величины $\Delta_1^{'}$, который равен

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ (i=1,2)}}\Delta_1^{'}=\int\limits_{R^4}dtdx\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\overline{v}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|+4\pi d^2\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2|\overline{v}_1-\overline{v}_2|\int\limits_{R^4}\psi_1\psi_2 dtdx. \tag{31}$$

Доказательство. Будем опираться на вид оценки (18), а именно на формулу (20), полученную при доказательстве Теоремы 1. Вычислим производные функций $\varphi_i,\ i=1,2,$ вида (29):

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}=\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}-2\beta_i\psi_i\overline{u}_i\right)e^{-\beta_i((\overline{v}_i-\overline{u}_i t)^2+2\overline{u}_i x)},\ i=1,2, \tag{32}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}=\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+2\beta_i\psi_i((\overline{v}_i,\overline{u}_i)-\overline{u}_i^2 t)\right)e^{-\beta_i((\overline{v}_i-\overline{u}_i t)^2+2\overline{u}_i x)},\ i=1,2. \tag{33}$$

Подставив полученные выражения (32) и (33) в (20) (сходимость соответствующих интегралов выплывает из условия (30)) мы приходим к следующему виду оценки для $\Delta_1^{'}$:

$$\Delta_1^{'}=\int\limits_{R^4}dtdx\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{R^3}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+(\overline{v}_i-\overline{u}_i t)\frac{\partial\psi_i}{\partial x}+\frac{u}{\sqrt{\beta_i}}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}-2\beta_i\psi_i\overline{u}_i\right)\right|\overline{\rho}_i\pi^{-3/2}e^{-u^2}du+$$
$$+4\frac{d^2}{\pi^2}\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2\int\limits_{R^4}\psi_1\psi_2 dtdx\int\limits_{R^6}F_{12}e^{-w^2-u^2}dwdu \tag{34}$$

при сохранении (14).

Предельный переход благодаря (16) (обоснование его такое же как при доказательстве Теоремы 1) дает:

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} F_{12} = |\overline{v}_1 - \overline{v}_2|, \tag{35}$$

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} -2\sqrt{\beta_i}\psi_i(u,\overline{u}_i) = 0 \text{ при } n_i > \frac{1}{2}.$$

В результате перехода к пределу в (34) и дальнейшего интегрирования по u получаем (31).

Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Пусть имеют место все предположения Теоремы 2, а функции* $\psi_i(t,x),\ i=1,2$ *удовлетворяют тем же условиям, которые были наложены на функции* $\varphi_i,\ i=1,2$ *в Теореме 1.*

Тогда соотношение

$$\Delta_1 \to 0 \tag{36}$$

справедливо в предположениях аналогичных (19) и, кроме того, если имеет место хотя бы одно из условий:

1) для любых $\psi_i(t,x),\ i=1,2$*, удовлетворяющих условиям (30)*

$$\overline{v}_1 = \overline{v}_2; \tag{37}$$

2)

$$supp\psi_1 \cap supp\psi_2 = \varnothing; \tag{38}$$

3) для произвольных $\overline{v}_1,\ \overline{v}_2$ *и* $\psi_i(t,x),\ i=1,2,$ *с учетом (30)*

$$\lim_{d\to 0}\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \Delta_1^{'} = 0. \tag{39}$$

Доказательство. Легко видеть, что условие (30) Теоремы 2 выполняется благодаря финитности функций $\psi_i(t,x),\ i=1,2$ и, с учетом (16) при $n_i > \frac{1}{2}$ очевидно, что справедливо соотношение (31), причем все интегралы, входящие в (31), сходятся также благодаря финитности $\psi_i,\ i=1,2$.

Исходя из того, что функции $\psi_i,\ i=1,2$ выбраны в виде финитных "плато", а именно в виде (15), где вместо $\varphi_i,\ i=1,2$ производится подстановка $\psi_i,\ i=1,2$, и вспоминая обозначения $\mathfrak{D}_{13}$ и $\mathfrak{D}_{23}$, первое слагаемое в (31) может быть оценено сверху следующим образом:

$$\int\limits_{R^4} dtdx \sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \overline{v}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\mathfrak{D}_{i3}} dtdx\left[\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\right|\overline{\rho}_i + \sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x^k}\right|\overline{\rho}_i|\overline{v}_i^k|\right]. \tag{40}$$

Опираясь на технику оценивания интегралов, проведенную при доказательстве Теоремы 1 и в работе [16], с учетом (26) и (27), мы получим:

$$\lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}} \lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ (i=1,2)}} \Delta_1^{'} \leqslant 2K\sum_{i=1}^{2}\left[\overline{\rho}_i m(G_i^x)+\sum_{k=1}^{3}\overline{\rho}_i|\overline{v}_i^k|m(G_i^k)\right], \tag{41}$$

где $m(G_i^k)$, $i=1,2$ — объем (мера) проекции множества G_i на подпространство $x^k=0$, $(k=1,2,3)$. Следовательно, если предположить, что $m(G_i^x)\to 0$ и $m(G_i^k)|\overline{v}_i^k|\to 0$, то первое слагаемое в (31) стремится к нулю, а второе слагаемое становится бесконечно малым в виду выполнения хотя бы одного из условий (37)–(39). Откуда следует выполнение (36), что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Пусть*

$$\varphi_i(t,x)=\psi_i(t,x)e^{-\beta_i(\overline{v}_i-\overline{u}_i t)^2},\ i=1,2, \tag{42}$$

где функции ψ_i, $i=1,2$ такие, что произведения величин (30) на множитель $exp\{2\beta_i\overline{u}_i x\}$, $i=1,2$ принадлежат пространству $L_1(R^4)$, а предположение (16) выполняется для $n_1\geqslant 1$.

Тогда существует Δ_1, определенное в соответствии с (9), такое, что выполняется (18), причем конечный предел величины $\Delta_1^{'}$ существует и равняется выражению (31) при $n_i>1$, а при $n_i=1$

$$\begin{gathered}\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ (i=1,2)}} \Delta_1^{'} = \int\limits_{R_4} dtdx\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+2\psi_i(\overline{u}_{oi},\overline{v}_i)+\overline{v}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|e^{2\overline{u}_{oi}x}+\\ +4\pi d^2\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2|\overline{v}_1-\overline{v}_2|\int\limits_{R^4} dtdx\psi_1\psi_2 e^{2\overline{u}_{o1}x}e^{2\overline{u}_{o2}x}.\end{gathered} \tag{43}$$

Доказательство. Проведем доказательство аналогично тому, как это было сделано в Теореме 2, при этом, благодаря (42), вместо (32) и (33) будем иметь

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}=\frac{\partial\psi_i}{\partial x}e^{-\beta_i(\overline{v}_i-\overline{u}_i t)^2},$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}=\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+2\beta_i\psi_i((\overline{u}_i,\overline{v}_i)-t\overline{u}_i^2)\right)e^{-\beta_i(\overline{v}_i-\overline{u}_i t)^2}.$$

Следовательно, справедлив следующий аналог выражения (34), где F_{12} имеет вид (14)

$$\Delta_1' = \int\limits_{R^4} dtdx \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{R^3} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \left((\overline{u}_i, \overline{v}_i) - t\overline{u}_i^2 \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{v}_i - \overline{u}_i t \right) \right| \overline{\rho}_i \pi^{-3/2} e^{2\beta_i \overline{u}_i x} e^{-u^2} du + \tag{44}$$
$$+ 4\frac{d^2}{\pi^2} \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2 \int\limits_{R^4} dtdx \psi_1 \psi_2 e^{2\beta_1 \overline{u}_1 x} e^{2\beta_2 \overline{u}_2 x} \int\limits_{R^6} F_{12} e^{-w^2-u^2} dwdu.$$

Дальнейший переход к пределу при $\beta_i \to +\infty$, $i = 1, 2$ (возможность такого предельного перехода была обоснована в доказательстве Теоремы 1) дает следующие результаты:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} 2\beta_i \psi_i (\overline{u}_i, \overline{v}_i) = \left[\begin{array}{l} 2\psi_i(\overline{u}_{oi}, \overline{v}_i), \ n_i = 1, \\ 0, \ n_i > 1; \end{array} \right. \tag{45}$$

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} 2\beta_i \psi_i \overline{u}_i^2 t = 0 \text{ при } n_i \geqslant 1; \tag{46}$$

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} e^{2\beta_i \overline{u}_i x} = \left[\begin{array}{l} e^{2\overline{u}_{oi} x}, \ n_i = 1, \\ 1, \ n_i > 1. \end{array} \right. \tag{47}$$

Следовательно, предельный переход в (44), с учетом (35), (45)–(47), после интегрирования по u, приводит нас к конечному пределу величины Δ_1', который равняется выражению (31) при $n_i > 1$, а при $n_i = 1$ полностью совпадает с (43). Что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Пусть выполнены все предположения Теоремы 3, а также сохраняются предположения Следствия 1 с тем лишь отличием, что (16) справедливо для параметров $n_i \geqslant 1$. Пусть, кроме этого, выполняется дополнительное условие*

$$(\overline{u}_i, \overline{v}_i) = 0, \ i = 1, 2. \tag{48}$$

Тогда утверждение (36) ($\Delta_1 \to 0$) остается в силе.

Доказательство. Легко видеть, что, в силу финитности, функции ψ_i, $i = 1, 2$ вида (15), при выполнении предположений данного следствия, удовлетворяют требованиям Теоремы 3.

Таким образом, мы можем воспользоваться утверждениями Теоремы 3. Рассмотрим случай, когда $n_i > 1$. Легко видеть, что доказательство этого случая идентично доказательству Следствия 1, где в итоге мы приходим к необходимому результату. Однако, для значения параметров $n_i = 1$, ситуация несколько усложняется. Как было доказано выше, мы можем воспользоваться утверждением (43) Теоремы 3, где выражение $2\psi_i(\overline{u}_{oi}, \overline{v}_i)$ в первом интеграле исчезнет благодаря условию (48), а второй интеграл будет либо равен нулю, либо к нему стремиться вследствии выполнения хотя бы одного из предположений (37)–(39). Дальнейшая оценка оставшихся слагаемых в равенстве (43) выполняется подобно тому, как это было сделано в доказательстве Следствия 1, с той лишь разницей, что в выражении (41) появится множитель $e^{2|\overline{u}_{oi}|q}$, $i=1,2$, где $q>0$ — константа, существование которой описано во втором пункте доказательства Теоремы 1, что приводит к необходимому результату, а именно, к выполнению утверждения (36).

Теорема 4. *Пусть вместо (29) или (42) выполняется следующее равенство:*

$$\varphi_i(t,x)=\psi_i(t,x)e^{-2\beta_i\overline{u}_ix},\ i=1,2, \tag{49}$$

и сохраняются предположения (16), (17) для параметров

$$n_i>\frac{1}{2},\ k_i\geqslant\frac{1}{2},\ i=1,2. \tag{50}$$

Кроме того, финитные функции ψ_i, $i=1,2$ вида "δ-плато" обеспечивают принадлежность пространству $L_1(R^4)$ произведений величин из (30) на множитель $exp\{-2\beta_i\overline{u}_ix\}$, $i=1,2$.

Тогда справедливо утверждение (18), где

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}}\Delta_1^{'}=\int\limits_{R^4}dtdx\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i\sigma_i\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\right|, \tag{51}$$

а

$$\sigma_i=\left[\begin{array}{l}1,\ n_i>\frac{1}{2},k_i>\frac{1}{2},\\ e^{\overline{v}_{oi}^2},\ n_i>\frac{1}{2},k_i=\frac{1}{2}.\end{array}\right. \tag{52}$$

Доказательство. Очевидно, что при вычислении частных производных от (49) мы получим

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}=\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}-2\beta_i\psi_i\overline{u}_i\right)\cdot e^{-2\beta_i\overline{u}_ix}, \tag{53}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}=\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\cdot e^{-2\beta_i\overline{u}_ix}, \tag{54}$$

что в свою очередь, при подстановке в (20) даст результат аналогичный (44), а именно:

$$\begin{gathered}\Delta_1^{'}=\int\limits_{R^4}dtdx\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{R^3}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}}+\overline{v}_i-\overline{u}_it\right)\cdot\right.\\ \left.\cdot\left\{\frac{\partial\psi_i}{\partial x}-2\beta_i\psi_i\overline{u}_i\right\}\right|\overline{\rho}_i\pi^{-3/2}e^{\beta_i(\overline{v}_i-\overline{u}_it)^2}e^{-u^2}du+\\ +4\frac{d^2}{\pi^2}\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2\int\limits_{R^4}dtdx\psi_1\psi_2e^{\beta_1(\overline{v}_1-\overline{u}_1t)^2}e^{\beta_2(\overline{v}_2-\overline{u}_2t)^2}\int\limits_{R^6}F_{12}\cdot e^{-w^2-u^2}dwdu.\end{gathered} \tag{55}$$

Далее, предположения (16), (17) и (50) гарантируют существование конечного предела экспоненты, представленной в (55):

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} e^{\beta_i(\overline{v}_i - \overline{u}_i t)^2} = \sigma_i, \ i = 1, 2 \tag{56}$$

где функции σ_i вида (52).

Ввиду все тех же только что упомянутых условий (16), (17), (50) при предельном переходе в (55) все слагаемые первой части оценки $\Delta_1^{'}$, которые находятся под модулем, кроме $\frac{\partial \psi_i}{\partial t}$, стремятся к нулю при $\beta_i \to +\infty, \ i = 1, 2$; вторая же часть равняется нулю, благодаря тому, что $\lim\limits_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} F_{12} = 0$.

Все изложенные факты после применения к равенству (55) и дальнейшего вычисления интеграла по переменной u приводят к (51)–(52). Теорема доказана.

Замечание 1. Если в равенстве (49) в качестве функций $\psi_i(t, x)$, $i = 1, 2$ рассматривать финитные "плато", описанные в Теореме 1, то мы получим результат, идентичный случаю 1) из доказательства той же Теоремы 1, причем множитель $e^{\overline{v}_{oi}^2}$, вытекающий из (52), существенно ни на что не влияет.

Обсуждение результатов

В данной работе удалось построить ряд бимодальных распределений вида (4)-(8), которые удовлетворяют уравнению Больцмана (1)-(3) лишь приближенно в смысле минимизации невязки (9), тем не менее, имеют достаточно интересный физический смысл.

Так, полученные при доказательстве Следствия 1 условия $m\left(G_i^k\right)|\overline{v}_i^k| \to 0$ значительно расширяют количество возможных вариантов минимизации невязки, по сравнению, например, с условиями $m\left(G_i^k\right) \to 0$ или $|\overline{v}_i^k| \to 0$, благодаря тому, что при разных значениях индекса $k = 1, 2, 3$ либо мера соответствующей проекции множества G_i, либо соответствующая составляющая массовой скорости стремятся к нулю. Физический смысл всех таких вариантов подробно рассмотрен в работе [16].

Заметим, что в Теореме 2 условие (16) рассматривается только для параметров $n_i > \frac{1}{2}$, так как в случае $n_i = \frac{1}{2}$ в выражении (31) появляется дополнительное слагаемое, минимизация которого приводит к тривиальному результату. То же самое справедливо и для Теоремы 4. А отказ от предположения (17) в Теореме 2 и Теореме 3 позволяет рассмотреть более общий вид решений поставленной в работе задачи.

Также отметим, что в предельных переходах типа (39) использована произвольная малость числа d, что соответствует течению газа близкому к свободномолекулярному (газ близкий к кнудсеновскому); в остальных же случаях рассматривается больцмановский газ при произвольном $d > 0$.

Возможно, в этой работе обнаружены не все распределения вида (4)-(8), что связано с неоднозначностью оценок сверху типа (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана: Пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 495 с.

2. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов: Пер. с франц. – М.: ИИЛ, 1960. – 118 с.

3. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. – М.: Наука, 1967. – 440 с.

4. Бобылев А.В. О точных решениях уравнения Больцмана. // ДАН СССР, 1975. – Т. 225, **6**. – С. 1296–1299.

5. Бобылев А.В. Об одном классе инвариантных решений уравнения Больцмана. // ДАН СССР, 1976. – Т.231, **3**. – С. 571–574.

6. Krook M., Wu T.T. Exact Solutions of the Boltzmann Equation. // Phys. Fluids, 1977. – Vol 20, **10(1)**. – P. 1589–1595.

7. Петрина Д.Я., Мищенко А.В. О точных решениях одного класса уравнений Больцмана. // ДАН СССР, 1988. – Т. 298, **2**. – С. 338–342.

8. Веденяпин В.В. Анизотропные решения нелинейного уравнения Больцмана для максвелловских молекул. // ДАН СССР, 1981. – Т. 256, **2**. – С. 338–342.

9. Мищенко А.В., Петрина Д.Я. О линеаризации и точных решениях одного класса уравнений Больцмана. // Теоретическая и математическая физика, 1988. – Т. 77, **1**. – С. 135–153.

10. Гордевский В.Д. Приближенное двухпотоковое решение уравнения Больцмана. // Теоретическая и математическая физика, 1998. – Т.114, **1**. – С. 126–136.

11. Гордевський В.Д. Деякі класи наближених бімодальних розвязків нелінійного рівняння Больцмана. // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Інститут математики НАН України, 1997. – Вип. 16. – С. 54-64.

12. Гордевский В.Д. Двухпотоковое распределение с винтовыми модами. // Теоретическая и математическая физика, 2001. – Т. 126, **2**. – С. 283–300.

13. Gordevskyy V.D. On the non-stationary Maxwellians. // Math. Meth. Appl. Sci., 2004. – V.27, **2**. – P. 231–247.

14. Gordevskyy V.D., Andriyasheva N.V. Interaction between "accelerating-packing" flows in a low-temperature gas. // Math. Phys., Anal., Geom., 2009. – V.5, **1**. – P. 38–53.

15. Гордевский В.Д. Приближенное бимодальное решение уравнения Больцмана для твердых сфер. // Матем. физ., анализ, геом., 1995. – Т.2, **2**. – С. 168–176.

16. Gordevsky V.D. Trimodal Approximate Solutions of the Non–linear Boltzmann Equation. // Math. Meth. Appl. Sci., 1998. – Vol. 21. – P. 1479–1494.

17. Гордевский В.Д. Вихри в газе из твердых сфер. // Теоретическая и математическая физика, 2003. – Т. 135, **2**. – С. 303–314.

Статья получена: 10.10.2014; окончательный вариант: 26.10.2014; принята: 3.11.2014.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.51, 517.588 № 1133, 2014, с.131–139

Неелементарні функції, породжені центральними факторіальними степенями

Т. П. Гой

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
вул. Шевченка, 57, 76018, м. Івано-Франківськ, Україна
tarasgoy@yahoo.com

Досліджені нові функції дійсної змінної, означені при допомозі центральних факторіальних степенів. Встановлений їх зв'язок з узагальненими гіпергеометричними функціями. Доведені деякі властивості нових функцій та формули, що їх пов'язують. Виведені звичайні диференціальні рівняння, розв'язками яких є запропоновані функції.
Ключові слова: факторіальний степінь, центральний факторіальний степінь, узагальнена гіпергеометрична функція, задача Коші.

Гой Т. П., **Неелементарные функции, порожденные центральными факториальными степенями.** Предложены новые функции действительного переменного, определенные с помощью центральных факториальных степеней. Показана их связь з обобщенными гипергеометрическими функциями. Установлены некоторые свойства новых функций и связывающие их формулы. Выведены обыкновенные дифференциальные уравнения, решениями которых есть предложенные функции.
Ключевые слова: факториальный степень, центральный факториальный степень, обобщенная гипергеометрическая функция, задача Коши.

T. P. Goy, **Non-elementary functions generated by central factorial powers.** We consider new functions generated by central factorials. Graphs of such functions are drawn and some of their properties are proved. We have established their relationship with the hypergeometric functions. It is shown, that constructed functions are solutions of ordinary differential equations, derived in the article.
Keywords: factorial powers, central factorial powers, generalized hypergeometric function, Cauchy problem.

2000 Mathematics Subject Classification: 33E20.

1. Вступ

Відомо, що математичні моделі багатьох технічних і природних процесів приводять до задач, точні розв'язки яких отримати класичними методами неможливо. Збільшення кількості неелементарних функцій приводить до суттєвого розширення кола задач, які можуть бути розв'язані у замкненому вигляді. При цьому особлива увага приділяється дослідженню нових функцій з метою їхнього подальшого застосування у теорії функцій, числових методах та у моделюванні конкретних практичних задач.

Класичні трансцендентні функції e^x, $\sin x$, $\cos x$ задаються при допомозі відповідних степеневих рядів з участю факторіалів, які можна подати у вигляді спадного факторіального степеня $n^{\underline{n}}$. Замінивши у цих степеневих рядах спадні факторіальні степені відповідними центральними факторіальними степенями, одержуємо нові неелементарні функції дійсної змінної $\tilde{E}\,(x)$, $\tilde{S}\,(x)$, $\tilde{C}\,(x)$ відповідно.

Метою статті є дослідження функцій $\tilde{E}\,(x)$, $\tilde{S}\,(x)$, $\tilde{C}\,(x)$, доведення формул, що їх пов'язують, встановлення зв'язку цих з відомими функціями, а також виведення звичайних диференціальних рівнянь, розв'язками яких є нові функції.

2. Основні означення й поняття

Означення 1. Для довільних $x \in \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}$ *факторіальним степенем* m *з кроком* $k \in \mathbb{R}$ називають вираз

$$x^{m\{k\}} = x(x+k)(x+2k)\cdot\ldots\cdot\big(x+(m-1)k\big).$$

Факторіальний степінь називають *зростаючим*, якщо $k > 0$, і *спадним*, якщо $k < 0$. Вважають, що $x^{0\{k\}} \equiv 1$. Для $k = 0$ маємо звичайний степінь, бо $x^{m\{0\}} = x^m$.

Зростаючі факторіальні степені m з кроком 1 і спадні факторіальні степені m з кроком (-1) позначимо через $x^{\overline{m}}$ і $x^{\underline{m}}$ відповідно, тобто

$$x^{\overline{m}} = x^{m\{1\}} = x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m-1),$$

$$x^{\underline{m}} = x^{m\{-1\}} = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-m+1).$$

Очевидно, що $n! = 1^{\overline{n}} = n^{\underline{n}}$.

Основні властивості зростаючих і спадних факторіальних степенів виражаються відповідно формулами

$$\overline{\Delta}x^{\overline{m}} = mx^{\overline{m-1}}, \quad \Delta x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}}, \tag{1}$$

де $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ — різниця, а $\overline{\Delta}f(x) = f(x) - f(x-1)$ — запізніла різниця функції $f(x)$.

Означення 2. Для довільних $x \in \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}$ *центральним факторіальним степенем* m *з кроком* $k > 0$ називають вираз

$$x^{m[k]} = x\left(x + \frac{mk}{2} - k\right)\left(x + \frac{mk}{2} - 2k\right)\cdot\ldots\cdot\left(x - \frac{mk}{2} + k\right),$$

причому $x^{0[k]} \equiv 1$.

Центральний факторіальний степінь m з кроком 1 позначатимемо через $x^{[m]}$, тобто $x^{[m]} = x^{m[1]}$. Наприклад,

$$x^{[5]} = (x - 3/2)\,(x - 1/2)\,x\,(x + 1/2)\,(x + 3/2)\,,$$

$$x^{[6]} = (x - 2)(x - 1)\,x^2\,(x + 1)(x + 2).$$

Якщо $\delta f(x) = f\,(x + 1/2) - f\,(x - 1/2)$ — центральна різниця функції $f(x)$, то для центральних факторіальних степенів з кроком 1 справджується формула, аналогічна до формул (1), тобто

$$\delta x^{[m]} = m x^{[m-1]}.$$

Очевидно, що

$$x^{[m]} = x\,(x + m/2 - 1)^{\underline{m}}\,.$$

Інші властивості та деякі застосування зростаючих, спадних і центральних факторіальних степенів вивчались, зокрема, у [1]–[5].

3. Аналіз останніх досліджень і публікацій

За аналогією з класичними степеневими розвиненнями

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1},$$

які можна розглядати як ряди, побудовані при допомозі спадних факторіальних степенів ($n! = n^{\underline{n}}$), у [6]–[8] означені й досліджені неелементарні функції дійсної змінної $\mathrm{Exp}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$, побудовані при допомозі зростаючих факторіальних степенів за формулами

$$\mathrm{Exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\overline{n}}}, \;\; \mathrm{Cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^{\overline{2n}}}\,x^{2n}, \;\; \mathrm{Sin}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{\overline{2n+1}}}\,x^{2n+1}.$$

Зокрема, у [6] встановлені деякі властивості цих функцій, виведені формули для їх аналітичного представлення, побудовані графіки та доведені формули, які пов'язують ці функції. Також показано, що кожна з функцій $\mathrm{Exp}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$ є розв'язком задачі Коші для звичайного лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами (першого порядку — для функції $\mathrm{Exp}(x)$ та другого порядку — для $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$).

Деякі результати цієї статті були анонсовані в [9].

4. Функція $\tilde{E}\,(x)$, побудована при допомозі центральних факторіальних степенів

Означення 3. Через $\tilde{E}\,(x)$ позначимо функцію, визначену при допомозі степеневого ряду

$$\tilde{E}\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{[n]}} = \tag{2}$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2\cdot 2} + \frac{x^3}{\frac{5}{2}\cdot 3\cdot \frac{7}{2}} + \frac{x^4}{3\cdot 4\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^5}{\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot 5\cdot\frac{11}{2}\cdot\frac{13}{2}} + \ldots .$$

Очевидно, що

$$\tilde{E}\,(x) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(3n-1)!}\,x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\,4^n}{(6n+1)!!}\,x^{2n+1}, \tag{3}$$

де $(-1)!! \equiv 1$, причому обидва ряди у (3) є збіжними на всій числовій осі.

Розглянемо окремо кожен ряд з (3). Для першого з них

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(3n-1)!}\,x^{2n} = \frac{x^2}{4}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{3n+1}{3}\right)\cdot\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{3n+2}{3}\right)}\left(\frac{x^2}{27}\right)^n\right) =$$

$$= \frac{x^2}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^{\overline{n}}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{\overline{n}}\left(\frac{5}{3}\right)^{\overline{n}} n!}\left(\frac{x^2}{27}\right)^n = \frac{x^2}{4}\cdot {}_1F_2\left(1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^2}{27}\right),$$

де ${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; z)$ — узагальнена гіпергеометрична функція, визначена при допомозі узагальненого гіпергеометричного ряду [10]:

$${}_1F_2\,(a_1; b_1, b_2; z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_1^{\overline{n}}}{b_1^{\overline{n}}\,b_2^{\overline{n}}}\cdot\frac{z^n}{n!},$$

а $a_1^{\overline{n}}$, $b_1^{\overline{n}}$, $b_2^{\overline{n}}$ — зростаючі факторіальні степені.

Для другого ряду з (3) маємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(2n-1)!!}{(6n+1)!!}x^{2n+1} = x\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{11}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{6n-1}{6}\right)\cdot\left(\frac{7}{6}\cdot\frac{13}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{6n+1}{6}\right)}\left(\frac{x^2}{27}\right)^n\right) =$$

$$= x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^{\overline{n}}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{\overline{n}}\left(\frac{7}{6}\right)^{\overline{n}} n!}\left(\frac{x^2}{27}\right)^n = x\cdot {}_1F_2\left(1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}; \frac{x^2}{27}\right).$$

Отже, для функції $\tilde{E}\,(x)$ остаточно маємо формулу

$$\tilde{E}\,(x) = 1 + \frac{x^2}{4}\cdot {}_1F_2\left(1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^2}{27}\right) + x\cdot {}_1F_2\left(1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}; \frac{x^2}{27}\right). \tag{4}$$

Єдиним нулем функції $\tilde{E}\,(x)$ є число $x_0 \approx -1{,}39945361$, а у точці $x_1 \approx$ $\approx -6{,}47065797$ вона досягає свого найменшого значення.

Графік функції $y = \tilde{E}\,(x)$ наведений на рис. 1.

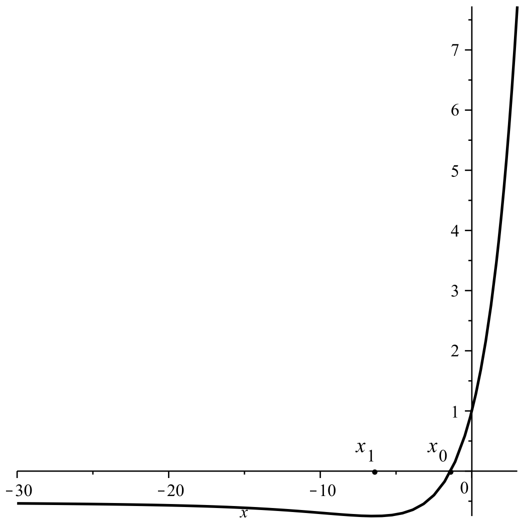

Рис. 1: Графік функції $y = \tilde{E}(x)$

5. Функції $\tilde{S}(x)$ і $\tilde{C}(x)$, побудовані при допомозі центральних факторіальних степенів

Означення 4. Через $\tilde{S}(x)$ і $\tilde{C}(x)$ позначимо функції, визначені при допомозі степеневих рядів

$$\tilde{S}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{[2n+1]}}, \tag{5}$$

$$\tilde{C}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{[2n]}}. \tag{6}$$

Аналогічно до доведення формули (4) одержуємо формули

$$\tilde{S}(x) = x \cdot {}_1F_2\left(1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}; -\frac{x^2}{27}\right), \tag{7}$$

$$\tilde{C}(x) = 1 - \frac{x^2}{4} \cdot {}_1F_2\left(1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; -\frac{x^2}{27}\right). \tag{8}$$

Очевидно, що функція $\tilde{S}(x)$ є непарною, а функція $\tilde{C}(x)$ — парною. Найменшими додатними нулями функцій $\tilde{S}(x)$, $\tilde{C}(x)$ є відповідно числа $s_0 \approx 6{,}12358366$, $c_0 \approx 2{,}07375071$.

Графіки функцій $y = \tilde{S}(x)$, $y = \tilde{C}(x)$ зображені на рисунках 2, 3. На них пунктиром проведені параболи $y^2 = \pm\frac{7\pi x}{12}$ і $\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \pm\frac{7\pi x}{12}$ відповідно.

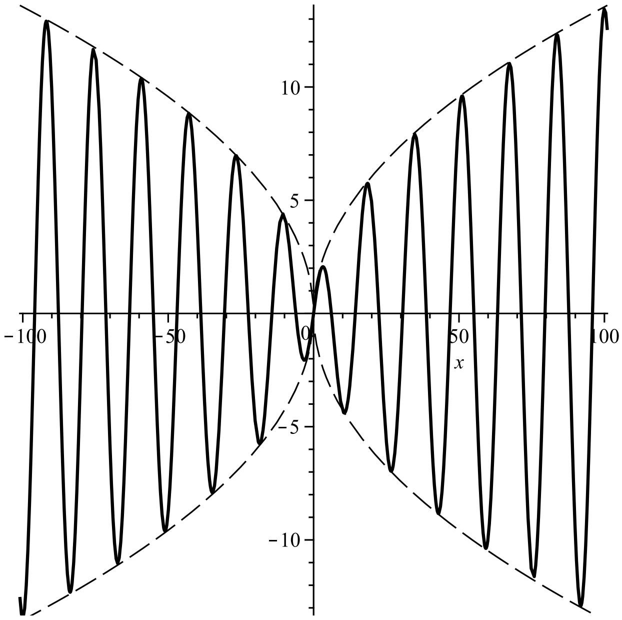

Рис. 2: Графік функції $y = \tilde{S}\,(x)$

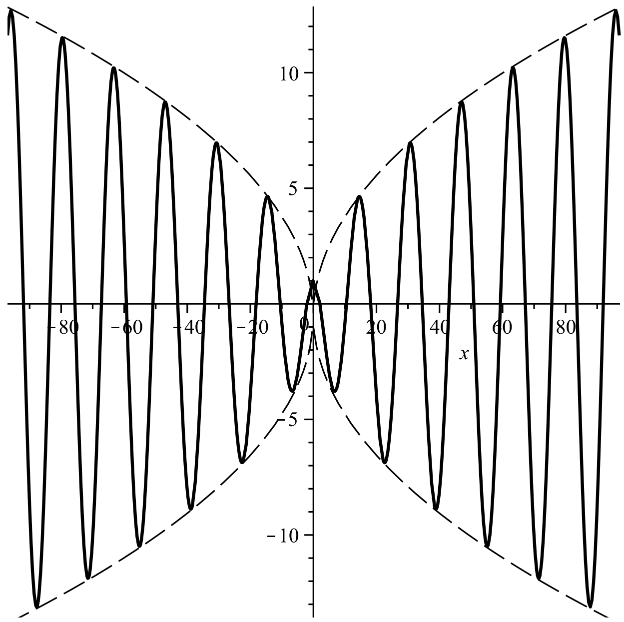

Рис. 3: Графік функції $y = \tilde{C}\,(x)$

Оскільки згідно з (4)

$$\tilde{E}\,(\pm ix) = 1 - \frac{x^2}{4} \cdot {}_1F_2\left(1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; -\frac{x^2}{27}\right) \pm ix \cdot {}_1F_2\left(1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}; -\frac{x^2}{27}\right),$$

то, враховуючи (7), (8), одержуємо формулу, аналогічну до формули Ейлера:

$$\tilde{E}\,(\pm\,x) = \tilde{C}\,(x) \pm i\tilde{S}\,(x).$$

Звідси

$$\tilde{C}\,(x) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{E}\,(ix) + \tilde{E}\,(-ix)\Big), \quad \tilde{S}\,(x) = \frac{1}{2i}\Big(\tilde{E}\,(ix) - \tilde{E}\,(-ix)\Big),$$

і, отже,

$$\tilde{C}^{\,2}(x) + \tilde{S}^{\,2}(x) = \tilde{E}\,(ix) \cdot \tilde{E}\,(-ix).$$

5. Диференціальні рівняння функцій $\tilde{S}\,(x), \tilde{C}\,(x)$

Покажемо, що функції $\tilde{S}\,(x)$, $\tilde{C}\,(x)$, означені у п. 4, є розв'язками задач Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь третього порядку з неперервними коефіцієнтами.

Теорема 1. *Функції $\tilde{S}\,(x)$, $\tilde{C}\,(x)$ є розв'язками відповідно таких задач Коші:*

$$\begin{gathered} 27x^3y''' + (4x^3 + 24x)y' + (4x^2 - 24)y = 0, \\ y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1, \;\; y''(0) = 0; \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} 27x^3y''' - 27x^2y'' + (4x^3 + 51x)y' - 48y = -48, \\ y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0, \;\; y''(0) = -\tfrac{1}{2}. \end{gathered} \tag{10}$$

Доведення. Покажемо спочатку, що функція $\tilde{S}\,(x)$ є розв'язком задачі Коші (9). Узагальнена гіпергеометрична функція ${}_1F_2\,(a_1; b_1, b_2; z)$, через яку, згідно з (7), виражається функція $\tilde{S}\,(x)$, є розв'язком лінійного диференціального рівняння третього порядку [10]

$$\big(\sigma\,(\sigma + b_1 - 1)\,(\sigma + b_2 - 1) - z\,(\sigma + a_1)\big)w(z) = 0,$$

де σ — диференціальний оператор $z\frac{d}{dz}$.

Отже, функція

$$w(z) = {}_1F_2\left(1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}; z\right) \tag{11}$$

є розв'язком звичайного диференціального рівняння

$$\big(\sigma\big(\sigma - \tfrac{1}{6}\big)\big(\sigma + \tfrac{1}{6}\big) - z\,(\sigma + 1)\big)w(z) = 0. \tag{12}$$

Оскільки

$$\sigma^1 = z\frac{d}{dz}, \quad \sigma^2 = z\frac{d}{dz} + z^2\frac{d^2}{dz^2}, \quad \sigma^3 = z\frac{d}{dz} + 3z^2\frac{d^2}{dz^2} + z^3\frac{d^3}{dz^3},$$

то з (12), виконавши нескладні перетворення, переконуємось, що функція (11) є розв'язком рівняння

$$z^2w''' + 3zw'' - \left(z - \frac{35}{36}\right)w' - w = 0. \tag{13}$$

Виконаємо у (13) заміну незалежної змінної за формулою $z=-\frac{x^2}{27}$. Тоді

$$w'_z=-\,\frac{27}{x}\,w'_x,\quad w''_{z^2}=\frac{27^2}{x^3}\left(xw''_{x^2}-w'_x\right),$$

$$w'''_{z^3}=-\,\frac{27^3}{x^5}\left(x^2w'''_{x^3}-3xw''_{x^2}+3w'_x\right)$$

і, підставляючи у (13), одержуємо, що функція $w(x)=F\Big(1;\,\frac{5}{6}\,,\frac{7}{6}\,;-\frac{x^2}{27}\Big)$ є частинним розв'язком рівняння

$$27x^2w'''+81xw''+(4x^2+24)w'+8xw=0. \tag{14}$$

Нарешті, виконуючи в (14) заміну $w(x)=\frac{\tilde S\,(x)}{x}$, одержуємо

$$27x^2\left(\frac{y'''}{x}-\frac{3y''}{x^2}+\frac{6y'}{x^3}-\frac{6y}{x^4}\right)+81x\left(\frac{y''}{x}-\frac{2y'}{x^2}+\frac{2y}{x^3}\right)+$$

$$+(4x^2+24)\left(\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}\right)+8x\frac{y}{x}=0,$$

тобто функція $y=\tilde S\,(x)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння з (9).

Те, що функція $\tilde S\,(x)$ задовольняє початкові умови $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=0$, випливає з (7).

Доведемо тепер, що функція $\tilde C\,(x)$ є розв'язком задачі Коші (10). З (8) випливає, що функція $\tilde C\,(x)$ задовольняє початкові умови з (10). Покажемо, що вона є частинним розв'язком відповідного диференціального рівняння.

Аналогічно, як це було зроблено для функції $\tilde S\,(x)$, переконуємося, що функція

$$w(z)=F\left(1;\,\frac{4}{3},\frac{5}{3};z\right)$$

з (8) є розв'язком рівняння

$$z^2w'''+4zw''+\left(\frac{20}{9}-z\right)w'-w=0,$$

а функція $w(x)=F\Big(1;\,\frac{4}{3},\frac{5}{3};-\frac{x^2}{27}\Big)$ — розв'язком рівняння

$$27x^2w'''+135xw''+(4x^2+105)w'+8xw=0. \tag{15}$$

Підставляючи тепер в (15)

$$w(x)=\frac{4}{x^2}\big(1-\tilde C\,(x)\big),$$

одержуємо, що функція $y=\tilde C\,(x)$ є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння з (10). *Теорему доведено.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основания математики. – М. : Мир, 1998. – 703 с.

2. Заторський Р. А. Числення трикутних матриць та його застосування. – Івано-Франківськ: Сімик, 2010. – 508 с.

3. Риордан Дж. Комбинаторные тождества. – М.: Наука, 1982. – 254 с.

4. Jordan C. Calculus of Finite Differences. – New York: Chelsea Publishing, 1939. – 652 p.

5. Roman S. The Umbral Calculus. – Orlando (USA): Academic Press, 1984. – 193 p.

6. Гой Т. П., Заторський Р. А. Нові функції, породжені зростаючими факторіалами, та їх властивості // Буковин. мат. журн. – 2013. – **1**, № 1-2. – С. 28–33.

7. Гой Т. П., Заторський Р. А. Диференціальні рівняння функцій, породжених зростаючими факторіальними степенями // Тези доп. Міжнар. матем. конф. "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування". – К.: Інститут математики НАН України, 2013. – С. 83–84.

8. Гой Т. П., Заторський Р. А. Про нові функції, породжені зростаючими факторіальними степенями, та їх властивості // Матеріали Міжнар. наук.-практ. інтернет-конф. "Математичне моделювання прикладних задач математики, фізики, механіки". – Харків: Екограф, 2013. – С. 103–106.

9. Гой Т. П. Про диференціальні рівняння функцій, породжених центральними факторіальними степенями // Тези Кримської міжнар. матем. конф. Том 2. – Сімферополь: Вид-во КНЦ НАНУ, 2013. – С. 4–5.

10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1973. – 294 с.

Стаття одержана: 24.03.2014; перероблений вариант: 10.11.2014; прийнята: 11.11.2014.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.977.14 № 1133, 2014, с.140–155

Несколько подходов к определению границ изменения возмущения в задаче глобального робастного синтеза

Т. В. Ревина

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
пл.Свободы 4, 61022, Харьков, Украина
t.revina@karazin.ua

Рассмотрена задача глобального робастного позиционного синтеза ограниченного управления системой с неизвестными ограниченными возмущениями. На основе метода функции управляемости В. И. Коробова предложены различные подходы к нахождению границ изменения возмущения. Построено независящее от возмущения управление, которое переводит произвольную начальную точку в начало координат за конечное время, для которого приведена оценка сверху.
Ключевые слова: задача робастного синтеза, позиционное ограниченное управление, неизвестное ограниченное возмущение.

Ревіна Т. В., **Кілька підходів до визначення меж зміни збурення в задачі глобального робастного синтезу.** Розглянуто задачу глобального робастного позиційного синтезу обмеженого керування системою з невідомими обмеженими збуреннями. На основі методу функції керованості В. І. Коробова запропоновано різноманітні підходи до знаходження меж зміни збурення. Побудоване незалежне від збурення керування, яке переводить довільну початкову точку у початок координат за скінчений час, для якого наведена оцінка зверху.
Ключові слова: задача робастного синтезу, позиційне обмежене керування, невідоме обмежене збурення.

T. V. Revina, **Several approaches to delimiting a perturbation in the global robust feedback synthesis problem.** The paper deals with the problem of the global robust feedback synthesis of a bounded control for a system with an unknown bounded perturbations. On the basis of V. I. Korobov's controllability function method we suggest several approaches to delimiting a perturbation. We provide a positional control which is independent of the perturbation and steers an arbitrary initial point to the origin in a finite time; an estimate from above for the time of motion is given.
Keywords: robust feedback synthesis problem, positional bounded control, unknown bounded perturbation.

2000 Mathematics Subject Classification: 93B50, 93C73, 93C10, 95B52, 93B35.

1. Постановка задачи

В этой работе предложено конструктивное решение задачи глобального робастного позиционного синтеза ограниченного управления для одного специального класса систем. Предлагаются разные подходы к определению границы изменения возмущения. Получена оценка сверху на время движения из произвольной начальной точки в начало координат.

Вначале введем понятие локального позиционного синтеза ограниченного управления. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{1}$$

где $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$, причем Ω таково, что $0 \in \operatorname{int} \Omega$.

Под *локальным позиционным синтезом ограниченного управления* будем понимать нахождение такого управления $u = u(x) \in \Omega$, что траектория $x(t)$ замкнутой системы $\dot{x} = f(t, x, u(x))$, выходящая из произвольной начальной точки $x(0) = x_0 \in Q \subset \mathbb{R}^n$, оканчивается в начале координат в некоторый конечный момент времени $T(x_0) < \infty$, т. е. $\lim\limits_{t \to T(x_0)} x(t) = 0$. При этом если $Q = \mathbb{R}^n$, то синтез называется *глобальным*.

Для решения поставленной задачи в 1979 году Коробовым В. И. был предложен метод функции управляемости [2, 3], развитый в совместных работах Коробова В. И., Скляра Г. М. [7] и других авторов (например, [1]). К работам Коробова В. И. примыкают работы Polyakov и др. [18], Rodoumta и др. [19]. Приложение метода к задачам управления хаосом можно найти в работе Bowong и др. [12]. Другие идеи для близких постановок задач развиваются в работах [13, 14, 16]. В работе [4] метод функции управляемости был обобщен на случай систем с возмущением вида

$$\dot{x} = Ax + b(u + v), \quad |u| \le d, \quad |v| \le \gamma < d,$$

где v – неизвестное возмущение.

В работе в [6] была поставлена следующая задача: для систем вида

$$\dot{x} = (A + pD)x + bu, \quad -d_1 \le p \le d_2,\ (d_1, d_2 > 0)$$

требуется построить такое управление $u = u(x)$, $|u| \le 1$, что траектория $x(t, x_0)$ системы $\dot{x} = (A + pD)x + bu(x)$, выходящая из произвольной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в момент времени $t_0 = 0$, попадает в точку $x_1 = 0$ за конечное время $T(x_0)$ при любом $p \in [-d_1; d_2]$. Эту задачу мы будем называть задачей робастного позиционного синтеза (точное определение будет дано ниже). Далее, в работе [9] решена задача робастного позиционного синтеза для конкретных колебательных систем второго и четвертого порядков.

В данной работе мы рассматриваем задачу глобального робастного позиционного синтеза ограниченного управления для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 + p(t, x))x_2, \\ \dot{x}_i = (1 + r_i p(t, x))x_{i+1},\ i = 2, \ldots, n-1, \\ \dot{x}_n = u, \end{cases} \tag{2}$$

где $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, u – скалярное управление, удовлетворяющее ограничению $|u| \leq 1$, $r_2, \ldots r_{n-1}$ – некоторые числа, $p(t,x)$ – *неизвестное* ограниченное возмущение, удовлетворяющее ограничению $|p(t,x)| \leq d$.

Для числа d через $\mathcal{P}_d$ обозначим класс функций $p(t,x):\ [0;+\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $p(t,x)$ непрерывно по переменной t;

2) в каждой области

$$K_1(t_1,\rho_2) = \{(t,x):\ 0 \leq t \leq t_1,\ \|x\| \leq \rho_2\},\ \rho_2 > 0,\ t_1 > 0$$

функция $p(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|p(t,x'') - p(t,x')| \leq \ell_1(t_1,\rho_2)\|x'' - x'\|;$$

3) для всех $(t,x) \in [0;+\infty) \times \mathbb{R}^n$ функция $p(t,x)$ удовлетворяет ограничению $|p(t,x)| \leq d$.

Под *d-глобальным робастным позиционным синтезом ограниченного управления* будем понимать нахождение такого управления $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, что:

1) в каждой области $K_2(\rho_1,\rho_2) = \{x:\ 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2\}$, $0 < \rho_1 < \rho_2$ функция $u(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|u(x'') - u(x')| \leq \ell_2(\rho_1,\rho_2)\|x'' - x'\|;$$

2) для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено условие $|u(x)| \leq 1$;

3) для всех $p(t,x) \in \mathcal{P}_d$ траектория $x(t)$ замкнутой системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 + p(t,x))x_2, \\ \dot{x}_i = (1 + r_i p(t,x))x_{i+1},\ i = 2,\ldots,n-1, \\ \dot{x}_n = u(x), \end{cases}$$

выходящая из произвольной начальной точки $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, оканчивается в начале координат в некоторый конечный момент времени $T(x_0,p) < \infty$, т. е. $\lim\limits_{t \to T(x_0,p)} x(t) = 0$.

Наша цель – для заданных $r_2,\ldots,r_{n-1}$ получить оценку для d, при котором задача глобального робастного позиционного синтеза имеет решение. Заметим, что при $p(t,x) = -1$ в системе (2) первая координата не управляема, т. е. не при всех d задача разрешима.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 представлены некоторые результаты метода функции управляемости, необходимые в дальнейшем. В разделе 3 содержатся основные результаты работы (теорема 2). В разделе 4 приведен пример.

2. Метод функции управляемости

Опишем один из возможных подходов к решению задачи глобального позиционного синтеза для канонической системы [5, 7]:

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \ldots,\ \dot{x}_{n-1} = x_n,\ \dot{x}_n = u, \tag{3}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, u — скалярное управление, удовлетворяющее ограничению $|u| \leq 1$. Эту систему можно записать в виде $\dot{x} = A_0 x + b_0 u$, где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при $p(t,x) = 0$ система (2) полностью управляема и совпадает с системой (3). Пусть матрица F^{-1} имеет вид

$$F^{-1} = \int_0^1 (1-t) e^{-A_0 t} b_0 b_0^* e^{-A_0^* t} dt =$$

$$= \left(\frac{(-1)^{2n-i-j}}{(n-i)!(n-j)!(2n-i-j+1)(2n-i-j+2)} \right)_{i,j=1}^{n}.$$

В работе [10] указан явный вид элементов f_{ij} матрицы F. Обозначим

$$D(\Theta) = diag \left(\Theta^{-\frac{2n-2i+1}{2}} \right)_{i=1}^{n}.$$

Теорема 1 (Коробов, Скляр [7]) *Определим функцию управляемости $\Theta = \Theta(x)$ как единственное положительное решение уравнения*

$$2a_0 \Theta = (D(\Theta) F D(\Theta) x, x), \quad x \neq 0, \quad \Theta(0) = 0, \tag{4}$$

где постоянная a_0 выбирается согласно неравенству

$$0 < a_0 \leq \frac{2}{f_{nn}}. \tag{5}$$

Тогда управление вида

$$u(x) = -\frac{1}{2}\, b_0^* D(\Theta(x)) F D(\Theta(x)) x \tag{6}$$

решает для системы (3) задачу глобального позиционного синтеза непрерывного управления, удовлетворяющего ограничению $|u| \leq 1$. При этом функция управляемости $\Theta(x_0)$ является временем движения из произвольной точки x_0 в начало координат.

3. Основные результаты

Перепишем систему (2) в матричном виде

$$\dot{x} = (A_0 + p(t,x)R)x + b_0 u,$$

где матрицы A_0 и b_0 введены ранее, а матрица R имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $y(\Theta, x) = D(\Theta)x$. Тогда уравнение (4) принимает вид

$$2a_0\Theta = (Fy(\Theta,x), y(\Theta,x)). \tag{7}$$

Выберем постоянную a_0, удовлетворяющую неравенству (5). Рассмотрим замкнутую систему

$$\dot{x} = (A_0 + p(t,x)R)x + b_0 u(x), \tag{8}$$

где $u(x)$ задается формулой (6), $\Theta(x(t))$ – единственное положительное решение уравнения (7). Обозначим через $x(t)$ траекторию системы (8) и найдем производную в силу системы $\dot{\Theta} = \frac{d}{dt}\Theta(x(t))$. Из уравнения (7) имеем

$$2a_0\dot{\Theta} = (F\dot{y}(\Theta,x), y(\Theta,x)) + (Fy(\Theta,x), \dot{y}(\Theta,x)). \tag{9}$$

Найдем $\dot{y}(\Theta,x)$. Обозначим $H = diag\left(-\frac{2n-2i+1}{2}\right)_{i=1}^{n}$ тогда $\dfrac{d}{d\Theta}D(\Theta) = \dfrac{1}{\Theta}HD(\Theta)$, откуда

$$\dot{y}(\Theta,x) = \dot{D}(\Theta)x + D(\Theta)\dot{x} = \frac{\dot{\Theta}}{\Theta}Hy(\Theta,x) + D(\Theta)A_0D^{-1}(\Theta)y(\Theta,x)+$$

$$+p(t,x)D(\Theta)RD^{-1}(\Theta)y(\Theta,x) - \frac{1}{2}D(\Theta)b_0b_0^*D(\Theta)Fy(\Theta,x).$$

Обозначим

$$F^1 = F - FH - HF = ((2n-i-j+2)f_{ij})_{i,j=1}^{n} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2nf_{11} & (2n-1)f_{12} & \dots & (n+1)f_{1n} \\ (2n-1)f_{21} & (2n-2)f_{22} & \dots & nf_{2n} \\ & & \dots & \\ (n+1)f_{1n} & nf_{2n} & \dots & 2f_{nn} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что F^1 – положительно определенная матрица [5]. Обозначим

$$S(\Theta) = \Theta(FD(\Theta)RD^{-1}(\Theta) + D^{-1}(\Theta)R^*D(\Theta)F).$$

Нетрудно установить тождество [5] $D(\Theta)RD^{-1}(\Theta)=\Theta^{-1}R$, откуда

$$S(\Theta)=S=FR+R^{*}F.$$

В дальнейшем мы существенно пользуемся тем, что матрица S не зависит от Θ. Укажем явный вид матрицы $S:$

$$\begin{pmatrix} 0 & f_{11} & f_{12}r_2 & \dots & f_{1n-1}r_{n-1}\\ f_{11} & 2f_{12} & f_{13}+f_{22}r_2 & \dots & f_{1n}+f_{2n-1}r_{n-1}\\ f_{12}r_2 & f_{13}+f_{22}r_2 & 2f_{23}r_2 & \dots & f_{2n}r_2+f_{3n-1}r_{n-1}\\ & & \dots & & \\ f_{1n-1}r_{n-1} & f_{1n}+f_{2n-1}r_{n-1} & f_{2n}r_2+f_{3n-1}r_{n-1} & \dots & 2f_{n-1n}r_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Можно доказать тождества [5]

$$D(\Theta)A_0D^{-1}(\Theta)=\frac{1}{\Theta}A_0,\quad D(\Theta)b_0=\Theta^{-1/2}b_0,\quad FA_0+A_0^{*}F-Fb_0b_0^{*}F=-F^{1},$$

пользуясь которыми, из равенства (9) получаем

$$\dot\Theta(2a_0-\frac{1}{\Theta}((FH+HF)y(\Theta,x),y(\Theta,x)))=\frac{1}{\Theta}((-F^{1}+p(t,x)S)y(\Theta,x),y(\Theta,x)).$$

Принимая во внимание уравнение (7), получаем, что производная функции управляемости в силу системы (8) имеет вид

$$\dot\Theta=\frac{(-F^{1}+p(t,x)S)y(\Theta,x),y(\Theta,x))}{(F^{1}y(\Theta,x),y(\Theta,x))}. \tag{10}$$

Введем обозначения:

- m_{ij} – элементы матрицы M;
- M^{*} – матрица, транспонированная к матрице M;
- $\sigma(M)$ – спектр матрицы M;
- $\rho(M)=max\{|\lambda|,\ \lambda\in\sigma(M)\}$ – спектральный радиус матрицы M;
- $\lambda_{min}(M)=\min\{\lambda:\ \lambda\in\sigma(M)\}$, где M – симметричная матрица;
- $\lambda_{max}(M)=\max\{\lambda:\ \lambda\in\sigma(M)\}$, где M – симметричная матрица;
- $||M||_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|m_{ij}|$ – матричная норма;
- $|M|=(|m_{ij}|)_{i,j=1}^{n}$ – абсолютное значение матрицы M, т. е. матрица, состоящая из модулей элементов матрицы M;
- $||x||_2=\sqrt{|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2}$ – евклидова векторная норма;
- $||S||_2=max\{\sqrt{\lambda}:\ \lambda\in\sigma(S^{*}S)\}$ – евклидова матричная норма;
- выражение $M<0$ означает, что матрица M отрицательно определена;
- $M_1<M_2$ означает, что $M_1-M_2<0$.

В дальнейшем мы также используем следующие обозначения:

- $\lambda_i(F^1)\in\sigma(F^1)$ – собственные значения матрицы F^1;
- $\mathcal{Q}=\int\limits_0^\infty e^{2(\gamma_1-1)F^1t}dt$;
- $Z(\gamma_1)=|U^{*}|\cdot|S|\cdot|U|$, где U – ортогональная матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $((\gamma_1-1)F^1)$.

Теорема 2 *Пусть* $0 < \gamma_1 < 1$ *и выполнено одно из следующих условий:*

$$\begin{aligned} 1.\ d_0 &= \frac{(1-\gamma_1)\lambda_{min}(F^1)}{\rho(S)}, & (11)\\ 2.\ d_0 &= \frac{1}{2||\mathcal{Q}||_\infty ||S||_\infty}, & (12)\\ 3.\ d_0 &= (1-\gamma_1)\min_{1\le i\le n} \frac{\lambda_i(F^1)}{\sum\limits_{j=1}^{n} z_{ij}(\gamma_1)}, & (13)\\ 4.\ d_0 &= \frac{1-\gamma_1}{\rho(|(F^1)^{-1}|\cdot|S|)}. & (14)\end{aligned}$$

Тогда для всех d *таких, что* $0 \le d < d_0$, *управление, задаваемое формулой (6), где функция управляемости* $\Theta(x)$ *есть единственное положительное решение уравнения (4) при* a_0, *удовлетворяющем неравенству (5), решает задачу* d*-глобального робастного позиционного синтеза. При этом траектория системы (8), выходящая из произвольной начальной точки* $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, *оканчивается в точке* $x_1(T) = 0$ *в некоторый конечный момент времени* $T = T(x_0, d)$, *такой, что*

$$T(x_0, d) \le \Theta(x_0)/\gamma_1. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть d_0 задается одной из формул (11)-(14). Рассмотрим семейство симметричных матриц $K(p) = (-1+\gamma_1)F^1 + pS$. Докажем, что из устойчивости этого семейства при всех $|p| \le d < d_0$ вытекает, что

$$\dot\Theta < -\gamma_1.$$

Пусть семейство $K(p)$ устойчиво при всех $|p| \le d < d_0$, то есть $K(p) < 0$. Тогда $-F^1 + pS < -\gamma_1 F^1$. Тогда для всех $y(\Theta, x)$ и для всех $|p(t,x)| \le d < d_0$ выполнено

$$((-F^1 + p(t,x)S)y(\Theta,x), y(\Theta,x)) < -\gamma_1(F^1 y(\Theta,x), y(\Theta,x)). \tag{16}$$

Поэтому, подставляя (16) в (10), в силу положительной определенности матрицы F^1 [5] получаем $\dot\Theta < -\gamma_1$. Дальнейший ход доказательства аналогичен доказательству для канонической системы [5][Теорема 1.2]

Теперь в каждом из случаев (11)-(14) докажем устойчивость семейства $K(p)$ при всех $|p| \le d < d_0$.

1. Условие (11). Воспользуемся утверждением

Лемма 1 (Хорн и др. [11], глава 6.3) *Пусть* K *– нормальная матрица (т. е.* $KK^* = K^*K$*) с собственными значениями* $\hat\lambda_1, \dots, \hat\lambda_n$ *и* E *– произвольная матрица. Если* λ *– собственное значение матрицы* $K + E$, *то найдется* $\hat\lambda_i$, *для которого*

$$|\lambda - \hat\lambda_i| \le ||E||_2. \tag{17}$$

Обозначим $K = (-1+\gamma_1)F^1$ (это симметрическая матрица, следовательно, она является нормальной) и $E = p\cdot S$. Для этих матриц мы можем воспользоваться леммой 1. Пусть $\lambda(p) \in \sigma(K(p))$ – собственное значение матрицы $K(p)$. Условие (17) означает, что существует такое собственное значение $\hat{\lambda}_i$ матрицы K, что

$$|\lambda(p) - \hat{\lambda}_i| \le d \cdot ||S||_2 < d_0 \cdot ||S||_2. \tag{18}$$

При этом $\hat{\lambda}_i$ могут совпадать при разных $\lambda(p)$.

Заметим, что $\hat{\lambda}_i = (-1+\gamma_1)\lambda_i(F^1)$. Поскольку $S = S^*$, то $||S||_2 = \rho(S)$. Из условия (18) вытекает, что

$$\lambda(p) < (-1+\gamma_1)\lambda_i(F^1) + d_0\rho(S).$$

Подставим d_0 из условия (11). Тогда

$$\lambda(p) < (-1+\gamma_1)\lambda_i(F^1) + (1-\gamma_1)\lambda_{min}(F^1) = (1-\gamma_1)(-\lambda_i(F^1) + \lambda_{min}(F^1)) \le 0,$$

следовательно, при выполнении условия (11) при $0 < \gamma_1 < 1$ семейство матриц $K(p)$ устойчиво при всех $|p| \le d < d_0$, то есть все собственные значения матричного семейства $K(p)$ отрицательны.

2. Условие (12). Воспользуемся результатами работы [21], в которой используется понятие интервальной матрицы.

Определение 1 *Пусть A^m – матрица с элементами a_{ij}^m, A^M – матрица с элементами a_{ij}^M. Интервальной матрицей $[A^m, A^M]$ называется семейство матриц вида $[A^m, A^M] = \{A:\ a_{ij}^m \le a_{ij} \le a_{ij}^M,\ 1 = i, j \le n\}$. Обозначим $A_c = (A^m + A^M)/2$.*

Лемма 2 (Wang и др. [21]) *Пусть для интервальной матрицы $[A^m, A^M]$ выполнено:*
1) матрицы A^m и A^M являются симметричными;
2) матрица A_c устойчива;
3) $||A^M - A^m||_\infty < 1/||\mathcal{Q}||_\infty$, где $\mathcal{Q}$ – решение матричного уравнения Ляпунова $\mathcal{Q}A_c + A_c\mathcal{Q} = -I$.

Тогда интервальная матрица $[A^m, A^M]$ устойчива (т. е. каждая матрица семейства является устойчивой).

Примем $A^m = (-1+\gamma_1)F^1 - d|S|$, $A^M = (-1+\gamma_1)F^1 + d|S|$, тогда $K(p) \subset [A^m, A^M]$. Заметим, что матрица $A_c = K(0) = (-1+\gamma_1)F^1$ при $0<\gamma_1<1$ является устойчивой (напомним, что матрица F^1 является положительно определенной [5]). Тогда матричное уравнение Ляпунова $\mathcal{Q}A_c + A_c\mathcal{Q} = -I$ имеет единственное решение, которое задается равенством $\mathcal{Q} = \int\limits_0^\infty e^{2A_ct}dt$. Вычислим

$$||A^M - A^m||_\infty = ||2d \cdot |S|\ ||_\infty < 2d_0 \cdot ||S||_\infty.$$

Подставим d_0 из условия (12). Тогда для всех $|p| \le d < d_0$ выполнено

$$||A^M - A^m||_\infty < 2d_0 \cdot ||S||_\infty = 1/||\mathcal{Q}||_\infty.$$

Следовательно, при выполнении условия (12) выполнены условия леммы 2, то есть семейство матриц $[A^m, A^M]$ устойчиво, а значит и $K(p)$ устойчиво при всех $|p| \le d < d_0$.

3. Условие (13). В работе [15] рассматривается интервальная матрица вида $A_I = A_c + \delta A$, причем элементы матрицы δA удовлетворяют условию $|\delta a_{ij}| \le \triangle a_{ij}$. Обозначим через $\triangle A$ матрицу с элементами $\triangle a_{ij}$.

Лемма 3 (Juang и др. [17], Franze и др. [15]) *Пусть A_c диагонализируема, $\sigma(A_c) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, U – матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы A_c. Обозначим $Z = |U^{-1}| \cdot \triangle A \cdot |U|$. Тогда собственные значения интервальной матрицы $A_c + \delta A$ принадлежат объединению шаров с центрами λ_i и радиусами $\rho_i^r = \sum\limits_{j=1}^{n} z_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$ (сумма элементов строки матрицы Z), а также объединению шаров с центрами λ_i и радиусами $\rho_i^c = \sum\limits_{j=1}^{n} z_{ji}, i = 1, \ldots, n$ (сумма элементов столбца матрицы Z).*

Пусть $A_c = (-1+\gamma_1)F^1$, $\delta A = p \cdot S$, тогда $\triangle A = d \cdot |S|$. Заметим, что собственные значения матрицы A_c имеют вид $\lambda_i = (-1+\gamma_1)\lambda_i(F^1)$. Напомним, что $Z(\gamma_1) = |U^*| \cdot |S| \cdot |U|$, где U – ортогональная матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $((\gamma_1 - 1)F^1)$. Для построения U выберем ортогональные собственные векторы, тогда $U = (U^{-1})^*$. Кроме того, заметим, что для произвольной матрицы $|M^*| = |M|^*$. Тогда $Z(\gamma_1)$ – симметричная матрица, откуда $\rho_k^r = \rho_k^c$.

Лемма 3 означает, что для каждого $\lambda(p) \in \sigma(K(p))$ существует $k = 1, \ldots, n$, такое, что

$$|\lambda(p) - (-1+\gamma_1)\lambda_k(F^1)| \le d \sum_{j=1}^{n} z_{kj}(\gamma_1) < d_0 \sum_{j=1}^{n} z_{kj}(\gamma_1), \tag{19}$$

следовательно,

$$\lambda(p) < (-1+\gamma_1)\lambda_k(F^1) + d_0 \sum_{j=1}^{n} z_{kj}(\gamma_1).$$

Подставим d_0 из условия (13). Тогда

$$\lambda(p) < (1-\gamma_1)\sum_{j=1}^{n} z_{kj}(\gamma_1) \left(-\frac{\lambda_k(F^1)}{\sum\limits_{j=1}^{n} z_{kj}} + \min_{1 \le i \le n} \frac{\lambda_i(F^1)}{\sum\limits_{s=1}^{n} z_{is}(\gamma_1)} \right) \le 0.$$

Следовательно, при выполнении условия (13) семейство матриц $K(p)$ устойчиво при всех $|p| \leq d < d_0$.

4. Условие (14). В работе [20] рассматривается симметричная интервальная матрица, т. е. $A^m = A_c - \triangle A,\ \ A^M = A_c + \triangle A$.

Лемма 4 (Rohn [20]) *Пусть $\triangle A$ – матрица, каждый элемент которой неотрицателен. Пусть A_c и $\triangle A$ являются симметричными матрицами и A_c устойчива, причем выполнено неравенство*

$$\rho(|A_c^{-1}|\triangle A) < 1. \tag{20}$$

Тогда интервальная матрица $[A_c - \triangle A; A_c + \triangle A]$ устойчива (т. е. каждая матрица семейства является устойчивой).

Заметим, что

$$K(p) \subset [(-1+\gamma_1)F^1 - d|S|; (-1+\gamma_1)F^1 + d|S|].$$

Докажем, что семейство $[(-1+\gamma_1)F^1 - d|S|; (-1+\gamma_1)F^1 + d|S|]$ устойчиво, откуда будет вытекать устойчивость семейства $K(p)$.

Положим $A_c = (-1+\gamma_1)F^1$. Эта матрица устойчива при $0 < \gamma_1 < 1$. Положим $\triangle A = d \cdot |S|$. Тогда

$$\rho(|A_c^{-1}|\triangle A) = \rho(|((-1+\gamma_1)F^1)^{-1}| \cdot d \cdot |S|) =$$

$$= \frac{d\rho(|(F^1)^{-1}| \cdot |S|)}{1-\gamma_1} < \frac{d_0\rho(|(F^1)^{-1}| \cdot |S|)}{1-\gamma_1}.$$

Подставим d_0 из условия (14). Тогда для всех $|p| \leq d < d_0$

$$\rho(|A_c^{-1}|\triangle A) < 1.$$

Итак, при выполнении условия (14) выполнены условия леммы 4, то есть семейство матриц $K(p)$ устойчиво при всех $|p| \leq d < d_0$. $\Box$

Замечание 1. Доказанная теорема означает, что если $|p(t,x)| \leq d < d_0$, где d_0 задается одной из формул (11)-(14), то можно применять метод функции управляемости для построения синтезирующего управления. Для нахождения траектории, начинающейся в заданной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, поступаем следующим образом. Решаем уравнение (4) при $x = x_0$ и находим единственный положительный корень $\Theta(x_0) = \theta_0$. Выбираем число d_0 согласно одной из оценок в теореме. Положим $\theta(t) = \Theta(x(t))$. При всех значениях возмущения $|p(t,x)| \leq d < d_0$ траектория является решением следующей задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_0 + p(t,x)R)x - \frac{1}{2}\, b_0 b_0^* D(\theta) F D(\theta) x, \\ \dot{\theta} = \dfrac{(-F^1 + p(t,x)S)D(\theta)x, D(\theta)x)}{(F^1 D(\theta)x, D(\theta)x)} \\ x(0) = x_0,\ \theta(0) = \theta_0. \end{cases}$$

Заметим, что при этом уравнение (4) достаточно решить только один раз – для нахождения θ_0.

Замечание 2. В работе [14] рассматривается задача стабилизации за конечное время для системы вида

$$\begin{cases} \dot{x}_i = d_i(x)x_{i+1} + f_i(x_{i+1}, \dots, x_n, u), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = d_n(x)u + f_n(u), \end{cases}$$

в предположении, что $0 < \underline{d_i} \leq d_i(x) \leq \overline{d_i}$ – непрерывные функции, которые не известны заранее. В отличие от работы [14] мы указываем границы изменения неизвестных возмущений $d_i(x)$, при этом мы допускаем, что возмущения могут зависеть от времени. Отметим, что применение метода функции управляемости позволяет нам построить управление, удовлетворяющее заранее заданным ограничениям, и получить оценку на время попадания.

4. Робастный синтез для трехмерной системы

Рассмотрим задачу глобального робастного позиционного синтеза для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 + p(t, x_1, x_2, x_3))x_2, \\ \dot{x}_2 = (1 + r_2 p(t, x_1, x_2, x_3))x_3, \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \tag{21}$$

Запишем эту систему в матричном виде $\dot{x} = (A_0 + pR)x + b_0 u$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть ограничения на управление имеют вид $|u| \leq 1$. Хорошо известен случай, когда p является постоянной величиной [8]. Мы рассматриваем p как неизвестное ограниченное возмущение: $|p(t, x_1, x_2, x_3)| \leq d$. Имеем

$$F = \begin{pmatrix} 2400 & 960 & 120 \\ 960 & 420 & 60 \\ 120 & 60 & 12 \end{pmatrix}, \quad F^1 = \begin{pmatrix} 14400 & 4800 & 480 \\ 4800 & 1680 & 180 \\ 480 & 180 & 24 \end{pmatrix},$$

$$(F^1)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0.002 & -0.008 & 0.016 \\ -0.008 & 0.033 & -0.083 \\ 0.016 & -0.083 & 0.333 \end{pmatrix},$$

$$|(F^1)^{-1}| \approx \begin{pmatrix} 0.002 & 0.008 & 0.016 \\ 0.008 & 0.033 & 0.083 \\ 0.016 & 0.083 & 0.333 \end{pmatrix},$$

$$D(\Theta) = \begin{pmatrix} \Theta^{-\frac{5}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \; S = \begin{pmatrix} 0 & 2400 & 960r_2 \\ 2400 & 1920 & 60(2+7r_2) \\ 960r_2 & 60(2+7r_2) & 120r_2 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы F^1 :

$$\lambda_1(F^1) \approx 16024.4,\; \lambda_2(F^1) \approx 76.75,\; \lambda_3(F^1) \approx 2.81.$$

Пусть $r_2 = -0.1$. В этом случае

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 2400 & -96 \\ 2400 & 1920 & 78 \\ -96 & 78 & -12 \end{pmatrix}, \quad |S| = \begin{pmatrix} 0 & 2400 & 96 \\ 2400 & 1920 & 78 \\ 96 & 78 & 12 \end{pmatrix},$$

$\rho(S) \approx 3544.91,\; ||S||_\infty = 2400 + 1920 + 78 = 4398.$

Положим $\gamma_1 = 0.01$. В силу формулы (11)

$$d_0 = \frac{(1-\gamma_1)\lambda_{min}(F^1)}{\rho(S)} \approx \frac{0.99 \cdot 2.81}{3544.91} \approx 0.0007.$$

В выражении (12)

$$\mathcal{Q} = \int\limits_0^\infty e^{2(\gamma_1-1)F^1 t} dt \approx \begin{pmatrix} 0.001 & -0.004 & 0.008 \\ -0.004 & 0.016 & -0.042 \\ 0.008 & -0.042 & 0.168 \end{pmatrix},$$

$||\mathcal{Q}||_\infty \approx 0.008 + 0.042 + 0.168 \approx 0.218$. В силу формулы (12)

$$d_0 = \frac{1}{2||\mathcal{Q}||_\infty ||S||_\infty} \approx \frac{1}{2 \cdot 0.218 \cdot 4398} \approx 0.0005.$$

В выражении (13) матрица, составленная из собственных векторов матрицы $((\gamma_1 - 1)F^1)$, и ее модуль имеют вид

$$U \approx \begin{pmatrix} -0.947 & 0.314 & 0.051 \\ -0.317 & -0.914 & -0.251 \\ -0.032 & -0.254 & 0.966 \end{pmatrix}, \quad |U| \approx \begin{pmatrix} 0.947 & 0.314 & 0.051 \\ 0.317 & 0.914 & 0.251 \\ 0.032 & 0.254 & 0.966 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$Z(0.01) \approx \begin{pmatrix} 1645.438 & 2910.089 & 876.397 \\ 2910.089 & 3040.208 & 850.911 \\ 876.397 & 850.911 & 241.696 \end{pmatrix},$$

$$\sum_{j=1}^n z_{1j}(\gamma_1) \approx 1645.438 + 2910.089 + 876.397 \approx 5431.93,$$

$$\sum_{j=1}^n z_{2j}(\gamma_1) \approx 2910.089 + 3040.208 + 850.911 \approx 6801.21,$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_{3j}(\gamma_1) \approx 876.397 + 850.911 + 241.696 \approx 1969.01.$$

В силу формулы (13)

$$d_0 = (1-\gamma_1) \min_{1\le i\le n} \frac{\lambda_i(F^1)}{\sum\limits_{j=1}^{n} z_{ij}(\gamma_1)} \approx 0.99 \min\left\{\frac{16024.4}{5431.93}, \frac{76.75}{6801.21}\ \frac{2.81}{1969.01}\right\} \approx$$

$$\approx 0.99 \min\{2.95, 0.011, 0.0014\} \approx 0.0014.$$

В выражении (14)

$$|(F^1)^{-1}| \cdot |S| \approx \begin{pmatrix} 21.6 & 22.8 & 1.07 \\ 88 & 90.5 & 4.4 \\ 232 & 226 & 12.1 \end{pmatrix},$$

$\rho(|(F^1)^{-1}| \cdot |S|) \approx 123.696$. В силу формулы (14)

$$d_0 = \frac{1-\gamma_1}{\rho(|(F^1)^{-1}| \cdot |S|)} \approx \frac{0.99}{123.696} \approx 0.008.$$

Таким образом, формула (14) дает самую лучшую оценку.

Теперь построим синтезирующее управление. Уравнение для функции управляемости имеет вид

$$2a_0\Theta^6 = 2400x_1^2 + 1920\Theta x_1x_2 + 240\Theta^2 x_1x_3 + 420\Theta^2 x_2^2 + 120\Theta^3 x_2x_3 + 12\Theta^4 x_3^2, \tag{22}$$

где $0 < a_0 \le\ 2/f_{33} = 1/6$. Пусть $a_0 = 1/6$. Управление имеет вид

$$u(\Theta, x) = -\frac{60x_1}{\Theta^3} - \frac{30x_2}{\Theta^2} - \frac{6x_3}{\Theta}. \tag{23}$$

Выберем $d_0 = 0.008$. В качестве конкретной реализации возмущения рассмотрим функцию $p(t, x_1, x_2, x_3) = 0.008\ \sin\left(\frac{10(x_1^2-x_2^2-x_3^2)}{t+1}\right)$, тогда система (21) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left(1 + 0.008\ \sin\left(\frac{10(x_1^2-x_2^2-x_3^2)}{t+1}\right)\right) x_2, \\ \dot{x}_2 = \left(1 - 0.0008\ \sin\left(\frac{10(x_1^2-x_2^2-x_3^2)}{t+1}\right)\right) x_3, \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \tag{24}$$

Выберем в качестве начальной точки $x_0 = (-2; 3; -1)$. Для нахождения траектории воспользуемся Замечанием 1. Решая уравнение (22), получаем $\theta_0 \approx 7.15$. Компоненты траектории представлены на рис. 1, управление на траектории – на рис. 2. Кроме того, производная от функции управляемости на траектории представлена на рис. 3, а функция управляемости на траектории – на рис. 4. Обратим внимание на то, что $\Theta(x(t))$ почти линейна, то

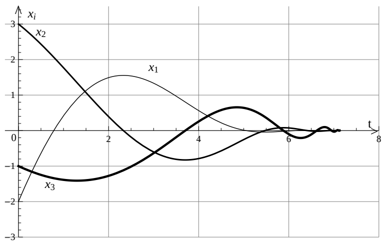

Рис. 1: Компоненты траектории для системы (24)

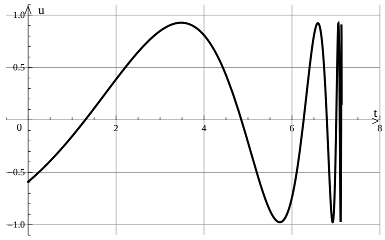

Рис. 2: Управление на траектории для системы (24)

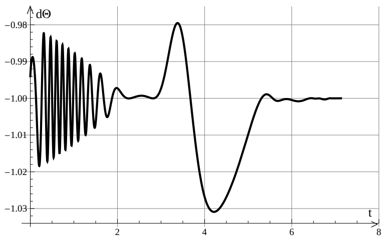

Рис. 3: Производная от функции управляемости на траектории для системы(24)

Рис. 4: Функция управляемости на траектории для системы (24)

есть значение $\frac{d}{dt}\Theta(x(t))$ "близко" к -1. Напомним, что при $p(t,x) = 0$ выполнено равенство $\frac{d}{dt}\Theta(x(t)) = -1$. Время попадания в начало координат равно $T \approx 7.13 < \Theta_0$. Заметим, что оценка (15) дает существенно более грубый результат, а именно $T \leq 715.97$.

Благодарности. Автор выражает благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору Коробову В. И. за ценные советы при написании работы. Также автор выражает благодарность кандидату физ.-мат. наук, доценту Игнатович С. Ю. за конструктивные замечания на этапе оформления работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бессонов Г. А., Коробов В. И., Скляр Г. М. Задача устойчивого синтеза ограниченных управлений для некоторого класса нестационарных систем / Прикладная математика и механика, 1988. – Т. 52, Вып. 1. – С. 9-15.

2. Коробов В. И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости / Математический сборник, 1979. — Т. 109(151), № 4(8). — С. 582–606.

3. Коробов В.И. Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости / Доклады АН СССР, 1979. – Т. 248, № 5. – С. 1051–1055.

4. Коробов В. И. Решение задачи синтеза для управляемых процессов с возмущениями с помощью функции управляемости / Дифференц. уравн., 1987. – Т. 23, № 2. – С. 236–243.

5. Коробов В. И. Метод функции управляемости. — М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2007. — 576 с.

6. Коробов В. И., Гавриляко В. М. Робастные системы. Синтез ограниченного управления / Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія “Математика, прикладна математика і механіка”, 2005. — № 711. — С. 23–27.

7. Коробов В. И., Скляр Г. М. Методы построения позиционных управлений и допустимый принцип максимума / Дифференциальные уравнения, 1990. – Т. 26, № 11. – С. 1914–1924.

8. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.— 303 с.

9. Ревина Т. В. Решение одной задачи синтеза управления для робастных систем на основе метода функции управляемости / Динамические системы. Таврический нац. ун-т им. В. И. Вернадского. — Симферополь, 2008. — Вып. 25. — с. 83–93.

10. Скорик В. А. Аналитическое обращение одного семейства плохо обусловленных матриц, возникающих в методе функции управляемости / Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія “Математика, прикладна математика і механіка”, 1999.– № 444. — С. 15–23.

11. Хорн Р. А., Джонсон Ч. Р. Матричный анализ.- Изд-во "Наука". Гл. ред. физ.-мат. лит., М, 1989. — 656 с.

12. Bowong S., Moukam Kakmeni F.M. Chaos control and duration time of a class of uncertain chaotic systems / Physics Letters, 2003. — A 316. — P. 206–217.

13. Bhat S. P., Bernstein D. S. Finite-time stability of continious autonomous systems / SIAM Journal of Control and Optimization, 2000. – Vol. 38. – No. 3. – pp. 751-766.

14. Ding S., Qian C., Li S. Global finite-time stabilization of a class of uppertriangular systems / Proceeding of the 2010 American Control Conference, Baltimore, MD, USA, 2010, June 30 – July 2. — P. 4223–4228.

15. Franze G., Carotenuto L., Muraca P. On the stability of interval matrices / Proceeding of the 2004 American Control Conference, Boston, Massachusets, USA, 2004, June 30 – July 2. — P. 2648-2653.

16. Hong Y. Finite-time stabilization of nonlinear systems with parametric and dynamic uncertainties / IEEE Trans. on Automatic Control, 2006. — Vol. 51. — No. 12. — P. 1950-1956.

17. Juang Y. T., Shao C. S. Stability analysis of dinamic interval systems / Int. J. Contr., 1989. — Vol. 49. — P. 1401–1408.

18. Polyakov A, Efimov D, Perruquetti W. Finite-time stabilization using implicit Lyapunov function technique / IFAC Nolcos, hal-00844386, version 1-15, Jul 2013.

19. Rodoumta K., Bowong S. Construction of bounded feedback by the controllability function method// Applied mathematical sciences, 2007. — Vol. 1. — No 6. — P. 267–279.

20. Rohn J. Positive definitess and stability of interval matrices / SIAM J. Matrix anal. appl., 1994. — Vol. 15. — No. 1. — P. 175–184.

21. Wang K, Michel A, Liu D. Nessesary and sufficient conditions for the Hurwitz and Schur stability of interval matrices / IEEE Trans. on Automatic Control, 1994. — Vol. 39. — No. 6. — P. 1251-1255.

Статья получена: 10.04.2014; окончательный вариант: 10.11.2014; принята: 11.11.2014.