



KARAZIN UNIVERSITY
CLASSICS AHEAD OF TIME

ISSN 2221-5646 (Print),
ISSN 2523-4641 (Online)



Том 103 ' 2026

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н.Каразіна
серія

**МАТЕМАТИКА,
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
І МЕХАНІКА**

Volume 103, 2026

VISNYK OF V.N.KARAZIN
KHARKIV NATIONAL UNIVERSITY

**Ser. MATHEMATICS, APPLIED
MATHEMATICS AND MECHANICS**

ISSN 2221–5646 (Print)

ISSN 2523–4641 (Online)

Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна

Серія

«Математика, прикладна математика і механіка»

Серія започаткована 1965 р.

Том 103



Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”

Vol. 103

Харків
2026

До Віснику включено статті з математичного аналізу, математичної фізики, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення. УДК 51+531/534](062.552).

Засновник журналу Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна. Рік заснування 1965. Періодичність виходу 2 рази на рік.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних наук, категорія «Б» за спеціальностями 111 - Математика та 113 - Прикладна математика (Наказ МОН України №1643 від 28.12.2019 р.).

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 9 від 25 травня 2026 р.).

Головний редактор: Коробов В.І. – д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна,
Україна

Члени редакційної колегії:

Когут П.І.—д-р ф.-м. наук, проф., Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара, м.Дніпро, Україна

Резуненко О.В.—д-р ф.-м. наук, доц., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Фаворов С.Ю.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Чуйко С.М.—д-р ф.-м. наук, проф., Інститут прикладної математики і
механіки НАН України, м.Слов'янськ, Україна

Шепельський Д.Г.—д-р ф.-м. наук, проф., ФТІНТ НАН України та
ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Домбровський А.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Щецина, Польща

Кадець В.М.—д-р ф.-м. наук, проф., Технологічний інститут Холона, Ізраель

Корбич Йозеф—д-р ф.-м. наук, проф., чл.-кор. ПАН, Університет Зіелона Гора, Польща

Нгуєн Хоа Шон—д-р ф.-м. наук, проф., Академія наук та технології В'єтнама,
Інститут математики, Ханой, В'єтнам

Скляр Г.М.—д-р ф.-м. наук, проф., Західнопоморський технологічний університет,
Щецин, Польща

Відповідальний секретар – Резуненко О.В., д-р ф.-м. наук
ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Адреса редакційної колегії: 61022, Харків, майдан Свободи, 4, ХНУ імені В.Н. Каразіна, ф-т математики і інформатики, к. 7-27, т. 7075240, **e-mail:** vestnik-khnu@ukr.net

Інтернет: <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>; http://periodicals.karazin.ua/mech_math

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Ідентифікатор медіа у Реєстрі суб'єктів у сфері медіа: R30-04455 (Рішення № 1538 від 09.05.2024 р. Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення. Протокол № 15).

©Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, оформлення, 2026

The journal includes articles on mathematical analysis, mathematical physics, differential equations, mathematical control theory and mechanics, which contain new theoretical results in the indicated fields and have applied significance. UDC 51+531/534](062.552).

The founder of the Journal is V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine.

Year of foundation 1965. The journal is published twice a year.

For Professors, researchers, postgraduate students working in the relevant or related fields.

The journal is a professional publication in the field of physical and mathematical sciences, category «B» in specialties 111 - Mathematics and 113 - Applied Mathematics (Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 1643 dated 28 December 2019).

Approved for publication by the decision of the Academic Council of V. N. Karazin Kharkiv National University (protocol No. 9 of May 25, 2026).

Editor-in-Chief – V.I. Korobov–Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University,
Ukraine

Associate Editors:

S.M. Chujko–Dr. Sci., Prof., Donbas State Pedagogical University, Ukraine

Andrzej Dabrowski–Dr. Sci., Prof., University of Szczecin, Poland

S.Yu. Favorov–Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

V.M. Kadets–Dr. Sci., Prof., Holon Institute of Technology, Israel

P.I. Kogut–Dr. Sci., Prof., Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine

Jozef Korbicz–Dr. Sci., Prof., corresponding member of PAS, University of Zielona Gora, Poland

A.V. Rezounenko–Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

D.G. Shepelsky–Dr. Sci., Prof., B.Verkin Institute for Low Temperature Physics
and Engineering, Ukraine

G.M. Sklyar–Dr. Sci., Prof., West Pomeranian University of Technology, Szczecin, Poland

Nguyen Khoa Son–Dr. Sci., Prof., Vietnamese Academy of Science and Technology,
Institute of Mathematics, Hanoi, Vietnam

Responsible Editor – A.V. Rezounenko, Dr. Sci., Prof.,
V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Editorial Board Address: 4, Svobody Square, Kharkiv, 61022, V.N. Karazin KhNU,
Faculty of Mathematics and Informatics, room 7-27, tel. 7075240, **e-mail:** vestnik-khnu@ukr.net
Internet: <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>; http://periodicals.karazin.ua/mech_math

The articles have undergone internal and external peer review.

Media identifier in the Register of Media Entities: R30-04455 (Decision No. 1538
dated 09.05.2024 of the National Council of Ukraine on Television and Radio Broadcasting.
Protocol No. 15).

© V. N. Karazin Kharkiv National University
design, 2026

ЗМІСТ

Чоке-Рівєро А. Е. Про стійкість за Гурвіцем матричних поліномів типу Гурвіца	5
Бєбія М. О., Барська Ю. М. Про стабілізацію канонічних нелінійних систем у спеціальному випадку	38
Макаров О. А., Ніколенко І. Г. Коректні крайові задачі з інтегральною умовою в напівпросторі для рівнянь у частинних похідних.	60
Скуріхін Р. В. Формальні степеневі ряди для диференціального рівняння $ay' = by^m$ над областями Дедекінда нульової характеристики	69
Генералов М. В., Півень О. Л. Неявне лінійне різницеве рівняння першого порядку над скінченними комутативними кільцями з одиницею	90
Дубовий В. К., Гефтер С. Л. Наум Ілліч Ахієзер. До 125-річчя від дня народження	115

CONTENTS

A. E. Choque–Rivero. On the Hurwitz stability of Hurwitz-type matrix polynomials	5
M. O. Bebiya, Y. M. Barska. On stabilization of canonical nonlinear systems in a special case	38
O. A. Makarov, I. G. Nikolenko. Well-posed boundary value problems with an integral condition in half-space for partial differential equations	60
R. V. Skurikhin. Formal power series solutions of the differential equation $ay' = by^m$ over Dedekind domains of characteristic zero	69
M. V. Heneralov, A. L. Piven. First-order implicit linear difference equation over finite commutative rings with identity	90
V. K. Dubovyi, S. L. Gefter. Naum Illich Akhiezer. To the 125th anniversary	115

A. E. Choque-Rivero

PhD math, Prof.

Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Edificio C-3, C.U., CP 58060, Morelia, Michoacán, México

abdon.choque@umich.mx  <http://orcid.org/0000-0003-0226-9612>

On the Hurwitz Stability of Hurwitz-Type Matrix Polynomials

A real scalar polynomial whose roots lie in the left half-plane of the complex plane is called a Hurwitz polynomial. This notion goes back to the works of J. C. Maxwell, E. J. Routh, and A. Hurwitz, and was later studied using techniques such as Sturm sequences, Markov parameters, and continued fractions; see, for instance, *The Theory of Matrices*, Vol. II, Chapter XV, AMS Chelsea (2000), by F. Gantmacher.

A $q \times q$ matrix polynomial $P(z)$ is called Hurwitz if $\det P(z)$ is a Hurwitz polynomial. Every matrix polynomial $\mathbf{f}_n$ can be written in the form $\mathbf{f}_n(z) = \mathbf{h}_n(z^2) + z \mathbf{g}_n(z^2)$. The matrix polynomial $\mathbf{f}_{2m}$ is said to be of Hurwitz type if the expression $\mathbf{g}_{2m}(z) \mathbf{h}_{2m}^{-1}(z)$ admits a representation as a finite continued fraction with positive definite matrix coefficients. Similarly, the odd-degree matrix polynomial $\mathbf{f}_{2m+1}$ is of Hurwitz type if $\frac{1}{z} \mathbf{h}_{2m+1}(z) \mathbf{g}_{2m+1}^{-1}(z)$ has the same property. The concept of Hurwitz-type matrix polynomials was introduced in *On matrix Hurwitz type polynomials and their interrelations to Stieltjes positive definite sequences and orthogonal matrix polynomials*, Linear Algebra Appl. 476 (2015), by A. E. Choque Rivero.

In the present work, we derive an explicit form of the Bezoutian associated with Hurwitz-type matrix polynomials. The fact that Hurwitz-type matrix polynomials are Hurwitz matrix polynomials was suggested and partially proved using Bezoutians in *On generalization of classical Hurwitz stability criteria for matrix polynomials*, J. Comput. Appl. Math. 383 (2021), by X. Zhan and A. Dyachenko. In contrast to that work, we employ the decomposition of the Bezoutian form introduced in *Some Questions in the Theory of Moments*, Translations of Mathematical Monographs 2, AMS, 1962, by N. I. Akhiezer and M. G. Krein, for scalar polynomials.

Additionally, we propose a method to enlarge the class of Hurwitz-type matrix polynomials by adding to a given polynomial a matrix polynomial that is not of Hurwitz type, so that the resulting polynomial becomes of Hurwitz type.

Keywords: Hurwitz matrix polynomial; orthogonal matrix polynomial; Bezoutian; Hurwitz-Type Matrix Polynomial.

2020 Mathematics Subject Classification: 34D20; 34D20; 33C45; 47A56; 15A24; 30E05

1. Introduction

A scalar polynomial with all its roots in the left half of the complex plane is called a Hurwitz polynomial [47, 34, 16, 27, 33, 36, 8, 35]. The Hurwitz stability of such polynomials is also referred to as Hurwitzness—a term we adopt in this work. Let n and q be natural numbers. In the present work, we consider the properties and Hurwitzness of a subset of Lambda matrices [43, page 95], [28, page 228], [17], defined by

$$\mathbf{f}_n(z) := A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_n, \quad (1)$$

where A_j is a complex $q \times q$ matrix and z is a complex variable. As in [39], we refer to a matrix of the form (1) as a matrix polynomial, which is called a Hurwitz matrix polynomial if $\det \mathbf{f}_n$ is a Hurwitz polynomial.

The matrix polynomial (1) has degree n if A_0 is nonzero. Throughout this paper, we assume that $\det A_0 \neq 0$. Clearly, (1) can be represented as

$$\mathbf{f}_n(z) = \mathbf{h}_n(z^2) + z \mathbf{g}_n(z^2), \quad (2)$$

where

$$\mathbf{h}_n(z) := \begin{cases} A_0 z^m + A_2 z^{m-1} + \dots + A_{2m}, & n = 2m, \\ A_1 z^m + A_3 z^{m-1} + \dots + A_{2m+1}, & n = 2m + 1, \end{cases} \quad (3)$$

and

$$\mathbf{g}_n(z) := \begin{cases} A_1 z^{m-1} + A_3 z^{m-2} + \dots + A_{2m-1}, & n = 2m, \\ A_0 z^m + A_2 z^{m-1} + \dots + A_{2m}, & n = 2m + 1. \end{cases} \quad (4)$$

We will refer to (3) as the $\mathbf{h}_n$ part and to (4) as the $\mathbf{g}_n$ part of the matrix polynomial $\mathbf{f}_n$.

Let us introduce the following notation. The symbol $\mathbb{C}^{q \times q}$ represents the set of all complex $q \times q$ matrices. For the null matrix that belongs to $\mathbb{C}^{p \times q}$, we will write $0_{p \times q}$. We denote by 0_q and I_q the null and identity matrices in $\mathbb{C}^{q \times q}$, respectively. When the sizes of the null and identity matrices are clear from the context, we will omit their indices.

In the following definition, we recall the concept of a Hurwitz-type matrix polynomial (HTM polynomial) introduced in [6]. In [6], HTM polynomials were referred to as matrix Hurwitz-type polynomials.

For $A, B \in \mathbb{C}^{q \times q}$ with B invertible, set

$$\frac{A}{B} := AB^{-1}. \quad (5)$$

Definition 1. The $q \times q$ matrix polynomial $\mathbf{f}_n$ in (1) is called a Hurwitz-type matrix polynomial if there exist two sequences of positive definite matrices, $(\mathbf{c}_k)_{k=0}^{m-1}$ and $(\mathbf{d}_k)_{k=0}^{m-1}$ (resp. $(\mathbf{c}_k)_{k=0}^m$ and $(\mathbf{d}_k)_{k=0}^{m-1}$) such that, for $n = 2m$,

$$\frac{\mathbf{g}_n(z)}{\mathbf{h}_n(z)} = \frac{I_q}{z\mathbf{c}_0 + \frac{I_q}{\mathbf{d}_0 + \frac{I_q}{\ddots + \mathbf{d}_{m-2} + \frac{I_q}{+z\mathbf{c}_{m-1} + \mathbf{d}_{m-1}^{-1}}}}}, \quad (6)$$

for all $z \in \mathbb{C}$ with $\det \mathbf{h}_n(z) \neq 0$ and, for $n = 2m + 1$,

$$\frac{\mathbf{h}_n(z)}{z\mathbf{g}_n(z)} = \frac{I_q}{z\mathbf{c}_0 + \frac{I_q}{\mathbf{d}_0 + \frac{I_q}{\ddots + z\mathbf{c}_{m-1} + \frac{I_q}{\mathbf{d}_{m-1} + z^{-1}\mathbf{c}_m^{-1}}}}}, \quad (7)$$

for all $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ with $\det \mathbf{g}_n(z) \neq 0$.

The definition of HTM polynomials in the form of a finite continued fraction is inspired by [29, Chapter XV, Theorem 15].

Main Results. Below are the main results of the present work:

- (a) We compute explicitly the Bezoutian of the HTM polynomial (1); see Theorem 1 and Corollary 2. From this, an explicit proof of the Hurwitz property of HTM polynomials readily follows; see Theorem 2.
- (b) For a given matrix polynomial P_n of degree n that is not a Hurwitz-type matrix (HTM) polynomial, we construct a polynomial $\mathbf{f}_{2n}(z) = P_n(z^2) + zQ_{n-1}(z^2)$ of degree $2n$, with a suitably chosen Q_{n-1} , such that $\mathbf{f}_{2n}$ becomes an HTM polynomial. Then, by applying the result from [21], we conclude that P_n itself is a Hurwitz matrix polynomial; see Theorem 4.

Relation between (a) and (b). The explicit computation of the Bezoutian in part (a) provides the structural foundation for the Hurwitz property of HTM polynomials. This result is then exploited in part (b), where a general matrix polynomial is embedded into an HTM polynomial of higher degree. The Hurwitz property established in part (a), together with the construction in (b), allows us to transfer stability from the HTM setting back to the original polynomial P_n .

The Hurwitz property of matrix polynomials via Bezoutians was studied in [30, 41, 42]. In [49], the Hurwitz property of HTM polynomials was also considered. However, the proof of [49, Theorem 3.5], which serves as the basis for the analysis in that work, is not fully detailed. More precisely, several steps in the proof are

left implicit; see Remark 14. In particular, the argument is developed only for the case $n = 2m$, while the case $n = 2m + 1$ is described as “similar,” without explicit justification.

A distinctive feature of the odd-degree case $n = 2m + 1$ is that the associated block Hankel matrices $H_{1,m}$ and $H_{2,m-1}$ have different dimensions. In contrast to the even case, this asymmetry prevents a direct application of the standard construction. To overcome this difficulty, we introduce a modified polynomial $\tilde{\mathbf{g}}_{2m+1}$ (see (57)) of degree $m - 1$, which replaces the original polynomial $\mathbf{g}_{2m+1}$ (of degree m) in the construction of the symmetrizer. This approach leads to a consistent formulation of the matrix $\mathcal{W}_{2m+1}^{(0)}$ (see (76) and Remark 5) and provides an explicit treatment of the odd-degree case, which is typically addressed only heuristically in the literature. This aspect is not discussed in [49].

Additionally, in contrast to [49], we use representations of the matrix polynomial $\mathbf{f}_n$ in terms of orthogonal polynomials on $[0, \infty)$ of the first kind and polynomials of the second kind, as in (2) and (18), for example, to compute explicitly the Bezoutian of the quadruple $(\mathbf{f}_n^*(\bar{x}), \mathbf{f}_n(-x), \mathbf{f}_n^*(-\bar{x}), \mathbf{f}_n(x))$.

The asterisk denotes the Hermitian adjoint of a matrix, while the overbar represents complex conjugation. In the scalar case, the use of the $\mathbf{h}_n$ part and $\mathbf{g}_n$ part of the polynomial $\mathbf{f}_n$ for studying the corresponding Bezoutian was employed by Krein and Naimark in [38] and by Krein and Akhiezer in [1].

The importance of HTM polynomials as a subset of Hurwitz matrix polynomials is that they help study the asymptotic stability of the differential equation

$$I_q y^{(n)}(t) + A_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + A_{n-1} y'(t) + A_n y(t) = 0, \quad t \geq 0$$

with $y(t) \in \mathbb{R}^n$; $I_q, A_1, \dots, A_n \in \mathbb{C}^{q \times q}$; see [44, 48, 46, 31] and [37].

Our motivation is to generalize the results regarding robust stability [7] and finite-time stabilization with bounded controls [13, 14, 9, 11] for the matrix case within the framework of HTM polynomials.

Our work is organized as follows. In Section 2, we review previous results on HTM polynomials and their associated Markov parameters. We also recall Stieltjes orthogonal matrix polynomials, orthogonal matrix polynomials, the interrelations between HTM polynomials and Markov parameters, as well as the Bezoutian and the inertia of matrix polynomials. In Section 3, we explicitly compute the Bezoutian of HTM polynomials. In Section 4, we study the Hurwitzness of HTM polynomials. In Section 5, we present a result and an algorithm for constructing an HTM polynomial from a given matrix polynomial that is not of HTM type. We also explain why the original matrix polynomial is a Hurwitz matrix polynomial. In Section 6, we clarify certain steps left implicit in Theorem 3.5 of [49], concerning a “matrix analogue of the stability criterion via Markov parameters,” as stated on page 10 of [49].

This work is a direct continuation of the author’s research in [5] and [6], which focus on the nondegenerate truncated matricial Stieltjes problem and HTM polynomials, respectively.

2. Preliminaries

In this section, we introduce the notation and preliminary results that will be used throughout the paper.

HTM polynomials and associated Markov parameters

The following quantities will be used to describe the domains of validity of the Laurent expansions appearing below.

If $n = 2m$, we define

$$\mathcal{N}_{\mathbf{h}_n} := \{z \in \mathbb{C} : \det \mathbf{h}_n(z) = 0\}, \quad \eta_n := \max\{|z| : z \in \mathcal{N}_{\mathbf{h}_n}\}, \quad (8)$$

whereas, for $n = 2m + 1$, we define

$$\mathcal{N}_{\mathbf{g}_n} := \{z \in \mathbb{C} : \det \mathbf{g}_n(z) = 0\}, \quad \rho_n := \max\{|z| : z \in \mathcal{N}_{\mathbf{g}_n}\}. \quad (9)$$

The next remark recalls the Laurent expansions of $\mathbf{g}_n(z)\mathbf{h}_n(z)^{-1}$ and $\mathbf{h}_n(z)(z\mathbf{g}_n(z))^{-1}$, which connect the matrix polynomial (1) with the associated Markov parameters s_j .

Remark 1. Let $\mathbf{h}_n$ and $\mathbf{g}_n$ be defined as in (3) and (4), respectively, and let $\mathbf{f}_n$ be given by (2).

For $|z| > \eta_n$ (resp. $|z| > \rho_n$), the Laurent expansion in negative powers of z of $\mathbf{g}_n(z)\mathbf{h}_n(z)^{-1}$ (resp. $\mathbf{h}_n(z)(z\mathbf{g}_n(z))^{-1}$) takes the form

$$\frac{\mathbf{g}_n(z)}{\mathbf{h}_n(z)} = \frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} + \cdots + (-1)^n \frac{s_n}{z^{n+1}} + \cdots, \quad n = 2m, \quad (10)$$

$$\frac{\mathbf{h}_n(z)}{z\mathbf{g}_n(z)} = \frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} + \cdots + (-1)^n \frac{s_n}{z^{n+1}} + \cdots, \quad n = 2m + 1. \quad (11)$$

For $j \geq 0$ and by using the Markov parameters, we construct block Hankel matrices:

$$H_{1,j} := \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_j \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_j & s_{j+1} & \cdots & s_{2j} \end{pmatrix}, \quad H_{2,j} := \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{j+1} \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{j+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j+1} & s_{j+2} & \cdots & s_{2j+1} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

The rational matrix functions in (6) and (7) are special solutions to the truncated Stieltjes matrix moment (TSMM) problem; see proof of [6, Theorem 7.9]. This implies that $\frac{\mathbf{g}_n(-z)}{\mathbf{h}_n(-z)}$ and $\frac{\mathbf{h}_n(-z)}{(-z)\mathbf{g}_n(-z)}$ are Stieltjes transforms of a certain positive measure σ on $[0, +\infty)$.

The TSMM problem is defined as follows: Let $(s_j)_{j=0}^n$ be a finite sequence of $q \times q$ complex Hermitian matrices. The TSMM problem consists of finding the set $\mathcal{M}_n$ of all nonnegative Hermitian $q \times q$ measures σ defined on the Borel σ -algebra $\mathfrak{B} \cap [0, +\infty)$ such that

$$s_j = \int_{[0, +\infty)} t^j \sigma(dt), \quad 0 \leq j \leq n-1, \quad s_n = \int_{[0, +\infty)} t^n \sigma(dt) + M,$$

where M is a $q \times q$ complex valued positive semi-definite matrix.

For each $\sigma \in \mathcal{M}_n$, one associates a matrix-valued function

$$s(z) = \int_{[0,+\infty)} \frac{\sigma(dt)}{t-z}, \quad (13)$$

which is defined and holomorphic in $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.

The function s is associated with the TSMM problem and is called the Stieltjes transform of the positive measure σ ; see [18, 19, 20, 22, 23, 15, 24, 25, 26].

In 1981, Yu. Dyukarev proved that the TSMM problem in the case of an odd (resp. even) number of moments has a solution if and only if $H_{1,m}$ and $H_{2,m-1}$ (resp. $H_{1,m}$ and $H_{2,m}$) are both positive semidefinite matrices.

Definition 2. *The sequence $(s_j)_{j=0}^{2m}$ (resp. $(s_j)_{j=0}^{2m+1}$) is called a Stieltjes positive sequence if both corresponding matrices $H_{1,m}$ and $H_{2,m-1}$ (resp. $H_{1,m}$ and $H_{2,m}$) are positive definite. In the case where $(s_j)_{j=0}^{2m}$ (resp. $(s_j)_{j=0}^{2m+1}$) is a positive Stieltjes sequence, the corresponding TSMM problem is called a TSMM problem in the nondegenerate case.*

In [18], Yu. Dyukarev found the complete set of solutions to the TSMM problem in the case that $(s_j)_{j=0}^{2m}$ and $(s_j)_{j=0}^{2m+1}$ are Stieltjes positive sequences, respectively.

Stieltjes orthogonal matrix polynomials

We now reproduce from [5] a number of auxiliary matrices, as well as two families of orthogonal matrix polynomials and their polynomials of the second kind. Let $R_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{(j+1)q \times (j+1)q}$ be given by

$$R_j(z) := (I_{(j+1)q} - zT_j)^{-1}, \quad j \geq 0,$$

with

$$T_0 := 0_q, \quad T_j := \begin{pmatrix} 0_{q \times jq} & 0_q \\ I_{jq} & 0_{jq \times q} \end{pmatrix}, \quad j \geq 1.$$

Observe that for each $j \in \mathbb{N}_0$, the matrix-valued function R_j can be represented via

$$R_j(z) = \begin{pmatrix} I_q & 0_q & 0_q & \cdots & 0_q & 0_q \\ zI_q & I_q & 0_q & \cdots & 0_q & 0_q \\ z^2I_q & zI_q & I_q & \cdots & 0_q & 0_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z^jI_q & z^{j-1}I_q & z^{j-2}I_q & \cdots & zI_q & I_q \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Let

$$v_0 := I_q, \quad v_j := \begin{pmatrix} I_q \\ 0_{jq \times q} \end{pmatrix} \text{ for all } j \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Furthermore, let

$$Y_{1,j} := y_{[j,2j-1]}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad \text{and} \quad Y_{2,j} := y_{[j+1,2j]}, \quad 2 \leq j \leq n,$$

with

$$y_{[j,k]} := (s_j, s_{j+1}, \dots, s_k)^*, \quad 0 \leq j \leq k$$

and $y_{[j,k]} = 0_q$ if $j > k$. Define

$$u_{1,0} := 0_q, \quad u_{1,j} := \begin{pmatrix} 0_q \\ -y_{[0,j-1]} \end{pmatrix}, \quad u_{2,j} := -y_{[0,j]}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (16)$$

Let $\hat{H}_{1,j}$ (resp. $\hat{H}_{2,j}$) denote the Schur complement of the block Hankel matrices $H_{1,j-1}$ in $H_{1,j}$ (resp. $H_{2,j-1}$ in $H_{2,j}$) as seen in [45], [5, Equalities (2.5) and (2.6)]:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{1,0} &:= s_0, & \hat{H}_{1,j} &:= s_{2j} - Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1} Y_{1,j}, \quad j \geq 1, \\ \hat{H}_{2,0} &:= s_1, & \hat{H}_{2,j} &:= s_{2j+1} - Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1} Y_{2,j}, \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

These matrices are Hermitian positive definite matrices, and so are $H_{1,j}$ and $H_{2,j}$.

Now we partially reproduce left orthogonal matrix polynomials (OMP) on $[0, +\infty)$ [21].

Definition 3. Let σ be a $q \times q$ nonnegative measure on $[0, +\infty)$. A sequence $(P_j)_{j=0}^\infty$ of $q \times q$ matrix-valued polynomials is called orthogonal with respect to σ if

- i) each matrix-valued polynomial P_j is of degree j ;
- ii) the matrix-valued polynomials P_j satisfy the orthogonality relations:

$$\int_{[0, +\infty)} P_j(t) \sigma(dt) P_k^*(t) = \delta_{jk} C_{qj},$$

for all $j, k \in \mathbb{N}$. Here, δ_{jk} is the Kronecker delta, and C_{qj} is a constant nonnegative $q \times q$ matrix.

The following matrix polynomials seem to have been first introduced in [20].

Definition 4. Let $(s_j)_{j=0}^{2n}$ (resp. $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$) be a Stieltjes positive sequence. Furthermore, let v_j , $u_{1,j}$, $u_{2,j}$ and R_j be as in (15), (16) and (14), respectively. Let

$$P_{1,0}(z) := I_q, \quad Q_{1,0}(z) := 0_q, \quad P_{2,0}(z) := I_q, \quad Q_{2,0}(z) := s_0.$$

For $j \geq 1$, set

$$\begin{aligned} P_{1,j}(z) &:= (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) v_j, \\ P_{2,j}(z) &:= (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) v_j, \\ Q_{1,j}(z) &:= -(-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) u_{1,j}, \\ Q_{2,j}(z) &:= -(-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) u_{2,j}. \end{aligned}$$

The matrix polynomials $Q_{1,j}$ and $Q_{2,j}$ are called *second-kind polynomials* with respect to $P_{1,j}$ and $P_{2,j}$, respectively.

In the next proposition, we recall that the matrix polynomials $P_{1,j}$ and $P_{2,j}$ are orthogonal with respect to positive measures supported on $[0, +\infty)$, and that the associated second-kind polynomials $Q_{1,j}$ and $Q_{2,j}$ can be expressed in terms of $P_{1,j}$ and $P_{2,j}$, respectively. For completeness, we also record a basic identity involving $P_{k,j}$ and $Q_{k,j}$.

Proposition 1. *a) The polynomials $P_{1,j}$ and $P_{2,j}$ are OMP with respect to σ and $t\sigma$, respectively. More precisely (as seen in [15, Remark 6.3]),*

$$\int_{[0,+\infty)} P_{k,j}(t)t^{k-1}\sigma(dt)P_{k,l}^*(t) = \begin{cases} 0_q & : j \neq l \\ \widehat{H}_{k,j} & : j = l \end{cases}, \quad k = 1, 2.$$

b) The following identities hold (as seen in [5, Remark D.6] and [5, Remark E.4]):

$$\begin{aligned} Q_{1,j}(x) &= \int_{[0,+\infty)} \frac{P_{1,j}(x) - P_{1,j}(t)}{x - t} \sigma(dt), \quad 0 \leq j \leq n, \\ Q_{2,j}(x) &= \int_{[0,+\infty)} \frac{xP_{2,j}(x) - tP_{2,j}(t)}{x - t} \sigma(dt), \quad 0 \leq j \leq n - 1. \end{aligned} \quad (17)$$

c) For $k = 1, 2$, the following identity holds (as seen in [5, Proposition 5.1 (a)])

$$P_{k,j}(z)Q_{k,j}^*(\bar{z}) - Q_{k,j}(z)P_{k,j}^*(\bar{z}) = 0_q.$$

The following proposition establishes a connection between HTM polynomials and orthogonal matrix polynomials of the first and second kinds. The representation below follows from [6, Theorem 6.1], while identities (19) and (20) are established in the proof of [6, Proposition 7.8].

Proposition 2. *For $n \geq 1$, every HTM polynomial admits the representation*

$$\mathbf{f}_n(z) = \begin{cases} (-1)^m(P_{1,m}^*(-\bar{z}^2) - zQ_{1,m}^*(-\bar{z}^2)), & n = 2m, \\ (-1)^m(Q_{2,m}^*(-\bar{z}^2) + zP_{2,m}^*(-\bar{z}^2)), & n = 2m + 1. \end{cases} \quad (18)$$

Moreover, the identities

$$\mathbf{h}_n(z) = (-1)^m P_{1,m}^*(-\bar{z}), \quad \mathbf{g}_n(z) = (-1)^{m+1} Q_{1,m}^*(-\bar{z}), \quad n = 2m, \quad (19)$$

and

$$\mathbf{h}_n(z) = (-1)^m Q_{2,m}^*(-\bar{z}), \quad \mathbf{g}_n(z) = (-1)^m P_{2,m}^*(-\bar{z}), \quad n = 2m + 1 \quad (20)$$

hold.

The matrix polynomials $P_{k,j}$ and $Q_{k,j}$ also appear in the representation of the extremal solutions of the TSMM problem.

In the proof of [6, Theorem 6.1], the so-called extremal solutions of the TSMM problem are represented by

$$G_{\sigma_{2m,\max}}(z) = -\frac{Q_{1,j}^*(\bar{z})}{P_{1,j}^*(\bar{z})} = \frac{\mathbf{g}_{2m}(-z)}{\mathbf{h}_{2m}(-z)} \quad (21)$$

and

$$G_{\sigma_{2m,\min}}(z) = -\frac{Q_{2,j}^*(\bar{z})}{zP_{2,j}^*(\bar{z})} = \frac{\mathbf{h}_{2m+1}(-z)}{(-z)\mathbf{g}_{2m+1}(-z)}. \quad (22)$$

Note that the matrix function $G_{\sigma_{2m,\max}}$ is defined for all $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ with $|z| > \eta_{2m}$, whereas $G_{\sigma_{2m,\min}}$ is defined for all $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ with $|z| > \rho_{2m+1}$. Here, η_{2m} and ρ_{2m+1} are defined in (8) and (9), respectively.

The Bezoutian and inertia for matrix polynomials

In this subsection, we reproduce some notions related to the inertia for a matrix polynomial [41, 42]. The inertia for scalar polynomials was considered in [40, page 462].

Let $L(\lambda) = L_0\lambda^\ell + L_1\lambda^{\ell-1} + \dots + \lambda L_{\ell-1} + L_\ell$ be a $q \times q$ matrix polynomial with coefficients $L_k \in \mathbb{C}^{q \times q}$. If $L_0 \neq 0_q$, then $\deg(L) = \ell$ is the degree of polynomial L . Furthermore, if $L_0 = I_q$, then L is called monic. Let M_1, L_1, M and L be polynomial matrices such that $M_1(\lambda)L_1(\lambda) - M(\lambda)L(\lambda) = 0$. The Bezoutian associated with the quadruple (M_1, L_1, M, L) is the block matrix

$$B_{M_1, M}(L, L_1) = (\Gamma_{j,k})_{j,k=1}^{m-1, \ell-1}. \quad (23)$$

The block entries $\Gamma_{j,k}$ of the quadruple (M_1, L_1, M, L) are determined by following equality:

$$\sum_{j,k=0}^{m-1, \ell-1} \Gamma_{j,k} \lambda^j \mu^k = \frac{1}{\lambda - \mu} (M_1(\lambda)L_1(\mu) - M(\lambda)L(\mu)). \quad (24)$$

The quantity ℓ (resp. m) denotes the maximal degree of $L(\lambda)$, $L_1(\lambda)$ (resp. $M(\lambda)$, $M_1(\lambda)$). Assume that there exists $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ such that $\det L(\lambda_0) \neq 0$: on this case L is called regular.

Let L be a regular polynomial of degree ℓ . The triple

$$\gamma(L) = (\gamma_+(L), \gamma_-(L), \gamma_0(L)) \quad (25)$$

is called inertia with respect to the real axis, where $\gamma_+(L)$ (resp. $\gamma_-(L)$) is the number of zeros of $\det(L(\lambda))$ in the open upper (resp. open lower) half-plane, and $\gamma_0(L)$ is the number of zeros of $\det(L(\lambda))$ in the real axis. Now we reproduce [41, Corollary 2.2].

Corollary 1. *Let $L(\lambda)$ be a matrix polynomial with an invertible leading coefficient. The spectrum of $L(\lambda)$ lies in the upper half-plane if and only if there exists a regular matrix polynomial $L_1(\lambda)$ that satisfies*

$$L_1^*(\bar{\lambda})L_1(\lambda) = L^*(\bar{\lambda})L(\lambda)$$

such that the matrix

$$\frac{1}{i}B_{L_1^*, L^*}(L, L_1) \quad (26)$$

is positive definite.

Our strategy for analyzing the Hurwitzness of HTM polynomials $\mathbf{f}_n$ is based on the spectral symmetries of the quadruple

$$(\mathbf{f}_n^*(\bar{x}), \mathbf{f}_n(-x), \mathbf{f}_n^*(-\bar{x}), \mathbf{f}_n(x)).$$

The next lemma describes the spectral symmetries associated with this quadruple.

Lemma 1. *Let $F(z) = \sum_{k=0}^n A_k z^{n-k}$, $A_k \in \mathbb{C}^{q \times q}$, be a regular matrix polynomial, and let $F^*(z) := \sum_{k=0}^n A_k^* z^{n-k}$. If*

$$\sigma(F) := \{z \in \mathbb{C} : \det F(z) = 0\},$$

then $\sigma(F(-z)) = -\sigma(F)$, $\sigma(F^(\bar{z})) = \overline{\sigma(F)}$, and $\sigma(F^*(-\bar{z})) = -\overline{\sigma(F)}$.*

Proof. By definition, $\det F(-\lambda) = 0$ if and only if $-\lambda \in \sigma(F)$. Hence $\sigma(F(-z)) = -\sigma(F)$. Next, $\det F^*(\bar{z}) = \overline{\det F(z)}$. Therefore, $\det F^*(\bar{\lambda}) = 0$ if and only if $\det F(\lambda) = 0$. Consequently, $\sigma(F^*(\bar{z})) = \overline{\sigma(F)}$. Combining the previous two identities yields $\sigma(F^*(-\bar{z})) = -\overline{\sigma(F)}$.

Remark 2. *The four matrix polynomials $F(z)$, $F(-z)$, $F^*(\bar{z})$ and $F^*(-\bar{z})$ correspond to natural symmetries of the spectrum of F .*

Indeed, $F(-z)$ reflects the spectrum through the origin, $F^(\bar{z})$ reflects the spectrum across the real axis, and $F^*(-\bar{z})$ reflects the spectrum across the imaginary axis. Consequently, the Bezout form*

$$\frac{F^*(\bar{x})F(-y) - F^*(-\bar{x})F(y)}{x - y} \quad (27)$$

compares the spectrum of F with its reflection across the imaginary axis.

In the Hurwitz stable case, $\sigma(F) \subset \{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0\}$, whereas $\sigma(F^(-\bar{z})) \subset \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$. Hence these two spectra are separated by the imaginary axis. This separation is closely related to the definiteness properties of the associated Bezoutian.*

The generalized Anderson–Jury Bezoutian matrix

To compute the matrix (26) associated with an HTM polynomial, we use the generalized Bezoutian matrix and form introduced by Anderson and Jury in [2], which are defined for a $q \times q$ rational matrix function $W(z)$.

Suppose that $W(z)$ admits two matrix factorizations:

$$W(z) = A^{-1}(z)B(z) = D(z)C^{-1}(z).$$

The generalized Anderson–Jury Bezoutian form associated with the quadruple (A, B, C, D) is defined by

$$\Gamma(x, y) = \frac{1}{x - y} (A(x)D(y) - B(x)C(y)).$$

Using the notation (5), for HTM polynomials, the applicability of this construction follows from the fact that the $\mathbf{h}_n$ -part and the $\mathbf{g}_n$ -part of $\mathbf{f}_n$ determine the rational matrix functions

$$s_{\mathbf{f}_{2m}}(z) = \frac{\mathbf{g}_{2m}(-z)}{\mathbf{h}_{2m}(-z)} \quad (28)$$

and

$$s_{\mathbf{f}_{2m+1}}(z) = \frac{\mathbf{h}_{2m+1}(-z)}{(-z)\mathbf{g}_{2m+1}(-z)}. \quad (29)$$

Taking into account that the functions (28) and (29) (see also (21) and (22)) are Stieltjes transforms of positive matrix-valued measures; see (13), they satisfy the Hermitian symmetry relation

$$s_{\mathbf{f}_n}(z) = s_{\mathbf{f}_n}^*(\bar{z}). \quad (30)$$

Therefore, the Anderson–Jury Bezoutian construction can be applied. Consequently, rather than studying the Bezout form (27), we employ Bezoutian forms associated with the quadruples $(x\mathbf{g}_n^*, \mathbf{h}_n, \mathbf{h}_n^*, x\mathbf{g}_n)$ and $(\mathbf{g}_n^*, \mathbf{h}_n, \mathbf{h}_n^*, \mathbf{g}_n)$, corresponding to the cases $n = 2m + 1$ and $n = 2m$, respectively. See the definitions of $\mathcal{F}_n$, $\mathcal{G}_n^{(1)}$, and $\mathcal{G}_n^{(2)}$ in (31), (32), and (33), respectively, together with the relations between these forms given in (34).

3. Bezoutian and Hurwitz-type matrix polynomials

In this section, using the so-called matrix symmetrizers (50) and block Hankel matrices $H_{1,j}$ and $H_{2,j}$, we derive an explicit form of the Bezoutian for the quadruple $(\mathbf{f}_n^*(\bar{x}), \mathbf{f}_n(-x), \mathbf{f}_n^*(-\bar{x}), \mathbf{f}_n(x))$.

Instead of working directly with the Bezoutian form

$$\mathcal{F}_n(x, y) := \frac{\mathbf{f}_n^*(\bar{x})\mathbf{f}_n(-y) - \mathbf{f}_n^*(-\bar{x})\mathbf{f}_n(y)}{x - y}, \quad (31)$$

we use the Equality (2) and calculate the Bezoutian forms

$$\mathcal{G}_n^{(1)}(x, y) := \frac{1}{x^2 - y^2} (x^2 \mathbf{g}_n^*(\bar{x}^2) \mathbf{h}_n(y^2) - y^2 \mathbf{h}_n^*(\bar{x}^2) \mathbf{g}_n(y^2)) \quad (32)$$

and

$$\mathcal{G}_n^{(2)}(x, y) := \frac{xy}{x^2 - y^2} (\mathbf{g}_n^*(\bar{x}^2) \mathbf{h}_n(y^2) - \mathbf{h}_n^*(\bar{x}^2) \mathbf{g}_n(y^2)) \quad (33)$$

associated with the quadruples $(x\mathbf{g}_n^*, \mathbf{h}_n, \mathbf{h}_n^*, x\mathbf{g}_n)$ and $(\mathbf{g}_n^*, \mathbf{h}_n, \mathbf{h}_n^*, \mathbf{g}_n)$. Recall that a similar decomposition of the Bezoutian for scalar polynomials was previously studied; see [38, page 293] and [1, page 257]. Following [2] to compute the Bezoutian forms $\mathcal{G}_n^{(1)}(x, y)$ and $\mathcal{G}_n^{(2)}(x, y)$ we employ both representations (30) of the rational matrices (6) and (7).

It readily follows that

$$\mathcal{F}_n(x, y) = 2 \left(\mathcal{G}_n^{(1)}(x, y) + \mathcal{G}_n^{(2)}(x, y) \right). \quad (34)$$

In the next lemma, we demonstrate that the matrix functions $\mathcal{F}_n$, $\mathcal{G}_n^{(1)}$ and $\mathcal{G}_n^{(2)}$ are matrix polynomials in x and y . See [2, Remark 1].

Lemma 2. *Let $\mathcal{F}_n$, $\mathcal{G}_n^{(1)}$ and $\mathcal{G}_n^{(2)}$ be as defined in (31), (32) and (33), respectively. The functions $\mathcal{F}_n$, $\mathcal{G}_n^{(1)}$ and $\mathcal{G}_n^{(2)}$ are polynomials on x and y .*

Proof. Using the numerator on the right-hand side of (31), together with (18), and replacing y by x , we obtain

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}_n(\bar{x})\mathbf{f}_n(-x) - \mathbf{f}_n(-\bar{x})\mathbf{f}_n(x) \\ &= 2x \begin{cases} P_{1,m}(-x^2)Q_{1,m}^*(-x^2) - Q_{1,m}(-x^2)P_{1,m}^*(-x^2), & n = 2m \\ P_{2,m}(-x^2)Q_{2,m}^*(-x^2) - Q_{2,m}(-x^2)P_{2,m}^*(-x^2), & n = 2m + 1 \end{cases} \\ &= 0. \end{aligned}$$

By [4, Chapter 1], any polynomial vanishing on the diagonal $x = y$ is divisible by $x - y$. Since $\mathbf{f}_n^*(\bar{x})\mathbf{f}_n(-y) - \mathbf{f}_n^*(-\bar{x})\mathbf{f}_n(y)$ has this property, $\mathcal{F}_n(x, y)$ is a polynomial. Arguing similarly with the numerators in (32) and (33), and following [4, Chapter 1], we show that $\mathcal{G}_n^{(1)}$ and $\mathcal{G}_n^{(2)}$ are polynomials in x and y .

For $k = 0, 1$, let

$$H_\infty^{(k)} := \begin{pmatrix} s_k & -s_{k+1} & s_{k+2} & \cdots \\ -s_{k+1} & s_{k+2} & \ddots & \\ & s_{k+2} & \ddots & \end{pmatrix} \quad (35)$$

be an infinite Hankel matrix.

A similar untruncated block Hankel matrix, denoted by $\mathbf{H}$, appears in the proof of [2, Lemma 2.3].

Lemma 3. *Let $\mathcal{F}_n$, $\mathcal{G}_n^{(1)}$ and $\mathcal{G}_n^{(2)}$ be as in (31), (32) and (33), respectively. Thus, for $n = 2m$, we have*

$$\mathcal{G}_{2m}^{(1)}(x, y) = \mathbf{h}_{2m}^*(\bar{x}^2) (x^{-2}I_q, x^{-4}I_q, \dots) H_\infty^{(1)} (\bar{y}^{-2}I_q, \bar{y}^{-4}I_q, \dots)^* \mathbf{h}_{2m}(y^2), \quad (36)$$

$$\mathcal{G}_{2m}^{(2)}(x, y) = -\mathbf{h}_{2m}^*(\bar{x}^2) (x^{-1}I_q, x^{-3}I_q, \dots) H_\infty^{(0)} (\bar{y}^{-1}I_q, \bar{y}^{-3}I_q, \dots)^* \mathbf{h}_{2m}(y^2). \quad (37)$$

For $n = 2m + 1$, we have

$$\mathcal{G}_{2m+1}^{(1)}(x, y) = \mathbf{g}_{2m+1}^*(\bar{x}^2) (I_q, x^{-2}I_q, \dots) H_{\infty}^{(0)} (I_q, \bar{y}^{-2}I_q, \dots)^* \mathbf{g}_{2m+1}(y^2), \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{2m+1}^{(2)}(x, y) = & -\mathbf{g}_{2m+1}^*(\bar{x}^2) (x^{-1}I_q, x^{-3}I_q, \dots) H_{\infty}^{(1)} (\bar{y}^{-1}I_q, \bar{y}^{-3}I_q, \dots)^* \\ & \cdot \mathbf{g}_{2m+1}(y^2). \end{aligned} \quad (39)$$

Proof. We prove (36). With (10), we have

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{2m}^{(1)}(x, y) &= \frac{1}{x^2 - y^2} \mathbf{h}_{2m}^*(\bar{x}^2) \left(x^2 \mathbf{h}_{2m}^{-1*}(\bar{x}^2) \mathbf{g}_{2m}^*(\bar{x}^2) - y^2 \mathbf{g}_{2m}(y^2) \mathbf{h}_{2m}^{-1}(y^2) \right) \\ &\quad \cdot \mathbf{h}_{2m}(y^2) \\ &= \frac{1}{x^2 - y^2} \mathbf{h}_{2m}^*(\bar{x}^2) (s_1(y^{-2} - x^{-2}) - s_2(y^{-4} - x^{-4}) + s_3(y^{-6} - x^{-6}) \\ &\quad - \dots) \mathbf{h}_{2m}(y^2) \\ &= \frac{1}{x^2 y^2} \mathbf{h}_{2m}^*(\bar{x}^2) (s_1 - s_2(x^{-2} + y^{-2}) + s_3(x^{-4} + x^{-2}y^{-2} + y^{-4}) \\ &\quad - \dots) \mathbf{h}_{2m}(y^2) \\ &= \mathbf{h}_{2m}^*(\bar{x}^2) (x^{-2}I_q, x^{-4}I_q, \dots) H_{\infty}^{(1)} (\bar{y}^{-2}I_q, \bar{y}^{-4}I_q, \dots)^* \mathbf{h}_{2m}(y^2). \end{aligned}$$

In the last equality, we substituted (35) for $k = 1$. Similarly, to prove (37), we use (10) and (35) for $k = 0$. Equalities (38) and (39) are proven by applying (11) and (35) for $k = 0$ and $k = 1$, respectively.

Remark 3. The infinite block Hankel matrix $H_{\infty}^{(1)}$ appearing in (36) arises naturally from the Laurent expansions in (10). Indeed, the expression

$$\frac{1}{x^2 - y^2} \left(x^2 \mathbf{h}_{2m}^{-1*}(\bar{x}^2) \mathbf{g}_{2m}^*(\bar{x}^2) - y^2 \mathbf{g}_{2m}(y^2) \mathbf{h}_{2m}^{-1}(y^2) \right)$$

generates an infinite series in negative powers of x and y , whose coefficients are precisely the moments $(s_j)_{j \geq 1}$, giving rise to the infinite block Hankel matrix $H_{\infty}^{(1)}$ in the representation

$$(x^{-2}I_q, x^{-4}I_q, \dots) H_{\infty}^{(1)} (\bar{y}^{-2}I_q, \bar{y}^{-4}I_q, \dots)^*.$$

However, since $\mathcal{G}_{2m}^{(1)}$ is a polynomial, only finitely many terms contribute to the products appearing in (36). Consequently, the right-hand side of (36) effectively reduces to a finite truncation of $H_{\infty}^{(1)}$.

The same observation applies to the right-hand sides of (37)–(39).

In view of Remark 3, the infinite block vector

$$(\bar{\xi}^{-2}I_q, \bar{\xi}^{-4}I_q, \dots)^* \mathbf{h}_{2m}(\xi^2)$$

can be decomposed into a polynomial part and a part containing strictly negative powers of ξ , namely,

$$(\bar{\xi}^{-2}I_q, \bar{\xi}^{-4}I_q, \dots)^* \mathbf{h}_{2m}(\xi^2) = \mathbf{h}_{2m}^{(11)}(\xi) + \mathbf{h}_{2m}^{(12)}(\xi). \quad (40)$$

Similarly, we have

$$(\bar{\xi}^{-1}I_q, \bar{\xi}^{-3}I_q, \dots)^* \mathbf{h}_{2m}(\xi^2) = \mathbf{h}_{2m}^{(21)}(\xi) + \mathbf{h}_{2m}^{(22)}(\xi), \quad (41)$$

$$(I_q, \bar{\xi}^{-2}I_q, \dots)^* \mathbf{g}_{2m+1}(\xi^2) = \mathbf{g}_{2m+1}^{(11)}(\xi) + \mathbf{g}_{2m+1}^{(12)}(\xi), \quad (42)$$

$$(\bar{\xi}^{-1}I_q, \bar{\xi}^{-3}I_q, \dots)^* \mathbf{g}_{2m+1}(\xi^2) = \mathbf{g}_{2m+1}^{(21)}(\xi) + \mathbf{g}_{2m+1}^{(22)}(\xi). \quad (43)$$

Here, $\mathbf{h}_{2m}^{(k1)}(\xi)$ (resp. $\mathbf{g}_{2m+1}^{(k1)}(\xi)$), for $k = 1, 2$, are polynomials in ξ , whereas $\mathbf{h}_{2m}^{(k2)}(\xi)$ (resp. $\mathbf{g}_{2m+1}^{(k2)}(\xi)$), for $k = 1, 2$, are polynomials in ξ^{-1} .

For a natural number m , let

$$\tilde{J}_m := \text{diag} (I_q, (-1)I_q, (-1)^2I_q, \dots, (-1)^mI_q) \quad (44)$$

be a $(m+1)q \times (m+1)q$ matrix.

The following remark explains how the infinite Hankel matrices $H_\infty^{(k)}$ reduce to finite block Hankel matrices when acting on the polynomial components $\mathbf{h}_{2m}^{(k1)}(\xi)$ (resp. $\mathbf{g}_{2m+1}^{(k1)}(\xi)$), for $k = 1, 2$, introduced in (40)–(43). This follows from direct calculations based on the corresponding decompositions.

Remark 4. Let $\mathbf{h}_{2m}^{(11)}(\xi)$, $\mathbf{h}_{2m}^{(21)}(\xi)$, $\mathbf{g}_{2m+1}^{(11)}(\xi)$ and $\mathbf{g}_{2m+1}^{(21)}(\xi)$ be as defined in (40), (41), (42) and (43), respectively. Furthermore, let $H_{1,j}$, $H_{2,j}$ and $J_m^{(k)}$ be as defined in (12) and (44), respectively. Thus, the following equalities hold

$$\mathbf{h}_{2m}^{(11)*}(\bar{x})H_\infty^{(1)}\mathbf{h}_{2m}^{(11)}(y) = \widehat{\mathbf{h}}_{2m}^{(11)*}(\bar{x})\tilde{J}_{m-1}H_{2,m-1}\tilde{J}_{m-1}\widehat{\mathbf{h}}_{2m}^{(11)}(y), \quad (45)$$

$$\mathbf{h}_{2m}^{(21)*}(\bar{x})H_\infty^{(1)}\mathbf{h}_{2m}^{(21)}(y) = \widehat{\mathbf{h}}_{2m}^{(21)*}(\bar{x})\tilde{J}_{m-1}H_{1,m-1}\tilde{J}_{m-1}\widehat{\mathbf{h}}_{2m}^{(21)}(y), \quad (46)$$

$$\mathbf{g}_{2m+1}^{(11)*}(\bar{x})H_\infty^{(1)}\mathbf{g}_{2m+1}^{(11)}(y) = \widehat{\mathbf{g}}_{2m+1}^{(11)*}(\bar{x})\tilde{J}_mH_{1,m}\tilde{J}_m\widehat{\mathbf{g}}_{2m+1}^{(11)}(y), \quad (47)$$

$$\mathbf{g}_{2m+1}^{(21)*}(\bar{x})H_\infty^{(1)}\mathbf{g}_{2m+1}^{(21)}(y) = \widehat{\mathbf{g}}_{2m+1}^{(21)*}(\bar{x})\tilde{J}_{m-1}H_{2,m-1}\tilde{J}_{m-1}\widehat{\mathbf{g}}_{2m+1}^{(21)}(y), \quad (48)$$

where

$$\widehat{\mathbf{h}}_{2m}^{(11)}, \widehat{\mathbf{h}}_{2m}^{(21)}, \widehat{\mathbf{g}}_{2m+1}^{(11)} \quad \text{and} \quad \widehat{\mathbf{g}}_{2m+1}^{(21)}$$

represent finite-dimensional restrictions of the matrices $\mathbf{h}_{2m}^{(11)}$, $\mathbf{h}_{2m}^{(21)}$, $\mathbf{g}_{2m+1}^{(11)}$ and $\mathbf{g}_{2m+1}^{(21)}$. In particular, the polynomial part of

$$\widehat{\mathbf{h}}_{2m}^{(11)}(y) = (\bar{y}^{-2}\mathbf{h}_{2m}^*(\bar{y}^2), \bar{y}^{-4}\mathbf{h}_{2m}^*(\bar{y}^2), \dots, \bar{y}^{-2m}\mathbf{h}_{2m}^*(\bar{y}^2))^* \quad (49)$$

is the restriction of the polynomial part of the matrix

$$\mathbf{h}_{2m}^{(11)}(y) = (\bar{y}^{-2}\mathbf{h}_{2m}^*(\bar{y}^2), \bar{y}^{-4}\mathbf{h}_{2m}^*(\bar{y}^2), \dots, \bar{y}^{-2m}\mathbf{h}_{2m}^*(\bar{y}^2), 0_q, 0_q, \dots)^*.$$

Equalities (45)–(48) correspond to those in the proof of [2, Lemma 2.3], where, instead of the matrices $H_{1,j}$ and $H_{2,j}$, the truncated block Hankel matrix $\mathbf{H}_{nm}$ is used. Moreover, in place of the matrix $H_{\infty}^{(1)}$, the infinite Hankel matrix H is employed.

For a matrix polynomial $Q(x) = Q_0x^\ell + Q_1x^{\ell-1} + \dots + Q_{\ell-1}x + Q_\ell$, the Hankel block matrix

$$S(Q) := \begin{pmatrix} Q_{\ell-1} & Q_{\ell-2} & \dots & Q_1 & Q_0 \\ Q_{\ell-2} & Q_{\ell-3} & \dots & Q_0 & 0_q \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ Q_0 & 0_q & \dots & 0_q & 0_q \end{pmatrix} \quad (50)$$

is called a matrix symmetrizer of $Q(x)$. This matrix provides a finite-dimensional representation of the coefficients of Q and will be used to express the Bezoutian in terms of block Hankel matrices. In [40, page 455], the concept of symmetrizer is introduced for scalar polynomials.

Additionally, let

$$F_0^{2k}(x) := \left(I_q, \bar{x}^2 I_q, \dots, \bar{x}^{2k} I_q \right)^*, \quad (51)$$

$$F_1^{2k-1}(x) := \left(\bar{x} I_q, \bar{x}^3 I_q, \dots, \bar{x}^{2k-1} I_q \right)^*. \quad (52)$$

In the following theorem, added by symmetrizers of corresponding matrices and the block Hankel matrices $H_{k,j}$, we obtain a factorized expression of the Bezoutian forms $\mathcal{G}_{2m}^{(1)}$, $\mathcal{G}_{2m}^{(2)}$, $\mathcal{G}_{2m+1}^{(1)}$ and $\mathcal{G}_{2m+1}^{(2)}$.

Theorem 1. Let $\mathcal{G}_{2m}^{(k)}$, $\mathcal{G}_{2m+1}^{(k)}$ for $k = 1, 2$ be as defined in (32) and (33). Additionally, let $\mathbf{h}_n$, $\mathbf{g}_n$, S , $\tilde{J}_m$, $H_{1,j}$, $H_{2,j}$, $F_0^{2k}(x)$ and $F_1^{2k-1}(x)$ be as in (3), (4), (50), (44), (12), (51) and (52), respectively.

Therefore, for $n = 2m$, the following equality holds:

$$\mathcal{G}_{2m}^{(1)}(x, y) = F_0^{(2m-2)*}(\bar{x}) S(\mathbf{h}_{2m}^*) \tilde{J}_{m-1} H_{2,m-1} \tilde{J}_{m-1} S(\mathbf{h}_{2m}) F_0^{(2m-2)}(y), \quad (53)$$

$$\mathcal{G}_{2m}^{(2)}(x, y) = -F_1^{(2m-1)*}(\bar{x}) S(\mathbf{h}_{2m}^*) \tilde{J}_{m-1} H_{1,m-1} \tilde{J}_{m-1} S(\mathbf{h}_{2m}) F_1^{(2m-1)}(y). \quad (54)$$

For $n = 2m + 1$, we have

$$\mathcal{G}_{2m+1}^{(1)}(x, y) = F_0^{(2m)*}(\bar{x}) S(\mathbf{g}_{2m+1}^*) \tilde{J}_m H_{1,m} \tilde{J}_m S(\mathbf{g}_{2m+1}) F_0^{(2m)}(y). \quad (55)$$

Moreover,

$$\mathcal{G}_{2m+1}^{(2)}(x, y) = -F_1^{(2m-1)*}(\bar{x}) S(\tilde{\mathbf{g}}_{2m+1}^*) \tilde{J}_{m-1} H_{2,m-1} \tilde{J}_{m-1} S(\tilde{\mathbf{g}}_{2m+1}) F_1^{(2m-1)}(y), \quad (56)$$

where

$$\tilde{\mathbf{g}}_{2m+1}(z) := I_q z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \dots + A_{2m-2}. \quad (57)$$

Proof. We prove (53). From (36), (40) and (45), we have

$$\mathcal{G}_{2m}^{(1)}(x, y) = \widehat{\mathbf{h}}_{2m}^{(11)*}(\bar{x}) \widetilde{J}_{m-1} H_{2,m-1} \widetilde{J}_{m-1} \widehat{\mathbf{h}}_{2m}^{(11)}(y). \quad (58)$$

We examine $\widehat{\mathbf{h}}_{2m}^{(11)}(y)$. By using (49) and (50), we have

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{h}}_{2m}^{(11)}(y) &= \begin{pmatrix} A_{2m-2} + \dots + A_2 y^{2m-4} + I_q y^{2m-2} \\ A_{2m-4} + \dots + A_2 y^{2m-6} + I_q y^{2m-4} \\ \vdots \\ I_q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{2m-2} & \dots & A_2 & I_q \\ A_{2m-4} & \dots & I_q & \\ \vdots & & & \\ I_q & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q \\ y^2 I_q \\ \vdots \\ y^{2m-2} I_q \end{pmatrix} \\ &= S(\mathbf{h}_{2m}) (I_q, \bar{y}^2 I_q, \dots, \bar{y}^{2m-2} I_q)^*. \end{aligned} \quad (59)$$

By substituting (59) for (58), we obtain (53). Similarly, by using

$$\mathcal{G}_{2m}^{(2)}(x, y) = \widehat{\mathbf{h}}_{2m}^{(21)*}(\bar{x}) \widetilde{J}_{m-1} H_{1,m-1} \widetilde{J}_{m-1} \widehat{\mathbf{h}}_{2m}^{(21)}(y), \quad (60)$$

$$\mathcal{G}_{2m+1}^{(1)}(x, y) = \widehat{\mathbf{g}}_{2m+1}^{(11)*}(\bar{x}) \widetilde{J}_m H_{1,m-1} \widetilde{J}_m \widehat{\mathbf{g}}_{2m+1}^{(11)}(y), \quad (61)$$

$$\mathcal{G}_{2m+1}^{(2)}(x, y) = \widehat{\mathbf{g}}_{2m+1}^{(21)*}(\bar{x}) \widetilde{J}_{m-1} H_{2,m-1} \widetilde{J}_{m-1} \widehat{\mathbf{g}}_{2m+1}^{(21)}(y), \quad (62)$$

one can prove (54), (55) and (56). Equalities (60), (61) and (62) readily follow from (46), (47), (48) and (41), as well as from (42) and (43). Additionally, one also uses (37), (38), (39), (51) and (52).

Remark 5. The polynomial $\widetilde{\mathbf{g}}_{2m+1}$ defined in (57) has degree $m-1$, in contrast to the original polynomial $\mathbf{g}_{2m+1}$ defined in (4). Using $\widetilde{\mathbf{g}}_{2m+1}$, we construct the symmetrizer $S(\widetilde{\mathbf{g}}_{2m+1})$ appearing in the matrix $\mathcal{W}_{2m+1}^{(0)}$ in (76). This is consistent with the fact that the block Hankel matrices $H_{1,m}$ and $H_{2,m-1}$ have different dimensions.

In the following corollary, we represent $\mathcal{F}_n$ as a matrix quadratic form regarding the block Hankel matrices $H_{1,j}$ and $H_{2,j}$, as well as the symmetrizer matrices $S(\mathbf{h}_{2m})$, $S(\mathbf{g}_{2m+1})$ and $S(\widetilde{\mathbf{g}}_{2m+1})$.

Corollary 2. Assume the same conditions and notations as in Theorem 1. Let $\widetilde{J}_m$ be as in (44). Moreover, let

$$\mathcal{J}_r^{(\ell)} := \begin{pmatrix} \widetilde{J}_\ell & 0 \\ 0 & \widetilde{J}_r \end{pmatrix} \quad (63)$$

for all $r, \ell > 1$. Furthermore, for $k = 0, 1$ let

$$\mathcal{W}_{2m}^{(k)} := \begin{pmatrix} S(\mathbf{h}_{2m}^*) & 0 \\ 0 & S(\mathbf{h}_{2m}^*) \end{pmatrix} \mathcal{J}_{m-1}^{(m-1)} \begin{pmatrix} H_{2,m-1} & 0 \\ 0 & (-1)^k H_{1,m-1} \end{pmatrix} \mathcal{J}_{m-1}^{(m-1)} \cdot \begin{pmatrix} S(\mathbf{h}_{2m}) & 0 \\ 0 & S(\mathbf{h}_{2m}) \end{pmatrix}, \quad (64)$$

$$\mathcal{W}_{2m+1}^{(k)} := \begin{pmatrix} S(\mathbf{g}_{2m+1}^*) & 0 \\ 0 & S(\mathbf{g}_{2m+1}^*) \end{pmatrix} \mathcal{J}_{m-1}^{(m)} \begin{pmatrix} H_{1,m} & 0 \\ 0 & (-1)^k H_{2,m-1} \end{pmatrix} \mathcal{J}_{m-1}^{(m)} \cdot \begin{pmatrix} S(\mathbf{g}_{2m+1}) & 0 \\ 0 & S(\mathbf{g}_{2m+1}) \end{pmatrix}. \quad (65)$$

With $\mathcal{F}_n$ be as in (31), the following equalities hold:

$$\mathcal{F}_{2m}(x, y) = 2 \begin{pmatrix} F_0^{(2m-2)}(\bar{x}) \\ F_1^{(2m-1)}(\bar{x}) \end{pmatrix}^* \mathcal{W}_{2m}^{(1)} \begin{pmatrix} F_0^{(2m-2)}(y) \\ F_1^{(2m-1)}(y) \end{pmatrix}, \quad (66)$$

and

$$\mathcal{F}_{2m+1}(x, y) = 2 \begin{pmatrix} F_0^{(2m)}(\bar{x}) \\ F_1^{(2m-1)}(\bar{x}) \end{pmatrix}^* \mathcal{W}_{2m+1}^{(1)} \begin{pmatrix} F_0^{(2m)}(y) \\ F_1^{(2m-1)}(y) \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Proof. Equality (66) follows directly from (34), (53), (54) and (64). In a similar manner, Equality (67) can readily be derived from (34), (55), (56) and (65).

4. Hurwitzness of Hurwitz-type matrix polynomials

In this section, using the explicit form of the Bezoutian matrix (66) and (67), we verify that an HTM polynomial $\mathbf{f}_n$ is indeed a Hurwitz matrix polynomial.

In [49], the Hurwitz property of HTM polynomials was studied. However, the proof of [49, Theorem 3.5] concerning the inertia of the matrix polynomial $\mathbf{f}_n$ for $n = 2m$ is neither explicit nor complete, and a proof for the case $n = 2m + 1$ is not provided. See Remark 14.

Recall that the inertia of matrix polynomials, denoted by $\gamma(\mathbf{f}_n)$, provides the number of eigenvalues of $\mathbf{f}_n$ with positive, negative and real zero parts, respectively; see [41, page 410].

We rewrite Corollary 2 for the pair (ix, iy) instead of (x, y) .

Corollary 3. Assume the same conditions and notations as in Theorem 1. Moreover, let $\mathcal{F}_n$, $\mathcal{J}_k^\ell$, $\mathcal{W}_{2m}^{(0)}$ and $\mathcal{W}_{2m+1}^{(0)}$ be as in (31), (63), (64) and (65), respectively. Thus, the following equalities hold:

$$\mathcal{F}_{2m}(ix, iy) = 2 \begin{pmatrix} F_0^{(2m-2)}(\bar{x}) \\ F_1^{(2m-1)}(\bar{x}) \end{pmatrix}^* \mathcal{J}_{m-1}^{(m-1)} \mathcal{W}_{2m}^{(0)} \mathcal{J}_{m-1}^{(m-1)} \begin{pmatrix} F_0^{(2m-2)}(y) \\ F_1^{(2m-1)}(y) \end{pmatrix} \quad (68)$$

and

$$\mathcal{F}_{2m+1}(ix, iy) = 2 \begin{pmatrix} F_0^{(2m)}(\bar{x}) \\ F_1^{(2m-1)}(\bar{x}) \end{pmatrix}^* \mathcal{J}_{m-1}^{(m)} \mathcal{W}_{2m+1}^{(0)} \mathcal{J}_{m-1}^{(m)} \begin{pmatrix} F_0^{(2m)}(y) \\ F_1^{(2m-1)}(y) \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Proof. Equalities (68) and (69) readily follow from (66) and (67), respectively. Let

$$\begin{aligned} V_{[0,2m-1]}(x) &:= (I_q, \bar{x}I_q, \bar{x}^2I_q, \dots, \bar{x}^{2m-2}I_q, \bar{x}^{2m-1}I_q)^*, \\ V_{[0,2m]}(x) &:= (I_q, \bar{x}I_q, \bar{x}^2I_q, \dots, \bar{x}^{2m-1}I_q, \bar{x}^{2m}I_q)^*. \end{aligned}$$

Furthermore, let $\mathcal{T}_{2m}$ (resp. $\mathcal{T}_{2m+1}$) be elementary block matrices such that

$$\begin{pmatrix} F_0^{(2m-2)}(x) \\ F_1^{(2m-1)}(x) \end{pmatrix} = \mathcal{J}_{m-1}^{(m-1)} \mathcal{T}_{2m} V_{[0,2m-1]}(x) \quad (70)$$

and

$$\begin{pmatrix} F_0^{(2m)}(x) \\ F_1^{(2m-1)}(x) \end{pmatrix} = \mathcal{J}_{m-1}^{(m)} \mathcal{T}_{2m+1} V_{[0,2m]}(x). \quad (71)$$

The following remark readily follows.

Remark 6. Using (70) and (71), equalities (68) and (69) can be written as follows:

$$\mathcal{F}_{2m}(ix, iy) = 2V_{[0,2m-1]}^*(\bar{x}) \mathcal{T}_{2m}^* \mathcal{J}_{m-1}^{(m-1)} \mathcal{W}_{2m}^{(0)} \mathcal{J}_{m-1}^{(m-1)} \mathcal{T}_{2m} V_{[0,2m-1]}(y), \quad (72)$$

$$\mathcal{F}_{2m+1}(ix, iy) = 2V_{[0,2m]}^*(\bar{x}) \mathcal{T}_{2m+1}^* \mathcal{J}_{m-1}^{(m)} \mathcal{W}_{2m+1}^{(0)} \mathcal{J}_{m-1}^{(m)} \mathcal{T}_{2m+1} V_{[0,2m]}(y). \quad (73)$$

The positivity of the matrices $\mathcal{W}_{2m}^{(0)}$ and $\mathcal{W}_{2m+1}^{(0)}$ is consistent with the spectral separation described in Remark 2. Indeed, the substitution $z = i\lambda$ transforms separation with respect to the imaginary axis into a Hermitian positivity structure for the associated Bezoutian kernel.

We now state the main result of the present work. The key step is to express the matrix

$$\frac{1}{i} B_{L_1^*, L^*}(L, L_1)$$

in terms of the Bezoutian forms obtained above and to prove its positive definiteness. This allows us to establish the Hurwitz property of HTM polynomials.

Theorem 2. *Each HTM polynomial is a Hurwitz matrix polynomial.*

Proof We use Corollary 1 with

$$L(\lambda) = \mathbf{f}_n(i\lambda) \quad \text{and} \quad L_1(\lambda) = \mathbf{f}_n(-i\lambda) \quad (74)$$

and Equalities (23), (24), (31), (32), (33) and (34). For $n = 2m$, by using (72), we have

$$\frac{1}{i} B_{L_1^*, L^*}(L, L_1) = 2\mathcal{T}_{2m}^* \mathcal{J}_{m-1}^{(m-1)} \mathcal{W}_{2m}^{(0)} \mathcal{J}_{m-1}^{(m-1)} \mathcal{T}_{2m}. \quad (75)$$

By employing (73) for $n = 2m + 1$, we have

$$\frac{1}{i} B_{L_1^*, L^*}(L, L_1) = 2\mathcal{T}_{2m+1}^* \mathcal{J}_{m-1}^{(m)} \mathcal{W}_{2m+1}^{(0)} \mathcal{J}_{m-1}^{(m)} \mathcal{T}_{2m+1}. \quad (76)$$

The right-hand sides of (75) and (76) are positive definite matrices because

$$\begin{pmatrix} H_{2,m-1} & 0 \\ 0 & H_{1,m-1} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} H_{1,m} & 0 \\ 0 & H_{2,m-1} \end{pmatrix} \quad (77)$$

are positive definite, and both $\mathcal{J}_{m-1}^{(m-1)} \mathcal{T}_{2m}$ and $\mathcal{J}_{m-1}^{(m)} \mathcal{T}_{2m+1}$ are invertible matrices.

By Corollary 1, the spectra of

$$L(\lambda) = \mathbf{f}_n(i\lambda)$$

belong to the upper half-plane of $\mathbb{C}$. Consequently, the spectra of $\mathbf{f}_n(z)$ lie in the open left half-plane of $\mathbb{C}$. Hence, the HTM polynomials $\mathbf{f}_n$ are Hurwitz matrix polynomials.

Remark 7. By employing (25), note that

$$\gamma_-(\mathbf{f}_n(i\lambda)) = \gamma_0(\mathbf{f}_n(i\lambda)) = 0,$$

and therefore

$$\gamma(\mathbf{f}_n(i\lambda)) = \gamma_+(\mathbf{f}_n(i\lambda)).$$

This is equivalent to the fact that all zeros of $\det \mathbf{f}_n(\lambda)$ lie in the open left half-plane.

The following remark illustrates the previous observation in the simplest nontrivial case.

Remark 8. A $q \times q$ HTM polynomial $\mathbf{f}_2$ of degree 2 is a Hurwitz matrix polynomial; it admits the representation

$$\mathbf{f}_2(z) = I_q z^2 + s_0 z + s_0^{-1} s_1.$$

The next remark concerns the matrix measures associated with HTM polynomials and their connection with the corresponding orthogonal matrix polynomials.

Remark 9. A $q \times q$ matrix $\tilde{\sigma}(\cdot)$ defined on $[0, \infty)$ is called monotonically nondecreasing if $\tilde{\sigma}(t)$ is self-adjoint for all $t \in [0, \infty)$ and $\tilde{\sigma}(t_2) - \tilde{\sigma}(t_1) \geq 0$ for $t_1 \leq t_2$.

For $n = 2m + 1$ (resp. $n = 2m$), the points of discontinuity of the distribution function $\tilde{\sigma}_{2m,\max}$ (resp. $\tilde{\sigma}_{2m,\min}$) that correspond to the measure $\sigma_{2m,\max}$ (resp. $\sigma_{2m,\min}$) are given by the roots of the polynomial $\det(P_{1,m}^*(-\bar{z}))$ (resp. $\det(zP_{2,m}^*(-\bar{z}))$); see (21) and (22).

On the other hand, the polynomials (19) and (20), which are constructed using the moments s_j , can be obtained from an absolutely continuous distribution on $[0, \infty)$ that corresponds to a positive measure on $[0, \infty)$, as shown in the next example.

The following example illustrates the previous construction in the case of a fifth-degree HTM polynomial. For the matrix polynomial $\mathbf{f}_5$, we compute the Bezoutian forms $\mathcal{G}_5^{(1)}$ and $\mathcal{G}_5^{(2)}$, the symmetrizers $S(\mathbf{g}_5)$ and $S(\tilde{\mathbf{g}}_5)$, the matrices $\tilde{\mathcal{J}}_1, \tilde{\mathcal{J}}_2, \mathcal{J}_1^{(2)}$, as well as the matrices $\mathcal{W}_5^{(0)}$ and $\mathcal{T}_5$. Using these matrices, we obtain an explicit representation of

$$\frac{1}{i}B_{L_1^*, L^*}(L, L_1),$$

whose positive definiteness ensures that $\mathbf{f}_5$ is a Hurwitz matrix polynomial.

Example 1. *Let*

$$\mathbf{f}_5(z) = z^5 I_2 + A_1 z^4 + A_2 z^3 + A_3 z^2 + A_4 z + A_5, \quad (78)$$

$$\text{where } A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{486}{37} & 0 \\ -\frac{264}{37}i & 6 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} \frac{560}{37} & -5i \\ 5i & 5 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} \frac{1158}{37} & 0 \\ -\frac{936}{37}i & 6 \end{pmatrix} \text{ and } A_5 = \begin{pmatrix} \frac{292}{37} & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix}.$$

The matrix polynomials $\mathbf{h}_5$ and $\mathbf{g}_5$ have the form

$$\mathbf{h}_5(x) = A_1 x^2 + A_3 x + A_5, \quad \text{and} \quad \mathbf{g}_5(x) = I_2 x^2 + A_2 x + A_4 \quad (79)$$

Using (79) together with the Laurent expansions (10) and (11), we obtain the first four moments:

$$s_0 = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad s_1 = \begin{pmatrix} 4 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 16 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix}, \quad (80)$$

$$s_3 = \begin{pmatrix} 96 & -6i \\ 6i & 6 \end{pmatrix}, \quad s_4 = \begin{pmatrix} 768 & -24i \\ 24i & 24 \end{pmatrix}. \quad (81)$$

The Bezoutian forms $\mathcal{G}_5^{(1)}$ and $\mathcal{G}_5^{(2)}$ defined in (32) and (33) are given by

$$\mathcal{G}_5^{(1)}(x, y) = \begin{pmatrix} g_{11}(x, y) & -i g_{12}(x, y) \\ i g_{12}(x, y) & g_{22}(x, y) \end{pmatrix}$$

where

$$g_{11} = \frac{2}{1369} (37x^4 (37y^4 + 280y^2 + 146) + 4x^2 (2590y^4 + 22883y^2 + 15297) + 5402y^4 + 61188y^2 + 134436)$$

$$g_{12} = ((y^4 + 5y^2 + 2)x^4 + (5y^4 + 26y^2 + 12)x^2 + 2(y^4 + 6y^2 + 6))$$

$$g_{22} = (y^4 + 5y^2 + 2)x^4 + (5y^4 + 26y^2 + 12)x^2 + 2(y^4 + 6y^2 + 6)$$

and

$$\mathcal{G}_5^{(2)}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{4xy(37(37y^2+272)x^2+10064y^2+88236)}{1369} & ixy((y^2+4)x^2+4y^2+18) \\ -ixy((y^2+4)x^2+4y^2+18) & -xy((y^2+4)x^2+4y^2+18) \end{pmatrix}$$

The matrices $S(\mathbf{g}_5)$ and $S(\tilde{\mathbf{g}}_5)$, defined in (50), have the form

$$S(\mathbf{g}_5) = \begin{pmatrix} A_4 & A_2 & I_2 \\ A_2 & I_2 & 0_2 \\ I_2 & 0_2 & 0_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1158}{37} & 0 & \frac{486}{37} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{936i}{37} & 6 & -\frac{264i}{37} & 6 & 0 & 1 \\ \frac{486}{37} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{264i}{37} & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (82)$$

and

$$S(\tilde{\mathbf{g}}_5) = \begin{pmatrix} A_2 & I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1158}{37} & 0 & \frac{486}{37} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{936i}{37} & 6 & -\frac{264i}{37} & 6 & 0 & 1 \\ \frac{486}{37} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{264i}{37} & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (83)$$

The matrix polynomial $\tilde{\mathbf{g}}_5$ has the form

$$\tilde{\mathbf{g}}_5(x) = I_2 x + A_2.$$

Furthermore, the matrices $F_0^{(4)}$ and $F_1^{(3)}$, defined in (51) and (52), have the form

$$F_0^{(4)}(x) = (I_2 \quad \bar{x}^2 I_2 \quad \bar{x}^4 I_2)^* \quad \text{and} \quad F_1^{(3)}(x) = (I_2 \quad \bar{x}^2 I_2)^*. \quad (84)$$

The matrices $\tilde{J}_2$ and $\tilde{J}_1$, introduced in (44), take the form

$$\tilde{J}_2 = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & 1_2 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \tilde{J}_1 = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix}. \quad (85)$$

Using (80) and (81), we construct the matrices $H_{1,2}$ and $H_{2,1}$. One readily verifies that these block matrices are positive definite. From (82), (83), (84), and (85), we obtain the right-hand sides of (55) and (56), which allow us to conclude that $\mathcal{G}_5^{(1)}$ and $-\mathcal{G}_5^{(2)}$ are positive quadratic forms.

The matrix $\frac{1}{i} B_{L_1^*, L^*}(L, L_1)$ in (76) can be written as the product of the matrices

$$\mathcal{J}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} \tilde{J}_2 & 0 \\ 0 & \tilde{J}_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{W}_5^{(0)} = \begin{pmatrix} S(\mathbf{g}_5^*) & 0 \\ 0 & S(\tilde{\mathbf{g}}_5^*) \end{pmatrix} \mathcal{J}_1^{(2)} \begin{pmatrix} H_{1,2} & 0 \\ 0 & H_{2,1} \end{pmatrix} \mathcal{J}_1^{(2)} \begin{pmatrix} S(\mathbf{g}_5) & 0 \\ 0 & S(\tilde{\mathbf{g}}_5) \end{pmatrix}$$

and the matrix $\mathcal{T}_5$, which appears in (73), has the form

$$\mathcal{T}_5 = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & I_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 & I_2 \\ 0_2 & I_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 & I_2 & 0_2 \end{pmatrix}.$$

From these matrices, together with (73), (76), Corollary 1, and the second matrix in (77), it follows that the matrix polynomial $\mathbf{f}_5$ is a Hurwitz matrix polynomial.

The following remark illustrates how HTM polynomials can be generated from matrix-valued measures on $[0, \infty)$.

Remark 10. *The polynomial $\mathbf{f}_5$ in (78) can be constructed starting from the matrix-valued distribution*

$$\tilde{\sigma}(x) = \begin{pmatrix} 4 - 2e^{-x/2} & ie^{-x} \\ -ie^{-x} & 2 - e^{-x} \end{pmatrix},$$

defined on $[0, \infty)$.

More generally, the construction of HTM polynomials can be initiated from a nonnegative Hermitian matrix-valued measure (or a distribution of bounded variation) on $[0, \infty)$ such that the associated block Hankel matrices $H_{1,j}$ and $H_{2,j}$ are positive definite.

From this distribution, we compute the moments s_j as in (80) and (81). Next, we apply Definition 4. Finally, the second equality in (18) is used to obtain (78).

Next, we recall the characterization of HTM polynomials in terms of block Hankel matrices; see [6, Theorem 7.10].

Theorem 3. *Let n be a natural number with $n \geq 2$, and let $\mathbf{f}_n$ be a matrix-valued polynomial. Let $\mathbf{h}_n$ (resp. $\mathbf{g}_n$) denote the $\mathbf{h}_n$ -part (resp. $\mathbf{g}_n$ -part) of $\mathbf{f}_n$. Furthermore, let $n = 2m$ (resp. $n = 2m + 1$) with $m \geq 1$, and let $H_{1,m-1}$ and $H_{2,m-1}$ (resp. $H_{1,m}$ and $H_{2,m-1}$) be constructed from the Hermitian Markov parameters of the polynomial $\mathbf{f}_n$. Then the matrix-valued polynomial $\mathbf{f}_n$ is an HTM polynomial if and only if the block Hankel matrices $H_{1,m-1}$ and $H_{2,m-1}$ (resp. $H_{1,m}$ and $H_{2,m-1}$) are positive definite.*

We now pass from the Hankel-matrix characterization to a Bezoutian characterization. In particular, for an HTM polynomial, the Bezoutians associated with the decomposition of $\mathbf{f}_n$ into its $\mathbf{h}_n$ - and $\mathbf{g}_n$ -parts have definite signs.

Proposition 3. *Let $\mathbf{f}_n$ be an HTM polynomial. Moreover, let $\mathbf{h}_n$ and $\mathbf{g}_n$ be as in (2), (3) and (4), respectively. Furthermore, let $B_{x\mathbf{g}_n^*, \mathbf{h}_n^*}(x\mathbf{g}_n, \mathbf{h}_n)$ and $B_{\mathbf{g}_n^*, \mathbf{h}_n^*}(\mathbf{g}_n, \mathbf{h}_n)$ be Bezoutians associated with the quadruple $(x\mathbf{g}_n^*, \mathbf{h}_n, \mathbf{h}_n^*, x\mathbf{g}_n)$ and $(\mathbf{g}_n^*, \mathbf{h}_n, \mathbf{h}_n^*, \mathbf{g}_n)$, respectively. Thus,*

- a) *the matrix $B_{x\mathbf{g}_n^*, \mathbf{h}_n^*}(x\mathbf{g}_n, \mathbf{h}_n)$ is positive definite, and*
- b) *the matrix $B_{\mathbf{g}_n^*, \mathbf{h}_n^*}(\mathbf{g}_n, \mathbf{h}_n)$ is negative definite.*

Proof. Let $\tilde{J}_m$, $\tilde{\mathbf{g}}_{2m+1}$, $S(\mathbf{h}_{2m})$, $S(\mathbf{g}_{2m+1})$ and $S(\tilde{\mathbf{g}}_{2m+1})$ be as in (44), (57) and (50). For $n = 2m$, by using (32), (33), (53) and (54), we have

$$\begin{aligned} B_{x\mathbf{g}_{2m}^*, \mathbf{h}_{2m}^*}(x\mathbf{g}_{2m}, \mathbf{h}_{2m}) &= S(\mathbf{h}_{2m}^*)\tilde{J}_{m-1}H_{2,m-1}\tilde{J}_{m-1}S(\mathbf{h}_{2m}), \\ B_{\mathbf{g}_{2m}^*, \mathbf{h}_{2m}^*}(\mathbf{g}_{2m}, \mathbf{h}_{2m}) &= -S(\mathbf{h}_{2m}^*)\tilde{J}_{m-1}H_{1,m-1}\tilde{J}_{m-1}S(\mathbf{h}_{2m}). \end{aligned}$$

By (32), (33), (55) and (56), for $n = 2m + 1$, we obtain

$$\begin{aligned} B_{x\mathbf{g}_{2m+1}^*, \mathbf{h}_{2m+1}^*}(x\mathbf{g}_{2m+1}, \mathbf{h}_{2m+1}) &= S(\mathbf{g}_{2m+1}^*)\tilde{J}_m H_{1,m} \tilde{J}_m S(\mathbf{g}_{2m+1}) \\ B_{\mathbf{g}_{2m+1}^*, \mathbf{h}_{2m+1}^*}(\mathbf{g}_{2m+1}, \mathbf{h}_{2m+1}) &= -S(\tilde{\mathbf{g}}_{2m+1}^*)\tilde{J}_{m-1} H_{2,m-1} \tilde{J}_{m-1} S(\tilde{\mathbf{g}}_{2m+1}). \end{aligned}$$

From Theorem 3, see that assertion a) and b) are valid.

Remark 11. In [40, Theorem 2], it is proven that a scalar polynomial f_n is Hurwitz if and only if $B_{xg_n^*, h_n^*}(xg_n, h_n)$ is negative definite and $B_{g_n^*, h_n^*}(g_n, h_n)$ is positive definite. Note that the Markov parameters related to [40, Theorem 2] have the opposite sign compared with those associated with parts (a) and (b) of Proposition 3.

5. Completing a matrix polynomial to an HTM polynomial

As indicated in [10], not every Hurwitz matrix polynomial is an HTM polynomial. In this section, we propose a procedure to complete a given matrix polynomial into an HTM polynomial.

In [10], the polynomial

$$P_3(z) = I_2 z^3 + A_1 z^2 + A_2 z + A_3 \quad (86)$$

with

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{2187}{109} & \frac{1206}{109} \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{10662}{109} & \frac{8700}{109} \\ 0 & 18 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} \frac{11178}{109} & \frac{10524}{109} \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (87)$$

was suggested as a polynomial that is Hurwitz but not an HTM polynomial. The rational matrix function $\frac{1}{z}(A_1 z + A_3)(I_2 z + A_2)^{-1}$ does not satisfy property (30). Moreover, as indicated in [10], the 2×2 matrix coefficients c_j of the expansion

$$\frac{1}{z}(A_1 z + A_3)(I_2 z + A_2)^{-1} = -\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} - \frac{c_2}{z^3} - \dots$$

are not Hermitian matrices. Consequently, the polynomial P_3 cannot be investigated in the framework of HTM polynomials.

The following result allows one to determine whether a matrix polynomial P_n that is not an HTM polynomial is in fact a Hurwitz polynomial by “completing,” mainly by perturbing P_n with another polynomial Q_{n-1} . This is done by constructing a new HTM polynomial of degree $2n$.

Theorem 4. Let $P_n(z)$ be $q \times q$ a monic polynomial of degree n . If there exists a $q \times q$ polynomial $Q_{n-1}(z)$ of degree $n - 1$ such that

$$\mathbf{f}_{2n}(z) = P_n(z^2) + zQ_{n-1}(z^2) \quad (88)$$

is an HTM polynomial, then the polynomial $P_n(z)$ is a Hurwitz polynomial.

Proof. From (18) and (19), there are polynomials $P_{1,n}$ y $Q_{1,n}$ such that $P_n(z) = (-1)^n P_{1,n}^*(-\bar{z})$ $Q_{n-1}(z) = (-1)^{n+1} Q_{1,n}^*(-\bar{z})$ and $P_{1,n}(z)$ is an orthogonal polynomial on $[0, +\infty)$ with respect to a certain positive measure σ corresponding to the Stieltjes transform $-\frac{Q_{1,n}^*(\bar{z})}{P_{1,n}^*(\bar{z})}$. By [21, Theorem 1], the roots of the polynomial $\det P_{1,n}(z)$ lie in $[0, +\infty)$. Consequently, the roots of the polynomial

$$\det P_n(z) = \det((-1)^n P_{1,n}^*(-\bar{z}))$$

lie in the open left half-plane. Therefore, $\det P_n(z)$ is a Hurwitz polynomial.

Remark 12. Let P_n be a monic matrix polynomial and let $P_n^\top$ denote its transpose. Since

$$\det P_n = \det P_n^\top,$$

Theorem 4 is also valid for $P_n^\top$ and $Q_{n-1}^\top$.

For the construction of the polynomial Q_{n-1} appearing in Theorem 4, we propose the following algorithm. The procedure is based on the representation of the associated rational matrix function in terms of orthogonal polynomials and the corresponding Markov parameters, which allows one to recover Q_{n-1} from a given polynomial P_n .

Algorithm for finding Q_{n-1} from P_n

Step 1. Let $P_{1,n}(z) = (-1)^n P_n^*(-\bar{z})$ (resp. $P_{1,n}(z) = (-1)^n P_n^{\top*}(-\bar{z})$). By using (17), compute $Q_{1,n}(z)$ in terms of the coefficients of $P_n(z)$ (resp. $P_n^\top(z)$) and the moments or Markov parameters s_j , associated with some positive measure σ on $[0, +\infty)$.

Step 2. Verify that $\frac{P_{1,n}^*(\bar{z})}{Q_{1,n}^*(\bar{z})}$ satisfies Equality (30). If Equality (30) is not satisfied, we cannot apply this algorithm.

Step 3. By using the rational matrix function $\frac{P_{1,n}^*(\bar{z})}{Q_{1,n}^*(\bar{z})}$, calculate the remaining Markov parameters from the set $(s_j)_{j=0}^{2n-1}$.

Step 4. If sequence $(s_j)_{j=0}^{2n-1}$ is a positive definite Stieltjes sequence, meaning that the corresponding Hankel matrices $H_{1,n-1}$ and $H_{2,n-1}$ are positive definite matrices, then $Q_{n-1}(z) = (-1)^{n+1} Q_{1,n}^*(-\bar{z})$.

Example 2. We apply the completion procedure to the matrix polynomial (86).

For $P_3^\top(z)$, we use the above algorithm together with Remark 12. With moments $s_0 = \begin{pmatrix} 2b & -b \\ -b & b \end{pmatrix}$, $s_1 = \begin{pmatrix} 4b & -b \\ -b & b \end{pmatrix}$ and $s_2 = \begin{pmatrix} 16b & -2b \\ -2b & 2b \end{pmatrix}$, we calculate $Q_{1,3}(z)$; therefore, we have

$$Q_{1,3}(z) = s_0 z^2 + z(s_1 - A_1^{\top*} s_0) + s_2 - A_1^{\top*} s_1 + A_2^{\top*} s_0.$$

From the Laurent expansion of $-\frac{P_{1,3}^*(\bar{z})}{Q_{1,3}^*(\bar{z})}$, we calculate the moments

$$s_3 = \begin{pmatrix} 96b & -6b \\ -6b & 6b \end{pmatrix}, s_4 = \begin{pmatrix} 768b & -24b \\ -24b & 24b \end{pmatrix}, s_5 = \begin{pmatrix} 7680b & -120b \\ -120b & 120b \end{pmatrix}.$$

The block Hankel matrices $H_{1,2}$ and $H_{2,2}$ are positive definite matrices for $b > 0$. From (19), polynomial $Q_2(z)$ constructed from P_3 has the form $Q_2(z) = Q_{1,3}^*(-\bar{z})$. Thus, the resulting HTM polynomial $\mathbf{f}_6$ can be represented as in (88):

$$\mathbf{f}_6(z) = z^6 I_2 + B_1 z^5 + A_1 z^4 + B_2 z^4 + A_2 z^2 + B_3 z + A_3. \quad (89)$$

The coefficients A_1 , A_2 and A_3 are given by (87), and the coefficients B_1 , B_2 and B_3 are

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2b & -b \\ -b & b \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} \frac{2732b}{109} & -8b \\ -8b & 8b \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} \frac{6826b}{109} & -11b \\ -11b & 11b \end{pmatrix}.$$

By Theorem 2, matrix polynomial (89) is a Hurwitz matrix polynomial for $b > 0$. Finally, by Theorem 4, polynomial P_3 as in (86) is a Hurwitz matrix polynomial.

In the scalar version, one can construct a sequence of scalar Hurwitz polynomials $(f_j)_{j=1}^\infty$ using the sequence of scalar orthogonal polynomials on $[0, +\infty)$ $(p_{1,j})_{j=1}^\infty$ and $(p_{2,j})_{j=1}^\infty$ as in Definition 4; see [12].

In the following lemma, we propose constructing a family of scalar Hurwitz polynomials involving the polynomials $p_{1,j}$, and $p_{2,j}$ and their derivatives.

Lemma 4. For $q = 1$, let $(p_{1,m}(z))$ (resp. $(p_{2,m}(z))$) be as in Definition 4, and let $\tilde{p}_{1,m-1}(z) := \frac{d}{dz}p_{1,m}(z)$ (resp. $\tilde{p}_{2,m-1}(z) := \frac{d}{dz}p_{2,m}(z)$). Thus, for $m \geq 2$, the polynomials

$$f_{2m}(z) = (-1)^m(p_{1,m}(-z^2) - z\tilde{p}_{1,m-1}(-z^2)) \quad (90)$$

and

$$f_{2m+1}(z) = (-1)^m(\tilde{p}_{2,m}(-z^2) + zp_{2,m}(-z^2)). \quad (91)$$

are scalar Hurwitz polynomials.

Proof. The proof of (90) and (91) readily follows from the interlacing properties of the roots of the orthogonal polynomials $p_{k,m}(z)$ and $\tilde{p}_{k,m-1}(z)$ for $k = 1, 2$, and from the fact that $a_0 a_1 > 0$, where a_0 and a_1 are the leading coefficients of the polynomial $f_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$; see the Hermite–Biehler theorem [3], [32].

Remark 13. From (78) and (89), we see that the determinants of the coefficients of these polynomials are positive. Based on this observation, we propose the conjecture below.

Conjecture. The determinants of the coefficients A_j of an HTM polynomial $\mathbf{f}_n$ are positive.

6. Additional remarks

In this section, to clarify the importance of the present work, we recall several relevant results from [49], paying particular attention to certain steps in the proofs that were left implicit. We emphasize that the authors of [49] (2021) were the first

to propose that the HTM polynomials possess the Hurwitz property, while the concept of HTM polynomials itself was introduced earlier by the author of the present work in [6] (2015).

Lemma 5. [49, Lemma 3.4] *Let $N_R(z)$, $D_R(z)$, $N_L(z)$ and $D_L(z) \in \mathbb{C}[z]^{p \times p}$ be regular such that $\deg D_R > \deg N_R$, $\deg D_L > \deg N_L$ and, for all large enough $z \in \mathbb{C}$,*

$$(D_L(z))^{-1}N_L(z) = N_R(z)(D_R(z))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k+1)} s_k.$$

If $D_L(z)$ and $D_R(z)$ are written in the form

$$D_L(z) = \sum_{k=0}^{m_L} D_{L,m_L-k} z^k \quad \text{and} \quad D_R(z) = \sum_{k=0}^{m_R} D_{R,m_R-k} z^k,$$

where $D_{L,k} \in \mathbb{C}^{p \times p}$ for $k = 0, \dots, m_L$ and $D_{R,k} \in \mathbb{C}^{p \times p}$ for $k = 0, \dots, m_R$, then

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{D_L, N_L}(D_R, N_R) &= \begin{pmatrix} D_{L,m_L-1} & \cdots & D_{L,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{L,0} & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 & \cdots & s_{m_R-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m_L-1} & \cdots & s_{m_R+m_L-2} \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} D_{R,m_R-1} & \cdots & D_{R,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{R,0} & \cdots & \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (92)$$

Let L_1 and L be as in (74). In [49], the Theorem 3.5 is regarding the inertia representation of matrix polynomials $\mathbf{f}_n$. For $n = 2m$, in the proof of [49, Theorem 3.5] the [49, Equality (3.6)] in terms of our notations is the following

$$B_{L_1^*, L^*}(L, L_1) = 2i B_{\mathbf{h}_{2m}^*(-\bar{x}^2), x\mathbf{g}_{2m}^*(-\bar{x}^2)}(\mathbf{h}_{2m}(-x^2), -x\mathbf{g}_{2m}(-x^2)). \quad (93)$$

The authors of [49] use $2i B_{F_e^\vee, -F_0^\vee}(\widehat{F}_e, -\widehat{F}_0)$ in place of the right-hand side of (93). They claim that Lemma 5 implies that the matrix $2i B_{F_e^\vee, -F_0^\vee}(\widehat{F}_e, -\widehat{F}_0)$ is congruent to the block Hankel matrix

$$\begin{pmatrix} s_0 & 0_p & s_1 & \cdots & s_{m-1} & 0_p \\ 0_p & s_1 & 0_p & \cdots & 0_p & s_m \\ s_1 & 0_p & s_2 & \cdots & s_m & 0_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{m-1} & 0_p & s_m & \cdots & s_{2m-2} & 0_p \\ 0_p & s_m & 0_p & \cdots & 0_p & s_{2m-1} \end{pmatrix}, \quad (94)$$

and that, after a suitable reordering of rows and columns in (94), it is further congruent to

$$\begin{pmatrix} H_{1,m-1} & 0 \\ 0 & H_{2,m-1} \end{pmatrix}. \quad (95)$$

Remark 14. *By comparing the Hankel matrix of the right-hand side of (92) and the matrix (94) It is not clear how from $2i B_{F_e^\vee, -F_0^\vee}(\widehat{F}_e, -\widehat{F}_0)$ one gets (94). Furthermore, it is not clear how from (94) one obtains (95).*

In contrast, for $n = 2m$, in the present work we derive the matrix $\begin{pmatrix} H_{2,m-1} & 0 \\ 0 & H_{1,m-1} \end{pmatrix}$ associated with the quadratic form in (95) by employing the decomposition (34) and by computing explicitly the quadratic forms corresponding to (32) and (33), as shown in (66). Additionally, for $n = 2m + 1$, the proof of [49, Theorem 3.5] is not given.

In Theorem 4.10 of [49], a “stability criterion via Markov parameters” for matrix polynomials $\mathbf{f}_n$ in even and odd cases is suggested. We have the following remark regarding this.

Remark 15. *For $n = 2m$, Theorem 4.10 of [49], is related to the HTM polynomials. Other matrix polynomials, for example, the Hurwitz polynomial (86), are not covered by [49, Theorem 4.10].*

In this work, we do not discuss the case $n = 2m + 1$ of Theorem 4.10 of [49].

7. Conclusion

In this work we obtained an explicit representation of the Bezoutian associated with Hurwitz-type matrix polynomials. This representation clarifies the relation between Hurwitz-type matrix polynomials and classical Hurwitz matrix polynomials and provides a constructive tool for verifying Hurwitzness in the matricial setting. Our approach, based on the decomposition of Bezoutians and on the structure of truncated matricial Stieltjes moment problems, offers a natural framework for extending classical stability criteria to matrix polynomials. In addition, we proposed a method to enlarge the class of Hurwitz-type matrix polynomials by perturbing a polynomial that is not of Hurwitz type so that the new polynomial becomes Hurwitz type. These results contribute to a better understanding of the structure of Hurwitz-type matrix polynomials and their relation to Bezoutians, and they suggest further developments in matrix moment problems, continued fractions, and stability theory.

Acknowledgments

This work was partially supported by the Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo and SNII–SECIHTI grants, México.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

REFERENCES

1. N. I. Aheizer, M. G. Krein, Some Questions in the Theory of Moments. Translations of Mathematical Monographs, 2, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1962, 265 pp. <https://doi.org/10.1090/mmono/002>

2. B. D. O. Anderson, E. I. Jury, Generalized Bezoutin and Sylvester matrices in multivariable linear control, *IEEE Trans. Autom. Control.* – 1976. – Vol. **AC-21**. – P. 551–556. <https://doi.org/10.1109/TAC.1976.1101263>
3. C. Biehler, Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles, *J. Reine Angew. Math. (Crelle's Journal)* – 1879. – Vol. **87**. – P. 350–352. <https://doi.org/10.1515/9783112341889-020>
4. D. Cox, J. Little, and D. O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms*, 4th ed., *Undergraduate Texts in Mathematics*, Springer, Cham. – 2015. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-91841-4>
5. A.E. Choque Rivero, On Dyukarev's resolvent matrix for a truncated Stieltjes matrix moment problem under the view of orthogonal matrix polynomials, *Linear Algebra Appl.* – 2015. – Vol. **474**. – P. 44–109. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.01.027>
6. A.E. Choque Rivero, On matrix Hurwitz type polynomials and their interrelations to Stieltjes positive definite sequences and orthogonal matrix polynomials, *Linear Algebra Appl.* – 2015. Vol. **476**. – P. 56–84. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.03.001>
7. A.E. Choque-Rivero, The Kharitonov theorem and robust stabilization via orthogonal polynomials, *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics.* – 2017. Vol. **86**. – P. 49–68. <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2017-86-05>
8. A.E. Choque Rivero, Hurwitz polynomials and orthogonal polynomials generated by Routh–Markov parameters, *Mediterr. J. Math.* – 2018. Vol. **15**, No **40**. – 15 pages. <https://doi.org/10.1007/s00009-018-1083-2>
9. A.E. Choque Rivero, Extended set of solutions of a bounded finite-time stabilization problem via the controllability function, *IMA J. Math. Control Inf.* – 2021. Vol. **38**, No **4**. – P. 1174–1188. <https://doi.org/10.1093/imamci/dnab028>
10. A.E. Choque Rivero, Comments on the paper “On the relation between Hurwitz stability of matrix polynomials and matrix-valued Stieltjes functions,” *J. Comput. Appl. Math.* 417 (2023) by Xuzhou Zhan and Yongjian Hu, submitted to *J. Comput. Appl. Math.*, 2023. Available at: https://drive.google.com/file/d/1qE3xsF37K9HN2lrMQ9eW92pH9LEk_6Te/view?usp=sharing
11. A.E. Choque Rivero, Korobov's controllability function as motion time: Extension of the solution set of the synthesis problem, *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.* – 2023. Vol. **19**, No **3**. – P. 556–586. <https://doi.org/10.15407/mag19.03.556>

12. A.E. Choque-Rivero, I. Area, Favard type theorem for Hurwitz polynomials, *Discrete & Continuous Dynamical Systems–B.* – 2020. Vol. **22**, No **2**. – P. 529–544. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2019252>
13. A.E. Choque Rivero, V.I. Korobov, V.O. Skoryk, Controllability function as time of motion. I, *Mat. Fiz. Anal. Geom.* – 2004. Vol. **2**, No **11**. – P. 208–225. (in Russian) Translated into English in <http://arxiv.org/abs/1509.05127>.
14. A.E. Choque Rivero, V.I. Korobov, V.O. Skoryk, Controllability function as time of motion. II, *Mat. Fiz. Anal. Geom.* – 2004. Vol. **3**, No **11**. – P. 341–354.
15. A.E. Choque Rivero, C. Maedler, On resolvent matrix, Dyukarev–Stieltjes parameters and orthogonal matrix polynomials via $[0, +\infty)$ –Stieltjes transformed sequences, *Complex Anal. Oper. Theory.* – 2019. Vol. **13**. – P. 1–44. <https://doi.org/10.1007/s11785-017-0655-7>
16. B.N. Datta, Application of Hankel matrices to Markov parameters to the solution of the Routh–Hurwitz and the Schur–Cohn problems, *J. Math. Anal. Appl.* – 1979. Vol. **68**, No **1**. – P. 276–290. [https://doi.org/10.1016/0022-247x\(79\)90115-x](https://doi.org/10.1016/0022-247x(79)90115-x)
17. J.E. Dennis, J.F. Traub and R.P. Weber, On the Matrix Polynomial, Lambda-Matrix and Block Eigenvalue Problems, Computer Science Department Tech. rep., Cornell Univ., Ithaca, N.Y., and Carnegie-Mellon Univ., Pittsburgh, Pa. – 1971. <https://hdl.handle.net/1813/5954>
18. Y.M. Dyukarev, A general scheme for solving interpolation problems in the Stieltjes class that is based on consistent representations of pairs of nonnegative operators. I. *Mat. Fiz. Anal. Geom.* – 1999. Vol **6**, No **1–2**. – P. 30–54. <https://mag.ilt.kharkiv.ua/index.php/mag/article/view/m06-0030r>
19. Y.M. Dyukarev, Indeterminacy criteria for the Stieltjes matrix moment problem, *Math Notes.* – 2004. Vol **75**. – P. 66–82. <https://doi.org/10.1023/B:MATN.0000015022.02925.bd>
20. Y.M. Dyukarev, Theory of Interpolation Problems in the Stieltjes Class and Related Problems of Analysis, Habilitation thesis. Kharkiv National University – 2006.
21. Y.M. Dyukarev, The zeros of determinants of matrix-valued polynomials that are orthonormal on a semi-infinite or finite interval, *Sbornik: Mathematics.* – 2018. Vol. **209**, No **12**. – P. 1745–1755.
22. Y.M. Dyukarev, B. Fritzsche, B. Kirstein, C. Mädler, On truncated matricial Stieltjes type moment problems. *Complex Anal. Oper. Theory.* – 2010. Vol. **4**. – P. 905–951. <https://doi.org/10.1007/s11785-009-0002-8>

23. Y.M. Dyukarev, B. Fritzsche, B. Kirstein, C. Mädler, H. Thiele, On distinguished solutions of truncated matricial Hamburger moment problems. *Complex Anal. Oper. Theory.* – 2009. Vol. **3**, No. **759**. – P. 759–834. <https://doi.org/10.1007/s11785-008-0061-2>
24. B. Fritzsche, B. Kirstein, and Conrad Mädler, On Hankel nonnegative definite sequences, the canonical Hankel parametrization, and orthogonal matrix polynomials, *Complex Anal. Oper. Theory.* – 2011. Vol. **5**, No. **2**. – P. 447–511. <https://doi.org/10.1007/s11785-010-0054-9>
25. B. Fritzsche, B. Kirstein, and C. Madler, On a special parametrization of matricial α –Stieltjes one-sided non-negative definite sequences. *Interpolation, Schur functions and moment problems. II. Oper. Theory Adv. Appl.* – 2012. Vol. **226**. – P. 211–250. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0428-8_5
26. B. Fritzsche, B. Kirstein, and Conrad Mädler, Transformations of matricial α –Stieltjes non-negative definite sequences, *Linear Algebra Appl.* – 2013. Vol. **439**, No. **12**. – P. 3893–3933. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.10.002>
27. P. A. Fuhrmann, B. N. Datta, On Bezoutians, Van der Monde matrices and the Lienard–Chipart stability criterion, *Linear Algebra Appl.* – 1989. Vol. **120**. – P. 23–37. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(89\)90367-4](https://doi.org/10.1016/0024-3795(89)90367-4)
28. F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Volume I, AMS Chelsea. – 2000.
29. F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Volume II, AMS Chelsea. – 2000.
30. G. Heinig, U. Jungnickel, On the Routh–Hurwitz and Shur–Cohn problems for matrix polynomials and generalized Bezoutians, *Math. Nach.* – 1984. Vol. **116**, No. **1**. – P. 185–196. <https://doi.org/10.1002/mana.19841160114>
31. D. Henrion, D. Arzelier, D. Peaucelle, M. Sebek, An LMI condition for robust stability of polynomial matrix polytopes, *Automatica.* – 2001. Vol. **37**, No. **3**. – P. 461–468. [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(00\)00170-9](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(00)00170-9)
32. C. Hermite, Extrait d’une lettre de. M. Hermite de Paris à M. Borchardt de Berlin sur le nombre des racines d’une équation algébrique comprises entre des limites données, *J. Reine Angew. Math.* – 1856. Vol. **1856**, No. **52**. – P. 39–51. <https://doi.org/10.1515/crll.1856.52.39>
33. O. Holtz, M. Tyaglov, Structured matrices, continued fractions, and root localization of polynomials. *SIAM Rev.* – 2012. Vol. **54**, No. **3**. – P. 421–509. <https://doi.org/10.1137/090781127>
34. A. Hurwitz, Über die Bedingungen unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt *Math. Ann.* – 1895. Vol. **46**. – P. 273–284. <https://doi.org/10.1007/BF01446812>

35. E.J. Jury, A. Katbab, A note on Kharitonov-type results in the space of Markov parameters, *IEEE Trans. Autom. Control.* – 1989. Vol. **37**, No **1**. – P. 155–158. <https://doi.org/10.1109/9.109655>
36. V. Katsnelson, Stieltjes functions and Hurwitz stable entire functions, *Complex Anal. Oper. Theory.* – 2011. Vol. **5**. – P. 611–630. <https://doi.org/10.1007/s11785-011-0146-1>
37. F.J. Kraus, M. Mansour and M. Sebek, Hurwitz matrix for polynomial matrices, In: Jeltsch, R., Mansour, M. (eds) *Stability Theory. ISNM International Series of Numerical Mathematics*, Birkhäuser Basel. – 1996. Vol. **121**. – P. 67–74. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9208-7_8
38. M.G. Krein, M.A. Naimark, The method of symmetric and Hermitian forms in the theory of the separation of the roots of algebraic equations, *Linear and Multilinear Algebra.* – 1981. Vol. **10**, No **4**. – P. 265–308. <https://doi.org/10.1080/03081088108817420>
39. P. Lancaster, *Lambda-Matrices and Vibrating Systems*, Pergamon Press, New York. – 1966. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-01959-7>
40. P. Lancaster and M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices: With Applications*, Second Edition, Academic Press. – 1985.
41. L. Lerer, M. Tismenetsky, The Bezoutian and the eigenvalue-separation problem for matrix polynomials, *Integral Equations Oper. Theory.* – 1982. Vol. **5**. – P. 386–445. <https://doi.org/10.1007/BF01694045>
42. L. Lerer, L. Rodman, M. Tismenetsky, Inertia theorems for matrix polynomials, *Linear and Multilinear Algebra.* – 1991. Vol. **30**, No **3**. P. 157–182. <https://doi.org/10.1080/03081089108818100>
43. C. MacDuffee, *The Theory of Matrices*, Chelsea, New Your. – 1946.
44. F. Martins, E. Pereira, Block matrices and stability theory, *Tatra Mt. Math. Publ.* – 2007. Vol. **38**. – P. 147–162.
45. D.V. Ouellette, Schur complements and statistics, *Linear Algebra Appl.* – 1981. Vol. **36**. – P. 187–295. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(81\)90232-9](https://doi.org/10.1016/0024-3795(81)90232-9)
46. P. Resende and E. Kaszkurewicz, New stability conditions for matrix polynomials using a block-bidiagonal form, *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Espoo, Finland. – 1988. Vol. **1**. – P. 385–388. <https://doi.org/10.1109/iscas.1988.14945>
47. E. J. Routh, *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion: Particularly Steady Motion*. Macmillan and Co. – 1877.

48. L. Shieh, S. Sacheti, A matrix in the block Schwarz form and the stability of matrix polynomials, *Int. J. Control.* – 1978. Vol. **27**, No **2**. – P. 245–259. <https://doi.org/10.1080/00207177808922362>
49. X. Zhan, A. Dyachenko, On generalization of classical Hurwitz stability criteria for matrix polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* – 2021. Vol. **383**. – P. 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113113>

Article history: Received: 27 February 2026; Final form: 10 May 2026

Accepted: 13 May 2026. Published 31 May 2026.

How to cite this article:

A. E. Choque–Rivero, On the Hurwitz stability of Hurwitz-type matrix polynomials, *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 103, 2026, p. 5–37. <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2026-103-01>

Про стійкість за Гурвіцем матричних поліномів типу Гурвіца

А. Е. Чоке-Рівер

Інститут фізики та математики

Університет Мічоакана-де-Сан-Ніколас-де-Ідальго

Будівля С-3, Центральний кампус, 58060, Морелія, Мічоакан, Мексика

Дійсний скалярний поліном, корені якого лежать у лівій півплощині комплексної площини, називається поліномом Гурвіца. Це поняття походить з робіт Дж. К. Максвелла, Е. Дж. Раута, та А. Гурвіца, і пізніше вивчалось за допомогою таких методів, як послідовності Штурма, параметри Маркова, та ланцюгові дробі; див., наприклад, *Теорія матриць*, Том II, Розділ XV, AMS Chelsea (2000), Ф. Гантмахера.

Матричний поліном $P(z)$ розміру $q \times q$ називається Гурвіцевим якщо $\det P(z)$ є Гурвіцевим поліномом. Кожен матричний поліном $\mathbf{f}_n$ може бути представлений у формі $\mathbf{f}_n(z) = \mathbf{h}_n(z^2) + z\mathbf{g}_n(z^2)$. Матричний поліном $\mathbf{f}_{2m}$ називається поліномом типу Гурвіца якщо вираз $\mathbf{g}_{2m}(z)\mathbf{h}_{2m}^{-1}(z)$ допускає представлення у вигляді скінченного ланцюгового дробу з додатно визначеними матричними коефіцієнтами. Аналогічно, матричний поліном непарного степеня $\mathbf{f}_{2m+1}$ є поліномом типу Гурвіца якщо $\frac{1}{z}\mathbf{h}_{2m+1}(z)\mathbf{g}_{2m+1}^{-1}(z)$ має таку ж саму властивість. Поняття матричних поліномів типу Гурвіца було введено в *Про матричні поліноми типу Гурвіца та їх взаємозв'язки з додатно визначеними послідовностями Стилтьєса та ортогональними матричними поліномами*, *Linear Algebra Appl.* 476 (2015), автором А. Е. Чоке-Ріверо.

У цій роботі ми виводимо явну форму Безутіана, пов'язаного з матричними поліномами типу Гурвіца. Той факт, що матричні поліноми типу Гурвіца є матричними поліномами Гурвіца, був запропонований та частково доведений з використанням Безутіанів у *Про узагальнення класичних критеріїв стійкості Гурвіца для матричних поліномів*, *J. Comput. Appl. Math.* 383 (2021), авторами Х. Жаном та А. Дьяченком. На відміну від цієї роботи, ми використовуємо розкладання форми Безутіана, введене в *Деякі питання теорії моментів*, Переклади математичних

монографій 2, AMS, 1962, авторами Н. І. Ахієзер та М. Г. Крейн, для скалярних поліномів.

Крім того, ми пропонуємо метод розширення класу матричних поліномів типу Гурвіца шляхом додавання до заданого полінома матричного полінома, який не є поліномом типу Гурвіца, але при цьому отриманий поліном стає типу Гурвіца.

Ключові слова: Гурвіцевий матричний поліном; ортогональний матричний поліном; Безутіан; матричний поліном типу Гурвіца.

Конфлікт інтересів: Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

Історія статті: отримана: 27 лютого 2026; останній варіант: 10 травня 2026
прийнята: 13 травня 2026. Оприлюднено 31 травня 2026.

M. O. Bebiya

Ph.D in Physical and Mathematical Sciences
Associate Professor, Department of Applied Mathematics,
School of Mathematics and Computer Sciences
V. N. Karazin Kharkiv National University
Svobody Sq., 4, Kharkiv, Ukraine, 61022
m.bebiya@karazin.ua  <http://orcid.org/0000-0003-3241-5879>

Y. M. Barska

MS in applied mathematics
V. N. Karazin Kharkiv National University
Svobody Sq., 4, Kharkiv, Ukraine, 61022
j.barskaya2@gmail.com  <http://orcid.org/0009-0008-8444-2960>

On stabilization of canonical nonlinear systems in a special case

The paper addresses the stabilization problem for canonical nonlinear systems, which in the triangular case correspond to systems in p -normal form. These systems are inherently nonlinear because they are not feedback linearizable, and their linear approximation is degenerate and does not characterize the stability of the equilibrium at the origin. In the triangular case, backstepping is a standard feedback design tool due to its recursive nature. Backstepping provides a powerful framework for stabilizing a wide class of nonlinear systems in strict-feedback form. However, this recursive approach typically leads to feedback controllers of increasing complexity as the system dimension grows. This motivates the investigation of simpler control design methods. Several notable results on non-recursive stabilization have been obtained in recent years. The classes of polynomial control laws have been constructed for the case of strictly decreasing exponents of power terms in the right-hand side of the system. In particular, it has been shown that the system can be asymptotically stabilized by a linear feedback control law in the strictly decreasing case. Moreover, control coefficients can be chosen as arbitrary positive numbers. It is also established that it is possible to achieve stabilization in a certain special case of non-strictly decreasing exponents under additional conditions on the control coefficients. In this work, we solve the linear stabilization problem in a previously unexplored case of non-strictly decreasing exponents for a three-dimensional system. We propose constructive method of finding conditions for the control coefficients to guarantee asymptotic stabilization. Our approach is based on the Lyapunov function method. We also use stabilization through nonlinear

approximation to generalize our result. The effectiveness of the proposed approach is demonstrated and confirmed by numerical examples.

Keywords: stabilization; nonlinear systems; Lyapunov function method; critical case; feedback control; linear stabilization.

2020 Mathematics Subject Classification: 93D05; 93D15; 93D30; 34H05; 34H15.

1. Introduction

Stabilization of nonlinear systems is an important and actively investigated direction in control theory [1, 3, 4, 5, 6, 7, 9]. Particular attention has been given to nonlinear systems whose behavior can not be adequately captured by linear approximation [1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9]. This situation corresponds to the so-called critical case and requires nonlinear techniques beyond standard linearization, such as backstepping or its numerous modifications [5, 6, 7, 8]. While highly effective, the recursive structure of backstepping often leads to complex control laws whose implementation becomes challenging as the system dimension increases. This motivates the development of non-recursive approaches with reduced complexity, resulting in control laws of simpler form [1, 3, 4, 9].

In this paper, we focus on canonical nonlinear systems, for which linearization-based methods are not directly applicable. Specifically, we consider systems of the following form:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}^{p_i} + \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u^{p_n}, \end{cases} \quad (1)$$

where $p_i \geq 1$ are ratios of positive odd integers, and $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ are continuous real-valued functions of higher order than $x_{i+1}^{p_i}$ satisfying $\varphi_i(0, \dots, 0) = 0$ for all $i = 1, \dots, n-1$. We address the problem of finding simple stabilizing controls for this system.

Classes of easily implementable stabilizing control laws for system (1) have been proposed in [3, 4, 9] using non-recursive Lyapunov design. In [9], it is shown that system (1) can be linearly stabilized under the assumption of strictly decreasing exponents, i.e., $p_1 > p_2 > \dots > p_n \geq 1$. Moreover, under this assumption, the control coefficients can be selected as arbitrary positive numbers $k_i > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Throughout the paper we adopt the following convention. For the linear control law $u(x) = -k_1x_1 - k_2x_2 + \dots - k_nx_n$, the parameters $k_1, k_2, \dots, k_n$ are called control coefficients or control gains.

In what follows, we restrict our attention to the three-dimensional case and consider the linear stabilization problem. In a related study [1], the local asymptotic stability of system (1) for the case $n = 3$ was investigated. A specific case of non-strictly decreasing exponents was studied in [1], namely

$p_1 > p_2 = p_3 = 1$. It was proved that such a system can be stabilized by a linear control law of the form

$$u(x) = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3,$$

where $k_i > 0$ for $i = 1, 2, 3$, provided that k_i satisfy the following constraint:

$$k_3^2 > \frac{k_2(3 + 2\sqrt{3})}{3}.$$

However, the question of the stabilizability of system (1) by linear feedback remains open in the general case. In this work, we investigate a previously unexplored case of non-strictly decreasing exponents in which $p_1 = p_2 > p_3 = 1$. We constructively demonstrate that, under this condition, system (1) is locally asymptotically stabilizable by a linear feedback control law.

Our primary objective is the synthesis of a linear state-feedback control law $u(x)$ that guarantees the local asymptotic stability of system (1) at the origin. To achieve this, we employ the Lyapunov function method by constructing a Lyapunov function obtained as a modification of the Lyapunov functions used in [1, 9]. This allows us to derive explicit sufficient conditions for the control gains and establish the asymptotic stability of the equilibrium at the origin of the corresponding closed-loop system.

2. Problem formulation and Lyapunov design

We study the nonlinear system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^p, \\ \dot{x}_2 = x_3^p, \\ \dot{x}_3 = u, \end{cases} \quad (2)$$

where $u \in \mathbb{R}$ is a control, $p > 1$ is a ratio of two positive odd integers. Here $p_1 = p_2 = p$.

We consider a linear state-feedback control law of the form

$$u(x) = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3, \quad (3)$$

where $k_i > 0$ are real positive numbers for $i = 1, 2, 3$. Our objective is to establish conditions on the coefficients k_i under which the linear control $u(x)$ ensures asymptotic stability of the equilibrium at the origin of system (2).

Let us introduce the following Lyapunov function:

$$V(x) = \frac{1}{2} \left(g_1(p) \frac{k_2^p}{k_1} (k_1x_1)^2 + g_2(p) \frac{k_3^p}{k_2} (k_1x_1 + k_2x_2)^2 + \frac{1}{k_3} (k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3)^2 \right),$$

where $g_1(p)$, $g_2(p)$ are strictly positive functions that depend on p . It should be noted that in previous works [1] and [9], the weighting functions $g_1(p)$, $g_2(p)$ were set equal to 1.

Clearly, $V(x)$ is positive definite for any choice of positive feedback gains $k_1, k_2, k_3 > 0$. To simplify the subsequent analysis, we use the following linear coordinate transformation:

$$e_1 = k_1 x_1, \quad e_2 = k_1 x_1 + k_2 x_2, \quad e_3 = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3. \quad (4)$$

Expressing the Lyapunov function in these new coordinates yields

$$V(e) = \frac{1}{2} \left(g_1(p) \frac{k_2^p}{k_1} e_1^2 + g_2(p) \frac{k_3^p}{k_2} e_2^2 + \frac{1}{k_3} e_3^2 \right). \quad (5)$$

The corresponding inverse coordinate transformation is given by

$$x_1 = k_1^{-1} e_1, \quad x_2 = k_2^{-1} (e_2 - e_1), \quad x_3 = k_3^{-1} (e_3 - e_2).$$

Differentiating (4) along the trajectories of system (2) under the state-feedback control law $u = u(x)$, we obtain

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= k_1 \dot{x}_1 = k_1 x_2^p = \frac{k_1}{k_2^p} (e_2 - e_1)^p, \\ \dot{e}_2 &= k_1 \dot{x}_1 + k_2 \dot{x}_2 = k_1 x_2^p + k_2 x_3^p = \frac{k_1}{k_2^p} (e_2 - e_1)^p + \frac{k_2}{k_3^p} (e_3 - e_2)^p, \\ \dot{e}_3 &= k_1 \dot{x}_1 + k_2 \dot{x}_2 + k_3 \dot{x}_3 = \frac{k_1}{k_2^p} (e_2 - e_1)^p + \frac{k_2}{k_3^p} (e_3 - e_2)^p + k_3 u(x). \end{aligned}$$

Substituting the linear control law $u(x) = -(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3) = -e_3$ into the third equation, we arrive at the system

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \frac{k_1}{k_2^p} (e_2 - e_1)^p, \\ \dot{e}_2 = \frac{k_1}{k_2^p} (e_2 - e_1)^p + \frac{k_2}{k_3^p} (e_3 - e_2)^p, \\ \dot{e}_3 = \frac{k_1}{k_2^p} (e_2 - e_1)^p + \frac{k_2}{k_3^p} (e_3 - e_2)^p - k_3 e_3. \end{cases} \quad (6)$$

We now proceed to compute the time derivative of the Lyapunov function $V(e)$, defined by (5), along the trajectories of the closed-loop system (6):

$$\dot{V}(e) = \frac{\partial V}{\partial e_1} \dot{e}_1 + \frac{\partial V}{\partial e_2} \dot{e}_2 + \frac{\partial V}{\partial e_3} \dot{e}_3.$$

Now we evaluate each term individually, which yields

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial e_1} \dot{e}_1 &= \left(g_1(p) \frac{k_2^p}{k_1} e_1 \right) \left(\frac{k_1}{k_2^p} (e_2 - e_1)^p \right) = g_1(p) e_1 (e_2 - e_1)^p, \\ \frac{\partial V}{\partial e_2} \dot{e}_2 &= \left(g_2(p) \frac{k_3^p}{k_2} e_2 \right) \left(\frac{k_1}{k_2^p} (e_2 - e_1)^p + \frac{k_2}{k_3^p} (e_3 - e_2)^p \right) \\ &= g_2(p) \frac{k_1 k_3^p}{k_2^{p+1}} e_2 (e_2 - e_1)^p + g_2(p) e_2 (e_3 - e_2)^p, \\ \frac{\partial V}{\partial e_3} \dot{e}_3 &= \left(\frac{1}{k_3} e_3 \right) \left(\frac{k_1}{k_2^p} (e_2 - e_1)^p + \frac{k_2}{k_3^p} (e_3 - e_2)^p - k_3 e_3 \right) \\ &= \frac{k_1}{k_2^p k_3} e_3 (e_2 - e_1)^p + \frac{k_2}{k_3^{p+1}} e_3 (e_3 - e_2)^p - e_3^2. \end{aligned}$$

By summing the above expressions, we obtain the total time derivative

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) &= g_1(p)e_1(e_2 - e_1)^p + g_2(p)\frac{k_1k_3^p}{k_2^{p+1}}e_2(e_2 - e_1)^p + g_2(p)e_2(e_3 - e_2)^p \\ &\quad + \frac{k_1}{k_2^pk_3}e_3(e_2 - e_1)^p + \frac{k_2}{k_3^{p+1}}e_3(e_3 - e_2)^p - e_3^2.\end{aligned}$$

Recall that p is defined as a ratio of positive odd integers, which implies that $(e_i - e_j)^p = -(e_j - e_i)^p$ for any $i, j = 1, 2, 3$. Utilizing this property and rearranging the terms, we can express $\dot{V}(e)$ in the following form:

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) &= -g_1(p)e_1(e_1 - e_2)^p - g_2(p)e_2(e_2 - e_3)^p - e_3^2 \\ &\quad + g_2(p)\frac{k_1k_3^p}{k_2^{p+1}}e_2(e_2 - e_1)^p + \frac{k_1}{k_2^pk_3}e_3(e_2 - e_1)^p + \frac{k_2}{k_3^{p+1}}e_3(e_3 - e_2)^p.\end{aligned}\quad (7)$$

Before proceeding with the estimation of $\dot{V}(e)$, we recall several fundamental algebraic inequalities. These auxiliary results are well-established in the literature [1, 6, 9].

Lemma 1. *For any real number $p \geq 1$ and arbitrary scalars $x_i \in \mathbb{R}$ for $i = 1, \dots, n$, the following inequality holds:*

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n|^p \leq n^{p-1} (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p).$$

Lemma 2. *Let $p \geq 1$ be a ratio of positive odd integers. Then, for all $x, a \in \mathbb{R}$, the following inequality holds:*

$$x(x + a)^p \geq 2^{1-p}x^{p+1} + xa^p.$$

Lemma 3 (Parameterized Young's Inequality). *Let $m > 0$ and $n > 0$ be real constants. Then, for any strictly positive parameter $\gamma > 0$, the following inequality holds for all $x, y \in \mathbb{R}$:*

$$|x|^m|y|^n \leq \frac{m}{m+n}\gamma|x|^{m+n} + \frac{n}{m+n}\gamma^{-\frac{m}{n}}|y|^{m+n}.$$

We now derive several inequalities that will be required for the subsequent analysis. By applying Lemmas 1 and 2 to the corresponding individual terms of the derivative, given by (7), we establish the following upper bounds:

$$\begin{aligned}-g_1(p)e_1(e_1 - e_2)^p &\leq g_1(p) \left(-2^{1-p}e_1^{p+1} + |e_1||e_2|^p \right), \\ -g_2(p)e_2(e_2 - e_3)^p &\leq g_2(p) \left(-2^{1-p}e_2^{p+1} + |e_2||e_3|^p \right), \\ \frac{k_1k_3^p}{k_2^{p+1}}g_2(p)e_2(e_2 - e_1)^p &\leq \frac{k_1k_3^p}{k_2^{p+1}}2^{p-1}g_2(p) \left(e_2^{p+1} + |e_1|^p|e_2| \right), \\ \frac{k_1}{k_3k_2^p}e_3(e_2 - e_1)^p &\leq \frac{k_1}{k_3k_2^p}2^{p-1}(|e_2|^p|e_3| + |e_1|^p|e_3|), \\ \frac{k_2}{k_3^{p+1}}e_3(e_3 - e_2)^p &\leq \frac{k_2}{k_3^{p+1}}2^{p-1} \left(e_3^{p+1} + |e_2|^p|e_3| \right).\end{aligned}\quad (8)$$

By Young's inequality, for any real numbers $a, b \geq 0$ and $n, m > 1$ such that $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = 1$, we have

$$ab \leq \frac{a^n}{n} + \frac{b^m}{m}$$

Therefore, by setting $n := 1 + s$ and $m := 1 + \frac{1}{s}$, where $s > 0$ is an arbitrary constant, we can estimate the term $|e_i^p||e_j|$ as follows:

$$|e_i^p||e_j| \leq \frac{1}{1+s}|e_i|^{p(1+s)} + \frac{s}{s+1}|e_j|^{1+\frac{1}{s}}.$$

Suppose that $\{C_i\}_{i=1}^5$ are positive real numbers. Letting $s := \frac{1}{p}$, we obtain

$$\begin{aligned} |e_1||e_2|^p &= |C_1^p e_1| \left| \frac{1}{C_1} e_2 \right|^p \leq \frac{C_1^{p(p+1)}}{p+1} e_1^{p+1} + \frac{p}{(p+1)C_1^{p+1}} e_2^{p+1}, \\ |e_1|^p |e_2| &= |C_2^p e_1|^p \left| \frac{1}{C_2^p} e_2 \right| \leq \frac{p C_2^{p(p+1)}}{p+1} e_1^{p+1} + \frac{1}{(p+1)C_2^{p^2(p+1)}} e_2^{p+1}. \end{aligned}$$

To establish the following estimates, we choose any number $s_1 \in \left(\frac{1}{p}; 1\right)$ and apply Young's inequality with $n = 1 + s_1$:

$$\begin{aligned} |e_2|^p |e_3| &= \left| \frac{1}{C_3} e_2 \right|^p |C_3^p e_3| \leq \frac{1}{(1+s_1)C_3^{p(s_1+1)}} |e_2|^{p(s_1+1)} + \frac{s_1 C_3^{p(1+\frac{1}{s_1})}}{s_1+1} |e_3|^{1+\frac{1}{s_1}}, \\ |e_1|^p |e_3| &= |C_4^p e_1|^p \left| \frac{1}{C_4^p} e_3 \right| \leq \frac{C_4^{p(1+s_1)}}{s_1+1} |e_1|^{p(1+s_1)} + \frac{s_1}{(1+s_1)C_4^{p^2(1+\frac{1}{s_1})}} |e_3|^{1+\frac{1}{s_1}}, \end{aligned}$$

Next, we fix $s_2 \in \left(\frac{2}{p} - 1; \frac{1}{p}\right)$ for $1 < p < 2$ or any $s_2 \in \left(0, \frac{1}{p}\right)$ for $p > 2$:

$$|e_3|^p |e_2| = \left| \frac{1}{C_5} e_3 \right|^p |C_5^p e_2| \leq \frac{1}{(1+s_2)C_5^{p(s_2+1)}} |e_3|^{p(s_2+1)} + \frac{s_2 C_5^{p(1+\frac{1}{s_2})}}{s_2+1} |e_2|^{1+\frac{1}{s_2}}.$$

To establish asymptotic stability, we will determine additional constraints on the parameters C_i to guarantee the negative definiteness of $\dot{V}(e)$ in some small punctured neighborhood of the origin.

Applying the previously established inequalities sequentially, we obtain

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e) \leq & -g_1(p)2^{1-p}e_1^{p+1} + g_1(p) \left(\frac{p}{(p+1)C_1^{p+1}}e_2^{p+1} + \frac{C_1^{p(p+1)}}{p+1}e_1^{p+1} \right) \\
& + g_2(p) \left(\frac{1}{(1+s_2)C_5^{p(s_2+1)}}|e_3|^{p(s_2+1)} + \frac{s_2C_5^{p(1+\frac{1}{s_2})}}{s_2+1}|e_2|^{1+\frac{1}{s_2}} \right) \\
& - g_2(p)2^{1-p}e_2^{p+1} - e_3^2 + \frac{k_1k_3^p}{k_2^{p+1}}2^{p-1}g_2(p)e_2^{p+1} \\
& + \frac{k_1k_3^p}{k_2^{p+1}}2^{p-1}g_2(p) \left(\frac{pC_2^{p(p+1)}}{p+1}e_1^{p+1} + \frac{1}{(p+1)C_2^{p^2(p+1)}}e_2^{p+1} \right) \\
& + \frac{k_1}{k_3k_2^p}2^{p-1} \left(\frac{1}{(1+s_1)C_3^{p(s_1+1)}}|e_2|^{p(s_1+1)} + \frac{s_1C_3^{p(1+\frac{1}{s_1})}}{s_1+1}|e_3|^{1+\frac{1}{s_1}} \right) \\
& + \frac{k_1}{k_3k_2^p}2^{p-1} \left(\frac{C_4^{p(1+s_1)}}{s_1+1}|e_1|^{p(1+s_1)} + \frac{s_1}{(1+s_1)C_4^{p^2(1+\frac{1}{s_1})}}|e_3|^{1+\frac{1}{s_1}} \right) \\
& + \frac{k_2}{k_3^{p+1}}2^{p-1} \left(\frac{1}{(1+s_1)C_3^{p(s_1+1)}}|e_2|^{p(s_1+1)} + \frac{s_1C_3^{p(1+\frac{1}{s_1})}}{s_1+1}|e_3|^{1+\frac{1}{s_1}} \right) \\
& + \frac{k_2}{k_3^{p+1}}2^{p-1}e_3^{p+1}.
\end{aligned}$$

Grouping the coefficients of the dominant stabilizing terms e_1^{p+1} , e_2^{p+1} , and e_3^2 , we can rewrite the right-hand side as

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e) \leq & \left[-g_1(p)2^{1-p} + g_1(p)\frac{C_1^{p(p+1)}}{p+1} + \frac{k_1k_3^p}{k_2^{p+1}}2^{p-1}g_2(p)\frac{pC_2^{p(p+1)}}{p+1} \right] e_1^{p+1} \\
& + \left[-g_2(p)2^{1-p} + g_1(p)\frac{p}{(p+1)C_1^{p+1}} \right. \\
& \left. + \frac{k_1k_3^p}{k_2^{p+1}}2^{p-1}g_2(p) \left(1 + \frac{1}{(p+1)C_2^{p^2(p+1)}} \right) \right] e_2^{p+1} - e_3^2 + h(e),
\end{aligned} \tag{9}$$

where the function of higher-order terms $h(e)$ is given by

$$\begin{aligned}
h(e) = & \left[\frac{k_1}{k_3k_2^p}2^{p-1}\frac{C_4^{p(1+s_1)}}{s_1+1} \right] |e_1|^{p(1+s_1)} \\
& + 2^{p-1} \left[\frac{k_1}{k_3k_2^p} \frac{1}{(1+s_1)C_3^{p(s_1+1)}} + \frac{k_2}{k_3^{p+1}} \frac{1}{(1+s_1)C_3^{p(s_1+1)}} \right] |e_2|^{p(s_1+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{k_2}{k_3^{p+1}} 2^{p-1} e_3^{p+1} + g_2(p) \left(\frac{1}{(1+s_2)C_5^{p(s_2+1)}} |e_3|^{p(s_2+1)} + \frac{s_2 C_5^{p(1+\frac{1}{s_2})}}{s_2+1} |e_2|^{1+\frac{1}{s_2}} \right) \\
& + 2^{p-1} \left[\frac{k_1}{k_3 k_2^p} \left(\frac{s_1 C_3^{p(1+\frac{1}{s_1})}}{s_1+1} + \frac{s_1}{(1+s_1)C_4^{p^2(1+\frac{1}{s_1})}} \right) + \frac{k_2}{k_3^{p+1}} \frac{s_1 C_3^{p(1+\frac{1}{s_1})}}{s_1+1} \right] |e_3|^{1+\frac{1}{s_1}}.
\end{aligned}$$

We note that, in a sufficiently small neighborhood of the origin, the sign of the right-hand side of inequality (9) for $\dot{V}(e)$ is determined by the corresponding terms with the smaller exponents in each variable. Next we demonstrate that $h(e)$ consists entirely of higher-order terms and, thus, does not affect the sign of $\dot{V}(e)$ for sufficiently small e .

We recall that $s_1 > \frac{1}{p}$ and $s_2 < \frac{1}{p}$. Therefore, the exponents of the factors $|e_1|^{p(1+s_1)}$, $|e_2|^{p(s_1+1)}$, and $|e_2|^{1+\frac{1}{s_2}}$ satisfy the inequalities

$$p(1+s_1) > p+1 \quad \text{and} \quad 1 + \frac{1}{s_2} > p+1.$$

This confirms that the sum of the terms with factors $|e_1|^{p(1+s_1)}$, $|e_2|^{p(s_1+1)}$, and $|e_2|^{1+\frac{1}{s_2}}$ are locally dominated by the terms with the factors e_1^{p+1} and e_2^{p+1} in a sufficiently small neighborhood of the origin.

It is clear that the terms with the factors e_3^{p+1} , $|e_3|^{1+\frac{1}{s_1}}$, and $|e_3|^{p(s_2+1)}$ are dominated by the term with the factor e_3^2 for sufficiently small e_3 . The conditions for the exponents $p+1$, $1+\frac{1}{s_1}$, and $p(s_2+1)$ are verified as follows:

$$\begin{aligned}
p+1 > 2 & \quad \text{is trivially satisfied since } p > 1; \\
1 + \frac{1}{s_1} > 2 & \quad \text{is satisfied due to the restriction } s_1 < 1; \\
p(s_2+1) > 2 & \quad \text{is satisfied since } s_2 > \max \left\{ 0, \frac{2-p}{p} \right\}.
\end{aligned}$$

Thus, $h(e)$ does not affect the local negative definiteness of $\dot{V}(e)$.

2. Conditions on the coefficients of stabilizing controller

Based on the Lyapunov function method, to guarantee the asymptotic stability of the equilibrium at the origin, it is sufficient to show that the derivative $\dot{V}(e)$ is negative definite in some neighborhood of the origin. In order to ensure the negative definiteness, the coefficients associated with the dominant factors e_1^{p+1} and e_2^{p+1} must be strictly negative.

To determine whether there exist scaling constants C_1 and C_2 such that the coefficients associated with e_1^{p+1} and e_2^{p+1} are strictly negative, we consider the following system of inequalities:

$$\begin{cases} -g_1(p)2^{1-p} + g_1(p) \frac{C_1^{p(p+1)}}{p+1} + \frac{k_1 k_3^p}{k_2^{p+1}} 2^{p-1} g_2(p) \frac{p C_2^{p(p+1)}}{p+1} < 0, \\ -g_2(p)2^{1-p} + g_1(p) \frac{p}{(p+1)C_1^{p+1}} + \frac{k_1 k_3^p}{k_2^{p+1}} 2^{p-1} g_2(p) \left(1 + \frac{1}{(p+1)C_2^{p^2(p+1)}} \right) < 0, \end{cases}$$

which can be equivalently rewritten as

$$\begin{cases} \frac{k_1 k_3^p}{k_2^{p+1}} 2^{p-1} g_2(p) \frac{p C_2^{p(p+1)}}{p+1} < g_1(p) \left(2^{1-p} - \frac{C_1^{p(p+1)}}{p+1} \right), \\ \frac{k_1 k_3^p}{k_2^{p+1}} 2^{p-1} g_2(p) \left(1 + \frac{1}{(p+1) C_2^{p^2(p+1)}} \right) < g_2(p) 2^{1-p} - g_1(p) \frac{p}{(p+1) C_1^{p+1}}. \end{cases}$$

Consequently, we obtain a decoupled system where the left-hand sides of the inequalities depend exclusively on the control gains k_i , while the right-hand sides depend solely on the scaling parameters C_1 and C_2 :

$$\begin{cases} \frac{k_1 k_3^p}{k_2^{p+1}} < \frac{2^{1-p}}{g_2(p)} g_1(p) \left(2^{1-p} - \frac{C_1^{p(p+1)}}{p+1} \right) \frac{p+1}{p C_2^{p(p+1)}}, \\ \frac{k_1 k_3^p}{k_2^{p+1}} < \frac{2^{1-p}}{g_2(p)} \left(g_2(p) 2^{1-p} - g_1(p) \frac{p}{(p+1) C_1^{p+1}} \right) \frac{(p+1) C_2^{p^2(p+1)}}{(p+1) C_2^{p^2(p+1)} + 1}. \end{cases} \quad (10)$$

Given that the control gains satisfy $k_1, k_2, k_3 > 0$, the system of inequalities (10) admits a solution if and only if the right-hand sides are strictly positive. Since $C_1 > 0$ and $C_2 > 0$, this condition simplifies to the requirement that the terms within the parentheses be strictly positive:

$$\begin{aligned} 2^{1-p} - \frac{C_1^{p(p+1)}}{p+1} &> 0, \\ g_2(p) 2^{1-p} - g_1(p) \frac{p}{(p+1) C_1^{p+1}} &> 0. \end{aligned}$$

Isolating C_1 from these inequalities results in both an upper and a lower bound:

$$\begin{aligned} C_1^{p(p+1)} &< 2^{1-p} (p+1), \\ C_1^{p+1} &> \frac{g_1(p) p}{g_2(p) (p+1)} 2^{p-1}. \end{aligned}$$

An admissible scaling constant C_1 exists if and only if the strict lower bound is less than the strict upper bound. By raising the lower bound to the power of p (to match the exponent of the upper bound), we arrive at the following sequence of equivalent inequalities:

$$\begin{aligned} \left(\frac{g_1(p) p}{g_2(p) (p+1)} 2^{p-1} \right)^p &< 2^{1-p} (p+1), \\ \left(\frac{g_1(p)}{g_2(p)} \right)^p \left(\frac{p}{p+1} \right)^p &< 2^{1-p^2} (p+1), \\ \left(\frac{g_1(p)}{g_2(p)} \right)^p &< 2^{1-p^2} \frac{(p+1)^{p+1}}{p^p}. \end{aligned}$$

Consequently, the necessary and sufficient conditions for the solvability of system (10) are formalized as follows:

$$0 < g_1(p) < 2^{\frac{1}{p}-p} \frac{(p+1)^{1+\frac{1}{p}}}{p} g_2(p), \quad (11)$$

and

$$\left(\frac{g_1(p)p}{g_2(p)(p+1)}2^{p-1}\right)^p < C_1^{p(p+1)} < 2^{1-p}(p+1). \quad (12)$$

2.1. Optimization of the scaling parameters

Let us denote the right-hand sides of the inequalities in system (10) as $R_1(C_1, C_2)$ and $R_2(C_1, C_2)$:

$$R_1(C_1, C_2) := \frac{2^{1-p}}{g_2(p)} g_1(p) \left(2^{1-p} - \frac{C_1^{p(p+1)}}{p+1}\right) \frac{p+1}{pC_2^{p(p+1)}}, \quad (13)$$

$$R_2(C_1, C_2) := \frac{2^{1-p}}{g_2(p)} \left(g_2(p)2^{1-p} - g_1(p)\frac{p}{(p+1)C_1^{p+1}}\right) \frac{(p+1)C_2^{p^2(p+1)}}{(p+1)C_2^{p^2(p+1)} + 1}. \quad (14)$$

Since the left-hand sides of the inequalities in system (10) are identical, system (10) is equivalent to

$$\frac{k_1 k_3^p}{k_2^{p+1}} < \min\{R_1(C_1, C_2), R_2(C_1, C_2)\}.$$

To obtain a sharper estimate, we maximize this minimum over the scaling parameters. In other words, we are led to the following max-min optimization problem:

$$\max_{C_1, C_2 > 0} \min\{R_1(C_1, C_2), R_2(C_1, C_2)\}.$$

Analytical determination of the global maximum for this max-min problem is non-trivial due to the complex nonlinear structure of R_i . However, considering the behavior of these functions (the opposite monotonicity of the corresponding factors), it is reasonable to suggest that a near-optimal or optimal value is reached when they are equal. While a rigorous investigation of global optimality is beyond the scope of this study, we equate these functions to obtain a constructive sufficient condition:

$$R_1(C_1^*, C_2^*) = R_2(C_1^*, C_2^*). \quad (15)$$

This constraint allows us to simplify the analysis and find a feasible candidate pair (C_1^*, C_2^*) that ensures the fulfillment of the stability conditions (10). Observe from (13) and (14) that the function $R_i(C_1, C_2)$ can be decoupled as a product of two independent functions multiplied by weighting coefficient:

$$R_i(C_1, C_2) = \frac{2^{1-p}}{g_2(p)} F_i(C_1) H_i(C_2), \quad i \in \{1, 2\}.$$

Consequently, a sufficient condition to satisfy equality (15) is to equate the corresponding decoupled terms:

$$F_1(C_1^*) = F_2(C_1^*), \quad \text{and} \quad H_1(C_2^*) = H_2(C_2^*).$$

Let us first evaluate the equality $F_1(C_1) = F_2(C_1)$:

$$g_1(p) \left(2^{1-p} - \frac{C_1^{p(p+1)}}{p+1} \right) = g_2(p) 2^{1-p} - g_1(p) \frac{p}{(p+1)C_1^{p+1}},$$

$$(g_1(p) - g_2(p)) 2^{1-p} - g_1(p) \frac{C_1^{p(p+1)}}{p+1} + g_1(p) \frac{p}{(p+1)C_1^{p+1}} = 0.$$

In the sequel we consider the case of natural p . Multiplying the entire expression by $(p+1)C_1^{p+1}$ to eliminate the denominator, we derive the following polynomial equation with respect to C_1 :

$$g_1(p)C_1^{(p+1)^2} + 2^{1-p}(g_2(p) - g_1(p))(p+1)C_1^{p+1} - g_1(p)p = 0. \quad (16)$$

Similarly, we evaluate the equality $H_1(C_2) = H_2(C_2)$:

$$\frac{p+1}{pC_2^{p(p+1)}} = \frac{(p+1)C_2^{p^2(p+1)}}{(p+1)C_2^{p^2(p+1)} + 1},$$

$$(p+1) \left((p+1)C_2^{p^2(p+1)} + 1 \right) = (p+1)pC_2^{p^2(p+1)+p(p+1)}.$$

Dividing by the common factor $(p+1)$ and rearranging the terms, we obtain a polynomial equation in C_2 :

$$pC_2^{p(p+1)^2} - (p+1)C_2^{p^2(p+1)} - 1 = 0. \quad (17)$$

The existence of at least one positive root is guaranteed, since each polynomial is negative at zero and tends to infinity as C_1 or C_2 increases. According to Descartes' rule of signs, the number of positive real roots of a polynomial is equal to the number of sign changes in the sequence of its coefficients, or is less than this number by an even integer. Therefore, since $p > 1$, each of the polynomials, (16) and (17), has exactly one positive real root.

Let C_1^* , C_2^* be the positive real roots of the polynomials (16) and (17) respectively; then the equality (15) holds. Let us choose positive definite functions $g_1(p)$ and $g_2(p)$ that satisfy the inequality (11), for example:

$$g_1(p) := 1, \quad g_2(p) := 2^p. \quad (18)$$

In this case, the corresponding polynomial equations simplify to the forms:

$$C_1^{(p+1)^2} + 2^{1-p}(2^p - 1)(p+1)C_1^{p+1} - p = 0,$$

$$pC_2^{p(p+1)^2} - (p+1)C_2^{p^2(p+1)} - 1 = 0.$$

Furthermore, according to (12), the root C_1^* must lie in the corresponding interval:

$$\left(\frac{p}{2(p+1)} \right)^p < (C_1^*)^{p(p+1)} < 2^{1-p}(p+1). \quad (19)$$

For any specified odd integer $p > 1$, the exact values of C_1^* and C_2^* can be computed numerically. As illustrated in Fig. 1 the blue dots represent the calculated roots C_1^* of the polynomial (16) that successfully satisfy the bounding condition (19).

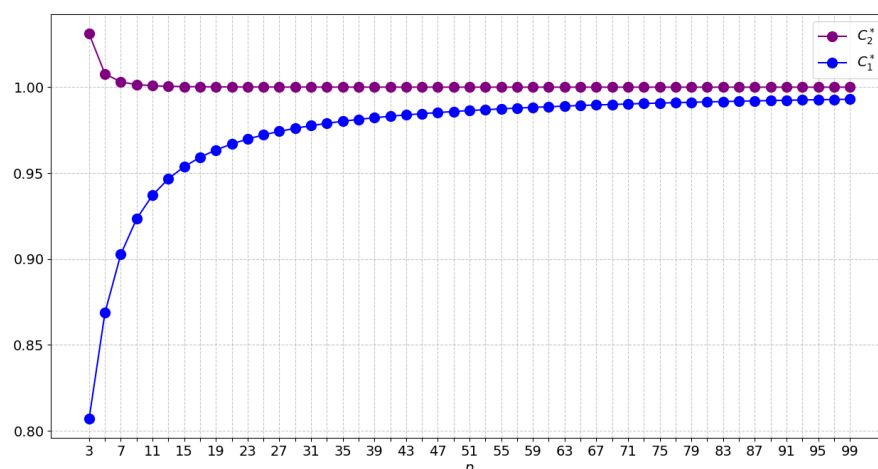


Fig. 1. Dependence of the roots C_1^* and C_2^* on the chosen exponent p .

Рис. 1. Залежність коренів C_1^* та C_2^* від вибраного показника p .

An analysis of the data depicted in Fig. 1 indicates that the identified positive root C_1^* consistently satisfies the necessary condition (12) for all odd integers $p > 1$. Thus, by numerically evaluating the roots C_1^* and C_2^* , we can derive the final stabilizing condition on the control coefficients from system (10):

$$\frac{k_1 k_3^p}{k_2^{p+1}} < R_1(C_1^*, C_2^*) = R_2(C_1^*, C_2^*). \quad (20)$$

Consequently, a strict upper bound for the control gains can be explicitly determined as a function of the exponent p . For instance, referencing the numerical results compiled in Table 1, stabilizing system (2) for $p = 3$ requires the following strict inequality:

$$\frac{k_1 k_3^3}{k_2^4} < 0.0066639059756,$$

where $k_i > 0$ for $i \in \{1, 2, 3\}$. When this condition is satisfied, the control law $u(x) = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3$ guarantees the asymptotic stability of the equilibrium at the origin of the corresponding closed-loop system.

Remark 1. The restriction to odd integers for the parameter p is imposed here only for convenience of exposition. In fact, the results remain valid for $p > 1$ being a ratio of odd integers with some minor modifications required in the proof.

Remark 2. It is important to note that while the system of inequalities (10) remains solvable for any odd integer $p > 1$, the computed scaling parameters

C_1^* and C_2^* are not necessarily globally optimal. Furthermore, the numerical bounds derived using this methodology are highly dependent upon the selection of the functions $g_1(p)$ and $g_2(p)$. Due to the inherent complexity of the nonlinear analysis, predicting exactly how alternative choices for these functions might influence the final numerical results is mathematically nontrivial. Consequently, we subsequently propose an alternative approach to establish a strict bound for the control coefficients that relies exclusively on the system exponent p .

Table 1. Numerical solution depending on p .

p	C_1^*	C_2^*	$R_1(C_1^*, C_2^*) = R_2(C_1^*, C_2^*)$
3	0.8069196040	1.03109362	0.0066639059756
5	0.8686373318	1.00779697	0.00011151180503
7	0.9026865506	1.00305250	1.7902×10^{-6}
9	0.9234310693	1.00149759	2.837×10^{-8}
11	0.9370926072	1.00084302	4.472×10^{-10}
13	0.9466788767	1.00052068	7.03×10^{-12}
15	0.9537502144	1.00034384	1.103×10^{-13}
17	0.9591735749	1.00023883	1.729×10^{-15}
19	0.9634622911	1.00017258	2.71×10^{-17}

2.2. Alternative approach to conditions for control gains

Now we present an alternative approach that guarantees the solvability of the system of inequalities (10) for any odd integer $p > 1$. Numerical analysis demonstrates that this method provides a slightly less conservative estimate for the stabilizing control coefficients.

By substituting the functions $g_1(p)$ and $g_2(p)$ defined in (18) into the original system (10), we obtain

$$\begin{cases} \frac{k_1 k_3^p}{k_2^{p+1}} < 2^{1-2p} \left(2^{1-p} - \frac{C_1^{p(p+1)}}{p+1} \right) \frac{p+1}{p C_2^{p(p+1)}}, \\ \frac{k_1 k_3^p}{k_2^{p+1}} < 2^{1-2p} \left(2 - \frac{p}{(p+1) C_1^{p+1}} \right) \frac{(p+1) C_2^{p^2(p+1)}}{(p+1) C_2^{p^2(p+1)+1}}. \end{cases} \quad (21)$$

To satisfy condition (12), we select a parameter value lying within the corresponding interval. To ensure this, we take the geometric mean of the lower and upper bounds of the interval as a candidate value. This leads to the following sequence of calculations:

$$C_1^{p(p+1)} = \sqrt{\left(\frac{p}{2(p+1)} \right)^p 2^{1-p}(p+1)}$$

$$C_1^{p(p+1)} = \sqrt{\frac{p^p}{(p+1)^{p-1}} 2^{1-2p}}$$

$$C_1^{p(p+1)} = \frac{p^{\frac{p}{2}}}{(p+1)^{\frac{p-1}{2}}} 2^{\frac{1}{2}-p}.$$

Consequently, C_1^{p+1} can be explicitly calculated by taking the p -th root:

$$C_1^{p+1} = \left(C_1^{p(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\sqrt{p}}{(p+1)^{\frac{p-1}{2p}}} 2^{\frac{1}{2p}-1}.$$

Substituting the expression for C_1^{p+1} into the system of inequalities (21), we obtain

$$\begin{cases} \frac{k_1 k_3^p}{k_2^{p+1}} < 2^{1-2p} \left(2^{1-p} - \frac{\frac{p^{\frac{p}{2}}}{(p+1)^{\frac{p-1}{2}}} 2^{\frac{1}{2}-p}}{p+1} \right) \frac{p+1}{p C_2^{p(p+1)}}, \\ \frac{k_1 k_3^p}{k_2^{p+1}} < 2^{1-2p} \left(2 - \frac{p}{(p+1) \frac{\sqrt{p}}{(p+1)^{\frac{p-1}{2p}}} 2^{\frac{1}{2p}-1}} \right) \frac{(p+1) C_2^{p^2(p+1)}}{(p+1) C_2^{p^2(p+1)} + 1}. \end{cases}$$

By algebraic manipulation, the system is reduced to a more compact form

$$\begin{cases} \frac{k_1 k_3^p}{k_2^{p+1}} < 2^{\frac{3}{2}-3p} \left(\sqrt{2} - \sqrt{p^p(p+1)^{-p-1}} \right) \frac{p+1}{p C_2^{p(p+1)}}, \\ \frac{k_1 k_3^p}{k_2^{p+1}} < 2^{2-2p} \left(1 - 2^{-\frac{1}{2p}} \sqrt{p(p+1)^{\frac{-p-1}{p}}} \right) \frac{(p+1) C_2^{p^2(p+1)}}{(p+1) C_2^{p^2(p+1)} + 1}. \end{cases} \quad (22)$$

Let us introduce the auxiliary functions $\tilde{F}_1(p)$ and $\tilde{F}_2(p)$ to denote the constant terms

$$\tilde{F}_1(p) := 2^{\frac{3}{2}-3p} \left(\sqrt{2} - \sqrt{p^p(p+1)^{-p-1}} \right),$$

$$\tilde{F}_2(p) := 4^{1-p} \left(1 - 2^{-\frac{1}{2p}} \sqrt{p(p+1)^{\frac{-p-1}{p}}} \right).$$

Both functions are positive definite, monotonically decreasing, and asymptotically approach 0. Furthermore, they satisfy the inequality $\tilde{F}_2(p) > \tilde{F}_1(p)$ for all $p > 1$.

Thus, system (22) can be rewritten as follows:

$$\begin{cases} \frac{k_1 k_3^p}{k_2^{p+1}} < \tilde{R}_1(p, C_2), \\ \frac{k_1 k_3^p}{k_2^{p+1}} < \tilde{R}_2(p, C_2), \end{cases} \quad (23)$$

where the functions $\tilde{R}_1$ and $\tilde{R}_2$ are defined as

$$\tilde{R}_1(p, C_2) := \tilde{F}_1(p) \frac{p+1}{p C_2^{p(p+1)}},$$

$$\tilde{R}_2(p, C_2) := \tilde{F}_2(p) \frac{(p+1) C_2^{p^2(p+1)}}{(p+1) C_2^{p^2(p+1)} + 1}.$$

For a fixed p , the function $\tilde{R}_1(p, C_2)$ is monotonically decreasing for positive C_2 , while $\tilde{R}_2(p, C_2)$ is monotonically increasing. Therefore, similarly to the previous section, we determine the optimal value for C_2 at the intersection point, where the right-hand sides of system (23) are equal:

$$\tilde{F}_1(p) \frac{p+1}{pC_2^{p(p+1)}} = \tilde{F}_2(p) \frac{(p+1)C_2^{p^2(p+1)}}{(p+1)C_2^{p^2(p+1)} + 1},$$

$$\tilde{F}_1(p)(p+1)^2 C_2^{p^2(p+1)} + \tilde{F}_1(p)(p+1) = \tilde{F}_2(p)p(p+1)C_2^{p(p+1)^2}.$$

By grouping the terms, we obtain the following polynomial equation in C_2 :

$$\tilde{F}_2(p)pC_2^{p(p+1)^2} - \tilde{F}_1(p)(p+1)C_2^{p^2(p+1)} - \tilde{F}_1(p) = 0. \quad (24)$$

Let $\tilde{C}_2$ denote the positive real root of this equation. By continuity, this root exists, since the corresponding polynomial is negative at zero and tends to infinity as C_2 increases. Its uniqueness is guaranteed by Descartes' rule of signs, since the functions $\tilde{F}_1(p)$ and $\tilde{F}_2(p)$ are strictly positive for all $p > 1$. Thus, we select $C_2 = \tilde{C}_2$ as the optimal scaling value for solving system (23).

Numerical calculations, illustrated in Fig. 2, demonstrate that $\tilde{C}_2$ asymptotically approaches 1 as the degree p increases. Since $\tilde{C}_2$ is tightly bounded, we can analyze the behavior of the right-hand sides of system (23) at these boundary values. This allows us to derive a strict estimate for the control coefficients k_1, k_2, k_3 that depends exclusively on the exponent p , thereby eliminating the need for complex numerical root-finding algorithms.

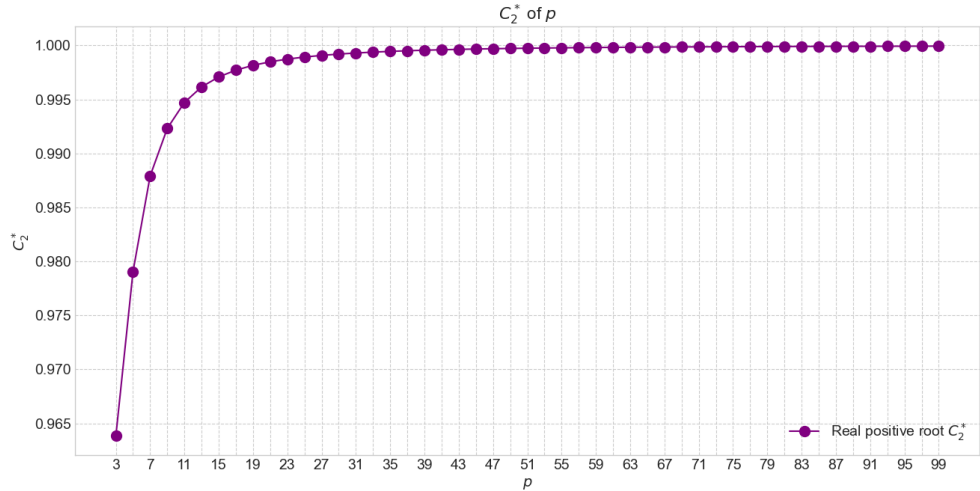


Fig. 2. Dependence of the optimal root $\tilde{C}_2$ on the exponent p .

Рис. 2. Залежність оптимального кореня $\tilde{C}_2$ від показника p .

To constructively estimate the maximum of the minimum of the right-hand sides of system (23) from below, it is sufficient to evaluate the functions at $C_2 = 1$.

This structural behavior is confirmed by the plots in Fig. 3, which show that $\tilde{R}_1(p, 1) < \tilde{R}_1(p, \tilde{C}_2)$ for $p > 1$.

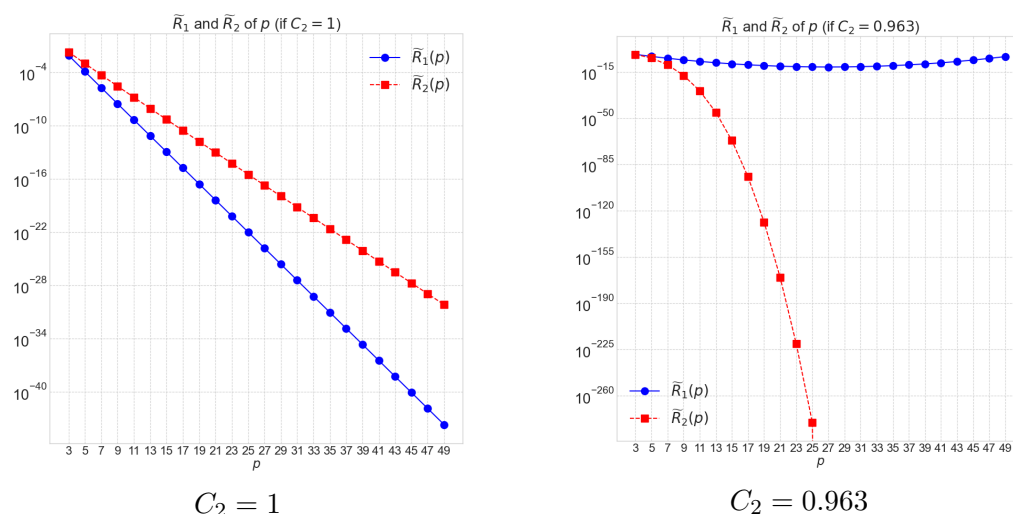


Fig. 3. Behavior of $\tilde{R}_1(p, C_2)$ and $\tilde{R}_2(p, C_2)$ at boundary values of C_2 .

Рис. 3. Поведінка $\tilde{R}_1(p, C_2)$ та $\tilde{R}_2(p, C_2)$ для граничних значень C_2 .

Consequently, according to the Lyapunov function method, the following condition:

$$\frac{k_1 k_3^p}{k_2^{p+1}} < \tilde{R}_1(p, 1) = 2^{\frac{3}{2}-3p} \left(\sqrt{2} - \sqrt{(p+1)^{-p-1} p^p} \right) \frac{p+1}{p}, \quad (25)$$

guarantees the asymptotic stability of the equilibrium at the origin of system (2) under the linear feedback law $u = u(x)$, given by (3).

Table 2. Numerical values of the right-hand side of (25) for various p .

p	$\tilde{R}_1(p, 1)$	p	$\tilde{R}_1(p, 1)$	p	$\tilde{R}_1(p, 1)$
3	0.0080245868397	13	6.9209×10^{-12}	23	6.4452×10^{-21}
5	0.00011967741513	15	1.0805×10^{-13}	25	1.0076×10^{-22}
7	1.8383×10^{-6}	17	1.688×10^{-15}	27	1.5753×10^{-24}
9	2.8504×10^{-8}	19	2.6378×10^{-17}	29	2.4629×10^{-26}
11	4.4373×10^{-10}	21	4.123×10^{-19}	31	3.8506×10^{-28}

3. Examples and generalizations

3.1. Example of three-dimensional canonical nonlinear system

Example 1. To demonstrate the applicability of the theoretical results established in the previous chapter, we first consider the stabilization problem for a

canonical three-dimensional nonlinear system of the form

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^{11}, \\ \dot{x}_2 = x_3^{11}, \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \quad (26)$$

In this case $p = 11$.

The control gains k_1, k_2 , and k_3 are selected to satisfy the sufficient condition (25). By choosing $k_1 = 5, k_2 = 15$, and $k_3 = 2$, we guarantee that

$$\frac{k_1 k_3^{11}}{k_2^{12}} \approx 0.789 \times 10^{-10} < 4.4373 \times 10^{-10},$$

which strictly satisfies the numerical bounds presented in Table 2 for $p = 11$.

Consequently, the stabilizing linear control law is defined as

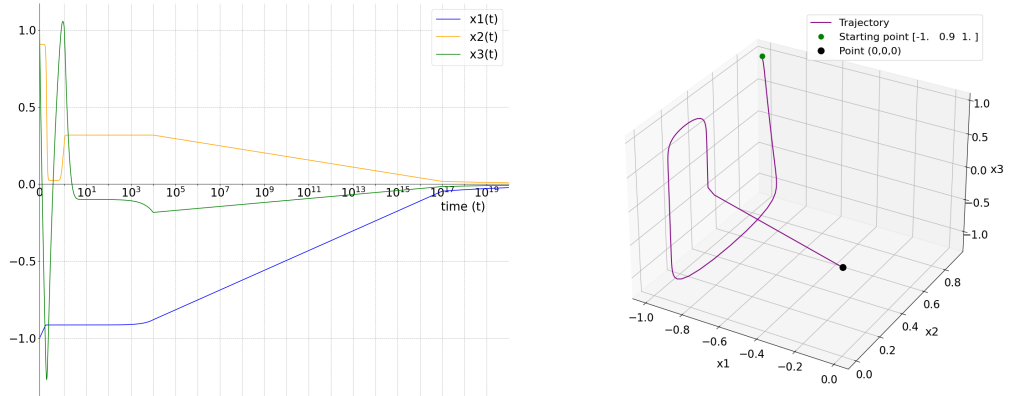
$$u(x) = -5x_1 - 15x_2 - 2x_3.$$

Applying this control input to system (26) leads to the closed-loop system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^{11}, \\ \dot{x}_2 = x_3^{11}, \\ \dot{x}_3 = -5x_1 - 15x_2 - 2x_3. \end{cases}$$

The dynamic behavior of the closed-loop system was simulated using the following initial state vector:

$$x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 0.9, \quad x_3(0) = 1.$$



Trajectories $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$

Phase trajectory

Fig. 4. Trajectories of system (26) under the linear control law $u = u(x)$.

Рис. 4. Траєкторії системи (26) при лінійному законі керування $u = u(x)$.

As illustrated in Fig. 4, all solutions $x_i(t)$ converge asymptotically to the origin. The phase trajectory further demonstrates the stability of the equilibrium at the origin under the proposed linear feedback control law.

3.2. Generalized nonlinear system with higher-order terms

Following the methodology described in [1, 3], we extend our analysis to a generalized class of systems incorporating higher-order nonlinear perturbations:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}^{p_i} + f_i(x_1, \dots, x_n), & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u^{p_n}, \end{cases} \quad (27)$$

where the terms $f_i(x_1, \dots, x_n)$ represent continuous nonlinearities of a higher order relative to the principal terms $x_{i+1}^{p_i}$.

To stabilize system (27), we apply the same linear control law $u(x)$:

$$u(x) = -k_1 x_1 - \dots - k_n x_n,$$

where $k_i \in \mathbb{R}$ and $k_i > 0$ for $i = 1, \dots, n$. This control law stabilizes the nonlinear approximation of the system, given by

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}^{p_i}, & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u^{p_n}. \end{cases} \quad (28)$$

A key condition for the applicability of this approach is the requirement that the continuous functions f_i satisfy the following estimates in some neighborhood of the origin:

$$|f_i(x_1, \dots, x_n)| \leq \rho_i(x_1, \dots, x_n) (|x_{i+1}|^{p_i+\delta_i} + |x_{i+2}|^{p_i+\delta_i} + \dots + |x_n|^{p_i+\delta_i}), \quad (29)$$

where $\rho_i(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ are continuous functions and $\delta_i > 0$ are constants.

Since the order of the functions $f_i(x_1, \dots, x_n)$ is higher than the order of $x_{i+1}^{p_i}$, the control $u(x)$ also stabilizes the system (27). This allows us to retain the choice of the Lyapunov function and the change of variables applied to the system (28). Moreover, the additional higher-order terms arising due to f_i during the differentiation of the Lyapunov function will be absorbed into the function $h(x)$ as higher-order terms. Such terms do not affect the sign of the derivative in a sufficiently small neighborhood of the origin.

Let us focus on the specific case where $n = 3$, $p_1, p_2 := p > 1$, and $p_3 = 1$. System (27) then takes the form

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^p + f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 = x_3^p + f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases}$$

Assuming the estimates (29) hold for f_1 and f_2 , the linear control law $u(x) = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3$ stabilizes the equilibrium at the origin of the corresponding closed-loop system, provided that the sufficient condition (25) is satisfied.

Example 2. Consider the stabilization problem for the following nonlinear system:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 + x_2^4 \sin(x_1 + x_2), \\ \dot{x}_2 = x_3^3 + x_3^4 \cos(x_1), \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \quad (30)$$

In this example, the system includes trigonometric perturbations

$$f_1(x) = x_2^4 \sin(x_1 + x_2) \quad \text{and} \quad f_2(x) = x_3^4 \cos(x_1).$$

These terms satisfy the growth condition (29) with parameters $\delta_1 = \delta_2 = 1$ and bounding functions $\rho_1 = \rho_2 = 1$.

Let us select the control gains as $k_1 = 1$, $k_2 = 4$, and $k_3 = 1$. Evaluating the sufficient stability condition gives

$$\frac{k_1 k_3^3}{k_2^4} = 0.00390625 < 0.008024,$$

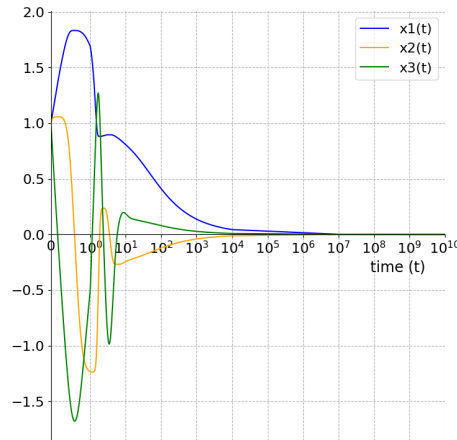
which strictly satisfies the numerical bound derived from (25) for $p = 3$.

Consequently, the stabilizing linear control law takes the form

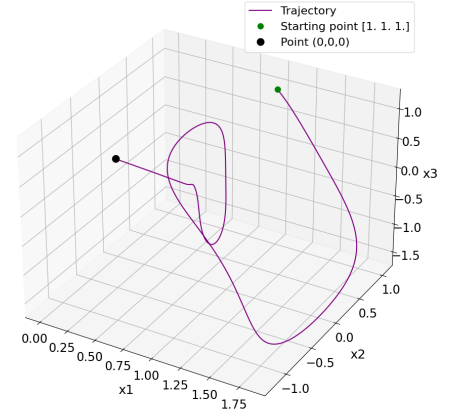
$$u(x) = -x_1 - 4x_2 - x_3.$$

The closed-loop system was simulated using the following initial state vector:

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \quad x_3(0) = 1.$$



Trajectories $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$



Phase trajectory

Fig. 5. Trajectories of system (30) under the proposed linear control law.

Рис. 5. Траєкторії системи (30) при запропонованому лінійному керуванні.

The numerical simulation confirms that the proposed linear control law $u(x) = -x_1 - 4x_2 - x_3$ effectively compensates for the higher-order nonlinear

perturbations. As predicted by the theoretical analysis, the trajectories exhibit asymptotic convergence to the origin for initial states lying in a sufficiently small neighborhood of the origin.

4. Conclusion

In this work, the linear stabilization problem has been solved for a class of three-dimensional systems with power nonlinearities in a previously uninvestigated special case. Compared to previous results [3, 4, 9], the condition of strictly decreasing powers has been relaxed to a non-strictly decreasing condition. It has been proven that for the investigated class of systems, the application of a linear control law is effective, the proof is based on the construction of a special Lyapunov function and the analysis of its derivative. Additional conditions on the linear control coefficients k_1, k_2 , and k_3 , which guarantee the local asymptotic stability of the equilibrium at the origin, were obtained in several ways. Note that in the case of strictly decreasing powers, there were no additional conditions on the coefficients. Moreover, a sufficient condition that is easy to verify in practice was obtained for systems with arbitrarily large powers.

The obtained theoretical results were numerically confirmed by examples, which demonstrated the convergence of the phase trajectories of the systems to the origin. The class of systems was extended by means of nonlinear approximation. The prospect for future research lies in considering systems of higher dimensions. The results of this work give reason to believe that by a proper choice of the Lyapunov function coefficients, the existence of a stabilizing linear control can be guaranteed for systems of arbitrary dimension.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

REFERENCES

1. M. O. Bebiya, V. A. Maistruk. On linear stabilization of a class of nonlinear systems in a critical case, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2023. – Vol. **8**. – P. 36–49. <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2023-98-03>
2. M. O. Bebiya. On the bounded control synthesis for three-dimensional high-order nonlinear systems, Bukovinian Mathematical Journal. – 2023. – Vol. **11**, No **2**. – P. 11–23. <https://doi.org/10.31861/bmj2023.02.01>
3. M.O. Bebiya and V.I. Korobov. On Stabilization Problem for Nonlinear Systems with Power Principal Part, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2016. – Vol. **12**, No. **2**. – P. 113–133. <https://doi.org/10.15407/mag12.02.113>
4. V.I. Korobov and M.O. Bebiya. Stabilization of one class of nonlinear systems, Automation and Remote Control. – 2017. – Vol. **78**, No. **1**. – P. 1–15. <https://doi.org/10.1134/S0005117917010015>

5. M. Li, J. Guo, Z. Xiang. Global adaptive finite-time stabilization for a class of p -normal nonlinear systems via an event-triggered strategy, *Int J Robust Nonlinear Control*. – 2020. – Vol. **30**, No. **10**. – P. 4059-4074. <https://doi.org/10.1002/rnc.4983>
6. W. Lin, C. Qian. Adding one power integrator: A tool for global stabilization of high order lower-triangular systems, *Systems and Control Letters*. – 2000. – Vol. **39**, No. **5**. – P. 339-351. [https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(99\)00115-2](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(99)00115-2)
7. T.T. Tran. Feedback linearization and backstepping: an equivalence in control design of strict-feedback form, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*. - 2020. - Vol. **37**, No. **4** - P. 1049-1069. <https://doi.org/10.1093/imamci/dnz024>
8. H. Wang, W. Li, M. Krstic. Prescribed-time stabilization and inverse optimality for strict-feedback nonlinear systems, *Systems and Control Letters*. – 2024. – Vol. **190**, 105859. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2024.105859>
9. J. Zhu, C. Qian. A necessary and sufficient condition for local asymptotic stability of a class of nonlinear systems in the critical case, *Automatica*. – 2018. – Vol. **96**. – P. 234–239. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.06.052>

Article history: Received: 14 April 2026; Final form: 15 May 2026;

Accepted: 17 May 2026. Published 31 May 2026.

How to cite this article:

M. O. Bebiya, Y. M. Barska, On stabilization of canonical nonlinear systems in a special case, *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 103, 2026, p. 38–59. DOI: <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2026-103-02>

Про стабілізацію канонічних нелінійних систем у спеціальному випадку

М. О. Бебія, Ю. М. Барська

*Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи 4, 61022, Харків, Україна*

У статті розглядається задача стабілізації для канонічних нелінійних систем, які у трикутному випадку відповідають p -нормальним системам. Ці системи є суттєво нелінійними, оскільки вони не підлягають фідбек-лінеаризації, а їхня лінійна апроксимація є виродженою і не характеризує стійкість точки спокою у початку координат. У трикутному випадку backstepping є стандартним методом синтезу керування зі зворотним зв'язком через свою рекурсивну природу. Backstepping є потужним інструментом стабілізації для широкого класу нелінійних систем, що мають strict-feedback форму. Однак цей рекурсивний підхід зазвичай призводить до керувань зі зворотним зв'язком, складність яких зростає зі збільшенням розмірності системи. Це

мотивує дослідження більш простих методів побудови керувань. Упродовж останніх років було отримано декілька вагомих результатів щодо нерекурсивної стабілізації. Було побудовано класи поліноміальних керувань для випадку строгого спадання степенів степеневих членів правої частини системи. Зокрема, було показано, що такі системи можуть бути асимптотично стабілізовані лінійним керуванням зі зворотним зв'язком у випадку строго спадаючих степенів. Більше того, коефіцієнти керування може бути обрано як довільні додатні числа. Крім того, було встановлено, що стабілізацію можна досягти у деякому спеціальному випадку нестрого спадаючих степенів при додаткових умовах на коефіцієнти керування. У цій роботі ми розв'язуємо задачу лінійної стабілізації у раніше недослідженому випадку нестрого спадаючих степенів для тривимірних систем. Ми пропонуємо конструктивний підхід до знаходження умов на коефіцієнти лінійного керування, що гарантують асимптотичну стійкість. Наш підхід ґрунтується на методі функції Ляпунова. Ми також використовуємо стабілізацію з застосуванням нелінійної апроксимації, щоб узагальнити отриманий результат. Ефективність запропонованого підходу продемонстровано та підтверджено чисельними прикладами.

Ключові слова: стабілізація; нелінійні системи; метод функції Ляпунова; критичний випадок; керування зі зворотним зв'язком; лінійна стабілізація.

Конфлікт інтересів: Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

Історія статті: отримана: 14 квітня 2026; останній варіант: 15 травня 2026
прийнята: 17 травня 2026. Оприлюднено 31 травня 2026.

О. А. Макаров

доцент, кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри математичного моделювання та аналізу даних
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
makarovifamily07@gmail.com  <http://orcid.org/0000-0002-9050-4987>

І. Г. Ніколенко

кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри математичного моделювання та аналізу даних
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
iryna.nikolenko@karazin.ua  <http://orcid.org/0000-0002-2904-6761>

Коректні крайові задачі з інтегральною умовою в напівпросторі для рівнянь у частинних похідних

Як відомо, задача Коші некоректна для диференціальних рівнянь у частинних похідних зі сталими коефіцієнтами, які не є коректними за Петровським.

У цій роботі пропонується інтегральна умова, в якій отримана крайова задача стає коректною в просторі Л. Шварца, а також у просторах функцій **степеневого** зростання за просторовими змінними. Наведена інтегральна умова є інтегралом по півосі з експоненційною вагою, що забезпечує збіжність даного інтеграла.

Якщо розглядати цей інтеграл як перетворення Лапласа від функції $\exp(-t^2/2)$, то можна отримати його асимптотику, яка дозволяє оцінити **розв'язувальну функцію**. Дана оцінка дозволяє довести теорему про коректність отриманої крайової задачі в просторі Л. Шварца, а також у шкалі функцій кінцевої гладкості степеневого зростання.

Потім розглядається задача для неоднорідного диференціального рівняння, у якого права частина за просторовими змінними належить простору Л. Шварца, а за часовою змінною — фінітна. Для отриманої задачі знаходиться функція Гріна, що оцінюється зверху. За допомогою цієї оцінки доводиться теорема про коректність даної задачі в просторі Л. Шварца й у спряженому просторі.

Наведено приклади некоректних за Петровським рівнянь та вказано конкретні інтегральні умови, за яких одержувані задачі будуть коректними в просторі Л.Шварца.

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2}.$$

Для даного рівняння не виконані умови за Петровським, оскільки поліном $P(s_1, s_2) = -s_1^2 + s_2^2$ необмежений. Але якщо додати умову

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) u(x_1, x_2, t) dt = \varphi(x_1, x_2),$$

то така задача буде коректною в просторі Л. Шварца, а також у шкалі банахових просторів.

Ключові слова: диференціальні рівняння у частинних похідних; інтегральні умови; псевдодиференціальний оператор; перетворення Фур'є; простір Л. Шварца.

2020 Mathematics Subject Classification: 35C10, 93B28.

Вступ

Як відомо [1], задача Коші некоректна для диференціальних рівнянь у частинних похідних зі сталими коефіцієнтами, які не є коректними за Петровським.

У цій роботі пропонується інтегральна умова для еволюційного диференціального рівняння в частинних похідних, в якій отримана крайова задача стає коректною в просторі Л. Шварца, а також у просторах функцій **степеневого** зростання за просторовими змінними. Наведена інтегральна умова є інтегралом по півосі з експоненційною вагою, що забезпечує збіжність даного інтеграла.

Подібні інтегральні умови зустрічалися раніше в крайових задачах на кінцевому відрізку, наприклад, у роботах [2, 3, 4].

1. Постановка задачі

Розглянемо наступну крайову задачу:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} B\left(t, \frac{\partial}{i\partial x}\right) u(x, t) dt = \varphi(x), \quad (2)$$

де $P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)$ — диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами, $B\left(t, \frac{\partial}{i\partial x}\right)$ — псевдодиференціальний оператор із символом $\tilde{B}(t, s)$, який належить простору $C_{-\infty}^{\infty} = \bigcap_s \bigcup_l C_l^s$ для будь-яких $t \geq 0$.

Означення 1. Задача (1)–(2) називається коректною в просторі Л. Шварца $S = \bigcap_{s,l} C_l^s$, якщо для будь-якої функції $\varphi(x) \in S$ існує єдиний розв'язок

$u(x, t) \in S$ для будь-яких $t \geq 0$, і розв'язувальний оператор $T : \varphi \rightarrow u$ є неперервним у топологічних просторах S для всіх $t \geq 0$.

2. Крайова задача для однорідного рівняння

Теорема 1. Для будь-якого рівняння (1) крайова задача з умовою (2), де

$$\tilde{B}(t, s) = \exp \left(-\frac{t^2}{2} - it \cdot \operatorname{Im} P(s) \right),$$

коректна в просторі S .

Зауваження. Вигляд функції $\tilde{B}(s, t)$ обумовлений вимогами до збіжності інтеграла у рівнянні (2) та існування розв'язку крайової задачі.

Доведення. Застосуємо перетворення Фур'є за просторовими змінними. Тоді задача (1) перейде в задачу

$$\frac{\partial \tilde{u}(s, t)}{\partial t} = P(s) \tilde{u}(s, t), \quad (3)$$

$$\int_0^\infty \tilde{B}(t, s) \tilde{u}(s, t) dt = \tilde{\varphi}(s). \quad (4)$$

Оскільки розв'язок рівняння (3) має загальний вигляд $\tilde{u}(s, t) = \exp(tP(s)) \psi(s)$ і зростає за t не швидше ніж експонента, то інтеграл $\int_0^\infty \exp \left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s) \right) dt$ збігається.

Підставляючи розв'язок $\tilde{u}(s, t)$ до умови (4), отримаємо

$$\int_0^\infty \exp \left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s) \right) dt \cdot \psi(s) = \tilde{\varphi}(s).$$

Отже,

$$\psi(s) = \left(\int_0^\infty \exp \left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s) \right) dt \right)^{-1} \tilde{\varphi}(s).$$

Оцінемо зростання функції $\Delta(s) = \int_0^\infty \exp \left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s) \right) dt$. Цей інтеграл можна розглядати як перетворення Лапласа від функції $\exp \left(-\frac{t^2}{2} \right)$ при $z = \operatorname{Re} P(s)$. Тому (див. [5])

$$|\Delta(s)^{-1}| \leq C (1 + |\operatorname{Re} P(s)|) \exp \left(-\frac{1}{2} (\operatorname{Re} P(s))^2 \right).$$

Тоді розв'язувальна функція $Q(s, t) = \exp tP(s) \cdot \Delta^{-1}(s)$ задовольняє оцінку

$$\begin{aligned} |Q(s, t)| &\leq C(1 + |\operatorname{Re} P(s)|) \exp \left(t \operatorname{Re} P(s) - \frac{1}{2} (\operatorname{Re} P(s))^2 \right) \leq \\ &\leq C(1 + |\operatorname{Re} P(s)|) e^{\frac{t^2}{2}}. \end{aligned}$$

Тобто для кожного фіксованого значення t вона належить простору $C_{-\infty}^{\infty}$, а тому є мультиплікатором у просторі S .

Отже, для фіксованого t функція $\tilde{u}(s, t) = Q(s, t)\tilde{\varphi}(s) \in S$. Розв'язок $u(x, t) = G(x, t) \star \varphi(x)$ також належить простору S , де $G(x, t) = F_s^{-1}Q(s, t)$ є згортувачем у просторі S (див. [1]).

Теорема доведена.

Зауваження. Оскільки оператор згортки $u(x, t) = G(x, t) \star \varphi(x)$ продовжується до неперервного оператора у спряженому просторі S' , то дана крайова задача також коректна в просторі S' , а тому коректно розв'язна з простору $C_{l_1}^{s_1}$ в простір $C_{l_2}^{s_2}$ для будь-яких досить великих s_1 та l_1 і деяких s_2 та l_2 (див. [1]).

Розглянемо наступні приклади.

Приклад 1. Дано рівняння

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c = a + bi \in \mathbb{C}.$$

Оскільки $\operatorname{Im} P(s) = as$, то при $\tilde{B}(s, t) = \exp \left(-\frac{t^2}{2} - iast \right)$ крайова умова (2) має вигляд

$$\int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) u(x - at, t) dt = \varphi(x).$$

Згідно з теоремою (1) дана крайова задача коректна в просторі S і в просторі S' .

Приклад 2. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2}.$$

Поліном $P(s_1, s_2) = -s_1^2 + s_2^2$ є дійсним та необмеженим, тобто задане рівняння не є коректним за Петровським.

Але якщо додати умову

$$\int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) u(x, t) dt = \varphi(x),$$

то дана крайова задача буде коректною в просторі S , а також у просторі S' .

3. Крайова задача для неоднорідного рівняння

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P \left(\frac{\partial}{i \partial x} \right) u(x, t) + f(x, t) \quad (5)$$

і однорідну крайову умову

$$\int_0^\infty B \left(t, \frac{\partial}{i \partial x} \right) u(x, t) dt = 0. \quad (6)$$

Будемо розглядати функції $f(x, t)$, які належать простору S для всіх $t \geq 0$ та задовольняють умову $f(x, t) = 0$, $t \geq T$.

Як і раніше будемо розглядати $\tilde{B}(t, s) = \exp \left(-\frac{t^2}{2} - it \operatorname{Im} P(s) \right)$. Застосуємо до рівняння (5) перетворення Фур'є за просторовими змінними та розглянемо крайову задачу

$$\frac{\partial \tilde{u}(s, t)}{\partial t} = P(s) \tilde{u}(s, t) + \tilde{f}(s, t), \quad (7)$$

$$\int_0^\infty \exp \left(-\frac{t^2}{2} - it \operatorname{Im} P(s) \right) \tilde{u}(s, t) dt = 0 \quad (8)$$

Знайдемо для цієї задачі функцію Гріна $G(s, t, \tau)$, яка має задовольняти умови

- 1) $\frac{\partial \tilde{G}(s, t, \tau)}{\partial t} = P(s) \tilde{G}(s, t, \tau), \quad t \neq \tau,$
- 2) $\int_0^\infty \exp \left(-\frac{t^2}{2} - it \operatorname{Im} P(s) \right) \tilde{G}(s, t, \tau) dt = 0,$
- 3) $G(s, \tau + 0, \tau) - G(s, \tau - 0, \tau) = 1.$

Перевіримо, що функція Гріна має вигляд

$$G(s, t, \tau) = \begin{cases} \exp(t - \tau) P(s) \cdot \int_0^\tau \exp \left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s) \right) dt \cdot \Delta^{-1}(s), & t \geq \tau, \\ -\exp(t - \tau) P(s) \cdot \int_\tau^\infty \exp \left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s) \right) dt \cdot \Delta^{-1}(s), & t < \tau, \end{cases}$$

$$\text{де } \Delta(s) = \int_0^\infty \exp \left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s) \right) dt.$$

Умова 1) виконана.

Перевіримо виконання умови **2**).

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2} - it \operatorname{Im} P(s)\right) G(s, t, \tau) dt = \\
 & = - \int_0^{\tau} \exp\left(-\frac{t^2}{2} - it \operatorname{Im} P(s) + (t - \tau)P(s)\right) dt \cdot \\
 & \cdot \int_{\tau}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt \cdot \Delta^{-1}(s) + \\
 & + \int_{\tau}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + it \operatorname{Im} P(s) + (t - \tau)P(s)\right) dt \cdot \\
 & \cdot \int_0^{\tau} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt \cdot \Delta^{-1}(s) = \\
 & = \left(- \int_0^{\tau} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt \cdot \int_{\tau}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt + \right. \\
 & + \int_{\tau}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt \cdot \\
 & \cdot \left. \int_0^{\tau} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt\right) \cdot \exp(-\tau P(s)) \cdot \Delta^{-1}(s) = 0.
 \end{aligned}$$

Отже, умова **2**) також виконана.

Перевіримо виконання умови **3**).

$$\begin{aligned}
 & G(s, \tau + 0, \tau) - G(s, \tau - 0, \tau) = \\
 & = \left(\int_0^{\tau} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt + \int_{\tau}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt \right) \cdot \Delta^{-1}(s) = 1.
 \end{aligned}$$

Таким чином, умова **3**) також виконана.

Оцінимо функцію Гріна.

При $t \geq \tau$ та $\operatorname{Re} P(s) \geq 0$ отримаємо

$$\begin{aligned}
 |G(s, t, \tau)| & \leq \exp((t - \tau) |\operatorname{Re} P(s)|) \cdot \exp(\tau |\operatorname{Re} P(s)|) \cdot \\
 & \cdot C(1 + |\operatorname{Re} P(s)|) \exp\left(-\frac{1}{2} |\operatorname{Re} P(s)|^2\right) \leq \\
 & \leq C(1 + |\operatorname{Re} P(s)|) \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).
 \end{aligned}$$

$$\text{Для } \operatorname{Re} P(s) < 0 \text{ маємо } |G(s, t, \tau)| \leq C(1 + |\operatorname{Re} P(s)|) \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Якщо $t < \tau$ та $\operatorname{Re} P(s) \geq 0$, то $|G(s, t, \tau)| \leq 1$.

А для $\operatorname{Re} P(s) < 0$ маємо

$$|G(s, t, \tau)| \leq \exp(t \operatorname{Re} P(s)) \cdot \Delta^{-1}(s) \leq C(1 + |\operatorname{Re} P(s)|) e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Тоді функція Гріна задовольняє оцінці

$$|G(s, t, \tau)| \leq C(1 + |\operatorname{Re} P(s)|) e^{\frac{t^2}{2}},$$

тобто вона належить простору $C_{-\infty}^{\infty}$ для будь-яких $t \geq 0$.

Розв'язок задачі (7)–(8) знаходиться за формулою

$$\tilde{u}(s, t) = \int_0^{\infty} G(s, t, \tau) \tilde{f}(s, \tau) d\tau = \int_0^T G(s, t, \tau) \tilde{f}(s, \tau) d\tau$$

і належить простору S для будь-яких $t \geq 0$.

Таким чином доведена наступна теорема.

Теорема 2. *Крайова задача (5)–(6) з функцією*

$$\tilde{B}(s, t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2} - it \cdot \operatorname{Im} P(s)\right)$$

з додатковою умовою $f(x, t) = 0$ при $t \geq T$ коректна у просторі S .

Зауваження. Оскільки $G(s, t, \tau) \in C_{-\infty}^{\infty} \forall t, \tau \geq 0$, то оператор згортки з $F_s^{-1}G(s, t, \tau)$ продовжується за неперервністю на простір S' . Тому задача (5)–(6) коректна у просторі S' .

Приклад 3. Задача

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} + f(x_1, x_2, t)$$

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) u(x_1, x_2, t) dt = 0$$

коректна у просторі S при $f(x_1, x_2, t) = 0$ для $t \geq T$.

Висновок. У цій роботі показано, що для будь-якого диференціального рівняння в частинних похідних зі сталими коефіцієнтами вигляду (1) існує інтегральна умова вигляду (2), для якої крайова задача (1)–(2) коректна у просторах S та S' .

Аналогічний факт є справедливим і для неоднорідного рівняння вигляду (3).

Конфлікт інтересів: Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

Історія статті: отримана: 1 лютого 2026; останній варіант: 10 травня 2026;
прийнята: 15 травня 2026. Оприлюднено 31 травня 2026.

REFERENCES

1. L. Hörmander. The Analysis of linear partial differential operators. II. Differential operators with constant coefficients. – Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York Tokyo. – 1983. – 455 p.
2. L. V. Fardigola, Test for propriety in a layer of a boundary problem with integral condition, Ukr. Math. Journ., 42 (1990), no 11, P.-1388–1394.
3. A. A. Makarov., D. A. Levkin. The boundary-value problem in the layer for evolution pseudodifferential equations with integral condition, Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University, Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics” Vol. 87, 2018, P.- 61–68. <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2018-87-05>
4. V. S. Ilkiv, B. B. Pakholok. Nonlocal boundary value problem with integral conditions for hyperbolic systems of equations. / Bulletin of the National University "Lviv Polytechnic" Physical and Mathematical Sciences, No. 871, 2017, P.- 70-76. <https://ena.lpnu.ua/handle/ntb/42779>
5. Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplace-transformation und der Z-transformation. / von Gustav Doetsch ord. Professor an der Universitat Freiburg i. B. mit Einem Tabellenanhang von Rudolf Herschel. R. Oldenbourg, Munchen, Wien, 1967.

Well-posed boundary value problems with an integral condition in half-space for partial differential equations

A. A. Makarov, I. G. Nikolenko

*Department of Mathematical Modeling and Data Analysis
Educational and Scientific Institute of Computer Science
and Artificial Intelligence*

*V. N. Karazin Kharkiv National University
sq. Svobody, 6, Kharkiv, 61022, Ukraine*

It is well known that the Cauchy problem is ill posed for partial differential equations with constant coefficients if they do not satisfy the Petrovsky well-posedness condition.

In this work, an integral condition is proposed under which the resulting boundary value problem becomes well-posed in the Schwartz space, as well as in spaces of functions with polynomial growth in spatial variables. The presented integral condition is an integral over a semi-axis with an exponential weight, which ensures the convergence of this integral.

By considering this integral as the Laplace transform of the function $\exp(-t^2/2)$, one can obtain its asymptotics, which allow to estimate the resolving function. This estimate makes it possible to prove a theorem on the well-posedness of the resulting boundary value problem in the Schwartz space, as well as in a scale of functions of finite smoothness with polynomial growth.

Furthermore, the problem is considered for an inhomogeneous differential equation where the right-hand side belongs to the Schwartz space in the spatial variables and is compactly supported in the time variable. For the resulting problem, a Green's function is found and estimated from above. Using this estimate, a theorem on the well-posedness of this problem is proved in the Schwartz space and its dual space.

Examples of equations that are ill posed in the sense of Petrovsky are provided, and specific integral conditions are indicated under which the resulting problems will be well-posed in the Schwartz space.

Examples of Petrovsky-incorrect equations are given and specific integral conditions are indicated under which the resulting problems will be correct in the L. Schwartz space. Consider the equation

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2}.$$

For this equation, the Petrovsky conditions are not satisfied, since the polynomial $P(s_1, s_2) = -s_1^2 + s_2^2$ is unbounded. But if we add the condition

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) u(x_1, x_2, t) dt = \varphi(x_1, x_2),$$

then which the boundary value problem becomes well-posed in the L. Schwartz space, as well as in the scale of Banach spaces.

Keywords: partial differential equations; integral conditions; pseudodifferential operator; Fourier transform; L. Schwartz space.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Article history: Received: 1 February 2026; Final form: 10 May 2026

Accepted: 20 May 2026. Published 31 May 2026.

How to cite this article:

O.A. Makarov, I. G. Nikolenko, Well-posed boundary value problems with an integral condition in half-space for partial differential equations, *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 103, 2026, p. 60–68, (in Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2026-103-03>

Roman Skurikhin

PhD student

Department of Pure Mathematics

V. N. Karazin Kharkiv National University

4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

roman.skurikhin@karazin.ua  <http://orcid.org/0009-0005-0504-8518>

Formal power series solutions of the differential equation $ay' = by^m$ over Dedekind domains of characteristic zero

Let D be a Dedekind domain of characteristic zero, let $K = \text{Frac}(D)$ be its fraction field, and consider the Cauchy problem $ay' = by^m$, $y(0) = c_0$, in the ring $D[[x]]$, where $a, b, c_0 \in D$, $a, b \neq 0$, and $m \in \mathbb{N}$. The paper studies when the unique formal solution $y \in K[[x]]$ with initial value c_0 actually has all coefficients in D , and therefore belongs to $D[[x]]$. The argument starts from the coefficient recursion in $K[[x]]$ and derives an explicit formula for the coefficients of the unique solution. This reduces the existence problem in $D[[x]]$ to an arithmetic integrality question governed by the valuations attached to nonzero prime ideals of D . The main point is that over a Dedekind domain the relevant obstruction is not ordinary divisibility by prime elements, but comparison of valuations of fractional ideals after localization at prime ideals.

For the linear case $m = 1$, the zero initial value always gives the zero solution. For $c_0 \neq 0$, the coefficients contain factorial denominators, and this produces a global obstruction unless only finitely many rational primes remain nonunits in D . In that finite-prime situation the exact criterion for a nonzero initial value is the ideal containment $(b) \subseteq (a)\mathfrak{r}_1$, where $\mathfrak{r}_1$ is an explicitly described correction ideal built from the prime ideals lying over the rational primes that are nonunits in D . For the nonlinear case $m \geq 2$, writing $d = m - 1$, the coefficients are expressed through the product $C_k(d) = \prod_{i=0}^{k-1} (di + 1)$. The paper shows that prime ideals over rational primes not dividing d create no additional obstruction beyond the basic condition $(bc_0^d) \subseteq (a)$, while the prime ideals over rational primes dividing d contribute a correction ideal $\mathfrak{r}(d)$. As a result, the exact existence criterion becomes $(bc_0^d) \subseteq (a)\mathfrak{r}(d)$. In particular, for $m = 2$ one has $\mathfrak{r}(1) = D$, so the condition reduces to $(bc_0) \subseteq (a)$. Several examples are included to illustrate the theorem over $\mathbb{Z}$, localizations of $\mathbb{Z}$, Gaussian integers, and the Dedekind domain $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, which is not a unique factorization domain.

Keywords: formal power series; Dedekind domain; Cauchy problem; prime-ideal valuation; integrality criterion.

2020 Mathematics Subject Classification: 13F05; 13J05; 34A34.

1. Introduction

Let D be a Dedekind domain of characteristic zero. We recall the definition of a Dedekind domain in Section 3, together with the prime-ideal valuation conventions used later. Since $\text{char}(D) = 0$, we view $\mathbb{Z}$ as a subring of D . Fix

$$a, b, c_0 \in D, \quad a, b \neq 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

We consider the Cauchy problem in the ring of formal power series $D[[x]]$:

$$ay' = by^m, \quad y(0) = c_0.$$

We seek a solution in the form

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Our goal is to determine exactly when this problem has a solution in $D[[x]]$. The analytic part is easy over the fraction field $K = \text{Frac}(D)$: once c_0 is fixed, the coefficient recursion determines a unique solution $y \in K[[x]]$. Section 2 records this computation, while Section 3 introduces the prime-ideal valuations and arithmetic notation used in the descent criterion. The real issue is descent from $K[[x]]$ to $D[[x]]$, and for a Dedekind domain that descent is governed by valuations at nonzero prime ideals rather than divisibility by prime elements. Related algebraic approaches to differential equations over commutative rings appear in [3, 4, 5, 6].

Main result preview. For $m = 1$, the zero initial value always gives the zero solution. For $c_0 \neq 0$, the factorial denominators in

$$c_k = \frac{c_0 b^k}{k! a^k}$$

force an infinite-prime obstruction unless only finitely many rational primes remain nonunits in D . In that finite-prime case, the exact criterion for a nonzero initial value is $(b) \subseteq (a)\mathfrak{r}_1$, where $\mathfrak{r}_1$ is the correction ideal defined in Section 4 and encoding the obstruction coming from the rational primes that remain nonunits in D . For $m \geq 2$, writing $d = m - 1$, the only extra obstruction beyond the basic containment $(bc_0^d) \subseteq (a)$ comes from the prime ideals lying over the rational primes dividing d , and the final criterion is

$$(bc_0^d) \subseteq (a)\mathfrak{r}(d).$$

Here $\mathfrak{r}(d)$, also defined in Section 4, is the corresponding correction ideal for the primes dividing d . When D is also a unique factorization domain (UFD),

these ideal containments reduce to the familiar divisibility statements $ar_1 \mid b$ and $ar(d) \mid bc_0^d$. In particular, in this UFD notation, for $m = 2$ one has $r(1) = 1$, so the condition becomes simply $a \mid bc_0$.

2. The Unique Solution in $K[[x]]$ and Its Coefficients

In this section we prove that the Cauchy problem has a unique solution $y \in K[[x]]$, compute its coefficients in K , and reduce existence in $D[[x]]$ to coefficient integrality.

Let $K = \text{Frac}(D)$. Any solution in $D[[x]]$ is also a solution in $K[[x]]$, and in K the element a is invertible. Therefore all identities involving division by a below are understood inside $K[[x]]$.

Write

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Then

$$y^m = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ i_1 + \dots + i_m = n}} c_{i_1} \cdots c_{i_m} \right) x^n.$$

Comparing coefficients in $ay' = by^m$, we obtain for every $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$a(n+1)c_{n+1} = b \sum_{\substack{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ i_1 + \dots + i_m = n}} c_{i_1} \cdots c_{i_m}.$$

The right-hand side depends only on $c_0, \dots, c_n$, and $a(n+1)$ is invertible in K . Therefore the recurrence determines $c_1, c_2, \dots$ uniquely from the initial value c_0 , and hence defines a unique solution in $K[[x]]$. The general formal existence-uniqueness statement for $y' = F(x, y)$, after translating the initial value to 0, is classical; see [2, Ch. VII, §1, no. 2, Prop. 2.1]. Although stated there in the analytic setting, the proof is purely coefficientwise, so the same argument works over any field. We keep the short derivation for the present equation.

To compute its coefficients, write

$$d = m - 1.$$

For $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, define

$$C_k(d) = \prod_{i=0}^{k-1} (di + 1) \quad (C_0(d) = 1).$$

Lemma 1. *For every $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,*

$$y^{(k)} = \frac{C_k(d)b^k}{a^k} y^{dk+1}.$$

Proof. We use induction on k . For $k = 0$, the identity is trivial.

Assume it holds for some $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= \left(\frac{C_k(d)b^k}{a^k} y^{dk+1} \right)' \\ &= \frac{C_k(d)b^k}{a^k} (dk+1) y^{dk} y' \\ &= \frac{C_k(d)(dk+1)b^{k+1}}{a^{k+1}} y^{d(k+1)+1} \\ &= \frac{C_{k+1}(d)b^{k+1}}{a^{k+1}} y^{d(k+1)+1}. \end{aligned}$$

This proves the claim. □

Evaluating at $x = 0$ and dividing by $k!$, we obtain for every $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$c_k = \frac{y^{(k)}(0)}{k!} = \frac{C_k(d)c_0(bc_0^d)^k}{k!a^k}.$$

For $m = 1$, we have $d = 0$ and $C_k(0) = 1$, so this reduces to

$$c_k = \frac{c_0 b^k}{k! a^k}.$$

The existence problem in $D[[x]]$ is therefore equivalent to deciding when these explicit coefficient formulas actually lie in D . From this point on, the problem is purely arithmetic.

3. Prime-Ideal Valuations and Arithmetic Lemmas

For a rational prime $p \in \mathbb{Z}$, we write

$$v_p(n) = \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : p^k \mid n\} \quad (n \in \mathbb{Z}, n \neq 0).$$

This is the usual p -adic valuation on the integers. It is this valuation that appears in Legendre's formula and in the estimates for $C_n(d)$ below.

The next lemmas isolate the arithmetic input needed for the descent argument. The first step is to replace divisibility by prime elements with valuations at nonzero prime ideals. After that, the only genuinely quantitative ingredients are the p -adic behavior of the product

$$C_n(d) = \prod_{i=0}^{n-1} (di + 1)$$

and the estimates for $v_p(n!)$.

Background conventions. Standard background on Dedekind domains, fractional ideals, and prime-ideal valuations may be found in [1, Ch. 9], [8, Ch. I, §3], and [8, Ch. I, §11].

Definition 1 (Dedekind domain). *A domain D is called a Dedekind domain if it is noetherian, integrally closed in its fraction field, and every nonzero prime ideal of D is maximal; see [1, Ch. 9] and [8, Ch. I, §3]. Equivalently, every nonzero proper ideal of D factors uniquely into prime ideals.*

Definition 2 (Fractional ideals). *A nonzero fractional ideal of D is a nonzero D -submodule $I \subseteq K$ such that $\alpha I \subseteq D$ for some nonzero $\alpha \in D$.*

Definition 3 (Prime-ideal valuations). *Since D is Dedekind, every nonzero fractional ideal factors uniquely in the form*

$$I = \prod_{\mathfrak{p} \neq 0} \mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}},$$

where the product runs over the nonzero prime ideals of D , all but finitely many exponents $n_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}$ are zero, and the factorization is unique. For a nonzero fractional ideal I , we define

$$v_{\mathfrak{p}}(I) = n_{\mathfrak{p}}.$$

For $x \in K \setminus \{0\}$, we define

$$v_{\mathfrak{p}}(x) = v_{\mathfrak{p}}(xD),$$

and we set $v_{\mathfrak{p}}(0) = +\infty$.

Standard facts. We will use the following standard consequences of the factorization of fractional ideals; see again [1, Ch. 9], [8, Ch. I, §3], and [8, Ch. I, §11].

- For nonzero fractional ideals I, J , one has

$$v_{\mathfrak{p}}(IJ) = v_{\mathfrak{p}}(I) + v_{\mathfrak{p}}(J)$$

for every nonzero prime ideal $\mathfrak{p}$.

- For a nonzero fractional ideal I , only finitely many valuations $v_{\mathfrak{p}}(I)$ are nonzero.
- For nonzero fractional ideals I, J , one has

$$I \subseteq J \iff v_{\mathfrak{p}}(I) \geq v_{\mathfrak{p}}(J)$$

for every nonzero prime ideal $\mathfrak{p}$.

- For nonzero $x, y \in K$ and $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$v_{\mathfrak{p}}(xy) = v_{\mathfrak{p}}(x) + v_{\mathfrak{p}}(y), \quad v_{\mathfrak{p}}(x^n) = nv_{\mathfrak{p}}(x).$$

Lemma 2. *Let $x \in K$. Then $x \in D$ if and only if*

$$v_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$$

for every nonzero prime ideal $\mathfrak{p}$ of D .

Proof. This is the standard valuation criterion for membership in a Dedekind domain; see [8, Ch. I, §11]. $\square$

For a rational prime p , we write $\mathfrak{p} \mid p$ if $p \in \mathfrak{p}$, equivalently if $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)$. Because (p) is a nonzero ideal of the Dedekind domain D , it has only finitely many prime divisors.

Lemma 3. *Let $\mathfrak{p}$ be a nonzero prime ideal of D . Then exactly one of the following holds.*

1. $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)$ for a rational prime p , and then for every nonzero $n \in \mathbb{Z}$,

$$v_{\mathfrak{p}}(n) = v_{\mathfrak{p}}(p) v_p(n).$$

2. $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)$, and then for every nonzero $n \in \mathbb{Z}$,

$$v_{\mathfrak{p}}(n) = 0.$$

Proof. This follows from the general facts on contraction of prime ideals and on the valuations attached to prime ideals; see [1, Ch. 1] and [8, Ch. I, §11]. $\square$

For the coefficients in nonlinear cases of the main theorem, the key quantity is

$$C_n(d) = \prod_{i=0}^{n-1} (di + 1),$$

because it is exactly the factor that appears in

$$c_n = \frac{C_n(d) c_0 (bc_0^d)^n}{n! a^n}.$$

The next lemma measures the p -adic cancellation between $C_n(d)$ and $n!$ at the level of ordinary integers.

Lemma 4. *Let $d, n \in \mathbb{N}$, and define*

$$C_n(d) = \prod_{i=0}^{n-1} (di + 1).$$

Let p be a rational prime.

1. *If $p \nmid d$, then*

$$v_p(n!) \leq v_p(C_n(d)) \leq v_p(n!) + \log_p n + \log_p d.$$

2. *If $p \mid d$, then*

$$v_p(C_n(d)) = 0.$$

Proof. For $k \geq 1$, let

$$N_k = \# \left\{ 0 \leq i \leq n-1 : p^k \mid di+1 \right\}.$$

Thus N_k counts how many factors in $C_n(d)$ are divisible by p^k . A factor with p -adic valuation r contributes 1 to each of $N_1, \dots, N_r$ and nothing to the later terms. Therefore

$$v_p(C_n(d)) = \sum_{i=0}^{n-1} v_p(di+1) = \sum_{k \geq 1} N_k.$$

This is the same counting principle as in Legendre's formula

$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Suppose first that $p \nmid d$. Then d is invertible modulo p^k for every $k \geq 1$, so the congruence

$$di+1 \equiv 0 \pmod{p^k}$$

has exactly one solution modulo p^k . Hence among any p^k consecutive values of i , exactly one satisfies $p^k \mid di+1$. The interval $0, 1, \dots, n-1$ consists of $\lfloor n/p^k \rfloor$ complete blocks of length p^k , and possibly one final incomplete block. Each full block contributes exactly one such index, and the incomplete block contributes at most one. Therefore

$$\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq N_k \leq \left\lceil \frac{n}{p^k} \right\rceil.$$

Summing the lower bounds over $k \geq 1$, we get

$$v_p(C_n(d)) = \sum_{k \geq 1} N_k \geq \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = v_p(n!).$$

For the upper bound, note that every factor $di+1$ is at most $d(n-1)+1$. Hence $N_k = 0$ as soon as $p^k > d(n-1)+1$. If

$$K = \lfloor \log_p(d(n-1)+1) \rfloor,$$

then

$$\begin{aligned}
v_p(C_n(d)) &= \sum_{k=1}^K N_k \\
&\leq \sum_{k=1}^K \left\lceil \frac{n}{p^k} \right\rceil \\
&\leq \sum_{k=1}^K \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + 1 \right) \\
&\leq v_p(n!) + K \\
&\leq v_p(n!) + \log_p(d(n-1) + 1) \\
&\leq v_p(n!) + \log_p n + \log_p d.
\end{aligned}$$

Finally, if $p \mid d$, then $di + 1 \equiv 1 \pmod{p}$ for every i . So none of the factors in $C_n(d)$ is divisible by p , and therefore $v_p(C_n(d)) = 0$. $\square$

Lemma 5. *Let $d, n \in \mathbb{N}$, let*

$$C_n(d) = \prod_{i=0}^{n-1} (di + 1),$$

and let $\mathfrak{p}$ be a nonzero prime ideal of D .

1. *If $\mathfrak{p} \mid p$ for a rational prime $p \nmid d$, then*

$$v_{\mathfrak{p}}(n!) \leq v_{\mathfrak{p}}(C_n(d)) \leq v_{\mathfrak{p}}(n!) + v_{\mathfrak{p}}(p)(\log_p n + \log_p d).$$

2. *If $\mathfrak{p} \mid p$ for a rational prime $p \mid d$, then*

$$v_{\mathfrak{p}}(C_n(d)) = 0.$$

3. *If $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)$, then*

$$v_{\mathfrak{p}}(n!) = v_{\mathfrak{p}}(C_n(d)) = 0.$$

Proof. If $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)$, then Lemma 3 gives $v_{\mathfrak{p}}(n!) = 0$, and each factor $di + 1$ is a nonzero integer, so again Lemma 3 gives $v_{\mathfrak{p}}(C_n(d)) = 0$.

Now assume $\mathfrak{p} \mid p$. By Lemma 3,

$$v_{\mathfrak{p}}(n!) = v_{\mathfrak{p}}(p) v_p(n!), \quad v_{\mathfrak{p}}(C_n(d)) = v_{\mathfrak{p}}(p) v_p(C_n(d)).$$

If $p \nmid d$, the desired inequalities follow from Lemma 4 after multiplication by $v_{\mathfrak{p}}(p)$.

If $p \mid d$, the same lemma gives $v_p(C_n(d)) = 0$, hence $v_{\mathfrak{p}}(C_n(d)) = 0$. $\square$

The final ingredient is the bound on $v_p(n!)$ in a crude asymptotic form.

Lemma 6. *Let p be a rational prime and $n \in \mathbb{N}$. Then*

$$v_p(n!) \leq \frac{n}{p-1}, \quad v_p(n!) \geq \frac{n}{p-1} - \frac{p}{p-1} - \log_p n.$$

Proof. Using Legendre's formula,

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

The upper bound follows from

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p-1}.$$

For the lower bound, let $K = \lfloor \log_p n \rfloor$. Then

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \sum_{k=1}^K \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \\ &\geq \sum_{k=1}^K \left(\frac{n}{p^k} - 1 \right) \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{n}{p^k} - K. \end{aligned}$$

Moreover,

$$\sum_{k=1}^K \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p-1} - \frac{n}{p^{K+1}} \cdot \frac{p}{p-1} > \frac{n}{p-1} - \frac{p}{p-1},$$

because $p^{K+1} > n$. Therefore

$$v_p(n!) \geq \frac{n}{p-1} - \frac{p}{p-1} - \log_p n.$$

□

4. Main Descent Theorem

The explicit formulas from Section 2 reduce existence in $D[[x]]$ to a valuation problem. The correction ideals introduced below record the residual obstruction left by the factorial denominator.

For $d \in \mathbb{N}$, define the nonzero ideal

$$\mathfrak{r}(d) = \prod_{p|d} \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathfrak{p}^{\left\lceil \frac{v_{\mathfrak{p}}(p)}{p-1} \right\rceil},$$

with the convention $\mathfrak{r}(1) = D$. This product is finite because d has only finitely many rational prime divisors and each (p) has only finitely many prime divisors in D .

If only finitely many rational primes are nonunits in D , define also

$$\mathfrak{r}_1 = \prod_{\substack{p \text{ prime} \\ p \text{ nonunit in } D}} \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathfrak{p}^{\left\lceil \frac{v_{\mathfrak{p}}(p)}{p-1} \right\rceil}.$$

Theorem 1. *Let $a, b, c_0 \in D$ with $a, b \neq 0$, and let $m \in \mathbb{N}$. Consider the Cauchy problem*

$$ay' = by^m, \quad y(0) = c_0.$$

The existence of a solution $y \in D[[x]]$ for this problem is characterized as follows.

1. **Linear case** ($m = 1$).

- (a) *If $c_0 = 0$, then the unique solution is the zero series.*
- (b) *Assume $c_0 \neq 0$. If infinitely many rational primes are nonunits in D , then no solution exists in $D[[x]]$.*
- (c) *Assume $c_0 \neq 0$ and only finitely many rational primes are nonunits in D . Then a solution exists in $D[[x]]$ if and only if*

$$(b) \subseteq (a)\mathfrak{r}_1.$$

2. **Nonlinear case** ($m \geq 2$). Write $d = m - 1$.

- (a) *If $c_0 = 0$, then the unique solution is the zero series.*
- (b) *If $c_0 \neq 0$, then a solution exists in $D[[x]]$ if and only if*

$$(bc_0^d) \subseteq (a)\mathfrak{r}(d).$$

For $m = 2$, the nonlinear criterion becomes

$$(bc_0) \subseteq (a),$$

because $\mathfrak{r}(1) = D$.

Remark 1. *If D is a unique factorization domain, then, since D is Dedekind, it is also a principal ideal domain. Hence $\mathfrak{r}(d)$ and $\mathfrak{r}_1$ are principal ideals. Writing*

$$\mathfrak{r}(d) = (r(d)), \quad \mathfrak{r}_1 = (r_1),$$

the conditions in the theorem become the familiar element-divisibility statements

$$ar(d) \mid bc_0^d, \quad ar_1 \mid b.$$

Before the detailed proof in Section 5, we briefly explain the main idea behind the three cases.

Case $m = 1$. The coefficient formula is

$$c_k = \frac{c_0 b^k}{k! a^k}.$$

The obstruction comes from the factorial denominators in $k!$. If infinitely many rational primes are nonunits in D , only the zero initial value descends. In the finite-prime case, the final criterion is $c_0 = 0$, or else $(b) \subseteq (a)\mathfrak{r}_1$.

Case $m = 2$. The coefficient formula is

$$c_k = c_0 \left(\frac{bc_0}{a} \right)^k.$$

Here one has complete cancellation $C_k(1) = k!$, so only the basic ideal containment remains, namely $(bc_0) \subseteq (a)$.

Case $m \geq 3$. The coefficient formula is

$$c_k = \frac{C_k(d)c_0(bc_0^d)^k}{k!a^k}, \quad d = m - 1.$$

In this range only the prime ideals lying over rational primes dividing d contribute the correction ideal $\mathfrak{r}(d)$, and the final criterion is $(bc_0^d) \subseteq (a)\mathfrak{r}(d)$.

5. Proof of the Main Theorem

5.1. Case $m = 1$.

We first separate the linear proof into two parts. If infinitely many rational primes remain nonunits in D , then some factorial denominator survives and blocks every nonzero solution. If only finitely many do, the problem becomes a valuation criterion encoded by the ideal $\mathfrak{r}_1$.

Zero initial value.

If $c_0 = 0$, then $y = 0$ is a solution. By Section 2, the solution in $K[[x]]$ with initial value 0 is unique. Hence $y = 0$ is also the unique solution in $D[[x]]$.

Infinite-prime obstruction.

Assume now that $c_0 \neq 0$. By Section 2, the unique solution in $K[[x]]$ has coefficients

$$c_k = \frac{c_0 b^k}{k! a^k}.$$

Suppose first that infinitely many rational primes are nonunits in D . The principal ideal (bc_0) has only finitely many prime divisors, so only finitely many rational primes p have the property that some prime ideal $\mathfrak{p} \mid p$ divides (bc_0) . Choose a rational prime p that is a nonunit in D and has no such prime ideal above it. Let $\mathfrak{p} \mid p$. Then

$$v_{\mathfrak{p}}(c_0 b^p) = 0.$$

On the other hand, Lemmas 3 and 6 give

$$v_{\mathfrak{p}}(p!a^p) \geq v_{\mathfrak{p}}(p!) = v_{\mathfrak{p}}(p)v_p(p!) = v_{\mathfrak{p}}(p) > 0.$$

Hence the coefficient $c_p = \frac{c_0 b^p}{p! a^p}$ does not lie in D , so no nonzero solution exists.

Now assume that only finitely many rational primes are nonunits in D , and define $\mathfrak{r}_1$ as above.

Necessity.

We show that every solution in $D[[x]]$ must satisfy

$$(b) \subseteq (a)\mathfrak{r}_1.$$

Let $y \in D[[x]]$. By Lemma 2, the coefficient formula lies in $D[[x]]$ if and only if

$$v_{\mathfrak{p}}(k!a^k) \leq v_{\mathfrak{p}}(c_0 b^k)$$

for every nonzero prime ideal $\mathfrak{p}$ of D and every $k \geq 1$.

Fix $\mathfrak{p}$. If $\mathfrak{p} \mid p$ for a rational prime p , then

$$v_{\mathfrak{p}}(p)v_p(k!) + kv_{\mathfrak{p}}(a) \leq v_{\mathfrak{p}}(c_0) + kv_{\mathfrak{p}}(b).$$

Using the lower bound from Lemma 6,

$$v_{\mathfrak{p}}(p) \left(\frac{k}{p-1} - \frac{p}{p-1} - \log_p k \right) + kv_{\mathfrak{p}}(a) \leq v_{\mathfrak{p}}(c_0) + kv_{\mathfrak{p}}(b).$$

After dividing by k and letting $k \rightarrow \infty$, we obtain

$$v_{\mathfrak{p}}(a) + \frac{v_{\mathfrak{p}}(p)}{p-1} \leq v_{\mathfrak{p}}(b),$$

hence

$$v_{\mathfrak{p}}(a) + \left\lceil \frac{v_{\mathfrak{p}}(p)}{p-1} \right\rceil \leq v_{\mathfrak{p}}(b).$$

If $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)$, then Lemma 3 gives $v_{\mathfrak{p}}(k!) = 0$, so

$$kv_{\mathfrak{p}}(a) \leq v_{\mathfrak{p}}(c_0) + kv_{\mathfrak{p}}(b),$$

and therefore $v_{\mathfrak{p}}(a) \leq v_{\mathfrak{p}}(b)$. Since $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{r}_1) = 0$ in this case, this is exactly

$$v_{\mathfrak{p}}((a)\mathfrak{r}_1) \leq v_{\mathfrak{p}}(b).$$

Combining both cases, we get

$$v_{\mathfrak{p}}((a)\mathfrak{r}_1) \leq v_{\mathfrak{p}}(b)$$

for every nonzero prime ideal $\mathfrak{p}$. Hence

$$(b) \subseteq (a)\mathfrak{r}_1.$$

Sufficiency.

Conversely, suppose

$$(b) \subseteq (a)\mathfrak{r}_1.$$

Equivalently,

$$v_{\mathfrak{p}}(b) \geq v_{\mathfrak{p}}((a)\mathfrak{r}_1)$$

for every nonzero prime ideal $\mathfrak{p}$.

If $\mathfrak{p} \mid p$, then

$$v_{\mathfrak{p}}(b) \geq v_{\mathfrak{p}}(a) + \left\lceil \frac{v_{\mathfrak{p}}(p)}{p-1} \right\rceil.$$

By Lemma 6,

$$v_{\mathfrak{p}}(k!) = v_{\mathfrak{p}}(p)v_p(k!) \leq \frac{v_{\mathfrak{p}}(p)k}{p-1} \leq k \left\lceil \frac{v_{\mathfrak{p}}(p)}{p-1} \right\rceil.$$

Thus

$$v_{\mathfrak{p}}(c_0 b^k) = v_{\mathfrak{p}}(c_0) + kv_{\mathfrak{p}}(b) \geq v_{\mathfrak{p}}(k! a^k).$$

If $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)$, then $v_{\mathfrak{p}}(k!) = 0$, so

$$v_{\mathfrak{p}}(c_0 b^k) = v_{\mathfrak{p}}(c_0) + kv_{\mathfrak{p}}(b) \geq kv_{\mathfrak{p}}(a) = v_{\mathfrak{p}}(k! a^k).$$

Hence every coefficient $\frac{c_0 b^k}{k! a^k}$ lies in D , so $y \in D[[x]]$. This proves the linear case.

5.2. Case $m \geq 2$.

We again start from the explicit coefficients and reduce the problem to integrality in D . Once that reduction is in place, the proof splits according to the only three possible prime-ideal types: prime ideals over rational primes not dividing d , prime ideals over rational primes dividing d , and prime ideals whose contraction to $\mathbb{Z}$ is (0) .

Zero initial value.

Write $d = m - 1$, and let $\mathfrak{r}(d)$ be the correction ideal from the theorem. If $c_0 = 0$, then $y = 0$ is a solution. By Section 2, the solution in $K[[x]]$ with initial value 0 is unique. Hence $y = 0$ is also the unique solution in $D[[x]]$.

So assume from now on that $c_0 \neq 0$.

Reduction to coefficient integrality.

By Section 2, the unique solution in $K[[x]]$ has coefficients

$$c_k = \frac{C_k(d)c_0(bc_0^d)^k}{k!a^k}.$$

Thus, by Lemma 2, $y \in D[[x]]$ if and only if for every nonzero prime ideal $\mathfrak{p}$ of D and every $k \geq 1$,

$$v_{\mathfrak{p}}(k! a^k) \leq v_{\mathfrak{p}} \left(C_k(d)c_0(bc_0^d)^k \right). \quad (1)$$

We now analyze (1) by prime type. Type I and Type III lead only to the basic inequality $v_{\mathfrak{p}}(a) \leq v_{\mathfrak{p}}(bc_0^d)$, while Type II is exactly where the extra factor $\mathfrak{r}(d)$ appears.

Type I. Assume that $\mathfrak{p} \mid p$ for a rational prime $p \nmid d$. By Lemma 5,

$$v_{\mathfrak{p}}(k!) \leq v_{\mathfrak{p}}(C_k(d)) \leq v_{\mathfrak{p}}(k!) + v_{\mathfrak{p}}(p)(\log_p k + \log_p d).$$

Necessity. If (1) holds for all k , then

$$\begin{aligned} v_{\mathfrak{p}}(k!) + kv_{\mathfrak{p}}(a) &\leq v_{\mathfrak{p}}(C_k(d)) + v_{\mathfrak{p}}(c_0) + kv_{\mathfrak{p}}(bc_0^d) \\ &\leq v_{\mathfrak{p}}(k!) + v_{\mathfrak{p}}(p)(\log_p k + \log_p d) \\ &\quad + v_{\mathfrak{p}}(c_0) + kv_{\mathfrak{p}}(bc_0^d). \end{aligned}$$

Dividing by k and letting $k \rightarrow \infty$, we obtain

$$v_{\mathfrak{p}}(a) \leq v_{\mathfrak{p}}(bc_0^d).$$

Sufficiency. Conversely, if $v_{\mathfrak{p}}(a) \leq v_{\mathfrak{p}}(bc_0^d)$, then Lemma 5 gives

$$\begin{aligned} v_{\mathfrak{p}}(k!a^k) &= v_{\mathfrak{p}}(k!) + kv_{\mathfrak{p}}(a) \\ &\leq v_{\mathfrak{p}}(C_k(d)) + kv_{\mathfrak{p}}(bc_0^d) \\ &\leq v_{\mathfrak{p}}\left(C_k(d)c_0(bc_0^d)^k\right), \end{aligned}$$

because $v_{\mathfrak{p}}(c_0) \geq 0$. So Type I prime ideals impose no extra correction factor.

Type II. Assume that $\mathfrak{p} \mid p$ for a rational prime $p \mid d$. By Lemma 5,

$$v_{\mathfrak{p}}(C_k(d)) = 0,$$

so (1) becomes

$$v_{\mathfrak{p}}(k!) + kv_{\mathfrak{p}}(a) \leq v_{\mathfrak{p}}(c_0) + kv_{\mathfrak{p}}(bc_0^d).$$

Necessity. Since

$$v_{\mathfrak{p}}(k!) = v_{\mathfrak{p}}(p)v_p(k!),$$

Lemma 6 yields

$$v_{\mathfrak{p}}(p) \left(\frac{k}{p-1} - \frac{p}{p-1} - \log_p k \right) + kv_{\mathfrak{p}}(a) \leq v_{\mathfrak{p}}(c_0) + kv_{\mathfrak{p}}(bc_0^d).$$

After dividing by k and letting $k \rightarrow \infty$, we get

$$v_{\mathfrak{p}}(a) + \frac{v_{\mathfrak{p}}(p)}{p-1} \leq v_{\mathfrak{p}}(bc_0^d),$$

hence

$$v_{\mathfrak{p}}(a) + \left\lceil \frac{v_{\mathfrak{p}}(p)}{p-1} \right\rceil \leq v_{\mathfrak{p}}(bc_0^d).$$

Sufficiency. Conversely, if this ceiling inequality holds, then Lemma 6 gives

$$\begin{aligned} v_{\mathfrak{p}}(k!) + kv_{\mathfrak{p}}(a) &\leq \frac{v_{\mathfrak{p}}(p)k}{p-1} + kv_{\mathfrak{p}}(a) \\ &\leq k \left\lceil \frac{v_{\mathfrak{p}}(p)}{p-1} \right\rceil + kv_{\mathfrak{p}}(a) \\ &\leq kv_{\mathfrak{p}}(bc_0^d) \\ &\leq v_{\mathfrak{p}}(c_0) + kv_{\mathfrak{p}}(bc_0^d), \end{aligned}$$

so (1) follows. Thus Type II prime ideals are exactly the source of $\mathfrak{r}(d)$.

Type III. Assume that $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)$. Lemma 5 gives

$$v_{\mathfrak{p}}(k!) = v_{\mathfrak{p}}(C_k(d)) = 0,$$

so (1) is simply

$$kv_{\mathfrak{p}}(a) \leq v_{\mathfrak{p}}(c_0) + kv_{\mathfrak{p}}(bc_0^d).$$

Letting $k \rightarrow \infty$, we obtain

$$v_{\mathfrak{p}}(a) \leq v_{\mathfrak{p}}(bc_0^d),$$

and this inequality is also sufficient. So Type III prime ideals again impose only the basic containment.

Combining the three prime types, we conclude that $y \in D[[x]]$ if and only if

$$v_{\mathfrak{p}}((a)\mathfrak{r}(d)) \leq v_{\mathfrak{p}}(bc_0^d)$$

for every nonzero prime ideal $\mathfrak{p}$, which is equivalent to

$$(bc_0^d) \subseteq (a)\mathfrak{r}(d).$$

This proves the nonlinear case and therefore the theorem.

6. Corollaries

We now record three immediate consequences of the main theorem.

Corollary 1. *Let $m \geq 2$, and write $d = m - 1$. The equation*

$$y' = y^m$$

admits a solution in $D[[x]]$ for every initial value $y(0) = c_0 \in D$ if and only if $\mathfrak{r}(d) = D$. In particular, the equation $y' = y^2$ has a solution in $D[[x]]$ for every initial value $y(0) = c_0 \in D$.

Proof. Here $a = b = 1$, so the nonlinear part of the theorem says that a solution exists exactly when

$$(c_0^d) \subseteq \mathfrak{r}(d).$$

If this holds for every $c_0 \in D$, then taking $c_0 = 1$ gives $D \subseteq \mathfrak{r}(d)$. Since $\mathfrak{r}(d) \subseteq D$, we obtain $\mathfrak{r}(d) = D$. The converse is immediate. When $m = 2$, we have $d = 1$ and by convention $\mathfrak{r}(1) = D$. $\square$

Corollary 2. *Over $D = \mathbb{Z}$, the equation*

$$y' = y^m$$

has a solution in $\mathbb{Z}[[x]]$ for every initial value $y(0) = c_0 \in \mathbb{Z}$ if and only if $m = 2$.

Proof. If $m = 1$, then the linear part of the theorem applies with $a = b = 1$, and since infinitely many rational primes are nonunits in $\mathbb{Z}$, only the initial value $c_0 = 0$ is possible.

Now assume $m \geq 2$. The preceding corollary shows that existence for every $c_0 \in \mathbb{Z}$ is equivalent to $\mathfrak{r}(m-1) = \mathbb{Z}$. Over $\mathbb{Z}$, one has

$$\mathfrak{r}(m-1) = \prod_{p|(m-1)} (p),$$

so $\mathfrak{r}(m-1) = \mathbb{Z}$ if and only if $m-1 = 1$, that is, $m = 2$. □

Corollary 3. *Let $m \geq 2$. Then the equation*

$$y' = y^m$$

has a nonzero solution in $D[[x]]$.

Proof. If $m = 2$, choose any nonzero $c_0 \in D$; then $(c_0) \subseteq D = \mathfrak{r}(1)$.

Now assume $m \geq 3$, and write $d = m-1$. The ideal $\mathfrak{r}(d)$ is nonzero, so it contains a nonzero element c_0 . Then $(c_0) \subseteq \mathfrak{r}(d)$, hence

$$(c_0^d) \subseteq \mathfrak{r}(d)^d \subseteq \mathfrak{r}(d).$$

The nonlinear part of the theorem therefore gives a solution in $D[[x]]$ with nonzero constant term c_0 . □

Corollary 4. *Let $m = 1$. Then the equation*

$$ay' = by$$

either has a solution in $D[[x]]$ for every initial value $c_0 \in D$, or has a solution only for $c_0 = 0$.

Proof. By the linear part of the theorem, $c_0 = 0$ always gives the zero solution. For $c_0 \neq 0$, existence is characterized by a condition depending only on a and b : either infinitely many rational primes are nonunits in D , in which case no nonzero initial value is possible, or only finitely many are, in which case existence is equivalent to $(b) \subseteq (a)\mathfrak{r}_1$, which again is independent of c_0 . □

7. Examples

The examples show how the same coefficient formulas behave as the arithmetic of the coefficient ring changes. In each example the theorem applies directly

because the rings under consideration are Dedekind domains; when they are principal, we translate the ideal criterion into ordinary divisibility.

7.1. Linear case $m = 1$.

If $D = \mathbb{Z}$, then infinitely many rational primes are nonunits, so the equation $ay' = by$ has a solution in $\mathbb{Z}[[x]]$ only for $c_0 = 0$.

If $D = \mathbb{Z}_{(2)} = \left\{ \frac{u}{v} \in \mathbb{Q} : u, v \in \mathbb{Z}, 2 \nmid v \right\}$, the localization of $\mathbb{Z}$ at (2) , then the only rational prime that is not a unit is 2, and $\mathfrak{r}_1 = (2)$. Since $\mathbb{Z}_{(2)}$ is a principal ideal domain, the criterion becomes

$$2a \mid b.$$

For example, if $a = 1$, $b = 2$, and $c_0 = 1$, then

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k \in \mathbb{Z}_{(2)}[[x]].$$

This series solves the Cauchy problem

$$y' = 2y, \quad y(0) = 1$$

in $\mathbb{Z}_{(2)}[[x]]$.

7.2. Quadratic case $m = 2$.

In the quadratic case, complete cancellation $C_k(1) = k!$ reduces the theorem to the simple condition

$$(bc_0) \subseteq (a),$$

or equivalently $a \mid bc_0$ in a principal ideal domain.

For instance, if $D = \mathbb{Z}$, $a = 2$, $b = 3$, and $c_0 = 4$, then $2 \mid 12$, so the Cauchy problem

$$2y' = 3y^2, \quad y(0) = 4,$$

has a solution in $\mathbb{Z}[[x]]$, namely

$$y(x) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} 6^k x^k \in \mathbb{Z}[[x]].$$

By contrast, if $a = 4$, $b = 1$, and $c_0 = 2$, then $4 \nmid 2$, so the Cauchy problem

$$4y' = y^2, \quad y(0) = 2,$$

has no solution in $\mathbb{Z}[[x]]$, even though the unique solution in $\mathbb{Q}[[x]]$ has coefficients

$$c_k = 2^{1-k}.$$

7.3. Higher-Order case $m \geq 3$.

To keep the higher-order discussion concrete, we now fix $m = 3$, so $d = m - 1 = 2$. This is the first nonlinear case in which the correction ideal is nontrivial, and it isolates the role of the rational prime 2.

Over $\mathbb{Z}$.

Here $\mathfrak{r}(2) = (2)$, so the criterion becomes $2a \mid bc_0^2$. For the Cauchy problem

$$y' = y^3, \quad y(0) = 1,$$

this condition fails because $2 \nmid 1$. Hence no solution exists in $\mathbb{Z}[[x]]$. The unique solution in $\mathbb{Q}[[x]]$ is

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{x^k}{2^k},$$

so the factor 2^k in the denominator is exactly the obstruction.

Over $\mathbb{Z}[i]$.

Here

$$\mathbb{Z}[i] = \{u + vi : u, v \in \mathbb{Z}\}$$

is the ring of Gaussian integers. It is a principal ideal domain, hence a Dedekind domain. Since

$$(2) = (1 + i)^2.$$

the case $d = 2$ again gives the principal correction ideal $\mathfrak{r}(2) = (2)$, so the criterion becomes $2a \mid bc_0^2$. Take

$$a = 1 + i, \quad b = 1 - i, \quad c_0 = 1 + i.$$

Then

$$bc_0^2 = (1 - i)(1 + i)^2 = 2(1 + i) = 2a,$$

so the Cauchy problem

$$(1 + i)y' = (1 - i)y^3, \quad y(0) = 1 + i,$$

has a solution in $\mathbb{Z}[i][[x]]$, namely

$$y(x) = (1 + i) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k.$$

Over $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right]$. Here

$$\mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] = \left\{ \frac{a}{2^n} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}.$$

This ring is a principal ideal domain, and 2 is a unit in it, so $\mathfrak{r}(2) = D$. Therefore the same Cauchy problem that failed over $\mathbb{Z}$,

$$y' = y^3, \quad y(0) = 1,$$

does have a solution in $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] [[x]]$, namely

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{x^k}{2^k} \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] [[x]].$$

Together these three exact examples show that in the higher-order case the same prime 2 may block descent, permit it, or disappear entirely, depending on the arithmetic of the coefficient ring.

7.4. A non-UFD example: $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Let

$$D = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{u + v\sqrt{-5} : u, v \in \mathbb{Z}\},$$

the ring of integers of $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$; see [7, Cor. 2 to Thm. 1]. Hence D is a Dedekind domain by [7, Thm. 14, Ch. 3], but it is not a unique factorization domain. Indeed, the classical nonunique factorization

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$$

already shows that factorization of elements behaves differently here; see [7, Ch. 1, Ex. 15].

Take $m = 2$, $a = 1 + \sqrt{-5}$, $b = 1 - \sqrt{-5}$, and $c_0 = 1 + \sqrt{-5}$. Since $\mathfrak{r}(1) = D$, the theorem says that the equation

$$(1 + \sqrt{-5})y' = (1 - \sqrt{-5})y^2, \quad y(0) = 1 + \sqrt{-5},$$

has a solution in $D[[x]]$ if and only if

$$(bc_0) \subseteq (a).$$

Here

$$bc_0 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5}) = 6,$$

so

$$(bc_0) = (6) \subseteq (1 + \sqrt{-5}) = (a).$$

Hence a solution exists in $D[[x]]$. In fact,

$$y(x) = (1 + \sqrt{-5}) \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \sqrt{-5})^k x^k \in D[[x]]$$

solves the displayed Cauchy problem.

Thus the theorem applies in the non-UFD Dedekind domain $D = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. The chosen data are built from the classical factorization

$$6 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}),$$

while the existence criterion is still expressed in terms of ideals.

Acknowledgement. This work was partially supported by the Akhiezer Foundation (Kharkiv).

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

REFERENCES

1. M. F. Atiyah, I. G. Macdonald. Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1969. 128 p. ISBN 978-0-201-40751-8.
2. H. Cartan. Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables. Editions Scientifiques Hermann, Paris; Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1963. 226 p.
3. S. L. Gefter, A. L. Piven'. Partial differential equations in module of copolynomials over a commutative ring. J. Math. Phys. Anal. Geom., – 2025, – 21, No. 1. – P. 56–83. <https://doi.org/10.15407/mag21.01.03>
4. S. L. Gefter, A. L. Piven'. Some class of nonlinear partial differential equations in the ring of copolynomials over a commutative ring. Front. Appl. Math. Stat., –2024, 10, Article 1466569. <https://doi.org/10.3389/fams.2024.1466569>
5. Gefter, S. L., Goncharuk, A. B. Linear differential equation with inhomogeneity in the form of a formal power series over a ring with Non-Archimedean valuation. Ukr. Math. J., – 2023. – **74**. – P.1668–1685. <https://doi.org/10.1007/s11253-023-02163-0>
6. A. Goncharuk. Cramer's rule for implicit linear differential equations over a non-Archimedean ring. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2022. – Vol. **95**. – P. 39–48. <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2022-95-04>
7. D. A. Marcus. Number fields. 2nd ed. Universitext. Springer, Cham, 2018. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-90233-3>
8. J. Neukirch. Algebraic number theory. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 322. Springer, Berlin, 1999. 574 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-03983-0>

Article history: Received: 6 April 2026. Final form: 10 May 2026.

Accepted: 15 May 2026. Published 31 May 2026.

How to cite this article:

R. Skurikhin, Formal power series solutions of the differential equation $ay' = by^m$ over Dedekind domains of characteristic zero, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 103, 2026, p. 69–89. <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2026-103-04>

Формальні степеневі ряди для диференціального рівняння $ay' = by^m$ над областями Дедекінда нульової характеристики

Роман Скуріхін

Кафедра фундаментальної математики

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

майдан Свободи, 4, Харків, 61022, Україна

У роботі досліджено задачу Коші $ay' = by^m$, $y(0) = c_0$, у кільці формальних степеневих рядів $D[[x]]$, де D — область Дедекінда нульової характеристики, $K = \text{Frac}(D)$ — її поле часток, $a, b, c_0 \in D$, $a, b \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$. Встановлюються точні умови, за яких єдиний формальний розв'язок $y \in K[[x]]$ із початковим значенням c_0 насправді має всі коефіцієнти в D , тобто належить $D[[x]]$. Для цього спершу в $K[[x]]$ виводиться рекурентне співвідношення для коефіцієнтів розв'язку і одержується явна формула для них. Це зводить задачу існування розв'язку в $D[[x]]$ до арифметичної задачі про цілість коефіцієнтів, яку природно формулювати мовою нормувань, пов'язаних з ненульовими простими ідеалами області D . Основна ідея полягає в тому, що для областей Дедекінда перешкода спуску з $K[[x]]$ до $D[[x]]$ визначається не звичайною подільністю на прості елементи, а порівнянням нормувань дробових ідеалів після локалізації за простими ідеалами.

У лінійному випадку $m = 1$ нульове початкове значення завжди дає нульовий розв'язок. Для $c_0 \neq 0$ у формулах для коефіцієнтів з'являються факторіальні знаменники, що створює глобальну перешкоду, якщо в D не є оборотними нескінченно багато раціональних простих чисел. Якщо ж таких простих лише скінченна кількість, то точний критерій існування для ненульового початкового значення має вигляд $(b) \subseteq (a)\mathfrak{r}_1$, де $\mathfrak{r}_1$ — явно побудований коригувальний ідеал, що залежить від простих ідеалів над відповідними раціональними простими. У нелінійному випадку $m \geq 2$, поклавши $d = m - 1$, дістаємо вираз для коефіцієнтів через добуток $C_k(d) = \prod_{i=0}^{k-1} (di + 1)$. Доведено, що прості ідеали над раціональними простими, які не ділять d , не створюють додаткових перешкод, крім базової умови $(bc_0^d) \subseteq (a)$, тоді як прості ідеали над простими, що ділять d , задають коригувальний ідеал $\mathfrak{r}(d)$. У результаті точний критерій існування набуває вигляду $(bc_0^d) \subseteq (a)\mathfrak{r}(d)$. Зокрема, для $m = 2$ маємо $\mathfrak{r}(1) = D$, і умова спрощується до $(bc_0) \subseteq (a)$. Наведено приклади для кілець $\mathbb{Z}$, локалізацій кільця $\mathbb{Z}$, кільця цілих гаусових чисел та дедекіндової області $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, яка не є факторіальним кільцем, що демонструють роботу одержаного критерію в різних арифметичних ситуаціях.

Ключові слова: формальні степеневі ряди; область Дедекінда; задача Коші; нормування за простими ідеалами; критерій цілості коефіцієнтів.

Конфлікт інтересів: Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

Історія статті: Одержано: 6 квітня 2026; останній варіант: 10 травня 2026;
прийнято до друку: 15 травня 2026. Оприлюднено 31 травня 2026.

М. В. Генералов

аспірант

кафедра фундаментальної математики

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

майдан Свободи, 4, Харків, 61022, Україна

mykola.heneralov@karazin.ua  <http://orcid.org/0009-0001-4855-6337>

О. Л. Півень

кандидат фіз.-мат. наук

доцент кафедри прикладної математики

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

майдан Свободи, 4, Харків, 61022, Україна

aleksei.piven@karazin.ua  <http://orcid.org/0000-0002-7977-7255>

Неявне лінійне різницеве рівняння першого порядку над скінченними комутативними кільцями з одиноцею

У статті досліджується неявне лінійне різницеве рівняння першого порядку $BX_{n+1} = AX_n + F_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ над скінченним комутативним кільцем R з одиницею, тобто рівняння з необоротним елементом B кільця R . На відміну від класичного (явного) лінійного різничевого рівняння, неявне лінійне різницеве рівняння над скінченним кільцем R може не мати розв'язків, а також може мати нескінченну кількість розв'язків. Оскільки будь-яке скінченне комутативне кільце з одиницею ізоморфне скінченній прямій сумі локальних комутативних кілець з одиницею, то рівняння розпадається на систему рівнянь над локальними скінченними комутативними кільцями з одиницею. Показано, що умова співпадіння з R ідеалу (A, B) , який породжено елементами $A, B \in R$, є необхідною і достатньою для існування скінченного числа розв'язків цього рівняння, підраховано кількість розв'язків в разі їх існування та надано формулу для загального розв'язку. Умова $(A, B) \neq R$ є необхідною і достатньою умовою існування нескінченного числа розв'язків відповідного однорідного рівняння $BX_{n+1} = AX_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Також встановлено, що у випадку $(A, B) \neq R$ умова $F_n \in (A, B)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ є необхідною для розв'язності неоднорідного неявного лінійного різничевого рівняння, але не є достатньою, як показують приклади. При додатковому обмеженні, що (A, B) є власним головним ідеалом кільця R , ця умова буде також достатньою умовою для існування розв'язку розглянутого неоднорідного рівняння, в цій ситуації рівняння має нескінченно багато розв'язків. За умови, що (A, B) є головним ідеалом, спочатку доводиться критерій існування розв'язку у випадку локального комутативного скінченного кільця з одиницею, а потім у випадку довільного скінченного комутативного кільця з одиницею. Як і в теорії Фредгольма, показано наступне: якщо відповідне однорідне рівняння має тільки тривіальний розв'язок, то досліджуване неоднорідне рівняння має

© Генералов М. В., Півень О. Л., 2026; CC BY 4.0 license

єдиний розв'язок. На конкретних прикладах продемонстровано роботу доведених теорем.

Ключові слова: неявне лінійне різницеве рівняння; скінченне кільце; локальне кільце, ідеал.

2020 Mathematics Subject Classification: 39A06; 11B37; 16P10.

1. Вступ

У зв'язку із багаточисленними застосуваннями у 80-хх та 90-хх роках ХХ століття виникла теорія неявних лінійних різницевих рівнянь в векторних просторах з необоротними операторними коефіцієнтами (див. наприклад [1, 2]). Ця теорія продовжує свій розвиток і у ХХІ-му столітті (див. наприклад [3, 4, 5]) паралельно з теорією неявних лінійних різницевих рівнянь над комутативними кільцями [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

Нехай $R \neq \{0\}$ – скінченне комутативне кільце з одиницею, $A, B \in R$ і $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовність елементів кільця R . В даній роботі досліджується неявне лінійне різницеве рівняння першого порядку над R :

$$BX_{n+1} = AX_n + F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (1)$$

Як і в [8, 9, 10], рівняння (1) називається *неявним*, якщо B є необоротним елементом кільця R , і *явним* в протилежному випадку. Неявні лінійні різницеві рівняння вигляду (1) над цілісними кільцями досліджувались в [8, 9], зокрема над кільцем цілих чисел – в [6, 10]. Неявне лінійне різницеве рівняння (1) над скінченим кільцем досліджувалось раніше лише у випадку кільця лишків $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ за модулем m в [11], і у випадку кільця $\mathbb{Z}_p[t]/(t^2)$ (p – просте число) у [12]. Дана робота є продовженням досліджень, які було започатковано в роботах [11, 12].

У розділі 2 наведено попередні відомості щодо розв'язності рівняння (1) над довільним комутативним кільцем з одиницею, не обов'язково скінченим. Оскільки скінченне кільце R ізоморфне скінченній прямій сумі скінчених локальних комутативних кілець з одиницею [13], то проблема існування та єдиності розв'язку рівняння (1) зводиться до проблеми розв'язності цього рівняння над локальним кільцем R (див. наслідок 1 з теореми 1). Проблемі класифікації локальних скінчених кілець присвячено багато робіт (див. наприклад [14, 15] і бібліографію в цих роботах). Цікаво зауважити (див. [16]), що кожний елемент локального скінченного комутативного кільця є оборотним або нільпотентним.

Основні результати даної роботи містяться у розділах 3 та 4. При дослідженні рівняння (1) суттєву роль грає ідеал (A, B) , який породжено коефіцієнтами цього рівняння (див. теореми 2–5). Так, умова $(A, B) = R$ є необхідною і достатньою для існування скінченного числа розв'язків рівняння (1) (див. теорему 3, де наведено також загальний розв'язок рівняння (1) в цій ситуації). Умова

$$F_n \in (A, B), \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad (2)$$

є необхідною умовою існування розв'язку рівняння (1) (третє твердження леми 1), але не є достатньою умовою (див. приклад 1). Якщо додатково ідеал (A, B) є головним ідеалом кільця R , то умова (2) є достатньою для існування розв'язку рівняння (1), більш того, в цьому випадку існує нескінченно багато розв'язків цього рівняння (див. теорему 5, де також описано загальний розв'язок рівняння (1) в цій ситуації). Умова $(A, B) \neq R$ є необхідною і достатньою умовою існування нескінченної кількості розв'язків відповідного до (1) однорідного рівняння (див. теорему 2). Відмітимо, що ідеал (A, B) буде головним у будь-якому кільці R головних ідеалів, зокрема, в кільцях $\mathbb{Z}_m$ та $\mathbb{Z}_p[t]/(t^2)$, над якими досліджувалось раніше рівняння (1) відповідно в [11] та [12]. Отже, якщо ідеал (A, B) є власним ідеалом кільця R і не є головним, то при виконанні умови (2) неоднорідне рівняння (1) або не має розв'язків, або має нескінченно багато розв'язків (див. теореми 3–5 і зауваження 1).

В розділі 5 даної роботи наведено приклади, які ілюструють роботу теорем розділів 3 та 4.

2. Попередні твердження

Протягом цього розділу наводяться попередні відомості про розв'язність рівняння (1) над ненульовим комутативним кільцем R з одиницею (необов'язково скінченним).

Через $R^\times$ позначимо множину оборотних елементів кільця R . Для нільпотентного елемента $u \in R$ через $\text{ind } u$ позначатимемо його індекс нільпотентності, тобто таке найменше число $k \in \mathbb{N}$, що $B^k = 0$. Через $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ позначаємо ідеал кільця R , породжений елементами $a_1, \dots, a_k \in R$.

Наступна лема дає загальний розв'язок явного рівняння (1) і неявного рівняння (1) з нільпотентним B та $A \in R^\times$. Також наводяться достатні умови відсутності розв'язків цього рівняння.

Лема 1. *Справедливі наступні твердження.*

1. Якщо $B \in R^\times$, то загальний розв'язок рівняння (1) визначено рівністю

$$X_n = B^{-n} A^n X_0 + \sum_{s=0}^{n-1} B^{-s-1} A^s F_{n-s-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

де X_0 — довільний елемент кільця R .

2. Якщо B — нільпотент і $A \in R^\times$, то існує єдиний розв'язок рівняння (1). Цей розв'язок визначено рівністю

$$X_n = - \sum_{s=0}^{\text{ind } B - 1} A^{-s-1} B^s F_{n+s}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4)$$

3. Якщо $F_n \notin (A, B)$ при деякому $n \in \mathbb{Z}_+$, то рівняння (1) не має розв'язків.

Доведення. Перше твердження леми випливає з відомої формули загального розв'язку явного рівняння (1) (див. наприклад [17, с. 4, формула (1.2.6)]).

Доведемо друге твердження леми. Нехай B є нільпотентним елементом кільця R , $\nu = \text{ind } B$, а $A \in R^\times$. Рівняння (1) можна переписати у вигляді

$$X_n = BA^{-1}X_{n+1} - A^{-1}F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Скориставшись цією рівністю ν разів, з урахуванням рівності $B^\nu = 0$ отримаємо:

$$X_n = - \sum_{s=0}^{\nu-1} A^{-s-1} B^s F_{n+s}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Перевіримо, що ця послідовність є розв'язком рівняння (1):

$$BX_{n+1} - AX_n = -B \sum_{s=0}^{\nu-1} A^{-s-1} B^s F_{n+1+s} + A \sum_{s=0}^{\nu} A^{-s-1} B^s F_{n+s} = F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Це доводить друге твердження леми.

Третє твердження леми випливає з того, що у разі існування розв'язку $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ рівняння (1) $F_n = BX_{n+1} - AX_n \in (A, B)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. $\square$

Нехай R ізоморфне прямій сумі комутативних кілець $\hat{R}_1, \dots, \hat{R}_r$ з одиницею (цей факт буде записуватись наступним чином: $R \cong \hat{R}_1 \oplus \dots \oplus \hat{R}_r$). Ми не виключаємо випадок, коли $\hat{R}_i = \{0\}$ для деяких значень $i \in \{1, \dots, r\}$: в цьому і тільки в цьому випадку вважаємо, що одиниця кільця $\hat{R}_i$ співпадає з нулем цього кільця. Позначимо $\hat{\psi}: \hat{R}_1 \oplus \dots \oplus \hat{R}_r \rightarrow R$ — відповідний канонічний ізоморфізм, а $\hat{\pi}_k: R \rightarrow \hat{R}_k$ — відповідні канонічні проекції. Також позначимо $\hat{A}_k = \hat{\pi}_k(A)$, $\hat{B}_k = \hat{\pi}_k(B)$, $\hat{F}_{k,n} = \hat{\pi}_k(F_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $k = 1, \dots, r$.

Якщо $\hat{T}_k \in \hat{R}_k$, $k = 1, \dots, r$, то з означення $\hat{\psi}$ випливає, що

$$\hat{\pi}_k(\hat{\psi}(\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_r)) = \hat{T}_k, \quad k = 1, \dots, r. \quad (5)$$

Також, $(\hat{\pi}_1)^{-1}(\hat{T}_1) \cap \dots \cap (\hat{\pi}_r)^{-1}(\hat{T}_r)$ є одноелементною множиною, причому $\hat{\psi}(\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_r)$ є елементом цієї множини. Це означає, що

$$\{\hat{\psi}(\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_r)\} = \bigcap_{k=1}^r (\hat{\pi}_k)^{-1}(\hat{T}_k). \quad (6)$$

Наступна теорема показує, що рівняння (1) еквівалентне системі рівнянь

$$\hat{B}_k \hat{X}_{k,n+1} = \hat{A}_k \hat{X}_{k,n} + \hat{F}_{k,n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (7)$$

де при кожному $k = 1, \dots, r$ відповідне рівняння розглядається над кільцем $\hat{R}_k$ відносно послідовності $\{\hat{X}_{k,n}\}_{n=0}^\infty$.

Теорема 1. *Послідовність*

$$X_n = \widehat{\psi}(\widehat{X}_{1,n}, \dots, \widehat{X}_{r,n}), \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad (8)$$

є розв'язком рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли для кожного $k = 1, \dots, r$ послідовність $\{\widehat{X}_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ є розв'язком відповідного рівняння (7). При цьому $\widehat{\pi}_k(X_n) = \widehat{X}_{k,n}$, $k = 1, \dots, r$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Доведення. З рівностей (8) і (5) випливають рівності $\widehat{\pi}_k(X_n) = \widehat{X}_{k,n}$, $k = 1, \dots, r$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Оскільки $\widehat{\pi}_k$ ($k = 1, \dots, r$) є гомоморфізмами [18, с. 243, теорема 7], то

$$\widehat{\pi}_k(BX_{n+1} - AX_n - F_n) = \widehat{B}_k \widehat{X}_{k,n+1} - \widehat{A}_k \widehat{X}_{k,n} - \widehat{F}_{k,n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (9)$$

За рівністю (6) отримуємо:

$$BX_{n+1} - AX_n - F_n = \widehat{\psi}(\widehat{B}_1 \widehat{X}_{1,n+1} - \widehat{A}_1 \widehat{X}_{1,n} - \widehat{F}_{1,n}, \dots, \widehat{B}_r \widehat{X}_{r,n+1} - \widehat{A}_r \widehat{X}_{r,n} - \widehat{F}_{r,n}), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Зазначимо, що

$$\widehat{\pi}_k(0) = 0, \quad k = 1, \dots, r. \quad (10)$$

За рівностями (9) і (10) маємо, що рівність (1) вірна тоді і тільки тоді, коли є вірною рівність (7) для всіх $k = 1, \dots, r$. Це завершує доведення теореми. $\square$

3. Загальні критерії існування розв'язку рівняння

Уздовж цього розділу R є ненульовим скінченним комутативним кільцем з одиницею.

Анулятором елемента $u \in R$ називається множина

$$\text{Ann } u = \{v \in R \mid vu = 0\}$$

[18, с. 249, вправа 22(a)].

За теоремою VI.2 [13, с. 95], кільце R ізоморфне прямій сумі $\bigoplus_{i=1}^r R_i$ локальних скінченних комутативних кілець $R_i \neq \{0\}$ з одиницею. Позначимо через $\pi_i: R \rightarrow R_i$ відповідні канонічні проекції, $i = 1, \dots, r$. Визначимо множини I_1, I_2, I_3 наступним чином:

- I_1 — множина всіх $i \in \{1, \dots, r\}$ таких, що $\pi_i(B) \in R_i^\times$;
- I_2 — множина всіх $i \in \{1, \dots, r\} \setminus I_1$ таких, що $\pi_i(A) \in R_i^\times$;
- $I_3 = \{1, \dots, r\} \setminus (I_1 \cup I_2)$.

Тоді $\{1, \dots, r\} = I_1 \cup I_2 \cup I_3$ і відповідно $R \cong R^{(1)} \oplus R^{(2)} \oplus R^{(3)}$, де $R^{(j)} = \bigoplus_{i \in I_j} R_i$,

при цьому будемо вважати $R^{(j)} = \{0\}$, якщо $I_j = \emptyset$, $j = 1, 2, 3$. Позначимо через $\pi^{(j)}$ канонічну проекцію з R у $R^{(j)}$ і

$$B^{(j)} = \pi^{(j)}(B), \quad A^{(j)} = \pi^{(j)}(A), \quad F_n^{(j)} = \pi^{(j)}(F_n), \quad j = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Наступна лема встановлює властивості деяких елементів $A^{(j)}, B^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$.

Лема 2.

1. $B^{(2)}$ — нільпотент кільця $R^{(2)}$, а $B^{(3)}, A^{(3)}$ — нільпотенти кільця $R^{(3)}$.
2. Якщо $R^{(1)} \neq \{0\}$, то $B^{(1)}$ — оборотний елемент кільця $R^{(1)}$. Якщо $R^{(2)} \neq \{0\}$, то $A^{(2)}$ — оборотний елемент кільця $R^{(2)}$.

Доведення. За означенням множини I_2 , для кожного $i \in I_2$ елемент $\pi_i(B)$ не є оборотним у кільці R_i . Оскільки кільце R_i локальне, то $\pi_i(B)$ нільпотентний елемент [16, лема 2.1, теорема 2.3], а тому елемент $B^{(2)}$ також нільпотентний. Аналогічно, з означення I_3 випливають необоротності елементів $\pi_i(A), \pi_i(B)$ для всіх $i \in I_3$ і отже $A^{(3)}, B^{(3)}$ є нільпотентами кільця $R^{(3)}$.

Нехай $R^{(1)} \neq \{0\}$, тобто $I_1 \neq \emptyset$. Тоді, за означенням I_1 , для кожного $i \in I_1$ елемент $\pi_i(B)$ є оборотним. Отже $B^{(1)}$ є оборотним елементом кільця $R^{(1)}$. Аналогічно доводиться, що якщо $R^{(2)} \neq \{0\}$, то $A^{(2)}$ є оборотним елементом кільця $R^{(2)}$. Лему доведено повністю. $\square$

Лема 3. Умови $(A, B) = R$ і $R^{(3)} = \{0\}$ рівносильні.

Доведення. Зауважимо, що умову $(A, B) = R$ виконано тоді і тільки тоді, коли $\pi^{(j)}((A, B)) = \pi^{(j)}(R) = R^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$. Оскільки $\pi^{(j)}$ — сюр'єктивний гомоморфізм, то

$$\begin{aligned} \pi^{(j)}((A, B)) &= \left\{ \pi^{(j)}(\alpha A + \beta B) \mid \alpha, \beta \in R \right\} = \\ &= \left\{ \pi^{(j)}(\alpha) A^{(j)} + \pi^{(j)}(\beta) B^{(j)} \mid \alpha, \beta \in R \right\} = (A^{(j)}, B^{(j)}), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Тому умову $(A, B) = R$ виконано тоді і тільки тоді, коли

$$(A^{(j)}, B^{(j)}) = R^{(j)}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (12)$$

Тепер покажемо, що умова (12) виконується завжди при $j = 1, 2$.

Якщо $R^{(1)} = \{0\}$, то $A^{(1)} = B^{(1)} = 0$ і рівність (12) при $j = 1$ є очевидною. Якщо $R^{(1)} \neq \{0\}$, то, за лемою 2, $B^{(1)}$ є оборотним елементом кільця $R^{(1)}$, звідки випливає рівність (12) при $j = 1$.

Аналогічно при $j = 2$: якщо $R^{(2)} = \{0\}$, то рівність (12) є очевидною. Якщо $R^{(2)} \neq \{0\}$, то, за лемою 2, $A^{(2)}$ є оборотним елементом кільця $R^{(2)}$, і отже справджується рівність (12) при $j = 2$.

Таким чином, умова (12) рівносильна умові

$$(A^{(3)}, B^{(3)}) = R^{(3)}. \quad (13)$$

Тепер покажемо, що умова (13) рівносильна рівності $R^{(3)} = \{0\}$. Якщо $R^{(3)} = \{0\}$, то $(A^{(3)}, B^{(3)}) = \{0\}$ і тому рівність (13) виконується. Тепер, навпаки, нехай виконано (13) і $R^{(3)} \neq \{0\}$. Тоді, за лемою 2, елементи $A^{(3)}$ і $B^{(3)}$ є нільпотентами кільця $R^{(3)}$, а тому $1 \in R^{(3)}$ не може бути їх лінійною комбінацією. Отже, $(A^{(3)}, B^{(3)}) \neq R^{(3)}$, що суперечить (13). Це завершує доведення леми. $\square$

Позначимо через ψ ізоморфізм кілець $R^{(1)} \oplus R^{(2)} \oplus R^{(3)}$ і R .

Наступний наслідок з теореми 1 показує, що рівняння (1) еквівалентне системі рівнянь

$$B^{(j)} X_{n+1}^{(j)} = A^{(j)} X_n^{(j)} + F_n^{(j)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (14)$$

де при кожному $j = 1, 2, 3$ відповідне рівняння розглядається над кільцем $R^{(j)}$ відносно послідовності $\{X_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$.

Наслідок 1. *Послідовність*

$$X_n = \psi(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, X_n^{(3)}), \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

є розв'язком рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли для кожного $j = 1, 2, 3$ послідовність $\{X_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$ є розв'язком відповідного рівняння (14). При цьому $\pi^{(j)}(X_n) = X_n^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Через $\text{card } R$ позначатимемо кількість елементів кільця R . Наступна теорема встановлює критерій існування скінченного числа розв'язків однорідного рівняння

$$BX_{n+1} = AX_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad (15)$$

над кільцем R .

Теорема 2. *Однорідне рівняння (15) має скінченне число розв'язків тоді і тільки тоді, коли $(A, B) = R$. При цьому кількість розв'язків цього рівняння дорівнює $\text{card } R^{(1)}$.*

Доведення. Розглянемо рівняння (14) з $F_n^{(j)} = 0$, $j = 1, 2, 3$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Достатність. Нехай $(A, B) = R$, тоді, за лемою 3, $R^{(3)} = \{0\}$. Отже, єдина послідовність у кільці $R^{(3)}$ має вигляд $X_n^{(3)} = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), ця послідовність і є розв'язком рівняння (14) при $j = 3$.

Якщо $R^{(2)} \neq \{0\}$, то, за лемою 2, при $j = 2$ елемент $B^{(2)}$ є нільпотентним, а $A^{(2)}$ — оборотним. Отже, за другим твердженням леми 1, при $j = 2$ існує лише

тривіальний розв'язок рівняння (14). Якщо $R^{(2)} = \{0\}$, то єдина послідовність $X_n^{(2)} = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) у кільці $R^{(2)}$ і є розв'язком рівняння (14) при $j = 2$. Таким чином, рівняння (14) при $j = 2$ має лише тривіальний розв'язок.

Якщо $R^{(1)} = \{0\}$, то єдина послідовність $X_n^{(1)} = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) у кільці $R^{(1)}$ є розв'язком рівняння (14) при $j = 1$. Якщо $R^{(1)} \neq \{0\}$, то, за лемою 2, елемент $B^{(1)}$ є оборотним. Отже, за першим твердженням леми 1, загальний розв'язок рівняння (14) при $j = 1$ має вигляд $X_n^{(1)} = (B^{(1)})^{-n} (A^{(1)})^n X_0^{(1)}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де $X_0^{(1)}$ — довільний елемент кільця $R^{(1)}$. Таким чином, кількість розв'язків рівняння (14) при $j = 1$ дорівнює $\text{card } R^{(1)}$.

Враховуючи наслідок 1, отримуємо, що при $(A, B) = R$ кількість розв'язків рівняння (15) дорівнює $\text{card } R^{(1)}$. Достатність доведено.

Необхідність. Нехай $(A, B) \neq R$, тоді, за лемою 3, $R^{(3)} \neq \{0\}$. За лемою 2, елементи $A^{(3)}, B^{(3)}$ є нільпотентними. Отже, за [16, лема 2.2], існує елемент $u \neq 0$ кільця $R^{(3)}$ такий, що $u \in \text{Ann } A^{(3)} \cap \text{Ann } B^{(3)}$. Тоді послідовність $X_n^{(3)} = u\beta_n$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ є довільною послідовністю нулів та одиниць, є розв'язком рівняння (14) при $j = 3$. Справді,

$$B^{(3)}X_{n+1}^{(3)} - A^{(3)}X_n^{(3)} = (uB^{(3)})\beta_{n+1} - (uA^{(3)})\beta_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Таким чином отримуємо нескінченно багато розв'язків рівняння (14) при $j = 3$. Оскільки при $j = 1, 2$ рівняння (14) має принаймні тривіальний розв'язок, то, за наслідком 1, рівняння (15) має нескінченно багато розв'язків. Теорему доведено повністю. $\square$

Наступний наслідок є критерієм єдиності розв'язку однорідного рівняння (15).

Наслідок 2. *Однорідне рівняння (15) має тільки тривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли B — нільпотентний елемент кільця R , а $A \in R^\times$.*

Доведення. Достатність випливає з твердження 2 леми 1.

Необхідність. Нехай рівняння (15) має тільки тривіальний розв'язок. За теоремою 2, $(A, B) = R$ і $\text{card } R^{(1)} = 1$. Умова $\text{card } R^{(1)} = 1$ рівносильна тому, що $R^{(1)} = \{0\}$. За лемою 3, $R^{(3)} = \{0\}$. Отже $R^{(2)} \cong R$ і тому $R^{(2)} \neq \{0\}$. За лемою 2, $B^{(2)}$ — нільпотентний елемент кільця $R^{(2)}$, а $A^{(2)}$ — оборотний елемент цього кільця. Враховуючи, що $R^{(2)} \cong R$, маємо, що B — нільпотентний елемент кільця R , а $A \in R^\times$. $\square$

Наступний наслідок є деяким аналогом однієї з теорем Фредгольма.

Наслідок 3. *Якщо однорідне рівняння (15) має тільки тривіальний розв'язок, то відповідне неоднорідне рівняння (1) має єдиний розв'язок для будь-якої послідовності $\{F_n\}_{n=0}^\infty$. Цей розв'язок визначається формулою (4).*

Доведення. За наслідком 2, якщо однорідне рівняння (15) має тільки тривіальний розв'язок, то $A \in R^\times$ і B — нільпотентний елемент кільця R . Тоді,

за лемою 1, рівняння (1) має єдиний розв'язок, який визначається формулою (4). $\square$

Наступна теорема встановлює необхідну і достатню умову існування скінченного числа розв'язків неоднорідного рівняння (1).

Теорема 3. *Рівняння (1) має скінченне число розв'язків тоді і тільки тоді, коли $(A, B) = R$. При цьому кількість розв'язків рівняння (1) дорівнює $\text{card } R^{(1)}$. Крім того:*

1. якщо $B \in R^\times$, то загальний розв'язок рівняння (1) визначається формулою (3), де X_0 — довільний елемент кільця R ;
2. якщо $A \in R^\times$ і B — нільпотентний елемент кільця R , то єдиний розв'язок рівняння (1) визначається формулою (4);
3. якщо $R^{(1)} \neq \{0\}$ і $R^{(2)} \neq \{0\}$, то загальний розв'язок рівняння (1) визначається формулою $X_n = \psi(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, 0)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де

$$X_n^{(1)} = \left(B^{(1)}\right)^{-n} \left(A^{(1)}\right)^n X_0^{(1)} + \sum_{s=0}^{n-1} \left(B^{(1)}\right)^{-s-1} \left(A^{(1)}\right)^s F_{n-s-1}^{(1)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (16)$$

$$X_n^{(2)} = \sum_{s=0}^{\text{ind } B^{(2)} - 1} \left(A^{(2)}\right)^{-s-1} \left(B^{(2)}\right)^s F_{n+s}^{(2)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (17)$$

а $X_0^{(1)}$ є довільним елементом кільця $R^{(1)}$.

Доведення. Достатність. Нехай $(A, B) = R$.

Якщо $B \in R^\times$, то, за лемою 1, загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд (3), де X_0 — довільний елемент кільця R . Отже кількість розв'язків рівняння (1) у цьому випадку дорівнює $\text{card } R$. З того, що $B \in R^\times$, випливає, що $\pi_i(B) \in R_i^\times$ при всіх $i \in \{1, \dots, r\}$, тому $R^{(1)} \cong R$, а отже кількість розв'язків рівняння (1) у цьому випадку дорівнює $\text{card } R^{(1)}$, що доводить твердження 1 теореми.

Якщо $A \in R^\times$ і B — нільпотентний елемент кільця R , то, за лемою 1, розв'язок рівняння (1) визначається єдиним чином формулою (4). Оскільки B — нільпотентний елемент кільця R , то $R^{(1)} = \{0\}$, і тоді $\text{card } R^{(1)} = 1$. Це завершує доведення твердження 2 теореми.

Тепер доведемо третє твердження теореми.

Оскільки $R^{(1)} \neq \{0\}$ і $R^{(2)} \neq \{0\}$, то, за лемою 2, $B^{(1)}$ є оборотним елементом кільця $R^{(1)}$, $B^{(2)}$ є нільпотентним елементом кільця $R^{(2)}$, $A^{(2)}$ є оборотним елементом кільця $R^{(2)}$. Отже, за лемою 1, розв'язки рівнянь (14) при $j = 1$ і при $j = 2$ визначаються формулами (16) і (17) відповідно, причому кількість розв'язків рівняння (14) при $j = 1$ дорівнює $\text{card } R^{(1)}$, а рівняння (14) при $j = 2$ має єдиний розв'язок. Оскільки $(A, B) = R$,

то, за лемою 3, $R^{(3)} = \{0\}$, а тому єдина послідовність у $R^{(3)}$ має вигляд $X_n^{(3)} = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Ця послідовність і є розв'язком рівняння (14) при $j = 3$. За наслідком 1, маємо, що загальний розв'язок рівняння (1) визначається рівністю $X_n = \psi(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, 0)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де послідовності $\{X_n^{(j)}\}_{n=0}^\infty$, $j = 1, 2$, визначаються формулами (16), (17) відповідно. Кількість розв'язків рівняння (1), відповідно, дорівнює $\text{card } R^{(1)}$. Це завершує доведення достатності теореми.

Необхідність. Нехай рівняння (1) має скінченне число розв'язків. Припустимо супротивне, що $(A, B) \neq R$. Зафіксуємо деякий розв'язок $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ рівняння (1). Тоді формула

$$\tilde{X}_n = X_n + \alpha_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (18)$$

де $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ — загальний розв'язок однорідного рівняння (15), також задає розв'язок рівняння (1). Оскільки, за теоремою 2, існує нескінченно багато розв'язків рівняння (15), то формула (18) визначає нескінченно багато розв'язків рівняння (1). Отримали протиріччя з припущенням скінченності числа розв'язків рівняння (1). Теорему доведено повністю. $\square$

З теореми 3 випливає наступний критерій існування та єдиності розв'язку рівняння (1).

Наслідок 4. Рівняння (1) має єдиний розв'язок для будь-якої послідовності $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ тоді і тільки тоді, коли $A \in R^\times$, а B є нільпотентним елементом кільця R . Цей розв'язок визначається формулою (4).

Також із теореми 3 випливають наступні наслідки.

Наслідок 5. Рівняння (1) має скінченне число розв'язків для будь-якої послідовності $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ тоді і тільки тоді, коли $(A, B) = R$.

Наслідок 6. Якщо $A \in R^\times$, то однорідне рівняння (15) має $\text{card } R^{(1)}$ розв'язків. При цьому загальний розв'язок цього рівняння визначається формулою $X_n = \psi(X_n^{(1)}, 0, 0)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де

$$X_n^{(1)} = \left(B^{(1)}\right)^{-n} \left(A^{(1)}\right)^n X_0^{(1)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

а $X_0^{(1)}$ є довільним елементом кільця $R^{(1)}$.

Зауваження 1. Нехай $(A, B) \neq R$. Тоді множина розв'язків однорідного рівняння (15) має потужність континууму (див. доведення необхідності твердження теореми 2). Тому, за теоремою 3, множина розв'язків неоднорідного рівняння (1) або порожня, або також має потужність континууму. Зокрема, множина розв'язків цього рівняння не може бути зліченною.

4. Випадок, коли коефіцієнти рівняння породжують головний ідеал

В цьому розділі, якщо не оговорено інше, $R \neq \{0\}$ є скінченним комутативним кільцем з одиницею і існує елемент D кільця R такий, що $(A, B) = (D)$, де A, B — коефіцієнти рівняння (1).

Якщо $F_n \in (D)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$, то зафіксуємо деякі елементи A', B', F'_n ($n \in \mathbb{Z}_+$) кільця R так, що

$$A = DA', \quad B = DB', \quad F_n = DF'_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (19)$$

Лема 4. *Нехай R — локальне кільце. Якщо $D \neq 0$, то $(A', B') = R$, тобто хоча б один з елементів A', B' є оборотним. Більш того, існує елемент $\gamma \in R$ такий, що $A = \gamma B$ у випадку $B' \in R^\times$, $B = \gamma A$ у випадку $A' \in R^\times$.*

Доведення. Запишемо

$$(D) = (A, B) = \{\alpha A + \beta B \mid \alpha, \beta \in R\} = \{\alpha DA' + \beta DB' \mid \alpha, \beta \in R\}.$$

Припустимо, що серед A', B' немає оборотного елемента. Тоді, оскільки R — локальне кільце, то A', B' — нільпотенти [16, лема 2.1, теорема 2.3] і сума нільпотентів є також нільпотентом [18, с. 250, вправа 29]. Тому для деяких $\alpha, \beta \in R$ справедливе наступне зображення елемента D :

$$D = \alpha DA' + \beta DB' = D(\alpha A' + \beta B') = D j_0,$$

де j_0 — деякий нільпотентний елемент кільця R . Тому $D = D j_0^m$ для довільного натурального m , зокрема $D = D j_0^{\text{ind } j_0} = 0$. Це суперечить умові $D \neq 0$, отже припущення хибне і серед A', B' є оборотний елемент.

Тепер нехай $A' \in R^\times$. Тоді, за (19), $B = B'D = B'(A')^{-1}A = \gamma A$, де $\gamma = B'(A')^{-1}$. Аналогічно у випадку $B' \in R^\times$ доводиться рівність $A = \gamma B$ для деякого $\gamma \in R$. Лему доведено. $\square$

Зауваження 2. Якщо $D = 0$, то $A = B = 0$ і будемо вважати в (19) $A' = F'_n = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) і $B' = 1$ у кільці R .

Наступна теорема встановлює критерії існування скінченного і нескінченного числа розв'язків рівняння (1) над локальним кільцем R .

Теорема 4. *Нехай R — локальне кільце. Справедливі наступні твердження.*

1. Рівняння (1) має скінченну кількість розв'язків тоді і тільки тоді, коли $D \in R^\times$. При цьому рівняння (1) має

$$N = \begin{cases} \text{card } R, & B \in R^\times, \\ 1, & B \notin R^\times, A \in R^\times \end{cases}$$

розв'язків і загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$X_n = \begin{cases} B^{-n} A^n X_0 + \sum_{s=0}^{n-1} B^{-s-1} A^s F_{n-s-1}, & B \in R^\times, \\ - \sum_{s=0}^{\text{ind } B-1} A^{-s-1} B^s F_{n+s}, & B \notin R^\times, A \in R^\times, \end{cases} \quad (20)$$

де X_0 — довільний елемент кільця R у випадку $B \in R^\times$.

2. Рівняння (1) має нескінченно багато розв'язків тоді і тільки тоді, коли $D \notin R^\times$ і $F_n \in (D)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. При цьому загальний розв'язок цього рівняння визначено рівністю

$$X_n = X'_n + \alpha_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (21)$$

в якій $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів анулятора $\text{Ann } D$, а послідовність $\{X'_n\}_{n=0}^\infty$ має вигляд

$$X'_n = \begin{cases} (B')^{-n} (A')^n X'_0 + \sum_{s=0}^{n-1} (B')^{-s-1} (A')^s F'_{n-s-1}, & B' \in R^\times, \\ - \sum_{s=0}^{\text{ind } B'-1} (A')^{-s-1} (B')^s F'_{n+s}, & B' \notin R^\times, A' \in R^\times, \end{cases} \quad (22)$$

де X'_0 є довільним елементом кільця R у випадку $B' \in R^\times$.

3. Рівняння (1) не має розв'язків тоді і тільки тоді, коли $F_n \notin (D)$ при деякому n .

Доведення. Доведемо достатність першого твердження теореми. Нехай $D \in R^\times$. Тоді $(D) = R$ і отже виконано рівність $(A, B) = (D) = R$. Тому, за теоремою 3, рівняння (1) має скінченне число розв'язків. Вигляд (20) загального розв'язку рівняння (1) впливає з тверджень 1, 2 теореми 3.

При цьому, якщо $B \in R^\times$, то рівняння (1) є явним і, за першим твердженням леми 1, загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд (3), де X_0 — довільний елемент кільця R . Отже, у цьому випадку кількість розв'язків рівняння (1) дорівнює $\text{card } R$. Якщо ж B — нільпотентний елемент кільця R і $A \in R^\times$, то, за другим твердженням теореми 3, рівняння (1) має єдиний розв'язок.

Достатність твердження 1 доведено.

Доведемо достатність другого твердження теореми. Нехай $D \notin R^\times$ і $F_n \in (D)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. Рівняння (1) з урахуванням (19) приймає вигляд

$$D(B'X_{n+1} - A'X_n - F'_n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

що рівносильно рівнянню

$$B'X_{n+1} = A'X_n + (F'_n + \beta_n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (23)$$

де $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів анулятора $\text{Ann } D$. Оскільки, за лемою 4 і зауваженням 2, $(A', B') = R$, то можна застосувати теорему 3 до рівняння (23). З цієї теореми випливає, що загальний розв'язок рівняння (23) визначено формулою

$$X_n = \begin{cases} (B')^{-n}(A')^n X_0 + \sum_{s=0}^{n-1} (B')^{-s-1}(A')^s (F'_{n-s-1} + \beta_{n-s-1}), & B' \in R^\times, \\ - \sum_{s=0}^{\text{ind } B' - 1} (A')^{-s-1}(B')^s (F'_{n+s} + \beta_{n+s}), & B' \notin R^\times, A' \in R^\times, \end{cases}$$

де X_0 — довільний елемент кільця R , а $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів анулятора $\text{Ann } D$.

Останню рівність можна переписати у вигляді (21), де $\{X'_n\}_{n=0}^\infty$ визначено формулою (22), $X'_0 = X_0$ — довільний елемент кільця R , а послідовність $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ визначено формулою

$$\alpha_n = \begin{cases} 0, & n = 0, B' \in R^\times, \\ \sum_{s=0}^{n-1} (B')^{-s-1}(A')^s \beta_{n-s-1}, & n \in \mathbb{N}, B' \in R^\times, \\ - \sum_{s=0}^{\text{ind } B' - 1} (A')^{-s-1}(B')^s \beta_{n+s}, & n \in \mathbb{Z}_+, B' \notin R^\times, A' \in R^\times. \end{cases}$$

Оскільки $\beta_n \in \text{Ann } D$ і $\text{Ann } D$ є ідеалом кільця R [18, с. 249, вправа 22], то $\alpha_n \in \text{Ann } D$ при кожному $n \in \mathbb{Z}_+$. Таким чином, кожен розв'язок рівняння (1) має вигляд (21), де $\{X'_n\}_{n=0}^\infty$ визначено формулою (22), а $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів анулятора $\text{Ann } D$.

Тепер покажемо, що для довільної послідовності $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ елементів анулятора $\text{Ann } D$ і послідовності $\{X'_n\}_{n=0}^\infty$, визначеної формулою (22), будь-яка послідовність вигляду (21) є розв'язком рівняння (1). Підставляючи $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ в рівняння (1) і враховуючи, що $\{X'_n\}_{n=0}^\infty$ є розв'язком рівняння (23) при $\beta_n = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), маємо

$$\begin{aligned} BX_{n+1} - AX_n - F_n &= DB'X'_{n+1} + DB'\alpha_{n+1} - DA'X'_n - DA'\alpha_n - DF'_n = \\ &= D(B'X'_{n+1} - A'X'_n - F'_n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

тобто $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ є розв'язком рівняння (1). Це доводить формулу загального розв'язку у випадку другого твердження теореми.

Оскільки R — локальне кільце і $D \notin R^\times$, то D — нільпотент [16, лема 2.1, теорема 2.3]. Покладемо

$$a = \begin{cases} D^{\text{ind } D - 1}, & D \neq 0, \\ 1 \in R, & D = 0. \end{cases}$$

Тоді $a \neq 0$ і $a \in \text{Ann } D$. Тепер, якщо зафіксувати будь-яку послідовність $\{X'_n\}_{n=0}^\infty$ і обрати $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ як довільну послідовність з 0 і a , то отримаємо нескінченно багато розв'язків рівняння (1).

Достатність третього твердження теореми впливає з третього твердження леми 1.

Ми довели достатність кожного з тверджень теореми. Оскільки достатні умови всіх трьох тверджень теореми вичерпують всі можливості і попарно несумісні, то доведення критеріїв завершено. $\square$

Зауваження 3. Формула (20) є частковим випадком формули (21), оскільки якщо $D \in R^\times$, то $\alpha_n = 0$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і відповідно $X_n = X'_n$ ($n \in \mathbb{Z}_+$).

Зауваження 4. Нехай $R \neq \{0\}$ є локальним скінченним кільцем головних ідеалів, $A, B \neq 0$ і j — нільпотентний елемент кільця R , що породжує максимальний ідеал цього кільця. На кільці R уведемо відношення еквівалентності наступним чином: $u \sim v$ ($u, v \in R$), якщо $u = vs$ для деякого $s \in R^\times$. Для будь-якого $u \in R \setminus \{0\}$ існує єдине ціле невід'ємне $\kappa(u)$ таке, що $u \sim j^{\kappa(u)}$ [19, с. 245]. Позначимо $m = \min\{\kappa(A), \kappa(B)\}$. Оскільки R — кільце головних ідеалів, то існує такий елемент $D \in R$, що $(A, B) = (D)$. Пояснимо, що $D \sim j^m$. Справді, нехай $A = j^{\kappa(A)}\tilde{A}$, $B = j^{\kappa(B)}\tilde{B}$, де $\tilde{A}, \tilde{B} \in R^\times$. Тоді

$$(D) = (A, B) = (j^{\kappa(A)}\tilde{A}, j^{\kappa(B)}\tilde{B}) = j^m(j^{\kappa(A)-m}\tilde{A}, j^{\kappa(B)-m}\tilde{B}).$$

Оскільки $\kappa(A) = m$ або $\kappa(B) = m$, то $(j^{\kappa(A)-m}\tilde{A}, j^{\kappa(B)-m}\tilde{B}) = R$ і $(D) = (j^m)$. Тоді, з урахуванням локальності кільця R , маємо $D \sim j^m$. Звідси випливає, що $\text{Ann } D = \text{Ann } j^m = (j^{\text{ind } j - m})$. Тому будь-який елемент $\alpha \in \text{Ann } D$ допускає зображення $\alpha = j^{\text{ind } j - m}\gamma$ при деякому $\gamma \in R$. Отже, якщо $D \notin R^\times$ і $F_n \in (D)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$, то загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд $X_n = X'_n + j^{\text{ind } j - m}\gamma_n$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), в якому $\{\gamma_n\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів кільця R , а послідовність $\{X'_n\}_{n=0}^\infty$ визначено формулою (22), де X'_0 — довільний елемент кільця R у випадку $B' \in R^\times$.

Нагадаємо, що, за теоремою VI.2 [13, с. 95], будь-яке скінченне комутативне кільце $R \neq \{0\}$ з одиницею ізоморфне прямій сумі $\bigoplus_{i=1}^r R_i$ локальних скінченних комутативних кілець $R_i \neq \{0\}$ з одиницею. Позначимо через $\varphi: R_1 \oplus \dots \oplus R_r \rightarrow R$ канонічний ізоморфізм і через $A_i, B_i, F_{i,n}$ канонічні проєкції елементів A, B, F_n відповідно (див. розділ 3):

$$A_i = \pi_i(A), \quad B_i = \pi_i(B), \quad F_{i,n} = \pi_i(F_n), \quad i = 1, \dots, r, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (24)$$

Наступна лема встановлює зв'язок між рівністю $(A, B) = (D)$ у кільці R і рівностями $(A_i, B_i) = (D_i)$ у кільцях R_i , $i = 1, \dots, r$.

Лема 5. Нехай $R \neq \{0\}$ — скінченне комутативне кільце з одиницею, $A, B, D \in R$. Для виконання умови $(D) = (A, B)$ необхідно і достатньо існування таких елементів $D_i \in R_i$, що $(D_i) = (A_i, B_i)$, $i = 1, \dots, r$. При цьому $D = \varphi(D_1, \dots, D_r)$ і $D_i = \pi_i(D)$ для кожного $i = 1, \dots, r$.

Доведення. Необхідність. Нехай $(D) = (A, B)$. Зафіксуємо довільне $i \in \{1, \dots, r\}$ і покладемо $D_i = \pi_i(D)$. Зауважимо, що

$$(D_i) = \pi_i(D)R_i = \pi_i(D)\pi_i(R) = \pi_i(DR) = \pi_i((A, B)).$$

З іншого боку, оскільки π_i — сюр'єктивний гомоморфізм, то

$$\begin{aligned}\pi_i((A, B)) &= \pi_i(\{\alpha A + \beta B \mid \alpha, \beta \in R\}) = \\ &= \{\pi_i(\alpha)\pi_i(A) + \pi_i(\beta)\pi_i(B) \mid \alpha, \beta \in R\} = (\pi_i(A), \pi_i(B)) = (A_i, B_i).\end{aligned}$$

Це доводить необхідність.

Достатність. Нехай $(A_i, B_i) = (D_i)$ при всіх $i = 1, \dots, r$.

Оскільки π_i ($i = 1, \dots, r$), φ — сюр'єктивні гомоморфізми, маємо:

$$\begin{aligned}(A, B) &= (\varphi(A_1, \dots, A_r), \varphi(B_1, \dots, B_r)) = \\ &= \{\alpha \varphi(A_1, \dots, A_r) + \beta \varphi(B_1, \dots, B_r) \mid \alpha, \beta \in R\} = \\ &= \{\varphi(\pi_1(\alpha)A_1 + \pi_1(\beta)B_1, \dots, \pi_r(\alpha)A_r + \pi_r(\beta)B_r) \mid \alpha, \beta \in R\} = \\ &= \varphi((A_1, B_1), \dots, (A_r, B_r)) = \varphi((D_1), \dots, (D_r)) = \\ &= \{\varphi(\alpha_1 D_1, \dots, \alpha_r D_r) \mid \alpha_1 \in R_1, \dots, \alpha_r \in R_r\} = \\ &= \{\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \varphi(D_1, \dots, D_r) \mid \alpha_1 \in R_1, \dots, \alpha_r \in R_r\} = (D),\end{aligned}$$

де $D = \varphi(D_1, \dots, D_r)$. Тепер застосування тотожності (5) дає формулу $\pi_i(D) = \pi_i(\varphi(D_1, \dots, D_r)) = D_i$, $i = 1, \dots, r$. Це завершує доведення леми. $\square$

Оскільки $(D) = (A, B)$, то, за лемою 5, $(A_i, B_i) = (D_i)$, де $D_i = \pi_i(D)$, $i = 1, \dots, r$. Якщо $F_n \in (D)$, то визначимо елементи $A'_i, B'_i, F'_{i,n}$ наступними співвідношеннями, які є аналогами співвідношень (19) для кільця R_i :

$$B_i = B'_i D_i, \quad A_i = A'_i D_i, \quad F_{i,n} = F'_{i,n} D_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (25)$$

Тоді, за лемою 4, у випадку $D_i \neq 0$ принаймні один з елементів A'_i, B'_i є оборотним. Якщо $D_i = 0$, то згідно з зауваженням 2 вважаємо, що $A'_i = F'_{i,n} = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) і $B'_i = 1$ у кільці R_i .

Наступна теорема встановлює критерії розв'язності рівняння (1) над довірливим скінченним кільцем R у випадку $(A, B) = (D)$.

Теорема 5. *Справедливі наступні твердження.*

1. Рівняння (1) має скінченну кількість розв'язків тоді і тільки тоді, коли $D \in R^\times$. При цьому рівняння (1) має $N = \text{card } R^{(1)}$ розв'язків і загальний розв'язок цього рівняння визначається твердженнями 1–3 теореми 3.
2. Рівняння (1) має нескінченно багато розв'язків тоді і тільки тоді, коли $D \notin R^\times$ і $F_n \in (D)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. При цьому загальний розв'язок цього рівняння визначено рівністю

$$X_n = \varphi(X'_{1,n}, \dots, X'_{r,n}) + \alpha_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (26)$$

в якій $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів анулятора $\text{Ann } D$,
а

$$X'_{i,n} = \begin{cases} (B'_i)^{-n} (A'_i)^n X'_{i,0} + \sum_{s=0}^{n-1} (B'_i)^{-s-1} (A'_i)^s F'_{i,n-s-1}, & B'_i \in R_i^\times, \\ - \sum_{s=0}^{\text{ind } B'_i - 1} (A'_i)^{-s-1} (B'_i)^s F'_{i,n+s}, & B'_i \notin R_i^\times, A'_i \in R_i^\times, \end{cases} \quad (27)$$

де $X'_{i,0}$ — довільний елемент кільця R_i у випадку $B'_i \in R_i^\times$, $i = 1, \dots, r$.

3. Рівняння (1) не має розв'язків тоді і тільки тоді, коли $F_n \notin (D)$ при деякому $n \in \mathbb{Z}_+$.

Доведення. Перше твердження теореми безпосередньо випливає з теореми 3.

Доведемо достатність другого твердження теореми.

За теоремою 1, рівняння (1) еквівалентне системі рівнянь

$$B_i X_{i,n+1} = A_i X_{i,n} + F_{i,n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (28)$$

де при кожному $i = 1, \dots, r$ відповідне рівняння розглядається над кільцем R_i відносно послідовності $\{X_{i,n}\}_{n=0}^\infty$. Зафіксуємо $i \in \{1, \dots, r\}$. За лемою 5, $(D_i) = (A_i, B_i)$. Для відповідного рівняння (28) в залежності від оборотності елементу D_i скористаємось першим або другим твердженням теореми 4 з урахуванням зауваження 3. Отримуємо, що загальний розв'язок рівняння (28) має вигляд $X_{i,n} = X'_{i,n} + \alpha_{i,n}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де послідовність $\{X'_{i,n}\}_{n=0}^\infty$ визначено формулою (27), а $\{\alpha_{i,n}\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів анулятора $\text{Ann } D_i$. Тоді, за теоремою 1, загальний розв'язок рівняння (1) має наступний вигляд:

$$X_n = \varphi(X'_{1,n} + \alpha_{1,n}, \dots, X'_{r,n} + \alpha_{r,n}) = \varphi(X'_{1,n}, \dots, X'_{r,n}) + \alpha_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (29)$$

де $\alpha_n = \varphi(\alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{r,n})$. Враховуючи, що, за лемою 5, $D = \varphi(D_1, \dots, D_r)$ і $\alpha_{i,n} \in \text{Ann } D_i$ ($n \in \mathbb{Z}_+, i = 1, \dots, r$), маємо $D\alpha_n = \varphi(D_1\alpha_{1,n}, \dots, D_r\alpha_{r,n}) = \varphi(0, \dots, 0) = 0$, тобто $\alpha_n \in \text{Ann } D$. Таким чином, будь-який розв'язок рівняння (1) має вигляд (26). Тепер нехай $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів анулятора $\text{Ann } D$, а при кожному $i = 1, \dots, r$ послідовність $\{X'_{i,n}\}_{n=0}^\infty$ визначено формулою (27). Покажемо, що послідовність $\{X_n\}_{n=0}^\infty$, яку визначено рівністю (26), є розв'язком рівняння (1). Справді, оскільки $\alpha_n \in \text{Ann } D = \text{Ann } A \cap \text{Ann } B$, то

$$\begin{aligned} BX_{n+1} - AX_n - F_n &= BX'_{n+1} + B\alpha_{n+1} - AX'_n - A\alpha_n - F_n = \\ &= BX'_{n+1} - AX'_n - F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \quad (30)$$

де $X'_n = \varphi(X'_{1,n}, \dots, X'_{r,n})$. Поклавши у формулі (29) всі $\alpha_{i,n} = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+, i = 1, \dots, r$), отримуємо, що послідовність $\{X'_n\}_{n=0}^\infty$ є розв'язком рівняння (1),

а отже, з урахуванням рівності (30), $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ задовольняє рівняння (1). Це доводить достатність другого твердження теореми і формулу (26) загального розв'язку рівняння (1) у цьому випадку.

Достатність третього твердження теореми випливає з третього твердження леми 1.

Ми довели достатність всіх тверджень теореми. Оскільки достатні умови всіх трьох тверджень теореми вичерпують всі можливості і попарно несумісні, то доведення теореми завершено. $\square$

5. Приклади

В цьому розділі розглядаються приклади застосування результатів, отриманих у розділах 3, 4.

Нагадаємо, що через $\mathbb{Z}_m$ позначається кільце лишків за модулем m , елементами якого є класи $[z]_m$ чисел $z \in \mathbb{Z}$.

Приклад 1. Розглянемо рівняння

$$vX_{n+1} = uX_n + F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (31)$$

над кільцем $R = \mathbb{Z}_m[u, v]/(u^2, v^2)$ ($m > 1$). Елементи кільця R мають вигляд $t_0 + t_u u + t_v v + t_{uv} uv$, де $t_k \in \mathbb{Z}_m$ ($k \in \{0, u, v, uv\}$), а $u^2 = v^2 = 0$ в R . Рівняння (31) записується у вигляді (1), де $A = u$, $B = v$, і тому $(A, B) = (u, v) \neq R$. За теоремою 3, рівняння (31) або не має розв'язків, або має нескінченно багато розв'язків. Зобразимо в (31) $X_n = x_{0,n} + x_{u,n}u + x_{v,n}v + x_{uv,n}uv$, $F_n = f_{0,n} + f_{u,n}u + f_{v,n}v + f_{uv,n}uv$, де $x_{k,n}, f_{k,n} \in \mathbb{Z}_m$ ($k \in \{0, u, v, uv\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$). Рівняння (31) переписується у вигляді

$$x_{0,n+1}v + x_{u,n+1}uv = f_{0,n} + x_{0,n}u + x_{v,n}uv + f_{u,n}u + f_{v,n}v + f_{uv,n}uv, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (32)$$

Прирівнюючи в (32) коефіцієнти при u, v, uv і вільні члени, маємо $f_{0,n} = 0$, $x_{0,n+1} = f_{v,n}$, $f_{u,n} = -x_{0,n}$, $x_{u,n+1} - x_{v,n} = f_{uv,n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Таким чином, рівняння (32) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$f_{0,n} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad (33)$$

і

$$f_{v,n} + f_{u,n+1} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (34)$$

При цьому рівняння (31) має нескінченно багато розв'язків і загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$X_0 = -f_{u,0} + x_{u,0}u + x_{v,0}v + x_{uv,0}uv,$$

$$X_n = -f_{u,n} + (x_{v,n-1} + f_{uv,n-1})u + x_{v,n}v + x_{uv,n}uv, \quad n \in \mathbb{N},$$

де $x_{u,0}$ — довільний елемент кільця $\mathbb{Z}_m$, а $\{x_{v,n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{x_{uv,n}\}_{n=0}^{\infty}$ — довільні послідовності елементів кільця $\mathbb{Z}_m$.

Цікаво зауважити, що якщо порушується умова (33), то рівняння (31) не має розв'язків за лемою 1. А якщо виконується умова (33), але порушується умова (34), то рівняння (31) не має розв'язків, хоча $F_n \in (A, B)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. Цей приклад показує, що умова $F_n \in (A, B)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) не є достатньою для існування розв'язку рівняння (1).

Приклад 2. Розглянемо рівняння

$$([4]_6 + v)X_{n+1} = ([3]_6 + [2]_6 u)X_n + [n]_6 u, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad (35)$$

над кільцем $R = \mathbb{Z}_6[u, v]/(u^2, v^2)$. Елементи кільця R мають вигляд $t_0 + t_u u + t_v v + t_{uv} uv$, де $t_k \in \mathbb{Z}_6$ ($k \in \{0, u, v, uv\}$), а $u^2 = v^2 = 0$ в R . Рівняння (35) записується у вигляді (1), де $A = [3]_6 + [2]_6 u$, $B = [4]_6 + v$, $F_n = [n]_6 u$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Розглянемо локальні кільця $R_i = \mathbb{Z}_{m_i}[u, v]/(u^2, v^2)$, де $m_1 = 3$, $m_2 = 2$ [15]. Тоді, за китайською теоремою про остачі, $R \cong R_1 \oplus R_2$ (див. [18, п. 7.6]).

При цьому $A + B = [1]_6 + [2]_6 u + v \in$ оборотним, а отже $(A, B) = R$.

Визначимо $B_i = \pi_i(B)$, $A_i = \pi_i(A)$, $F_{i,n} = \pi_i(F_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ згідно з формулами (24), де для кожного $i = 1, 2$ канонічна проекція $\pi_i: R \rightarrow R_i$ визначається формулою

$$\pi_i([a]_m + [b]_m u + [c]_m v + [d]_m uv) = [a]_{m_i} + [b]_{m_i} u + [c]_{m_i} v + [d]_{m_i} uv \quad (36)$$

для довільних $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Обчислимо множини I_1, I_2 і відповідні їм кільця $R^{(1)}, R^{(2)}$ (див. розділ 3). Маємо $B_1 = [1]_3 + v$, $B_2 = v$, тому $B_2^2 = 0$ і $B_1 \cdot ([1]_3 - v) = [1]_3$. Відповідно, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{2\}$, і тому $R^{(1)} = R_1$, $R^{(2)} = R_2$.

Обчислимо елементи $B^{(j)}, A^{(j)}, F_n^{(j)}$ кілець $R^{(j)}$ відповідно (див. формули (11), (36)), $j = 1, 2$, $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned} B^{(1)} &= B_1 = [1]_3 + v, & A^{(1)} &= A_1 = -u, & F_n^{(1)} &= \pi_1(F_n) = [n]_3 u, \\ B^{(2)} &= B_2 = v, & A^{(2)} &= A_2 = [1]_2, & F_n^{(2)} &= \pi_2(F_n) = [n]_2 u. \end{aligned}$$

Помітимо, що $(B^{(2)})^2 = 0$, $B^{(1)} \cdot ([1]_3 - v) = [1]_3$, а отже $\text{ind } B^{(2)} = 2$, $(B^{(1)})^{-1} = [1]_3 - v$.

За теоремою 3, рівняння (35) має $\text{card } R^{(1)} = 81$ розв'язок. Оскільки $R^{(1)} \neq \{0\}$ і $R^{(2)} \neq \{0\}$, то загальний розв'язок рівняння (35) має вигляд $X_n = \psi(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, 0)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де послідовності $\{X_n^{(1)}\}_{n=0}^\infty$, $\{X_n^{(2)}\}_{n=0}^\infty$ визначаються формулами (16) і (17) відповідно, а $\psi \in$ ізоморфізмом $R^{(1)} \oplus R^{(2)} \oplus \{0\} \rightarrow R$.

Оскільки $(A^{(1)})^2 = u^2 = 0$, $(B^{(1)})^{-1} = [1]_3 - v$, а $(B^{(1)})^{-2} = [1]_3 + v$, за

формулою (16) маємо

$$X_n^{(1)} = ([1]_3 + v)^{-n} (-u)^n X_0^{(1)} + \sum_{s=0}^{n-1} ([1]_3 + v)^{-s-1} (-u)^s [n-s-1]_3 u =$$

$$= \begin{cases} X_0^{(1)}, & n = 0, \\ (v - [1]_3) u X_0^{(1)}, & n = 1, \\ ([1]_3 - v) [n-1]_3 u, & n \geq 2, \end{cases} \quad (37)$$

де $X_0^{(1)}$ — довільний елемент кільця R_1 .

Враховуючи, що $\text{ind } B^{(2)} = 2$, за формулою (17) маємо

$$X_n^{(2)} = [n]_2 u + [n+1]_2 uv, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (38)$$

Формула

$$X_0^{(1)} = [\rho]_3 + [\mu]_3 u + [\sigma]_3 v + [\theta]_3 uv, \quad \rho, \sigma, \mu, \theta \in \mathbb{Z} \quad (39)$$

описує зображення довільного елемента $X_0^{(1)} \in R_1$.

Підставляючи (39) у (37), отримуємо:

$$X_n^{(1)} = \begin{cases} [\rho]_3 + [\mu]_3 u + [\sigma]_3 v + [\theta]_3 uv, & n = 0, \\ -[\rho]_3 u + [\rho - \sigma]_3 uv, & n = 1, \\ [n-1]_3 (u - uv), & n \geq 2. \end{cases} \quad (40)$$

Ізоморфізм $\psi: R^{(1)} \oplus R^{(2)} \oplus R^{(3)} \rightarrow R$ визначається формулою

$$\psi([t_{0,1}]_3 + [t_{u,1}]_3 u + [t_{v,1}]_3 v + [t_{uv,1}]_3 uv, \\ [t_{0,2}]_2 + [t_{u,2}]_2 u + [t_{v,2}]_2 v + [t_{uv,2}]_2 uv, 0) =$$

$$= \psi_0([t_{0,1}]_3, [t_{0,2}]_2) + \psi_0([t_{u,1}]_3, [t_{u,2}]_2) u + \psi_0([t_{v,1}]_3, [t_{v,2}]_2) v +$$

$$+ \psi_0([t_{uv,1}]_3, [t_{uv,2}]_2) uv, \quad t_{k,i} \in \mathbb{Z}, \quad k \in \{0, u, v, uv\}, \quad i = 1, 2, \quad (41)$$

де ізоморфізм $\psi_0: \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_6$ будується наступним чином:

$$\psi_0([z_1]_3, [z_2]_2) = [4z_1 + 3z_2]_6, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \quad (42)$$

(див. [18, с. 267, вправа 5(b)]). Користуючись формулами (38), (40)–(42), одержимо загальний розв'язок рівняння (35):

$$X_0 = [4\rho]_6 + [4\mu]_6 u + [4\sigma]_6 v + [4\theta + 3]_6 uv,$$

$$X_1 = [-4\rho + 3]_6 u + [4\rho - 4\sigma]_6 uv,$$

$$X_n = [n+2]_6 u + [-n+1]_6 uv, \quad n \geq 2,$$

де $\rho, \sigma, \mu, \theta$ — довільні цілі числа.

Приклад 3. Розглянемо рівняння

$$([20]_{360} + [180]_{360} v)X_{n+1} = ([210]_{360} + [280]_{360} u)X_n + [20n]_{360} u, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (43)$$

над кільцем $R = \mathbb{Z}_{360}[u, v]/(u^2, v^2, uv)$. Елементи кільця R мають вигляд $t_0 + t_u u + t_v v$, де $t_k \in \mathbb{Z}_{360}$ ($k \in \{0, u, v\}$), а $u^2 = v^2 = uv = 0$ в R . Рівняння (43) записується у вигляді (1), де $B = [20]_{360} + [180]_{360} v$, $A = [210]_{360} + [280]_{360} u$ і $F_n = [20n]_{360} u$, причому A, B — необоротні елементи кільця R . Розглянемо локальні кільця $R_i = \mathbb{Z}_{m_i}[u, v]/(u^2, v^2, uv)$, де $m_1 = 8$, $m_2 = 9$, $m_3 = 5$ [15]. Тоді, за китайською теоремою про остачі, $R \cong R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$ (див. [18, п. 7.6]).

Канонічні проекції $\pi_i: R \rightarrow R_i$ тут визначаються формулами

$$\pi_i([a]_{360} + [b]_{360} u + [c]_{360} v) = [a]_{m_i} + [b]_{m_i} u + [c]_{m_i} v, \quad i = 1, 2, 3, \quad (44)$$

для довільних $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Ізоморфізм $\varphi: R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \rightarrow R$ визначається формулою

$$\begin{aligned} \varphi([t_{0,1}]_8 + [t_{u,1}]_8 u + [t_{v,1}]_8 v, [t_{0,2}]_9 + [t_{u,2}]_9 u + [t_{v,2}]_9 v, \\ [t_{0,3}]_5 + [t_{u,3}]_5 u + [t_{v,3}]_5 v) = \psi_0([t_{0,1}]_8, [t_{0,2}]_9, [t_{0,3}]_5) + \\ + \psi_0([t_{u,1}]_8, [t_{u,2}]_9, [t_{u,3}]_5)u + \\ + \psi_0([t_{v,1}]_8, [t_{v,2}]_9, [t_{v,3}]_5)v, \quad t_{k,i} \in \mathbb{Z}, \quad k \in \{0, u, v\}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (45)$$

де ізоморфізм $\psi_0: \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_{360}$ будується наступним чином:

$$\psi_0([z_1]_8, [z_2]_9, [z_3]_5) = [225z_1 + 280z_2 + 216z_3]_{360}, \quad z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z} \quad (46)$$

(див. також [18, с. 267, вправа 5(b)]).

Обчислимо елементи $A_i, B_i, F_{i,n}$, $i = 1, 2, 3$, $n \in \mathbb{Z}_+$ (див. формули (24), (44)):

$$\begin{aligned} B_1 &= [4]_8 + [4]_8 v, & B_2 &= [2]_9, & B_3 &= [0]_5, \\ A_1 &= [2]_8, & A_2 &= [3]_9 + [1]_9 u, & A_3 &= [0]_5, \\ F_{1,n} &= [4n]_8 u, & F_{2,n} &= [2n]_9 u, & F_{3,n} &= [0]_5. \end{aligned}$$

Зауважимо, що $(A_1, B_1) = ([2]_8)$, $(A_2, B_2) = ([1]_9)$, $(A_3, B_3) = ([0]_5)$. Відповідно покладемо $D_1 = [2]_8$, $D_2 = [1]_9$, $D_3 = [0]_5$. Тоді, за лемою 5, $(A, B) = (D)$, де $D = \varphi(D_1, D_2, D_3) = \psi_0(D_1, D_2, D_3) = [10]_{360}$ (див. формули (45), (46)).

Оскільки $D \notin R^\times$ і $F_n = [20n]_{360} u \in (D)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$, то, за другим твердженням теореми 5, рівняння (43) має нескінченно багато розв'язків. Більш того, загальний розв'язок рівняння (43) має вигляд (26), де $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів анулятора $\text{Ann } D$, а послідовності $\{X'_{i,n}\}_{n=0}^\infty$ ($i = 1, 2, 3$) визначаються формулами (27), причому елементи

$$\begin{aligned} B'_1 &= [2]_8 + [2]_8 v, & B'_2 &= B_2 = [2]_9, & B'_3 &= [1]_5, \\ A'_1 &= [1]_8, & A'_2 &= A_2 = [3]_9 + [1]_9 u, & A'_3 &= [0]_5, \\ F'_{1,n} &= [2n]_8 u, & F'_{2,n} &= F_{2,n} = [2n]_9 u, & F'_{3,n} &= [0]_5, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

задовольняють рівності (25).

Обчислимо елементи послідовності $\{X'_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$. Оскільки $A'_1 \in R_1^\times$, $(B'_1)^3 = [0]_8$ і $(B'_1)^2 F'_{1,n} = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), то, за другою формулою (27),

$$X'_{1,n} = - \sum_{s=0}^2 [1]_8^{-s-1} ([2]_8 + [2]_8 v)^s [2(n+s)]_8 u = [2n+4]_8 u, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (47)$$

Оскільки $(B'_2)^{-1} = [5]_9$, то послідовність $\{X_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ визначається першою формулою (27). Тепер, враховуючи рівність $(A'_2)^3 = 0$, приходимо до формули

$$\begin{aligned} X'_{2,n} &= ([2]_9)^{-n} ([3]_9 + [1]_9 u)^n X'_{2,0} + \\ &+ \sum_{s=0}^{n-1} ([2]_9)^{-s-1} ([3]_9 + [1]_9 u)^s [2(n-s-1)]_9 u = \\ &= \begin{cases} X'_{2,0}, & n = 0, \\ ([6]_9 + [5]_9 u) X'_{2,0}, & n = 1, \\ [6]_9 X'_{2,0} u + [1]_9 u, & n = 2, \\ [n-1]_9 u + [n-2]_9 [6]_9 u, & n \geq 3, \end{cases} \quad (48) \end{aligned}$$

де $X'_{2,0}$ — довільний елемент кільця R_2 .

Також маємо

$$X'_{3,n} = \begin{cases} X'_{3,0}, & n = 0, \\ [0]_5, & n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (49)$$

де $X'_{3,0}$ — довільний елемент кільця R_3 .

Формули

$$X'_{2,0} = [\rho_2]_9 + [\mu_2]_9 u + [\sigma_2]_9 v, \quad \rho_2, \sigma_2, \mu_2 \in \mathbb{Z}, \quad (50)$$

$$X'_{3,0} = [\rho_3]_5 + [\mu_3]_5 u + [\sigma_3]_5 v, \quad \rho_3, \sigma_3, \mu_3 \in \mathbb{Z} \quad (51)$$

описують зображення елементів $X'_{2,0} \in R_2$ та $X'_{3,0} \in R_3$ відповідно.

Підставляючи (50) у (48) та (51) у (49), отримуємо:

$$X'_{2,n} = \begin{cases} [\rho_2]_9 + [\mu_2]_9 u + [\sigma_2]_9 v, & n = 0, \\ [6\rho_2]_9 + [5\rho_2 + 6\mu_2]_9 u + [6\sigma_2]_9 v, & n = 1, \\ [6\rho_2 + 1]_9 u, & n = 2, \\ [7n + 5]_9 u, & n \geq 3, \end{cases} \quad (52)$$

$$X'_{3,n} = \begin{cases} [\rho_3]_5 + [\mu_3]_5 u + [\sigma_3]_5 v, & n = 0, \\ [0]_5, & n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (53)$$

Тепер знайдемо анулятор $\text{Ann } D$. Оскільки $D = [10]_{360}$, то для $f = [f_0]_{360} + [f_u]_{360} u + [f_v]_{360} v \in R$ ($f_0, f_u, f_v \in \mathbb{Z}$) рівність $Df = 0$ рівносильна одночасному виконанню рівностей $[10f_0]_{360} = [10f_u]_{360} = [10f_v]_{360} = [0]_{360}$,

що, в свою чергу, виконано тоді і тільки тоді, коли $f_0, f_u, f_v \in [36]_{360} \mathbb{Z}$. Останнє означає, що $f \in [36]_{360} R$, тобто $\text{Ann } D = ([36]_{360})$.

Підставляючи (47), (52), (53) в (26) і враховуючи зображення ізоморфізмів (45), (46), одержимо загальний розв'язок рівняння (43):

$$X_0 = [280\rho_2]_{360} + [280\mu_2]_{360} u + [280\sigma_2]_{360} v + \alpha_0,$$

$$X_1 = [240\rho_2]_{360} + [270 + 320\rho_2 + 240\mu_2]_{360} u + [240\sigma_2]_{360} v + \alpha_1,$$

$$X_2 = [240\rho_2 + 280]_{360} u + \alpha_2,$$

$$X_n = [250n + 140]_{360} u + \alpha_n, \quad n \geq 3,$$

де ρ_2, σ_2, μ_2 — довільні цілі числа, а $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів ідеалу $[36]_{360} R$.

6. Висновок

У даній статті досліджено неоднорідне неявне лінійне різницеве рівняння першого порядку над скінченним комутативним кільцем з одиницею. Встановлено необхідні і достатні умови існування скінченного числа розв'язків відповідного однорідного рівняння над цим кільцем. Встановлено необхідні і достатні умови скінченності числа розв'язків неоднорідного рівняння, а за умови існування розв'язку визначено кількість розв'язків та загальний вигляд розв'язку. У випадку, коли ідеал, породжений коефіцієнтами рівняння, є головним, встановлено необхідні і достатні умови розв'язності неоднорідного рівняння, а за умови існування розв'язку визначено кількість розв'язків та загальний вигляд розв'язку. Наведено приклади, що демонструють використання одержаних теоретичних результатів. Планується в подальшому дослідити розв'язність початкової задачі для розглянутого неявного лінійного різницевого рівняння першого порядку, а також дослідити різницеве рівняння вищого порядку над скінченними комутативними кільцями з одиницею.

Подяка. Роботу виконано за часткової підтримки Фонду Ахієзера (Харків).

Конфлікт інтересів: Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

Історія статті: отримана: 7 квітня 2026; останній варіант: 10 травня 2026;
прийнята: 20 травня 2026. Оприлюднено 31 травня 2026.

REFERENCES

1. S.L. Campbell. Singular system of differential equations I. 1980, V. **40**. San Francisco, London, Melbourne: Pitman Publishing, Research Notes in Mathematics.

2. M.F. Bondarenko, A.G. Rutkas. On a class of implicit difference equations, *Dopovidi NANU of Ukraine*, — 1998. — No. 7, — P. 11–15.
3. M. F. Bondarenko, L. A. Vlasenko, A. G. Rutkas. Discrete Optimal Control of Descriptor Systems with Variable Parameters. *Journal of Automation and Information Sciences*, — 2011. — V. **43**. — No. 5. — P. 1–9. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v43.i5.10>
4. M. Kostić. Almost Periodic Type Solutions, 2025. Berlin, Boston, Walter de Gruyter, *Studies in Mathematics*, V. **101**. <https://doi.org/10.1515/9783111689746-201>
5. S.L. Gefter, A.L. Piven. Implicit Linear Nonhomogeneous Difference Equation in Banach and Locally Convex Spaces. *J. Math. Physics, Analysis, Geometry*, — 2019. — V. **15**. — No. 3. — P. 336–353. <https://doi.org/10.15407/mag15.03.336>
6. V.V. Martseniuk, S.L. Gefter, A.L. Piven'. Uniqueness Criterion and Cramer's Rule for Implicit Higher Order Linear Difference Equations Over $\mathbb{Z}$, *Progress on Difference Equations and Discrete Dynamical Systems* (eds. S. Baignent, M. Bohner, S. Elaydi), Springer, — 2020. — V. **341**. — P. 311–325. https://doi.org/10.1007/978-3-030-60107-2_16
7. S.L. Gefter, A.L. Piven'. Implicit Linear Nonhomogeneous Difference Equation over $\mathbb{Z}$ with a Random Right-Hand Side, *J. Math. Physics, Analysis, Geometry*, — 2022. — V. **18**. — No. 1. — P. 105–117. <https://doi.org/10.15407/mag18.01.105>
8. A.B. Goncharuk. Implicit linear difference equations over a non-Archimedean ring. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, — 2021. — V. **93**. — P. 18–33. <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2021-93-03>
9. S. Gefter, A. Goncharuk, A. Piven'. Implicit Linear First Order Difference Equations Over Commutative Rings. In: Elaydi, S., Kulenovic, M.R.S., Kalabusic, S. (eds) *Advances in Discrete Dynamical Systems, Difference Equations and Applications. ICDEA 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, — 2023. — V. **416**. — P. 199–216. https://doi.org/10.1007/978-3-031-25225-9_10
10. V.A. Gerasimov, S.L. Gefter, A.B. Goncharuk. Application of the p -adic Topology on $\mathbb{Z}$ to the Problem of Finding Solutions in Integers of an Implicit Linear Difference Equation, *J. Math. Sci.*, — 2018. — V. **235**. — No. 3. — P. 256–261. <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4072-x>
11. M.V. Heneralov, A.L. Piven'. Implicit linear difference equation over residue class rings, *Algebra and Discrete Mathematics*, — 2024. — V. **37**. — No. 1. — P. 85–105. <https://doi.org/10.12958/adm2110>.

12. M.V. Heneralov. Implicit linear difference equations over finite commutative rings of order p^2 with identity, Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, — 2025. — V. **101**. — P. 21–30 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2025-101-02>
13. B.R. Macdonald. Finite commutative rings with identity. New York: M. Dekker, Inc., — 1974.
14. S. Alabiad, Y. Alkhamees. On classification of finite commutative chain rings, AIMS Mathematics, — 2021. — V. **7**. — No. 2. — P. 1742–1757. DOI: <https://doi.org/10.3934/math.2022100>
15. A. Nowicki. Tables of finite commutative local rings of small orders, 2018. UMK, Torun. Available at: <https://www.researchgate.net/publication/328319576>.
16. M. Axtell, J. Stickles, W. Trampbach. Zero-divisor ideals and realizable zero-divisor graphs, Involve, — 2009, — V. **2**, — No. 1, P. 17–27. <https://doi.org/10.2140/involve.2009.2.17>
17. S. Elaydi. An Introduction to Difference Equations. New York: Springer, — 2005. <https://doi.org/10.1007/0-387-27602-5>
18. D.S. Dummit, R.M. Foote. Abstract algebra. Third edition. John Wiley & Sons, Inc., — 2004.
19. O. Zariski, P. Samuel. Commutative algebra. D. van Nostrand, Princeton, — 1958. — V. **1**. <https://doi.org/10.2307/3611016>

First-order implicit linear difference equation over finite commutative rings with identity

M. V. Heneralov¹, A. L. Piven²

¹*Department of Fundamental Mathematics
V. N. Karazin Kharkiv National University
4 Svobody sq., Kharkiv, 61022, Ukraine*

²*Department of Applied Mathematics
V. N. Karazin Kharkiv National University
4 Svobody sq., Kharkiv, 61022, Ukraine*

The paper studies an implicit first-order linear difference equation $BX_{n+1} = AX_n + F_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ over a finite commutative ring R with identity, that is, an equation with a noninvertible element B of the ring R . In contrast to the classical (explicit) linear difference equation, an implicit linear difference equation over the finite ring R may have no solutions, and may also have infinitely many solutions. Since any finite commutative ring

with identity is isomorphic to a finite direct sum of local commutative rings with identity, the equation decomposes into a system of equations over local finite commutative rings with identity. It is shown that the condition that the ideal (A, B) generated by the elements $A, B \in R$ coincides with R is necessary and sufficient for the existence of a finite number of solutions of this equation; the number of solutions in the case of their existence is counted and a formula for the general solution is provided. The condition $(A, B) \neq R$ is a necessary and sufficient condition for the existence of an infinite number of solutions of the corresponding homogeneous equation $BX_{n+1} = AX_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. It is also established that in the case $(A, B) \neq R$ the condition $F_n \in (A, B)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ is necessary for the solvability of the nonhomogeneous implicit linear difference equation, but it is not sufficient, as examples show. Under the additional restriction that (A, B) is a proper principal ideal of the ring R , this condition is also sufficient for the existence of a solution of the considered nonhomogeneous equation; in this situation the equation has infinitely many solutions. Under the assumption that (A, B) is a principal ideal, first a criterion for the existence of a solution is proved in the case of a local finite commutative ring with identity, and then in the case of an arbitrary finite commutative ring with identity. As in Fredholm theory, it is shown that if the corresponding homogeneous equation has only the trivial solution, then the studied nonhomogeneous equation has a unique solution. The work of the proved theorems is demonstrated by concrete examples.

Keywords: implicit linear difference equation; finite ring; local ring; ideal.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Article history: Received: 7 April 2026; Final form: 10 May 2026.

Accepted: 20 May 2026. Published 31 May 2026.

How to cite this article:

M. V. Heneralov, A. L. Piven', First-order implicit linear difference equation over finite commutative rings with identity, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 103, 2026, p. 90–114 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2026-103-05>

В. К. Дубовий

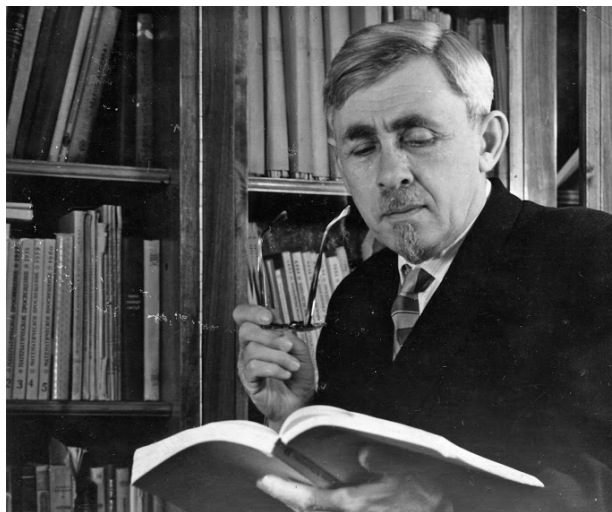
професор, доктор фізико-математичних наук
Кафедра фундаментальної математики
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
4 майдан Свободи, Харків, 61022, Україна
dubovoy.v.k@gmail.com  <http://orcid.org/0009-0000-9613-7113>

С. Л. Гефтер

доцент, кандидат фізико-математичних наук
Фізико-технічний інститут низьких температур імені Б. І. Веркіна
Національної академії наук України
47 просп. Науки, Харків, 61103, Україна
gefter@karazin.ua  <http://orcid.org/0000-0001-5301-5087>

НАУМ ІЛЛІЧ АХІЄЗЕР

до 125-річчя від дня народження



6 березня 2026 року виповнилося 125 років від дня народження професора Харківського університету, видатного математика і чудового педагога Наума Ілліча Ахієзера.

Н. І. Ахієзер народився в сім'ї земського лікаря в м. Черикові (Білорусь). Навчався у класичній гімназії м. Мстиславля, де отримав гарну середню освіту з володінням німецькою, французькою мовами та латиною. Після

закінчення гімназії у 1918 р. викладав математику та фізику в Лемельській школі-комуні, заснованій М. М. Лепешинським. Ці роки Н. І. Ахієзер завжди згадував із задоволенням. У 1924 році закінчив математичне відділення Київського інституту народної освіти з трирічним терміном навчання.

Активна наукова діяльність Н. І. Ахієзера почалася в аспірантурі у Д. А. Граве, яку він проходив з 1925 по 1928 рік. У 1928 році він захистив кандидатську дисертацію «Аеродинамічні дослідження», яка за ініціативою Д. А. Граве була присвячена прикладним питанням. Ця дисертація показала, що у Києві з'явився потужний математик, який вміє ефективно застосовувати методи теорії функцій комплексної змінної. Після закінчення аспірантури працював у Київському університеті та Київському авіаційному інституті. У ці роки Наум Ілліч отримав низку результатів із конструктивної теорії функцій, які принесли йому міжнародне визнання. У 1936 році йому була присуджена ступінь доктора наук, а у 1934 році Н. І. Ахієзер був обраний членом-кореспондентом Всеукраїнської Академії Наук, так тоді називалася Національна академія наук України.

У 1933 р. Наум Ілліч переїжджає до Харкова, де очолює кафедру теорії функцій у Харківському університеті та починає працювати у заснованому С. Н. Бернштейном Інституті математики та механіки Харківського університету. Починаючи з цього моменту, все життя Наума Ілліча (за винятком військового лихоліття та евакуації: в 1941-1943 р.р. він викладав в Алма-Атинському гірничому інституті, а у період 1943-1947 р.р. - у Московському енергетичному інституті) буде пов'язане з Харковом і Харківським університетом. Після переїзду С. Н. Бернштейна до Ленінграда у 1935 р. Н. І. Ахієзер стає директором цього інституту. На жаль, у 1950 році інститут був закритий.

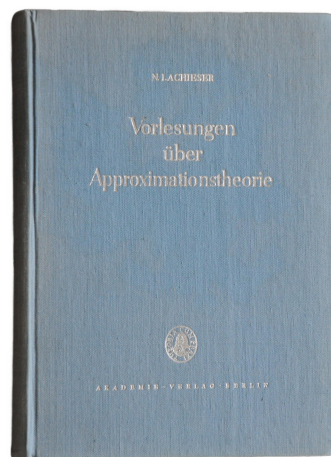
На посаді директора інституту особливо виявився талант Наума Ілліча як організатора. Він залучив до інституту обдаровану молодь. За його ініціативи, після переїзду до Харкова і в післявоєнні роки, у Харків переїжджає працювати багато видатних математиків країни. Фактично Н. І. Ахієзер сприяв створенню відомої у світі Харківської школи математиків середини минулого сторіччя та був її безумовним лідером. Багато років він був президентом Харківського математичного товариства. У своїй ювілейній доповіді [1] до 150-річчя Харківського університету та 75-річчя Харківського математичного товариства він докладно виклав історію Харківського математичного товариства.

У 1960 році за ініціативи Б. І. Веркіна був створений Фізико-технічний інститут низьких температур АН УРСР (ФТІНТ). Б. І. Веркін запросив провідних харківських математиків створити в інституті математичні відділи. Серед них був і Н. І. Ахієзер. Продовжуючи працювати в університеті, він з 1961 до 1963 року одночасно очолював в інституті відділ теорії функцій. Наум Ілліч вважав важливим поєднання наукової роботи із викладанням. Найкращою реалізацією цього він бачив у відкритті в університеті науково-дослідного інституту. Раніше в університеті цю роль виконував інститут математики. Після відкриття ФТІНТ-у цю роль почали успішно виконувати

математичні відділи цього інституту.

Кінець XIX і початок XX сторіччя ознаменувалися появою і потужним розвитком нових математичних ідей, які заклали основи сучасної теорії функцій і функціонального аналізу. Н. І. Ахієзер тонко відчув нові ідеї і, застосовуючи їх до класичних напрямків, отримав результати, які висунули його до числа провідних аналітиків світу і вплинули на сучасний стан теорії функцій та її застосувань.

Наум Ілліч є автором понад 140 статей та 10 монографій. Монографії Наума Ілліча перевидані у багатьох країнах світу. Вони постійно використовуються та цитуються. За монографію «Лекції з теорії апроксимації» Наум Ілліч отримав престижну премію імені П. Л. Чебишева. Зазначимо, що аналіз математичної спадщини Н. І. Ахієзера можна знайти у статтях [2, 3, 4], а також у відомій статті М. Г. Крейна і Б. Я. Левіна, присвяченій 60-річчю від дня народження Н. І. Ахієзера. До сторіччя Наума Ілліча зусиллями його синів О. Н. Ахієзера і Д. Н. Ахієзера та Харківського математичного товариства було підготовлено і видано двотомник його обраних праць.



Наум Ілліч був чудовим лектором. Його лекції вражали глибиною, витонченістю та оригінальністю. Першому автору цієї статті пощастило слухати лекції Наума Ілліча. Згадується такий момент. На лекції з курсу "Перетворення Фур'є", посилаючись на один із результатів Б. Рімана, Наум Ілліч прискорив кроки біля дошки і, дивлячись на студентів, промовив: "Ну, які б слова вам сказати, щоб ви відчували, хто такий Ріман". І важливим тут є "щоб ви відчували". Наум Ілліч не тільки ясно викладав матеріал, а і створював атмосферу, в якій студент міг би відчувати красу математичного ландшафту.

На екзамені, коли було ясно, що студент розуміє матеріал, Наум Ілліч похвалювався і починав звертати увагу студента на моменти, які залишилися поза лекціями. Потроху офіційна атмосфера екзамену перетворювалася у плідну творчу розмову. В якусь мить Наум Ілліч казав "Так, так, гарна відповідь. А де Ваша залікова книжка?". Залікова книжка лежала навпроти на столі ...

В 60-70-ті роки минулого сторіччя стрімко поглиблювався вплив математичних досліджень на розвиток виробництва. В ці роки стрімко зростає набір студентів на математичні відділення. Як наслідок цих процесів, фізико-математичні факультети університетів поділяються відповідно на фізичний і математичний факультети. В Харківському університеті таке від'єднання призвело до утворення у 1961 році механіко-математичного факультету. В зв'язку з цим розділенням і модернізацією математичних курсів роль фізи-

чних курсів на механіко-математичному факультеті стала стрімко спадати. Наум Ілліч звертав особливу увагу на збалансованість курсів, які викладалися на факультеті, і гарно розумів наслідки зневаги до ролі фізики в освіті математика. В 60-ті роки під його керівництвом була розроблена програма неперервного викладання фізичних курсів на факультеті. Відповідно до цієї програми, починаючи з другого семестра другого курсу і до кінця четвертого курсу, неперервно викладалися курси теоретичної механіки, електродинаміки, термодинаміки і квантової механіки. На жаль, після відходу Наума Ілліча з життя ця програма зазнала суттєвих змін.

Але інтереси Наума Ілліча не обмежувалися проблемами вищої школи. Викладання математики в середній школі жваво цікавило Наума Ілліча. На початку 1960-х років процеси, про які йшлося вище, вимагали перебудови програми середньої школи. Йшлося про необхідність створення шкіл з поглибленим вивченням математики та фізики, у яких кваліфіковані вчителі за спеціальною програмою вели б заняття з точних наук. Домогтися відкриття такої школи у Харкові було надзвичайно важко. Тим не менш, Наум Ілліч разом з Іваном Федотовичем Бульбою зуміли «пробити» рішення про відкриття у Харкові школи із фізико-математичним ухилом. Так було створено 27-му школу (нині – Харківський фізико-математичний ліцей №27). Її директором став Іван Федотович, а Наум Ілліч спочатку викладав у школі, стежив за організацією роботи, проводив семінари для вчителів. Серед випускників ліцею багато відомих математиків і фізиків, які працюють в країні та у різних країнах світу.

Наум Ілліч Ахієзер пішов з життя 3 червня 1980 року. Але Наум Ілліч залишив по собі не тільки математичну спадщину. Залишається пам'ять про чудову людину, про ту неповторну атмосферу, яку він створював навколо себе.

Харків'яни зберігають пам'ять про Наума Ілліча Ахієзера. Зараз на будівлі 27 ліцею є меморіальні дошки Н. І. Ахієзеру та І. Ф. Бульбі. У нашому університеті є аудиторія імені Н. І. Ахієзера (поряд із аудиторією О. М. Ляпунова).

У Харкові засновано Фонд імені Н. І. Ахієзера, який щорічно проводить конкурси молодих харківських математиків та преміює переможців. Засновником та спонсором цього фонду є американський (у минулому – радянський)

математик Михайло Брін, якому Наум Ілліч свого часу дуже допоміг. У Харкові є вулиця Ахієзерів, названа так на честь Наума Ілліча Ахієзера і його



брата, видатного фізика Олександра Ілліча Ахієзера.



Подяки. Автори висловлюють подяку Олександру Прокудіну за фотографії, зроблені ним в аудиторії імені Н. І. Ахієзера. Ми також вдячні Роману Скуріхину за допомогу в оформленні тех-файлу статті.

Конфлікт інтересів: Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

Історія статті: отримана: 10 квітня 2026; останній варіант: 15 травня 2026;
прийнята: 20 травня 2026. Оприлюднено 31 травня 2026.

REFERENCES

1. N. I. Akhiezer. Kharkov Mathematical Society. Uchenye Zapiski of A. M. Gorky Kharkov State University. – 1956. – Vol. **LXV**: Proceedings of the Mathematical Division of the Faculty of Physics and Mathematics and of the Kharkov Mathematical Society, Ser. 4, Vol. 24. – P. 31–39.
2. Yu. I. Liubich. Naum Il'ich Akhiezer. Theory of Functions, Functional Analysis and Their Applications. – 1991. – Vol. **56**. – P. 3–14.
3. V. A. Marchenko, Yu. A. Mitropol'skii, A. V. Pogorelov et al. Naum Il'ich Akhiezer (on the 100th Anniversary of His Birth). Ukrainian Mathematical Journal. – 2001. – Vol. **53**, No. 3. – P. 333–335. <https://doi.org/10.1023/A:1012363017843>
4. M. Sodin. Naum Il'ich Akhiezer. Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom. – 2019. – Vol. **15**, No 3. – P. 425–429.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Article history: Received: 10 April 2026. Final form: 15 May 2026.

Accepted: 20 May 2026. Published 31 May 2026.

Правила для авторів
«Вісника Харківського національного університету
імені В. Н. Каразіна»,
Серія «Математика, прикладна математика і механіка»

Редакція просить авторів при направленні статей керуватися наступними правилами.

1. В журналі публікуються статті, що мають результати математичних досліджень (англійською або українською мовами).

2. Поданням статті вважається отримання редакцією файлів статті оформлених у редакторі LaTeX, анотацій, відомостей про авторів та архіва, що включає LaTeX файли статті та файли малюнків. Файл-зразок оформлення статті можна знайти на офіційній веб-сторінці журналу (http://periodicals.karazin.ua/mech_math). Авторам необхідно зареєструватися та **завантажити подання** на цій сторінці. Будьте уважними, заповнюючи форму подання двома мовами (українською та англійською).

3. Стаття повинна починатися з розширеної анотації (обсягом **не менш ніж 1800 знаків**), в якій повинні бути чітко сформульовані мета та результати роботи. Анотація повинна бути тією мовою (англійською або українською), якою є основний текст статті. Закордонні автори можуть звернутися до редакції за допомогою з перекладом анотацій на українську мову. Повинні бути наведені прізвища, ініціали авторів, назва роботи, ключові слова та номер за міжнародною математичною класифікацією (Mathematics Subject Classification 2020). Анотація не повинна мати посилань на літературу чи малюнки. На першій сторінці вказується номер УДК класифікації. В кінці статті треба додати переклад анотації (обсягом **не менш ніж 1800 знаків**) на другу мову (англійську чи українську).

4. Список літератури повинен бути оформлений латинським шрифтом. Приклади оформлення списку літератури:

1. A.M. Lyapunov. A new case of integrability of differential equations of motion of a solid body in liquid, Rep. Kharkov Math. Soc., – 1893. – 2. V.4. – P. 81-85.
2. A.M. Lyapunov. The general problem of the stability of motion. Kharkov Mathematical Society, Kharkov. - 1892. - 251 p.

5. Кожний малюнок повинен бути пронумерований та представлений окремим файлом в одному з форматів: EPS, BMP, JPG. В файлі статті малюнок повинен бути вставлений автором. Під малюнком повинен бути підпис. Назви файлів малюнків повинні починатись з прізвища першого автора.

6. Відомості про авторів повинні містити: прізвища, імена, по батькові, службові адреси та номери телефонів, науковий ступінь, посаду, адреси електронних скриньок та інформацію про наукові профайли авторів (orcid.org, www.researcherid.com, www.scopus.com) з відповідними посиланнями. Прохання також повідомити прізвище автора, з яким треба вести листування.

7. Рекомендуємо використовувати в якості зразка оформлення останні випуски журналу (http://periodicals.karazin.ua/mech_math).

8. У випадку порушення правил оформлення редакція не буде розглядати статтю.

Електронна скринька: vestnik-khnu@ukr.net

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна,
Серія “Математика, прикладна математика і механіка”, Том 103, 2026 р.

Збірник наукових праць

Англійською та українською мовами

Підписано до друку 30.05.2026 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк цифровий.

Ум. друк. арк. 5,66

Обл.– вид. арк. 7,07

Наклад 100 пр. Зам. № 19/26

Безкоштовно.

Видавець і виготовлювач Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

Видавництво Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна