



KARAZIN UNIVERSITY
CLASSICS AHEAD OF TIME

ISSN 2221-5646 (Print),
ISSN 2523-4641 (Online)



Том 102 ' 2025

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н.Каразіна
серія

**МАТЕМАТИКА,
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
І МЕХАНІКА**

Volume 102, 2025

VISNYK OF V.N.KARAZIN
KHARKIV NATIONAL UNIVERSITY

**Ser. MATHEMATICS, APPLIED
MATHEMATICS AND MECHANICS**

ISSN 2221-5646 (Print)

ISSN 2523-4641 (Online)

Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна

Серія

«Математика, прикладна математика і механіка»

Серія започаткована 1965 р.

Том 102



Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"

Vol. 102

Харків
2025

До Вісника включено статті з математичного аналізу, математичної фізики, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення. УДК 51+531/534](062.552).

Засновник журналу Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна. Рік заснування 1965. Періодичність виходу 2 рази на рік.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних наук, категорія «Б» за спеціальностями 111 - Математика та 113 - Прикладна математика (Наказ МОН України №1643 від 28.12.2019 р.).

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 30 від 24 листопада 2025 р.).

Головний редактор: Коробов В.І. – д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Члени редакційної колегії:

Фаворов С.Ю.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Єгорова І.Є.—д-р ф.-м. наук, проф., ФТІНТ НАН України

Пастур Л.А.—д-р ф.-м. наук, проф., акад. НАН України, ФТІНТ НАН України

Хрусьов Є.Я.—д-р ф.-м. наук, проф., акад. НАН України, ФТІНТ НАН України

Шепельський Д.Г.—д-р ф.-м. наук, проф., ФТІНТ НАН України та

ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Когут П.І.—д-р ф.-м. наук, проф., Дніпровський національний університет

імені Олеся Гончара, м.Дніпро, Україна

Чуйко С.М.—д-р ф.-м. наук, проф., Інститут прикладної математики і

механіки НАН України, м.Слов'янськ, Україна

Домбровський А.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Щецина, Польща

Кадець В.М.—д-р ф.-м. наук, проф., Технологічний інститут Холона, Ізраїль

Карлович Ю.І.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Морелос, Мехіко, Мексика

Корбич Йозеф—д-р ф.-м. наук, проф., чл.-кор. ПАН, Університет Зелона Гора, Польща

Нгуєн Хоа Шон—д-р ф.-м. наук, проф., Академія наук та технології В'єтнама,

Інститут математики, Ханой, В'єтнам

Поляков А.І.—д-р ф.-м. наук, проф., ІНРІА Національний дослідницький інститут

інформатики та автоматики, Ле-Шене, Франція

Скляр Г.М.—д-р ф.-м. наук, проф., Західнопоморський технологічний університет,

Щецин, Польща

Чоке Ріверо А.Е.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Мічоакана де Сан Ніколас

де Ідальго, Мексика

Відповідальний секретар – Резуненко О.В., д-р ф.-м. наук

ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Адреса редакційної колегії: 61022, Харків, майдан Свободи, 4, ХНУ імені В.Н. Каразіна, ф-т математики і інформатики, к. 7-27, т. 7075240, **e-mail:** vestnik-khnu@ukr.net

Інтернет: <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>; http://periodicals.karazin.ua/mech_math

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Ідентифікатор медіа у Реєстрі суб'єктів у сфері медіа: R30-04455 (Рішення № 1538

від 09.05.2024 р. Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення.

Протокол № 15).

©Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, оформлення, 2025

The journal includes articles on mathematical analysis, mathematical physics, differential equations, mathematical control theory and mechanics, which contain new theoretical results in the indicated fields and have applied significance. UDC 51+531/534](062.552).

The founder of the Journal is V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine.

Year of foundation 1965. The journal is published twice a year.

For Professors, researchers, postgraduate students working in the relevant or related fields.

The journal is a professional publication in the field of physical and mathematical sciences, category «B» in specialties 111 - Mathematics and 113 - Applied Mathematics (Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 1643 dated 28 December 2019).

Approved for publication by the decision of the Academic Council of V. N. Karazin Kharkiv National University (protocol No. 30 of November 24, 2025).

Editor-in-Chief – V.I. Korobov–Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University,
Ukraine

Associate Editors:

S.Yu. Favorov–Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

I.E. Egorova–Dr. Sci., Prof., B.Verkin Institute for Low Temperature Physics
and Engineering, Ukraine

E.Ya. Khruslov–Dr. Sci., Prof., academician of NASU,
B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine

L.A. Pastur–Dr. Sci., Prof., academician of NASU,
B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine

D.G. Shepelsky–Dr. Sci., Prof., B.Verkin Institute for Low Temperature Physics
and Engineering, Ukraine

S.M. Chujko–Dr. Sci., Prof., Donbas State Pedagogical University, Ukraine

P.I. Kogut–Dr. Sci., Prof., Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine

A.E. Choque Rivero–Dr. Sci., Prof., Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo,
Mexico

Andrzej Dabrowski–Dr. Sci., Prof., University of Szczecin, Poland

V.M. Kadets–Dr. Sci., Prof., Holon Institute of Technology, Israel

Yu. Karlovich–Dr. Sci., Prof., Morelos University, Mexico

Jozef Korbicz–Dr. Sci., Prof., corresponding member of PAS, University of Zielona Gora, Poland

Nguyen Khoa Son–Dr. Sci., Prof., Vietnamese Academy of Science and Technology,
Institute of Mathematics, Hanoi, Vietnam

A.E. Polyakov–Dr. Sci., Prof., INRIA Institut National de Recherche
en Informatique et en Automatique, Le Chesnay, France

G.M. Sklyar–Dr. Sci., Prof., West Pomeranian University of Technology, Szczecin, Poland

Responsible Editor – A.V. Rezounenko, Dr. Sci., Prof.,
V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Editorial Board Address: 4, Svobody Square, Kharkiv, 61022, V.N. Karazin KhNU,
Faculty of Mathematics and Informatics, room 7-27, tel. 7075240, **e-mail:** vestnik-khnu@ukr.net
Internet: <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>; http://periodicals.karazin.ua/mech_math

The articles have undergone internal and external peer review.

Media identifier in the Register of Media Entities: R30-04455 (Decision No. 1538
dated 09.05.2024 of the National Council of Ukraine on Television and Radio Broadcasting.
Protocol No. 15).

© V. N. Karazin Kharkiv National University
design, 2025

ЗМІСТ

Медіна-Ернандес Б. Е. Матриця Неванлінни для усіченої матричної проблеми моментів Хаусдорфа через ортогональні матричні поліноми на $[a, b]$ у випадку парної кількості моментів	5
Гавриленко І. О. Оператор Якобі та стійкість вертикальних мінімальних поверхонь у субрімановій групі Лі $\widetilde{\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})}$	30
Селютін Д. Д. Про диференціювання відносно фільтрів	48
Скуріхін Р. В., Гефтер С. Л., Каролінський Є. О. Замкнені відношення еквівалентності на компактних просторах та пари комутативних C^* -алгебр: категорний підхід	57

CONTENTS

B. E. Medina-Hernandez. The Nevanlinna matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem via orthogonal matrix polynomials on $[a, b]$ for the case of an even number of moments	5
I. O. Havrylenko. The Jacobi operator and the stability of vertical minimal surfaces in the sub-Riemannian Lie group $\widetilde{\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})}$	30
D. D. Seliutin. On differentiation with respect to filters	48
R. V. Skurikhin, S. L. Gifter, E. O. Karolinsky. Closed equivalence relations on compact spaces and pairs of commutative C^* -algebras: a categorical approach	57

B. E. Medina-Hernandez

MS in math.

Ph.D math student.

Joint Graduate Program in Mathematical Sciences of the National Autonomous University of Mexico and the Michoacan University of Saint Nicholas of Hidalgo, Institute of Physics and Mathematics, Building C-3, 58060, Morelia, Michoacan, Mexico

1130390c@umich.mx  <http://orcid.org/0000-0002-5072-706X>

The Nevanlinna matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem via orthogonal matrix polynomials on $[a, b]$ for the case of an even number of moments

The scalar moment problem was first introduced by T. J. Stieltjes in his work "Recherches sur les fractions continues", Annals of the Faculty of Sciences of Toulouse 8, 1–122, (1895). He formulated it as follows: Given the moments of order k ($k = 0, 1, 2, \dots$), find a positive mass distribution on the half-line $[0, +\infty)$.

The study of matrix and operator moment problems was initiated by M. G. Krein in his seminal paper "Fundamental aspects of the representation theory of Hermitian operators with deficiency index (m, m) ", Translations of the American Mathematical Society, Series II, 97, 75–143, (1949).

This paper is related to the truncated Hausdorff matrix moment (THMM) problem: the truncated moment problem on a compact interval $[a, b]$ in contrast to the Stieltjes moment problem on $[0, +\infty)$ and the Hamburger moment problem on $(-\infty, +\infty)$. Our approach relies on V. P. Potapov's method, which reformulates interpolation and moment problems as equivalent matrix inequalities and introduces auxiliary matrices that satisfy the $\tilde{J}_q$ -inner function property of the Potapov class, together with a system of column pairs.

The method begins by constructing Hankel matrices from the prescribed moments. If these matrices are positive semidefinite, the THMM problem is solvable. In the strictly positive definite case, known as the non-degenerate case, we transform the associated matrix inequalities to derive the Nevanlinna (or resolvent) matrix of the THMM problem, which characterizes its solutions.

This framework has been extensively applied, for instance in A. E. Choque Rivero, Yu. M. Dyukarev, B. Fritzsche, and B. Kirstein, "A truncated matrix moment problem on a finite interval", in Interpolation, Schur Functions

and Moment Problems, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser, Basel, 165, 121–173, (2006).

The main contribution of the present work is to represent the Nevanlinna matrix of the THMM problem in terms of orthogonal matrix polynomials (OMP) and their associated polynomials of the second kind at point b . Note that the representation at point a was obtained earlier in A. E. Choque Rivero, “From the Potapov to the Krein–Nudel’man representation of the resolvent matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem” Bulletin of the Mexican Mathematical Society, 21(2), 233–259 (2015).

In addition, we establish new identities involving OMP and reformulate an explicit relationship between the Nevanlinna matrices of the THMM problem at points a and b , through OMP.

Keywords: Truncated Hausdorff matrix moment problem; Nevanlinna matrix; orthogonal matrix polynomials.

2020 Mathematics Subject Classification: 76A11; 76B11; 76M11.

1. Introduction

The truncated Hausdorff matrix moment (THMM) problem is stated as follows: Given an interval $[a, b]$ on the real axis and a finite sequence of $q \times q$ matrices $(s_j)_{j=0}^m$, where q and m are natural numbers, find the set $\mathcal{M}_{\geq}^q[[a, b], \mathfrak{B} \cap [a, b]; (s_j)_{j=0}^m]$ of all nonnegative Hermitian $q \times q$ measures σ defined on the σ -algebra of all Borel subsets of the interval $[a, b]$ such that

$$s_j = \int_{[a,b]} t^j d\sigma(t) \quad (1)$$

is valid for each integer j with $0 \leq j \leq m$.

The criteria for solving the THMM problem with an even number of moments (resp. an odd number of moments) are provided in [12, Theorem 1.3] (resp. [13, Theorem 1.3]). Following these results, for $m = 2n + 1$ (resp. $m = 2n$), the perturbed moments are defined as follows:

$$\begin{aligned} s_j^{(1)} &:= s_j, & 0 \leq j \leq m, \\ s_j^{(2)} &:= -abs_j + (a+b)s_{j+1} - s_{j+2}, & 0 \leq j \leq m-2, \\ s_j^{(3)} &:= bs_j - s_{j+1}, & 0 \leq j \leq m-1, \\ s_j^{(4)} &:= -as_j + s_{j+1}, & 0 \leq j \leq m-1. \end{aligned}$$

Based on these perturbed moments, we construct the block Hankel matrices

$$H_{r,j} := (s_{j+k}^{(r)})_{j,k=0}^j = \begin{pmatrix} s_0^{(r)} & s_1^{(r)} & \cdots & s_j^{(r)} \\ s_1^{(r)} & s_2^{(r)} & \cdots & s_{j+1}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_j^{(r)} & s_{j+1}^{(r)} & \cdots & s_{2j}^{(r)} \end{pmatrix} \quad (2)$$

for $r = 1, 2, 3$ and 4.

It was proven in [13, Theorem 1.3] (resp. [12, Theorem 1.3]) that the THMM problem has a solution if and only if the block matrices $H_{1,n}$ and $H_{2,n-1}$ (resp. $H_{3,n}$ and $H_{4,n}$) are both nonnegative Hermitian.

To characterize the solution set of the THMM problem $\mathcal{M}_{\geq}^q[[a, b], \mathfrak{B} \cap [a, b]; (s_j)_{j=0}^m]$ for $m = 2n$ and $m = 2n + 1$, the problem is usually reformulated by identifying an associated class of holomorphic matrix-valued functions given by

$$\mathfrak{S}_{\geq}^q[[a, b], \mathfrak{B} \cap [a, b]; (s_j)_{j=0}^m] := \left\{ s(z) = \int_{[a,b]} \frac{d\sigma(t)}{t-z}, \sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q[[a, b], \mathfrak{B} \cap [a, b]; (s_j)_{j=0}^m] \right\}.$$

A matrix function $s(z) \in \mathfrak{S}_{\geq}^q[[a, b], \mathfrak{B} \cap [a, b]; (s_j)_{j=0}^m]$ is called the associated solution to the THMM problem. This technique, commonly referred to as V. P. Potapov's method [26], has been successfully applied in numerous works, including [4, 5, 6, 14, 19, 20, 21] and others.

The THMM problem is said to be non-degenerate when both block matrices $H_{1,n}$ and $H_{2,n-1}$ (resp. $H_{3,n}$ and $H_{4,n}$) are positive definite Hermitian.

A description of the solution set of the THMM problem, which encompasses both degenerate and non-degenerate cases, is provided in [24] through a function-theoretic Schur-Nevanlinna-type algorithm. An algebraic version of this procedure, which is applicable to (finite or infinite) sequences of complex $q \times q$ matrices, was developed based on the Schur analysis of matrix Hausdorff moment sequences [22, 23]. See also [25].

Henceforth, we focus exclusively on the non-degenerate case.

Definition 1. [15, Definition 1.1]. Let $[a, b]$ be a finite interval on real axis $\mathbb{R}$. The sequence of $q \times q$ matrices $(s_j)_{j=0}^{2n}$ (resp. $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$) is called a Hausdorff positive definite sequence on $[a, b]$ if the block Hankel matrices $H_{1,n}$ and $H_{2,n-1}$ (resp. $H_{3,n}$ and $H_{4,n}$) are both positive definite matrices.

Throughout this paper, we restrict our attention to sequences that are Hausdorff positive definite on $[a, b]$.

According to Definition 1, the THMM problem is also considered non-degenerate when the sequence $(s_j)_{j=0}^m$, for $m = 2n$ and $m = 2n + 1$ is positive definite on $[a, b]$. In such cases, the corresponding solution $s(z)$ to the THMM problem is given by

$$s(z) = \left(\alpha^{(m)}(z) \mathbf{p}(z) + \beta^{(m)}(z) \mathbf{q}(z) \right) \left(\gamma^{(m)}(z) \mathbf{p}(z) + \delta^{(m)}(z) \mathbf{q}(z) \right)^{-1}, \quad (3)$$

where $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$ denote $q \times q$ matrix-valued functions of the complex variable z , which are defined in an appropriate domain in the complex plane. See [12, Definition 5.2] and [13, Definition 5.2]. The functions $\alpha^{(m)}(z)$, $\beta^{(m)}(z)$, $\gamma^{(m)}(z)$, and $\delta^{(m)}(z)$ are matrix-valued polynomials constructed from the given moment sequence $\{s_j\}_{j=0}^m$. These matrices $\alpha^{(m)}(z)$, $\beta^{(m)}(z)$, $\gamma^{(m)}(z)$, and $\delta^{(m)}(z)$ collecti-

vely constitute the entries of the Nevanlinna matrix

$$U^{(m)}(z) := \begin{bmatrix} \alpha^{(m)}(z) & \beta^{(m)}(z) \\ \gamma^{(m)}(z) & \delta^{(m)}(z) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

which is linked to the THMM problem. The Nevanlinna matrix was first generally defined in [1, Definition 2.4.3, p. 55]. Within the THMM problem, this matrix is also called the resolvent matrix associated with the THMM problem. The Nevanlinna matrix $U^{(m)}(z)$ is a $2q \times 2q$ matrix polynomial defined on the entire complex plane. This matrix is vital in analyzing the solution to the THMM problem; see Equations (3) and (4).

As presented in [18], the Nevanlinna matrix of the THMM problem was constructed regarding to point $z = 0$. In the same work [18], both even and odd number of moments were considered. In [12] and [13], the Nevanlinna matrix for the THMM problem was examined at point $z = a$, specifically for the even and odd cases of moments, respectively. Furthermore, [15] introduced a novel Nevanlinna matrix that includes both even and odd moment cases and is constructed with respect to point $z = b$.

Similar procedures to those described in [12] and [13] can help construct the Nevanlinna matrix regarding to point $z = b$

$$\widehat{V}^{(m)}(z) := \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}^{(m)}(z) & \widehat{\beta}^{(m)}(z) \\ \widehat{\gamma}^{(m)}(z) & \widehat{\delta}^{(m)}(z) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

The representation of the Nevanlinna matrix at point $z = b$ is crucial, as its components define the solution set of the THMM problem (Equation (3)). Furthermore, constructing the Nevanlinna matrix at $z = b$ enables the derivation of new relationships between OMP, Dyukarev-Stieltjes parameters, matrix continued fractions (see [2, 3, 4, 7, 8]), and Blaschke-Potapov factors [5, 6]. Moreover, the admissible control problem and the time optimal control problem may be solved by using the Nevanlinna matrix with respect to point $z = b$. See [9], [10], and [11].

For $m = 2n + 1$ (resp. $m = 2n$), an explicit relationship was established between the Nevanlinna matrix $U^{(m)}$ regarding to point $z = a$, introduced in [12, Proposition 6.10] (resp. [13, Proposition 6.10]), and the Nevanlinna matrix $\widehat{V}^{(m)}$ constructed in [15, Definition 4.1] (resp. [15, Definition 3.1]) with respect to point $z = b$. This relation takes the form

$$U^{(m)}(z) \mathfrak{D}^{(m)} = \widehat{V}^{(m)}(z), \quad (6)$$

where $\mathfrak{D}^{(m)}$ is a constant invertible matrix. The relation (6) was proven in [15, Theorem 4.3] (resp. [15, Theorem 3.8]).

Under specific conditions, an additional explicit connection was established between the Nevanlinna matrices: one evaluated at point $z = a$ [12], and the other at $z = 0$ [18].

Next, regarding [14], we provide a brief review of general notation related to matrix polynomials.

We will use $\mathbb{R}$, and $\mathbb{N}_0$ to denote the set of real numbers, and nonnegative integers, respectively. Through 0_q , and I_q , we denote the $q \times q$ zero matrix, and the $q \times q$ identity matrix, respectively.

A matrix polynomial is an expression of the form $P(t) = A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \dots + A_{n-1} t + A_n$, where $t \in \mathbb{R}$ and each coefficient A_k is a $q \times q$ matrix, with $A_0 \neq 0$. Here, the degree of P is n , denoted by $\deg P := n$. If A_0 equals the identity matrix, the polynomial is called monic. Note that if $P(t) \equiv 0_q$ for all $t \in \mathbb{R}$, then $\deg P := -\infty$. When $\deg P = n \geq 0$, the matrix A_n is referred to as the leading coefficient of P . For all $\ell \in \mathbb{N}_0$ and $\kappa \in \mathbb{N}_0$ with $\ell \leq \kappa$, we define the index set $\mathbb{Z}_{\ell, \kappa} := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \ell \leq n \leq \kappa\}$. The following remark was partially reproduced from [14, Definition 3.2] and [14, Remark 3.6].

Remark 1. Let $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, and let $(s_j)_{j=0}^{2n}$ be a Hausdorff positive definite sequence: The corresponding block Hankel matrix $H_{1,n}$ is positive definite. Let σ be a nonnegative Hermitian $q \times q$ measure on $\mathbb{R}$ satisfying (1) for $0 \leq j \leq 2n$. A sequence $(P_j)_{j=0}^n$ of complex $q \times q$ matrix polynomials is called a monic left orthogonal system of matrix polynomials with respect to σ if the three conditions below are fulfilled.

(I) $\deg P_j = j$ for all $j \in \mathbb{Z}_{0,n}$.

(II) P_j has the leading coefficient I_q for all $j \in \mathbb{Z}_{0,n}$.

(III) The following equality is satisfied:

$$\int_{[a,b]} P_j d\sigma P_k^* = \begin{cases} \widehat{H}_{1,j}, & \text{if } j = k, \\ 0_q, & \text{if } j \neq k \end{cases}$$

for all $0 \leq j, k \leq n$ where $\widehat{H}_{1,j}$ denotes the Schur complement of $H_{1,j-1}$ in $H_{1,j}$. See Definition 4.

Let σ be a nonnegative Hermitian measure on the Borel sets of $[a, b]$, and let B be a Borel set of $[a, b]$. Denote $\sigma_1 := \sigma$. Let us introduce the following perturbed measures:

$$\begin{aligned} \sigma_2(B) &:= \int_B (b-t)(t-a)\sigma(dt), \\ \sigma_3(B) &:= \int_B (t-a)\sigma(dt), \\ \sigma_4(B) &:= \int_B (b-t)\sigma(dt). \end{aligned}$$

In Definitions 2 and 3, we introduced four monic orthogonal systems of matrix polynomials, $(P_{r,j})_{j=0}^n$ for $r = 1, 2, 3, 4$. As shown in Proposition 1, $(P_{r,j})_{j=0}^n$ for

$r = 1, 3, 4$ (resp. $(P_{2,j})_{j=0}^{n-1}$) are orthogonal with respect to σ_r for $r = 1, 3, 4$, (resp. σ_2).

We now revisit key aspects of the Nevanlinna matrix (4) in relation to OMP. The Nevanlinna matrix associated with the THMM problem was initially formulated by using OMP for an even number of moments in [28]; an odd number of moments was first explored in [3]. Furthermore, [7] introduced alternative representations of the Nevanlinna matrix via OMP, specifically at point $z = a$.

Moreover, explicit relationships between Nevanlinna matrices expressed with OMP have been established.

In [17], an explicit relationship between Nevanlinna matrices through OMP was presented. In this relationship, the Nevanlinna matrix, which was obtained in [18] regarding to point $z = 0$, was considered. Additionally, this relation involved the Nevanlinna matrices introduced in [12] and [13], both with respect to point $z = a$.

Main results of the work

In this work, we consider the case of an even number of given moments.

- a) Every block of the Nevanlinna matrix of the THMM problem at point $z = b$ admits an explicit representation via OMP on $[a, b]$ and their polynomials of the second kind; see Theorem 2.
- b) In [15, Theorem 4.3], an explicit relationship was obtained between the Nevanlinna matrices of the THMM problem regarding to point $z = a$ and point $z = b$. In the present work, we establish an explicit relation between the Nevanlinna matrices of the THMM problem with respect to point $z = a$ and point $z = b$ via OMP.

This paper is organized as follows. In Sections 2 and 3, notations and algebraic identities are introduced, respectively. Furthermore, the orthogonality of the polynomials introduced in Definitions 2 and 3 appear in Section 4. In Section 5, we represent the Nevanlinna matrix of the THMM problem at point $z = b$ through OMP for an even number of moments. In Section 6, we obtain identities related to the OMP defined in Definitions 2 and 3. Finally, Section 7, presents an explicit relation for an even number of moments between the Nevanlinna matrices of the THMM problem regarding to point $z = a$ and point $z = b$ via OMP.

2. Notations and preliminaries

In this section, we reproduce some matrix notations from [17] that appear throughout this work.

We will use $\mathbb{C}$ to denote the set of complex numbers. Through $\mathbb{C}^{p \times q}$, and $0_{p \times q}$, we denote the $p \times q$ complex-valued matrices, and the $p \times q$ zero matrix, respectively. Let us recall that 0_q , and I_q , denote the $q \times q$ zero matrix, and the $q \times q$ identity matrix, respectively. In cases where the sizes of the null and the identity matrix are clear, we will omit the indices.

Let $R_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{(j+1)q \times (j+1)q}$ be defined by

$$R_j(z) := (I_{(j+1)q} - zT_j)^{-1}, \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad (7)$$

with

$$T_0 := 0_q, \quad T_j := \begin{pmatrix} 0_{q \times jq} & 0_q \\ I_{jq} & 0_{jq \times q} \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (8)$$

Additionally, for $j \in \mathbb{N}_0$ let

$$v_0 := I_q, \quad v_j := \text{column}(I_q, 0_{jq \times q}). \quad (9)$$

For each positive integer j such that $1 \leq j \leq n$, let

$$L_{1,j} := (\delta_{i,k+1} I_q)_{\substack{i=0,\dots,j \\ k=0,\dots,j-1}} \quad \text{and} \quad L_{2,j} := (\delta_{i,k} I_q)_{\substack{i=0,\dots,j \\ k=0,\dots,j-1}}, \quad (10)$$

where $\delta_{i,k}$ denotes the Kronecker symbol defined by $\delta_{i,k} := 1$ if $i = k$, and $\delta_{i,k} := 0$ if $i \neq k$.

For $0 \leq j \leq k$, we set

$$y_{[j,k]} := \text{column}(s_j, s_{j+1}, \dots, s_k), \quad \hat{y}_{[j,k]} := \text{column}(s_j^{(2)}, s_{j+1}^{(2)}, \dots, s_k^{(2)}). \quad (11)$$

For $j \in \mathbb{N}_0$, we define the following auxiliary matrices:

$$\tilde{H}_{1,j} := (s_{k+\ell+1})_{\ell,k=0}^j, \quad \tilde{H}_{2,j} := (s_{k+\ell+2})_{\ell,k=0}^j, \quad (12)$$

$$u_j := \text{column}(-s_0, -s_1, \dots, -s_j). \quad (13)$$

Let $n \in \mathbb{N}$, and let $(s_j)_{j=0}^{2n}$ be a sequence of complex $q \times q$ matrices. Define

$$u_{1,0} := 0_q, \quad u_{1,j} := \text{column}(0_q, -y_{[0,j-1]}), \quad 1 \leq j \leq n, \quad (14)$$

$$u_{2,0} := -(a+b)s_0 + s_1,$$

$$u_{2,j-1} := \text{column}(u_{2,0}, -\hat{y}_{[0,j-2]}), \quad 1 \leq j \leq n-1. \quad (15)$$

Now let $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ be a sequence of complex $q \times q$ matrices. We set

$$u_{3,0} := s_0, \quad u_{3,j} := y_{[0,j]} - b \text{column}(0_q, y_{[0,j-1]}), \quad 1 \leq j \leq n, \quad (16)$$

$$u_{4,0} := -s_0, \quad u_{4,j} := -y_{[0,j]} + a \text{column}(0_q, y_{[0,j-1]}), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (17)$$

Let $y_{[j,k]}$ and $\hat{y}_{[j,k]}$ be as in (11). Define

$$Y_{1,j} := y_{[j,2j-1]}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad Y_{2,j} := \hat{y}_{[j,2j-1]}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \quad (18)$$

$$Y_{3,j} := b y_{[j,2j-1]} - y_{[j+1,2j]}, \quad Y_{4,j} := -a y_{[j,2j-1]} + y_{[j+1,2j]}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (19)$$

Finally, let $H_{r,j}$ and $Y_{r,j}$, for $r = 1, 2, 3$, and 4 be as in (2), (18), and (19). We denote

$$\Sigma_{r,j} := \text{column}(-H_{r,j-1}^{-1} Y_{r,j}, I_q) \quad (20)$$

for $r = 1, 3, 4$ (resp. $r = 2$), with $1 \leq j \leq n$ (resp. $1 \leq j \leq n-1$).

In Theorem 2 we obtain a representation of the Nevanlinna matrix of the THHM problem in terms of the matrix polynomials introduced below. These polynomials were first defined in [3]. Their orthogonality will be discussed later in Proposition 1.

Definition 2. Let $(s_k)_{k=0}^{2j}$ be a sequence that is Hausdorff positive definite on $[a, b]$. Let $u_{r,j}$, $\Sigma_{r,j}$ for $r = 1, 2$, R_j , and v_j be defined by (14), (15), (20), (7), and (9), respectively. We define for all $z \in \mathbb{C}$

$$P_{1,0}^*(\bar{z}) := I_q, \quad Q_{1,0}^*(\bar{z}) := 0_q, \quad P_{2,0}^*(\bar{z}) := I_q, \quad Q_{2,0}^*(a, b, \bar{z}) := -(u_{2,0}^* + z s_0), \quad (21)$$

$$P_{1,j}^*(\bar{z}) := v_j^* R_j^*(\bar{z}) \Sigma_{1,j}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (22)$$

$$Q_{1,j}^*(\bar{z}) := -u_{1,j}^* R_j^*(\bar{z}) \Sigma_{1,j}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (23)$$

$$P_{2,j}^*(a, b, \bar{z}) := v_j^* R_j^*(\bar{z}) \Sigma_{2,j}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \quad (24)$$

$$Q_{2,j}^*(a, b, \bar{z}) := -(u_{2,j}^* + z s_0 v_j^*) R_j^*(\bar{z}) \Sigma_{2,j}, \quad 1 \leq j \leq n-1. \quad (25)$$

The matrix polynomials $Q_{1,j}$ and $Q_{2,j}$ are polynomials of the second kind with respect to $P_{1,j}$ and $P_{2,j}$.

Remark 2. For brevity, we will frequently omit the parameters a and b in $P_{2,j}^*$ and $Q_{2,j}^*$. Specifically, rather than writing $P_{2,j}^*(a, b, \bar{z})$ and $Q_{2,j}^*(a, b, \bar{z})$, we use the simplified expressions $P_{2,j}^*(\bar{z})$ and $Q_{2,j}^*(\bar{z})$. In particular, when $z = a$ or $z = b$, we will write $P_{2,j}^*(a)$, $Q_{2,j}^*(a)$, $P_{2,j}^*(b)$, and $Q_{2,j}^*(b)$, respectively.

The matrix polynomials introduced below will be employed in Lemma 6 of Section 5. They were first defined in [28], and their orthogonality will be examined later in Proposition 1.

Definition 3. Let $(s_k)_{k=0}^{2j+1}$ be a sequence that is Hausdorff positive definite on $[a, b]$. Let $u_{r,j}$, $\Sigma_{r,j}$ for $r = 3, 4$, R_j , and v_j be defined by (16), (17), (20), (7), and (9), respectively. We define for all $z \in \mathbb{C}$ and $1 \leq j \leq n$

$$P_{3,0}^*(\bar{z}) := I_q, \quad Q_{3,0}^*(\bar{z}) := s_0, \quad P_{4,0}^*(\bar{z}) := I_q, \quad Q_{4,0}^*(\bar{z}) := -s_0, \quad (26)$$

$$P_{3,j}^*(b, \bar{z}) := v_j^* R_j^*(\bar{z}) \Sigma_{3,j}, \quad (27)$$

$$Q_{3,j}^*(b, \bar{z}) := u_{3,j}^* R_j^*(\bar{z}) \Sigma_{3,j}, \quad (28)$$

$$P_{4,j}^*(a, \bar{z}) := v_j^* R_j^*(\bar{z}) \Sigma_{4,j}, \quad (29)$$

$$Q_{4,j}^*(a, \bar{z}) := u_{4,j}^* R_j^*(\bar{z}) \Sigma_{4,j}. \quad (30)$$

The matrix polynomials $Q_{3,j}$ and $Q_{4,j}$ are polynomials of the second kind with respect to $P_{3,j}$ and $P_{4,j}$.

As in the Remark 2, we will often omit the parameters a and b in the polynomials $P_{3,j}^*$, $Q_{3,j}^*$, $P_{4,j}^*$, and $Q_{4,j}^*$.

3. Main algebraic identities

Here we present the identities that will express the Nevanlinna matrix of the THMM problem through OMP in Section 5.

The following definition below is based on [7, Equations (2.9)–(2.10), (2.19)–(2.20)].

Definition 4. Let $(s_k)_{k=0}^m$ for $m = 2j$ (resp. $m = 2j + 1$) be a sequence that is Hausdorff positive definite on $[a, b]$. Let $H_{r,j}$, $Y_{r,j}$ for $r = 1, 2, 3$, and 4 be defined by (2), (18), and (19). Let $\hat{H}_{r,j}$ denote the Schur complement of the block matrix $H_{r,j-1}$ in $H_{r,j}$:

$$\hat{H}_{r,0} := s_0^{(r)}, \quad \hat{H}_{r,j} := s_{2j}^{(r)} - Y_{r,j}^* H_{r,j-1}^{-1} Y_{r,j}, \quad (31)$$

for $r = 1, 3, 4$ (resp. $r = 2$) and for $1 \leq j \leq n$ (resp. $1 \leq j \leq n - 1$).

In Lemmas 1, 2, and 3, we introduce a collection of auxiliary identities for the block Hankel matrices and the block matrices introduced in (7)–(12), as well as in Definition 4.

Lemma 1. Let $(s_k)_{k=0}^m$ for $m = 2j$ (resp. $m = 2j + 1$) be a sequence that is Hausdorff positive definite on $[a, b]$. Let T_j and $L_{2,j}$ be defined as in (8) and (10). Let $H_{r,j}$, $\hat{H}_{r,j}$, and $\Sigma_{r,j}$ for $r = 1, 2, 3$, and 4 be defined by (2), (31), and (20). Therefore, the following identities hold:

$$H_{r,j}^{-1} = \begin{pmatrix} H_{r,j-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \Sigma_{r,j} \hat{H}_{r,j}^{-1} \Sigma_{r,j}^*, \quad (32)$$

$$T_j H_{r,j} \Sigma_{r,j} = 0, \quad (33)$$

$$L_{2,j}^* H_{r,j} \Sigma_{r,j} = 0, \quad (34)$$

for $r = 1, 3, 4$ (resp. $r = 2$) and for $1 \leq j \leq n$ (resp. $1 \leq j \leq n - 1$).

Proof. The identity (32) can be proven as in [3, pages 935–936]. The identities (33) and (34) are proven in [17, Corollary 2.2]. $\square$

Lemma 2. Let T_j , v_j , u_j , $u_{1,j}$, $L_{1,j}$, $L_{2,j}$, $\tilde{H}_{1,j}$, $\tilde{H}_{2,j}$, and $H_{1,j}$ be defined by (8), (9), (13), (14), (10), (12), and (2) for $r = 1$, respectively. Thus, for $0 \leq j \leq n$ (resp. $1 \leq j \leq n$) the following identities are valid:

$$T_j \tilde{H}_{1,j} - H_{1,j} + v_j v_{j+1}^* H_{1,j+1} L_{2,j+1} = 0, \quad (35)$$

$$T_j \tilde{H}_{2,j} - \tilde{H}_{1,j} + v_j v_{j+1}^* \tilde{H}_{1,j+1} L_{2,j+1} = 0, \quad (36)$$

$$L_{1,j}^* H_{1,j} - L_{2,j}^* \tilde{H}_{1,j} = 0, \quad (37)$$

$$L_{2,j}^* H_{1,j} + u_{j-1} v_j^* - \tilde{H}_{1,j-1} L_{1,j}^* = 0, \quad (38)$$

$$T_j u_j - u_{1,j} = 0, \quad (39)$$

$$u_j^* - u_{j+1}^* L_{2,j+1} = 0, \quad (40)$$

$$u_j^* + v_j^* H_{1,j} = 0, \quad (41)$$

$$L_{1,j} L_{1,j}^* - T_j T_j^* = 0, \quad (42)$$

$$L_{2,j} T_{j-1}^* - T_j^* L_{2,j} = 0, \quad (43)$$

$$u_{1,j}^* + v_j^* H_{1,j} T_j^* = 0, \quad (44)$$

$$v_j - L_{2,j+1}^* v_{j+1} = 0, \quad (45)$$

$$L_{2,j} L_{1,j}^* - T_j^* = 0. \quad (46)$$

Proof. The identities can be derived through direct calculations. $\square$

Lemma 3. *Let $w, z \in \mathbb{C}$. Let $R_j, T_j, v_j, u_j, u_{1,j}, u_{2,j-1}, u_{3,j}, u_{4,j}, L_{1,j}, L_{2,j}$, and $H_{1,j}$ be defined by (7), (8), (9), (13), (14), (15), (16), (17), (10), and (2) for $r = 1$, respectively. Therefore, for $0 \leq j \leq n$ (resp. $1 \leq j \leq n$) the following identities are valid:*

$$R_j(z) - R_j(w) = (z - w)R_j(z)T_jR_j(w), \quad (47)$$

$$zR_j(z) - wR_j(w) = (z - w)R_j(z)R_j(w), \quad (48)$$

$$R_j^{*-1}(\bar{z}) + (z - a)T_j^* - R_j^{*-1}(a) = 0, \quad (49)$$

$$u_{1,j}^* R_j^*(\bar{z})(T_j^* L_{1,j} - L_{1,j} T_{j-1}^*) = 0, \quad (50)$$

$$u_{3,j} = -R_j^{-1}(b)u_j, \quad u_{4,j} = R_j^{-1}(a)u_j, \quad (51)$$

$$R_j^{*-1}(\bar{z})L_{2,j}R_{j-1}^*(\bar{z}) - L_{2,j} = 0, \quad (52)$$

$$(u_{2,j-1}^* + bs_0 v_{j-1}^*)R_{j-1}^*(b) - v_j^* H_{1,j}(L_{1,j} - aL_{2,j}) = 0. \quad (53)$$

Proof. The identities from (47) to (52) can be verified through direct calculation. A similar identity to (53) is established in [2, Proposition 3.4]. $\square$

We recall the linear relations between the block Hankel matrices $H_{r,j}$ and the auxiliary matrices $\tilde{H}_{1,j}, \tilde{H}_{2,j}$. These relations were introduced in [7, Equations (1.5)–(1.6)].

Remark 3. *Let $\tilde{H}_{1,j}, \tilde{H}_{2,j}$, and $H_{r,j}$ be defined by (12) and (2) for $r = 1, 2, 3$, and 4. Thus, for $0 \leq j \leq n$ the following identities hold:*

$$H_{2,j} = -abH_{1,j} + (a + b)\tilde{H}_{1,j} - \tilde{H}_{2,j}, \quad (54)$$

$$H_{3,j} = bH_{1,j} - \tilde{H}_{1,j}, \quad (55)$$

$$H_{4,j} = -aH_{1,j} + \tilde{H}_{1,j}. \quad (56)$$

In the following lemma, we obtain new coupling identities concerning the block matrices that were introduced in (7)–(12), as well as the block Hankel matrices introduced in (2).

Lemma 4. *Let $z \in \mathbb{C}$. Let $R_j, T_j, v_j, u_j, u_{1,j}, u_{2,j-1}, L_{1,j}, L_{2,j}$, and $H_{r,j}$ be defined by (7), (8), (9), (13), (14), (15), (10), and (2) for $r = 1, 2, 3$, and 4,*

respectively. For $0 \leq j \leq n$ (resp. $1 \leq j \leq n$) the following identities hold:

$$-R_j^{*-1}(\bar{z}) + (b-z)T_j^* + R_j^{*-1}(b) = 0, \quad (57)$$

$$-v_{j+1}^* L_{2,j+1} H_{1,j} + v_{j+1}^* H_{1,j+1} L_{2,j+1} = 0, \quad (58)$$

$$H_{1,j-1} L_{1,j}^* - L_{2,j}^* H_{1,j} T_j^* = 0, \quad (59)$$

$$u_{2,j-1}^* T_{j-1}^* + s_0 v_{j-1}^* + u_{1,j}^* (L_{1,j} (I - b T_{j-1}^*) - a (I - b T_j^*) L_{2,j}) = 0, \quad (60)$$

$$R_{j-1}^*(b) L_{1,j}^* R_j^{*-1}(b) - L_{1,j}^* = 0, \quad (61)$$

$$u_{j-1} v_j^* + H_{3,j-1} L_{1,j}^* + L_{2,j}^* H_{1,j} R_j^{*-1}(b) = 0, \quad (62)$$

$$u_j v_{j+1}^* R_{j+1}^*(b) + H_{3,j} R_j^*(b) L_{1,j+1}^* + L_{2,j+1}^* H_{1,j+1} = 0, \quad (63)$$

$$-v_j v_{j+1}^* H_{1,j+1} (L_{1,j+1} - a L_{2,j+1}) + (I - b T_j) H_{4,j} + T_j H_{2,j} = 0, \quad (64)$$

$$(u_{2,j}^* + z s_0 v_j^*) R_j^*(\bar{z}) - (u_{2,j}^* + b s_0 v_j^*) R_j^*(b) + (z - b) u_{1,j+1}^* R_{j+1}^*(\bar{z}) \cdot (L_{1,j+1} - a L_{2,j+1}) = 0. \quad (65)$$

Proof. The identities (57)–(61) are established by straightforward computation. Moreover, (62) is obtained from (55), (38), and (59). By combining (61) with (62), we have (63). Identity (64) follows from (56), (54), (37), (35), and (36).

Let $\Delta_{(65)}$ be the left-hand side of (65). By using (47) and (48), we have for all $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \Delta_{(65)} &= u_{2,j-1}^* (R_{j-1}^*(b) - R_{j-1}^*(\bar{z})) + s_0 v_{j-1}^* (b R_{j-1}^*(b) - z R_{j-1}^*(\bar{z})) \\ &\quad - (z - b) u_{1,j}^* R_j^*(\bar{z}) (L_{1,j} - a L_{2,j}) \\ &= (b - z) [(u_{2,j-1}^* T_{j-1}^* + s_0 v_{j-1}^*) R_{j-1}^*(\bar{z}) R_{j-1}^*(b) + u_{1,j}^* R_j^*(\bar{z}) (L_{1,j} - a L_{2,j})] \\ &= (b - z) (-u_{1,j}^* [L_{1,j} (I - b T_{j-1}^*) - a (I - b T_j^*) L_{2,j}] R_{j-1}^*(\bar{z}) R_{j-1}^*(b) \\ &\quad + u_{1,j}^* R_j^*(\bar{z}) (L_{1,j} - a L_{2,j})) \\ &= (b - z) u_{1,j}^* (-[L_{1,j} - a L_{2,j}] R_{j-1}^*(\bar{z}) + R_j^*(\bar{z}) (L_{1,j} - a L_{2,j})) \\ &= z(b - z) u_{1,j}^* R_j^*(\bar{z}) [T_j^* (L_{1,j} - a L_{2,j}) - (L_{1,j} - a L_{2,j}) T_{j-1}^*] R_{j-1}^*(\bar{z}) \\ &= z(b - z) u_{1,j}^* R_j^*(\bar{z}) (T_j^* L_{1,j} - L_{1,j} T_{j-1}^*) R_{j-1}^*(\bar{z}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

The third equality follows from (60), whereas (52) was used in the fourth equality. The fifth equality follows from (43), whereas (50) was used in the last equality. $\square$

4. Orthogonality of matrix polynomials

The proposition below presents the orthogonality of the matrix polynomials $P_{r,j}$ for $r = 1, 2, 3$, and 4 on the interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$. This result is partially adapted from [7, Proposition 2.5] where we restrict attention to parts a) and b).

Proposition 1. Let $\widehat{H}_{r,j}$ for $r = 1, 2, 3$, and 4 be as in (31). Let $P_{r,j}$ and $Q_{r,j}$ for $r = 1, 2, 3$, and 4 be the matrix polynomials introduced in Definitions 2 and 3.

- a) The polynomials $P_{1,j}$ and $P_{2,j}$ are OMP on $[a, b]$ with respect to $\sigma(dt)$ and $(b-t)(t-a)\sigma(dt)$, respectively. More precisely,

$$\int_{[a,b]} P_{r,j}(t)((b-t)(t-a))^{r-1} d\sigma(t) P_{r,\ell}^*(t) = \begin{cases} 0_q & j \neq \ell \\ \widehat{H}_{r,j} & j = \ell, \end{cases} \quad r = 1, 2.$$

- b) The polynomials $P_{3,j}$ and $P_{4,j}$ are OMP on $[a, b]$ with respect to $(b-t)\sigma(dt)$ and $(t-a)\sigma(dt)$, respectively. Specifically,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} P_{3,j}(t)(b-t) d\sigma(t) P_{3,\ell}^*(t) &= \begin{cases} 0_q & j \neq \ell \\ \widehat{H}_{3,j} & j = \ell, \end{cases} \\ \int_{[a,b]} P_{4,j}(t)(t-a) d\sigma(t) P_{4,\ell}^*(t) &= \begin{cases} 0_q & j \neq \ell \\ \widehat{H}_{4,j} & j = \ell. \end{cases} \end{aligned}$$

Proof. Part a) is proven in [3, Section 4]. Part b) is proven in [28, Theorems 2.12 and 2.13]. $\square$

5. The Nevanlinna matrix of the THMM problem at point $z = b$ via OMP

This section focuses on the representation of the Nevanlinna matrix $\widehat{V}^{(2j+1)}$ associated with the THMM problem through OMP regarding to point $z = b$, for an even number of moments and specifically when $m = 2j + 1$ in the sequence $(s_k)_{k=0}^m$.

Let us reproduce the Nevanlinna matrix $\widehat{V}^{(2j+1)}(z)$ for the case of an even number of moments obtained in [15, Definition 4.1].

Definition 5. Let $(s_k)_{k=0}^{2j+1}$ be a sequence that is Hausdorff positive definite on $[a, b]$. Let $H_{r,j}$ for $r = 3, 4$, R_j , v_j , $u_{3,j}$, and $u_{4,j}$ be defined as in (2) for $r = 3, 4$, (7), (9), (17), and (16), respectively. The $2q \times 2q$ matrix polynomial

$$\widehat{V}^{(2j+1)}(z) := \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}^{(2j+1)}(z) & \widehat{\beta}^{(2j+1)}(z) \\ \widehat{\gamma}^{(2j+1)}(z) & \widehat{\delta}^{(2j+1)}(z) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq j \leq n, \quad (66)$$

with

$$\widehat{\alpha}^{(2j+1)}(z) := I + (b-z)u_{4,j}^* R_j^*(\bar{z}) H_{4,j}^{-1} R_j(b) v_j, \quad (67)$$

$$\widehat{\gamma}^{(2j+1)}(z) := (b-z)(z-a) v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_{4,j}^{-1} R_j(b) v_j, \quad (68)$$

$$\widehat{\beta}^{(2j+1)}(z) := -u_{3,j}^* R_j^*(\bar{z}) H_{3,j}^{-1} R_j(b) u_{3,j}, \quad (69)$$

$$\widehat{\delta}^{(2j+1)}(z) := I - (b-z) v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_{3,j}^{-1} R_j(b) u_{3,j}, \quad (70)$$

is called the Nevanlinna matrix of the THMM problem with respect to point $z = b$ in the case of an even number of moments.

In the analysis that follows, which includes Definition 5, we omit the explicit dependence on the parameters a and b in the notation for the matrix-valued functions $\hat{\alpha}^{(2j+1)}$, $\hat{\beta}^{(2j+1)}$, $\hat{\gamma}^{(2j+1)}$, $\hat{\delta}^{(2j+1)}$, as well as in the Nevanlinna matrix $\hat{V}^{(2j+1)}$.

The lemma stated below is vital in deriving the results presented in Lemma 6.

Lemma 5. *Let $\hat{H}_{r,j}$, for $r = 3, 4$ be as in (31). Let $\hat{\alpha}^{(2j+1)}$, $\hat{\beta}^{(2j+1)}$, $\hat{\gamma}^{(2j+1)}$, and $\hat{\delta}^{(2j+1)}$ be as in (67), (69), (68), and (70), respectively. Furthermore, let $P_{r,j}$ and $Q_{r,j}$ for $r = 3, 4$ be the OMP and their polynomials of the second kind in Definition 3. Therefore, for all $z \in \mathbb{C}$ and $1 \leq j \leq n$, the following identities hold:*

$$\hat{\alpha}^{(2j+1)}(z) - \hat{\alpha}^{(2(j-1)+1)}(z) = (b - z)Q_{4,j}^*(\bar{z})\hat{H}_{4,j}^{-1}P_{4,j}(b), \quad (71)$$

$$\hat{\beta}^{(2j+1)}(z) - \hat{\beta}^{(2(j-1)+1)}(z) = -Q_{3,j}^*(\bar{z})\hat{H}_{3,j}^{-1}Q_{3,j}(b), \quad (72)$$

$$\hat{\gamma}^{(2j+1)}(z) - \hat{\gamma}^{(2(j-1)+1)}(z) = (b - z)(z - a)P_{4,j}^*(\bar{z})\hat{H}_{4,j}^{-1}P_{4,j}(b), \quad (73)$$

$$\hat{\delta}^{(2j+1)}(z) - \hat{\delta}^{(2(j-1)+1)}(z) = -(b - z)P_{3,j}^*(\bar{z})\hat{H}_{3,j}^{-1}Q_{3,j}(b). \quad (74)$$

Proof. The equalities follow from the technique used in [2, Proposition 2.1]. $\square$

Each entry of the Nevanlinna matrix $\hat{V}^{(2j+1)}$, as defined in Definition 5, can be represented in an additive form.

Lemma 6. *Under the same conditions as in Lemma 5, for all $z \in \mathbb{C}$ and $0 \leq j \leq n$, the following identities hold:*

$$\hat{\alpha}^{(2j+1)}(z) = I + (b - z) \sum_{k=0}^j Q_{4,k}^*(a, \bar{z})\hat{H}_{4,k}^{-1}P_{4,k}(a, b), \quad (75)$$

$$\hat{\beta}^{(2j+1)}(z) = - \sum_{k=0}^j Q_{3,k}^*(b, \bar{z})\hat{H}_{3,k}^{-1}Q_{3,k}(b, b), \quad (76)$$

$$\hat{\gamma}^{(2j+1)}(z) = (b - z)(z - a) \sum_{k=0}^j P_{4,k}^*(a, \bar{z})\hat{H}_{4,k}^{-1}P_{4,k}(a, b), \quad (77)$$

$$\hat{\delta}^{(2j+1)}(z) = I - (b - z) \sum_{k=0}^j P_{3,k}^*(b, \bar{z})\hat{H}_{3,k}^{-1}Q_{3,k}(b, b). \quad (78)$$

Proof. We prove (75). From (67), we obtain

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha}^{(2j+1)}(z) &= I_q + (b-z)u_{4,j}^* R_j^*(\bar{z}) H_{4,j}^{-1} R_j(b) v_j \\
&= I_q + (b-z) \begin{pmatrix} u_{4,j-1}^* & -s_j + as_{j-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{j-1}^*(\bar{z}) & z^j I \\ \vdots & zI \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{4,j-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} R_{j-1}(b) & 0 \\ b^j I & \dots & bI & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{j-1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + (b-z)u_{4,j}^* R_j^*(\bar{z}) \Sigma_{4,j} \widehat{H}_{4,j}^{-1} \Sigma_{4,j}^* R_j(b) v_j \\
&= \widehat{\alpha}^{(2(j-1)+1)}(z) + (b-z)Q_{4,j}^*(a, \bar{z}) \widehat{H}_{4,j}^{-1} P_{4,j}(a, b) \\
&= \widehat{\alpha}^{(2(j-2)+1)}(z) + (b-z)[Q_{4,j-1}^*(a, \bar{z}) \widehat{H}_{4,j-1}^{-1} P_{4,j-1}(a, b) \\
&\quad + Q_{4,j}^*(a, \bar{z}) \widehat{H}_{4,j}^{-1} P_{4,j}(a, b)] \\
&= \widehat{\alpha}^{(1)}(z) + (b-z) \sum_{k=1}^j Q_{4,k}^*(a, \bar{z}) \widehat{H}_{4,k}^{-1} P_{4,k}(a, b) \\
&= I + (b-z) \sum_{k=0}^j Q_{4,k}^*(a, \bar{z}) \widehat{H}_{4,k}^{-1} P_{4,k}(a, b).
\end{aligned}$$

In the second equality, we apply (32). The third equality follows from (29) and (30). To derive the fourth equality, we consider the third equality evaluated at $j-1$ and invoke (71). By repeating this procedure recursively for $j-2, j-3, \dots, 0$, we obtain the penultimate equality. Finally, the last equality is deduced using (67), (17), (7), (2), and (9) for $j=0$, together with (26) and (31).

A similar line of reasoning establishes the identities (76)–(78). $\square$

The polynomials given in (22)–(25) are connected to the structure of the Nevanlinna matrix $\widehat{V}^{(2j+1)}$ as in Definition 5.

Lemma 7. Let $\widehat{\alpha}^{(2j+1)}$, $\widehat{\beta}^{(2j+1)}$, $\widehat{\gamma}^{(2j+1)}$, and $\widehat{\delta}^{(2j+1)}$ be as in (67), (69), (68), and (70), respectively. Let $P_{r,j}$ and $Q_{r,j}$ for $r=1, 2$ be the OMP and their polynomials of the second kind introduced in Definition 2. Thus, for all $z \in \mathbb{C}$ and $0 \leq j \leq n$, the following identities hold:

$$\widehat{\alpha}^{(2j+1)}(z) Q_{2,j}^*(a, b, b) - Q_{2,j}^*(a, b, \bar{z}) = 0, \quad (79)$$

$$\widehat{\beta}^{(2j+1)}(z) P_{1,j+1}^*(b) + Q_{1,j+1}^*(\bar{z}) = 0, \quad (80)$$

$$\widehat{\gamma}^{(2j+1)}(z) Q_{2,j}^*(a, b, b) + (b-z)(z-a) P_{2,j}^*(a, b, \bar{z}) = 0, \quad (81)$$

$$\widehat{\delta}^{(2j+1)}(z) P_{1,j+1}^*(b) - P_{1,j+1}^*(\bar{z}) = 0. \quad (82)$$

Proof. We prove (79). From (67) and (25), we have

$$\begin{aligned}
 & \hat{\alpha}^{(2j+1)}(z)Q_{2,j}^*(a, b, b) - Q_{2,j}^*(a, b, \bar{z}) \\
 &= -[(u_{2,j}^* + zs_0v_j^*)R_j^*(b) + (b - z)u_{4,j}^*R_j^*(\bar{z})H_{4,j}^{-1}R_j(b)v_j(u_{2,j}^* + zs_0v_j^*)R_j^*(b) \\
 &\quad - (u_{2,j}^* + zs_0v_j^*)R_j^*(\bar{z})]\Sigma_{2,j} \\
 &= -[v_{j+1}^*H_{1,j+1}(L_{1,j+1} - aL_{2,j+1}) - (b - z)v_{j+1}^*H_{1,j+1}L_{2,j+1}R_j^{*-1}(a)R_j^*(\bar{z})H_{4,j}^{-1} \\
 &\quad \cdot R_j(b)v_jv_{j+1}^*H_{1,j+1}(L_{1,j+1} - aL_{2,j+1}) - v_{j+1}^*H_{1,j+1}R_{j+1}^{*-1}(b)R_{j+1}^*(\bar{z}) \\
 &\quad \cdot (L_{1,j+1} - aL_{2,j+1})]\Sigma_{2,j} \\
 &= -(b - z)v_{j+1}^*H_{1,j+1}R_{j+1}^*(\bar{z})[T_{j+1}^* - L_{2,j+1}R_j^{*-1}(a)H_{4,j}^{-1}R_j(b)v_jv_{j+1}^*H_{1,j+1}] \\
 &\quad \cdot (L_{1,j+1} - aL_{2,j+1})\Sigma_{2,j} \\
 &= -(b - z)v_{j+1}^*H_{1,j+1}R_{j+1}^*(\bar{z})L_{2,j+1}R_j^{*-1}(a)H_{4,j}^{-1}R_j(b)[-v_jv_{j+1}^*H_{1,j+1} \\
 &\quad \cdot (L_{1,j+1} - aL_{2,j+1}) + (I - bT_j)H_{4,j}]\Sigma_{2,j} \\
 &= -(b - z)v_{j+1}^*H_{1,j+1}R_{j+1}^*(\bar{z})L_{2,j+1}R_j^{*-1}(a)H_{4,j}^{-1}R_j(b)T_jH_{2,j}\Sigma_{2,j} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

In the second equality, we use (53), (51), (41), (45), (58), (65), (44), and (49). In the third equality, we use (52) and (57). The fourth equality is obtained with (46) and (42). The penultimate equality follows from (64), and the last equality follows from (33) for $r = 2$.

We prove (80). From (68), (23), and (22), we have

$$\begin{aligned}
 & \hat{\beta}^{(2j+1)}(z)P_{1,j+1}^*(b) + Q_{1,j+1}^*(\bar{z}) \\
 &= -\left(u_{j+1}^*L_{2,j+1}R_j^{*-1}(b)R_j^*(\bar{z})H_{3,j}^{-1}u_jv_{j+1}^*R_{j+1}^*(b) + u_{1,j+1}^*R_{j+1}^*(\bar{z})\right)\Sigma_{1,j+1} \\
 &= -\left(u_{j+1}^*R_{j+1}^*(\bar{z})L_{2,j+1}R_j^{*-1}(b)H_{3,j}^{-1}u_jv_{j+1}^*R_{j+1}^*(b) + u_{j+1}^*T_{j+1}^*R_{j+1}^*(\bar{z})\right)\Sigma_{1,j+1} \\
 &= -u_{j+1}^*R_{j+1}^*(\bar{z})L_{2,j+1}R_j^{*-1}(b)H_{3,j}^{-1}(u_jv_{j+1}^*R_{j+1}^*(b) + H_{3,j}R_j^*(b)L_{1,j+1}^*)\Sigma_{1,j+1} \\
 &= -u_{j+1}^*R_{j+1}^*(\bar{z})L_{2,j+1}R_j^{*-1}(b)H_{3,j}^{-1}L_{2,j+1}^*H_{1,j+1}\Sigma_{1,j+1} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

In the second equality, we use (51), (40), (52), and (39). The third equality follows from (46). The penultimate equality follows from (63), and the last equality follows from (34) for $r = 1$.

Equalities (81) and (82) follow by employing an analogous method. $\square$

By taking into account Lemmas 6 and 7, we can now formulate the following theorem.

Theorem 1. Let $\hat{H}_{r,j}$ for $r = 3, 4$ be as in (31). Furthermore, let $P_{r,j}$ and $Q_{r,j}$ for $r = 1, 2, 3$, and 4 be the OMP and their polynomials of the second kind in Definitions 2 and 3. Therefore, for all $z \in \mathbb{C}$ and $0 \leq j \leq n$, the following identities hold:

$$Q_{2,j}^*(a, b, \bar{z}) = \left(I + (b - z) \sum_{k=0}^j Q_{4,k}^*(a, \bar{z}) \hat{H}_{4,k}^{-1} P_{4,k}(a, b) \right) Q_{2,j}^*(a, b, b), \quad (83)$$

$$Q_{1,j+1}^*(\bar{z}) = \left(\sum_{k=0}^j Q_{3,k}^*(b, \bar{z}) \hat{H}_{3,k}^{-1} Q_{3,k}(b, b) \right) P_{1,j+1}^*(b), \quad (84)$$

$$P_{2,j}^*(a, b, \bar{z}) = - \left(\sum_{k=0}^j P_{4,k}^*(a, \bar{z}) \hat{H}_{4,k}^{-1} P_{4,k}(a, b) \right) Q_{2,j}^*(a, b, b), \quad (85)$$

$$P_{1,j+1}^*(\bar{z}) = \left(I - (b - z) \sum_{k=0}^j P_{3,k}^*(b, \bar{z}) \hat{H}_{3,k}^{-1} Q_{3,k}(b, b) \right) P_{1,j+1}^*(b). \quad (86)$$

As a consequence, the following corollary establishes a connection between the Schur complements $\hat{H}_{3,j}$ and $\hat{H}_{4,j}$ and the matrix polynomials $P_{1,j+1}^*$, $Q_{3,j}$, $Q_{2,j}^*$, and $P_{4,j}$. Additionally, it justifies the existence of the inverses of these matrix polynomials evaluated at the point $z = b$.

Corollary 1. *Under the same assumptions as in Theorem 1, for $0 \leq j \leq n$ the following equalities hold:*

$$\hat{H}_{3,j} = Q_{3,j}(b, b) P_{1,j+1}^*(b), \quad (87)$$

$$\hat{H}_{4,j} = -P_{4,j}(a, b) Q_{2,j}^*(a, b, b). \quad (88)$$

Moreover, the OMP $P_{1,j+1}^*$ and $P_{4,j}$, as well as the polynomials of the second kind $Q_{3,j}$ and $Q_{2,j}^*$, are invertible at the point $z = b$.

Proof. Equalities (87) and (88) readily follow from (86) and (85) by comparing the leading coefficients of the matrix polynomials. Since $\hat{H}_{3,j}$ is invertible, we have that $Q_{3,j}(b, b) P_{1,j+1}^*(b)$ is invertible. Regarding determinants, $\det(Q_{3,j}(b, b) P_{1,j+1}^*(b)) \neq 0$. This implies $\det(Q_{3,j}(b, b)) \neq 0$ and $\det(P_{1,j+1}^*(b)) \neq 0$. Therefore, $Q_{3,j}(b, b)$ and $P_{1,j+1}^*(b)$ are invertible. Similarly, we conclude that $Q_{2,j}^*(a, b, b)$ and $P_{4,j}(a, b)$ are invertible. $\square$

By combining Lemma 7 and Corollary 1, we derive a novel representation of the Nevanlinna matrix $\hat{V}^{(2j+1)}$ that is associated with the THMM problem at point $z = b$ and that corresponds to an even number of moments.

Theorem 2. *Let $\hat{V}^{(2j+1)}$ be the Nevanlinna matrix given by Definition 5. Let $P_{r,j}$ and $Q_{r,j}$ for $r = 1, 2$ be the OMP and their polynomials of the second kind as in Definition 2. Thus, for all $z \in \mathbb{C}$ and $0 \leq j \leq n$, the following equality holds:*

$$\begin{aligned} & \hat{V}^{(2j+1)}(a, b, z) \\ &= \begin{pmatrix} Q_{2,j}^*(a, b, \bar{z}) Q_{2,j}^{*-1}(a, b, b) & -Q_{1,j+1}^*(\bar{z}) P_{1,j+1}^{*-1}(b) \\ -(b - z)(z - a) P_{2,j}^*(a, b, \bar{z}) Q_{2,j}^{*-1}(a, b, b) & P_{1,j+1}^*(\bar{z}) P_{1,j+1}^*(b) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (89)$$

6. Derivation of identities related to orthogonal matrix polynomials

By considering the result in Corollary 1, we apply it to derive identities at points $z = a$ and $z = b$, involving the OMP introduced in Definitions 2 and 3.

We establish identities regarding to point $z = a$ that involve OMP. To support this, we must reproduce the Nevanlinna matrix $U^{(2j+1)}$ in terms of OMP, as obtained in [7, Theorem 3.8]. Note that both matrices are formulated with respect to point $z = a$. For more detail, see Theorem 3.

Furthermore, we derive identities at point $z = b$ for the OMP $P_{1,j}$ and $P_{2,j}$, together with their polynomials of the second kind $Q_{1,j}$ and $Q_{2,j}$. To substantiate these findings, expressing the inverse of the Nevanlinna matrix $\widehat{V}^{(2j+1)}$ in terms of these polynomials is necessary. See Theorem 4 for a precise statement.

We proceed to reproduce results analogous to Corollary 1, which were originally established in [7, Corollary 3.10] in the context of the evaluation point $z = a$.

Lemma 8. *Let $\widehat{H}_{r,j}$ for $r = 3, 4$ be as in (31). Let $P_{1,j}$ and $Q_{2,j}$ be introduced in Definition 2, as well as, let $P_{3,j}$ and $Q_{4,j}$ be introduced in Definition 3. Thus, for $0 \leq j \leq n$, the following identities are satisfied:*

$$\widehat{H}_{3,j} = P_{3,j}(b, a)Q_{2,j}^*(a, b, a), \quad (90)$$

$$\widehat{H}_{4,j} = Q_{4,j}(a, a)P_{1,j+1}^*(a). \quad (91)$$

In the proposition below, we establish new identities at points $z = a$ and $z = b$ by involving the OMP.

Proposition 2. *Let $P_{r,j}$ and $Q_{r,j}$ for $r = 1, 2, 3$, and 4 be the OMP and their polynomials of the second kind in Definitions 2 and 3. Therefore, for $0 \leq j \leq n$, the following identities are satisfied:*

$$Q_{3,j}(b, b)P_{1,j+1}^*(b) - P_{3,j}(b, a)Q_{2,j}^*(a, b, a) = 0, \quad (92)$$

$$P_{4,j}(a, b)Q_{2,j}^*(a, b, b) + Q_{4,j}(a, a)P_{1,j+1}^*(a) = 0. \quad (93)$$

Proof. Identities (92), and (93) are proven by using the identities obtained in (87), (88), (90), and (91).

We next revisit the formulation of the Nevanlinna matrix $U^{(2j+1)}$ associated with the THMM problem at point $z = a$. This representation, originally from [7, Theorem 3.8], expresses $U^{(2j+1)}$ in terms of the OMP and their corresponding polynomials of the second kind.

Definition 6. *Let $P_{r,j}$ and $Q_{r,j}$ for $r = 1, 2$ be the OMP and their polynomials of the second kind in Definition 2. We introduce the Nevanlinna matrix of the THMM problem with respect to point $z = a$ in the case of an even number of moments for all $z \in \mathbb{C}$ and $0 \leq j \leq n$:*

$$U^{(2j+1)}(a, b, z) := \begin{pmatrix} Q_{2,j}^*(a, b, \bar{z})Q_{2,j}^{*-1}(a, b, a) & -Q_{1,j+1}^*(\bar{z})P_{1,j+1}^{*-1}(a) \\ -(z-a)(b-z)P_{2,j}^*(a, b, \bar{z})Q_{2,j}^{*-1}(a, b, a) & P_{1,j+1}^*(\bar{z})P_{1,j+1}^{*-1}(a) \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Remark 4. As established in [12, Proposition 6.10], the Nevanlinna matrix $U^{(2j+1)}$ is invertible for all $z \in \mathbb{C}$.

The next remark explicitly represents the inverse of $U^{(2j+1)}$ with OMP and their corresponding polynomials of the second kind.

Remark 5. The inverse of (94) is

$$U^{(2j+1)^{-1}}(a, b, z) = \begin{pmatrix} P_{1,j+1}^{-1}(a)P_{1,j+1}(z) & P_{1,j+1}^{-1}(a)Q_{1,j+1}(z) \\ (z-a)(b-z)Q_{2,j}^{-1}(a, b, a)P_{2,j}(a, b, z) & Q_{2,j}^{-1}(a, b, a)Q_{2,j}(a, b, z) \end{pmatrix}. \quad (95)$$

In the following theorem, we derive identities at point $z = a$ by incorporating the OMP $P_{1,j}$ and $P_{2,j}$, together with their polynomials of the second kind $Q_{1,j}$ and $Q_{2,j}$.

Theorem 3. Let $P_{r,j}$ and $Q_{r,j}$, for $r = 1, 2$ be the OMP and their polynomials of the second kind in Definition 2. Therefore, for all $z \in \mathbb{C}$ and $0 \leq j \leq n$, the following identities are fulfilled:

$$Q_{2,j}^*(\bar{z})Q_{2,j}^{*-1}(a)P_{1,j+1}^{-1}(a)P_{1,j+1}(z) - (b-z)(z-a) \cdot Q_{1,j+1}^*(\bar{z})P_{1,j+1}^{*-1}(a)Q_{2,j}^{-1}(a)P_{2,j}(z) = I_q, \quad (96)$$

$$Q_{2,j}^*(\bar{z})Q_{2,j}^{*-1}(a)P_{1,j+1}^{-1}(a)Q_{1,j+1}(z) - Q_{1,j+1}^*(\bar{z})P_{1,j+1}^{*-1}(a)Q_{2,j}^{-1}(a)Q_{2,j}(z) = 0, \quad (97)$$

$$(b-z)(z-a)[P_{1,j+1}^*(\bar{z})P_{1,j+1}^{*-1}(a)Q_{2,j}^{-1}(a)P_{2,j}(z) - P_{2,j}^*(\bar{z})Q_{2,j}^{*-1}(a)P_{1,j+1}^{-1}(a)P_{1,j+1}(z)] = 0, \quad (98)$$

$$P_{1,j+1}^*(\bar{z})P_{1,j+1}^{*-1}(a)Q_{2,j}^{-1}(a)Q_{2,j}(z) - (b-z)(z-a) \cdot P_{2,j}^*(\bar{z})Q_{2,j}^{*-1}(a)P_{1,j+1}^{-1}(a)Q_{1,j+1}(z) = I_q. \quad (99)$$

Proof. From (94), (95), and the following equality

$$U^{(2j+1)}(a, b, z)U^{(2j+1)^{-1}}(a, b, z) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix},$$

we obtain the identities (96)–(99). $\square$

The following observation justifies the invertibility of the Nevanlinna matrix $\widehat{V}^{(2j+1)}$.

Remark 6. Let $\widehat{V}^{(2j+1)}$ denote the Nevanlinna matrix introduced in Definition 5. According to Remark 4, the matrix $U^{(2j+1)}$ is invertible for all $z \in \mathbb{C}$. Furthermore, Remark 8 asserts that the constant matrix $\mathfrak{D}^{(2j+1)}$ is also invertible. Consequently, by the explicit relation given in (6), it follows that $\widehat{V}^{(2j+1)}$ is invertible for all $z \in \mathbb{C}$.

The following remark explicitly expresses the inverses of the Nevanlinna matrix $\widehat{V}^{(2j+1)}$, which is formulated in terms of OMP and their associated polynomials of the second kind.

Remark 7. Let $\widehat{V}^{(2j+1)}$ be the Nevanlinna matrix given by (89). Furthermore, let $P_{r,j}$ and $Q_{r,j}$, for $r = 1, 2$ be the OMP and their polynomials of the second kind in Definition 2. Thus, for all $z \in \mathbb{C}$ and $0 \leq j \leq n$, the following equality holds :

$$\widehat{V}^{(2j+1)^{-1}}(a, b, z) = \begin{pmatrix} P_{1,j+1}^{-1}(b)P_{1,j+1}(z) & P_{1,j+1}^{-1}(b)Q_{1,j+1}(z) \\ (b-z)(z-a)Q_{2,j}^{-1}(a, b, b)P_{2,j}(a, b, z) & Q_{2,j}^{-1}(a, b, b)Q_{2,j}(a, b, z) \end{pmatrix}. \quad (100)$$

In the theorem below, we derive identities at point $z = b$ with the OMP $P_{1,j}$ and $P_{2,j}$, together with their polynomials of the second kind $Q_{1,j}$ and $Q_{2,j}$.

Theorem 4. Let $P_{r,j}$ and $Q_{r,j}$, for $r = 1, 2$ be the OMP and their polynomials of the second kind in Definition 2. Therefore, for all $z \in \mathbb{C}$ and $0 \leq j \leq n$, the following identities are fulfilled:

$$Q_{2,j}^*(\bar{z})Q_{2,j}^{*-1}(b)P_{1,j+1}^{-1}(b)P_{1,j+1}(z) - (b-z)(z-a) \cdot Q_{1,j+1}^*(\bar{z})P_{1,j+1}^{*-1}(b)Q_{2,j}^{-1}(b)P_{2,j}(z) = I_q, \quad (101)$$

$$Q_{2,j}^*(\bar{z})Q_{2,j}^{*-1}(b)P_{1,j+1}^{-1}(b)Q_{1,j+1}(z) - Q_{1,j+1}^*(\bar{z})P_{1,j+1}^{*-1}(b)Q_{2,j}^{-1}(b)Q_{2,j}(z) = 0, \quad (102)$$

$$(b-z)(z-a)[P_{1,j+1}^*(\bar{z})P_{1,j+1}^{*-1}(b)Q_{2,j}^{-1}(b)P_{2,j}(z) - P_{2,j}^*(\bar{z})Q_{2,j}^{*-1}(b)P_{1,j+1}^{-1}(b)P_{1,j+1}(z)] = 0, \quad (103)$$

$$P_{1,j+1}^*(\bar{z})P_{1,j+1}^{*-1}(b)Q_{2,j}^{-1}(b)Q_{2,j}(z) - (b-z)(z-a) \cdot P_{2,j}^*(\bar{z})Q_{2,j}^{*-1}(b)P_{1,j+1}^{-1}(b)Q_{1,j+1}(z) = I_q. \quad (104)$$

Proof. By using (89), (100), and the equality

$$\widehat{V}^{(2j+1)}(a, b, z)\widehat{V}^{(2j+1)^{-1}}(a, b, z) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix},$$

the identities (101)–(104) follow. $\square$

7. Explicit relationships between Nevanlinna matrices via OMP

For $m = 2j + 1$, the explicit relationship (6) between the Nevanlinna matrices of the THMM problem regarding to points $z = a$ and $z = b$ was established in [15, Theorem 4.3].

By using the Nevanlinna matrix from Theorem 2, together with Definition 6, we show the relation (6) in terms of OMP. Furthermore, we introduce and we reformulate the constant matrix $\mathfrak{D}^{(2j+1)}$, that was originally obtained in [15, Theorem 4.3] also with OMP.

Definition 7. Let $(s_k)_{k=0}^{2j+1}$ be a Hausdorff positive definite sequence on $[a, b]$. Let T_j , R_j , v_j , u_j , $u_{4,j}$, and $u_{3,j}$ be as in (8), (7), (9), (13), (17), and (16). We introduce the following matrix:

$$\mathfrak{D}^{(2j+1)} := \begin{pmatrix} a_{11}^{(2j+1)} & 0 \\ 0 & a_{22}^{(2j+1)} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq j \leq n \quad (105)$$

with

$$a_{11}^{(2j+1)} := I + (b - a)u_{4,j}^* R_j^*(a) H_{4,j}^{-1} R_j(b) v_j, \quad (106)$$

$$a_{22}^{(2j+1)} := I - (b - a)v_j^* R_j^*(a) H_{3,j}^{-1} R_j(b) u_{3,j}. \quad (107)$$

Remark 8. As established in [15, Lemma 4.4], the constant matrix $\mathfrak{D}^{(2j+1)}$ is invertible.

We now present a theorem that indicates an explicit relationship between the Nevanlinna matrices of the THMM problem evaluated at points $z = a$ and $z = b$ and expressed with OMP for an even number of moments.

Theorem 5. Let $P_{1,j}$ be the orthogonal matrix polynomial, and let $Q_{2,j}$ be the polynomial of the second kind introduced in Definition 2. Moreover, let $U^{(2j+1)}$ and $\widehat{V}^{(2j+1)}$ be the Nevanlinna matrices as in (94) and (89), respectively. If the elements $a_{11}^{(2j+1)}$ and $a_{22}^{(2j+1)}$ of the matrix $\mathfrak{D}^{(2j+1)}$ from Definition 7 are written as

$$a_{11}^{(2j+1)} = P_{1,j+1}^{-1}(a) P_{1,j+1}(b), \quad (108)$$

$$a_{22}^{(2j+1)} = Q_{2,j}^{-1}(a) Q_{2,j}(b), \quad (109)$$

then for all $z \in \mathbb{C}$ the following equality is valid:

$$U^{(2j+1)}(z) \mathfrak{D}^{(2j+1)} - \widehat{V}^{(2j+1)}(z) = 0. \quad (110)$$

Proof. We prove that the left-hand side of (110) vanishes as follows:

$$\begin{aligned} & U^{(2j+1)}(z) \mathfrak{D}^{(2j+1)} - \widehat{V}^{(2j+1)}(z) \\ &= \begin{pmatrix} -Q_{2,j}^*(z) Q_{2,j}^{-1}(b) & Q_{1,j+1}^*(z) P_{1,j+1}^{-1}(b) \\ (z - a)(b - z) P_{2,j}^*(z) Q_{2,j}^{-1}(b) & -P_{1,j+1}^*(z) P_{1,j+1}^{-1}(b) \end{pmatrix} \\ & \quad \cdot \begin{pmatrix} -Q_{2,j}^*(b) Q_{2,j}^{-1}(a) P_{1,j+1}^{-1}(a) P_{1,j+1}(b) + I_q & 0 \\ 0 & -P_{1,j+1}^*(b) P_{1,j+1}^{-1}(a) Q_{2,j}^{-1}(a) Q_{2,j}(b) + I_q \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

The last equality is obtained by applying the identities (96) and (99) at $z = b$. $\square$

The elements $a_{22}^{(2j+1)}$ and $a_{22}^{(2j+1)}$ as in (108) and (109) are written at point $z = b$. Thus, we consider the following remark.

Remark 9. By using (108) and (109), the matrix $\mathfrak{D}^{(2j+1)}$ from Definition 7 admits the following representation in terms of OMP with respect to point $z = b$:

$$\mathfrak{D}^{(2j+1)} = \begin{pmatrix} P_{1,j+1}^{-1}(a) P_{1,j+1}(b) & 0 \\ 0 & Q_{2,j}^{-1}(a) Q_{2,j}(b) \end{pmatrix}. \quad (111)$$

The following remark shows that the elements $a_{11}^{(2j+1)}$ and $a_{22}^{(2j+1)}$ can also be represented with OMP regarding to point $z = a$.

Remark 10. Let $P_{1,j}$ be the orthogonal matrix polynomial, and let $Q_{2,j}$ be the polynomial of the second kind introduced in Definition 2. Let $a_{11}^{(2j+1)}$ and $a_{22}^{(2j+1)}$ be as in (106) and (107), respectively. If the elements $a_{11}^{(2j+1)}$ and $a_{22}^{(2j+1)}$ of the matrix $\mathfrak{D}^{(2j+1)}$ from Definition 7 are written as

$$a_{11}^{(2j+1)} = Q_{2,j}^*(a) Q_{2,j}^{*-1}(b), \quad (112)$$

$$a_{22}^{(2j+1)} = P_{1,j+1}^*(a) P_{1,j+1}^{*-1}(b), \quad (113)$$

then Equality (110) is also satisfied for all $z \in \mathbb{C}$.

8. Conclusion

We have expressed the Nevanlinna (resolvent) matrix associated with the truncated Hausdorff matrix moment (THMM) problem on the interval $[a, b]$ in terms of orthogonal matrix polynomials (OMP) and their corresponding polynomials of the second kind, at point b . Alongside this representation, we obtained new identities involving OMP and established an explicit connection between the Nevanlinna matrices of the THMM problem at points a and b , which was directly formulated through OMP.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

REFERENCES

1. N. I. Akhiezer. The classical moment problem and some related questions in analysis. – Hafner Publishing Co. Translated by N. Kemmer, New York – 1965.
2. A. E. Choque Rivero. Multiplicative structure of the resolvent matrix for the truncated Hausdorff matrix moment problem, Interpolation, Schur Functions and Moment Problems II. Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser/Spring Basel AG, Basel. – 2012. – Vol. **226**. – P. 193–210. DOI: 10.1007/978-3-0348-0428-8_4
3. A. E. Choque Rivero. The resolvent matrix for the Hausdorff matrix moment problem expressed in terms of orthogonal matrix polynomials, Complex Anal. Oper. Theory. – 2013. – Vol. **7**, No **4**. – P. 927–944. DOI: 10.1007/s11785-012-0255-5

4. A. E. Choque Rivero. On Dyukarev's resolvent matrix for truncated Stieltjes matrix moment problem under the view of orthogonal matrix polynomials, *Linear Algebra Appl.* – 2015. – Vol. **474**. – P. 44–109. DOI: 10.1016/j.laa.2015.01.027
5. A. E. Choque Rivero. Decompositions of the Blaschke–Potapov factors of the truncated Hausdorff matrix moment problem: the case of an odd number of moments, *Commun. Math. Anal.* – 2014. – Vol. **17**, No **2**. – P. 66–81.
6. A. E. Choque Rivero. Decompositions of the Blaschke–Potapov factors of the truncated Hausdorff matrix moment problem: the case of an even number of moments, *Commun. Math. Anal.* – 2014. – Vol. **17**, No **2**. – P. 82–97.
7. A. E. Choque Rivero. From the Potapov to the Krein-Nudel'man representation of the resolvent matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem, *Bol. Soc. Mat. Mex.* – 2015. – Vol. **21**, No **2**. – P. 233–259. DOI: 10.1007/s40590-015-0060-z
8. A. E. Choque Rivero. Relations between the orthogonal matrix polynomials on $[a, b]$, Dyukarev-Stieltjes parameters, and Schur complements, *Spec. Matrices.* – 2017 – Vol. **5**. – P. 303–318. DOI: 10.1515/spma-2017-0023
9. A. E. Choque Rivero. On the solution set of the admissible bounded control problem via orthogonal polynomials, *IEEE Trans. Automat. Control.* – 2017 – Vol. **62**, No **10**. – P. 5213–5219. DOI: 10.1109/TAC.2016.2633820
10. A. E. Choque Rivero, Y. I. Karlovich. The time optimal control as an interpolation problem, *Commun. Math. Anal.* – 2011. – Vol. **3**. – P. 66–76.
11. A. E. Choque Rivero, V. Korobov, G. Sklyar. The admissible control problem from the moment problem point of view, *Appl. Math. Lett.* – 2010. – Vol. **23**, No **1**. – P. 58–63.
12. A. E. Choque Rivero, Yu. M. Dyukarev, B. Fritzsche, B. Kirstein. A truncated matricial moment problem on a finite interval, In *Interpolation, Schur Functions and Moment Problems*, *Oper. Theory Adv. Appl.* Birkhäuser, Basel. – 2006. – Vol. **165**. – P. 121–173. DOI: 10.1007/3-7643-7547-7_4
13. A. E. Choque Rivero, Yu. M. Dyukarev, B. Fritzsche, and B. Kirstein. A truncated matricial moment problem on a finite interval. The case of an odd number of prescribed moments, In *System Theory, the Schur Algorithm and Multidimensional Analysis*, volume 176 of *Oper. Theory Adv. Appl.* Birkhäuser, Basel. – 2007. – Vol. **176**. – P. 99–164. DOI: 10.1007/978-3-7643-8137-0_2
14. A. E. Choque Rivero, C. Mädler. On Hankel positive definite perturbations of Hankel positive definite sequences and interrelations to orthogonal matrix

- polynomials, *Complex Anal. Oper. Theory*. – 2014. – Vol. **8**, No **8**. – P. 121–173. DOI: 10.1007/s11785-013-0349-8
15. A. E. Choque-Rivero, B. E. Medina-Hernandez. On the Resolvent Matrix of the Truncated Hausdorff Matrix Moment Problem, *Complex Anal. Oper. Theory* – 2024. – Vol. **18**, No **55**. – P. 1–27. DOI: 10.1007/s11785-024-01499-0
16. A. E. Choque-Rivero, B. E. Medina-Hernandez. On two resolvent matrices of the truncated Hausdorff matrix moment problem, *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*. – 2022. – Vol. **95**. – P. 4–22. DOI: 10.26565/2221-5646-2022-95-01
17. A. E. Choque Rivero, M. Winklmeier. Explicit relation between two resolvent matrices of the truncated Hausdorff matrix moment problem, *Complex Anal. Oper. Theory*. – 2023. – Vol. **17**, No **50**. – P. 1–34. DOI: 10.1007/s11785-023-01351-x
18. Yu. M. Dyukarev, A. E. Choque Rivero. Power moment problem on compact intervals, *Mat. Sb.* – 2001. – Vol. **69**, No **1-2**. – P. 175–187. DOI: 10.1023/A:1002868117970
19. Yu. M. Dyukarev. Indeterminacy criteria for the Stieltjes matrix moment problem, *Math. Notes*. – 2004. – Vol. **75**, No **1**. – P. 66–82. DOI: 10.1023/B:MATN.0000015022.02925.bd
20. Yu. M. Dyukarev. Indeterminacy of interpolation problems in the Stieltjes class, *Sb. Math.* – 2005. – Vol. **196**, No **3**. – P. 367–393. DOI: 10.1070/SM2005v196n03ABEH000884
21. Yu. M. Dyukarev. A generalized Stieltjes criterion for the complete indeterminacy of interpolation problems, *Mat. Zametki*. – 2008. – Vol. **84**, No **1**. – P. 22–37. DOI: 10.1134/S000143460807002X
22. B. Fritzsche, B. Kirstein, C. Mädler. On the Structure of Hausdorff Moment Sequences of Complex Matrices, In: Colombo, F., Sabadini, I., Struppa, D., Vajiac, M. (eds) *Advances in Complex Analysis and Operator Theory. Trends in Mathematics*. Birkhäuser, Cham. – 2017.
23. B. Fritzsche, B. Kirstein, C. Mädler. Matricial canonical moments and parametrization of matricial Hausdorff moment sequences, *Complex. Anal. Oper. Theory* – 2019. – Vol. **13**, No **5**. – P. 2123–2169.
24. B. Fritzsche, B. Kirstein, C. Mädler. A Schur–Nevanlinna type algorithm for the truncated matricial Hausdorff moment problem, *Complex. Anal. Oper. Theory* – 2021. – Vol. **15**, No **2**. – P. 129.

25. B. Fritzsche, B. Kirstein, C. Mädler. The Matricial Szegő Mapping from the Perspective of Schur Analysis, *Complex. Anal. Oper. Theory* – 2025. – Vol. **19**, No **21**. – P. 1–77. DOI: 10.1007/s11785-024-01629-8
26. I. V. Kovalishina. Analytic theory of a class of interpolation problems, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* – 1983. – Vol. **47**, No **3**. – P. 455–497. DOI: 10.1070/IM1984v022n03ABEH001452
27. M. G. Krein. Fundamental aspects of the representation theory of Hermitian operators with deficiency index (m, m) , *Transl. Ser. II Am. Math. Soc.* – 1949. – Vol. **97**. – P. 75–143. DOI: 10.1090/trans2/097/06
28. H. Thiele. Beiträge zu matriziellen Potenzmomentenproblemen, *Ph.D. Thesis*, Leipzig University. – 2006.
29. T. J. Stieltjes. Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*. – 1894. – Vol. **8**. – P. 1–122.

Article history: Received: 10 September 2025; Final form: 11 November 2025

Accepted: 13 November 2025. Published 11 December 2025.

How to cite this article:

B. E. Medina-Hernandez, The Nevanlinna matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem via orthogonal matrix polynomials on $[a, b]$ for the case of an even number of moments. *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 102, 2025, p. 5–29. DOI: 10.26565/2221-5646-2025-102-01

Матриця Неванлінни усіченої задачі моментів матриці Хаусдорфа через ортогональні матричні поліноми на $[a, b]$ для випадку парної кількості моментів

Медіна-Ернандес Б.Е.

*Об'єднана аспірантура з математичних наук Національного автономного
університету Мексики та Університету Мічоакана-де-Сан-Ніколас-де-
Ідальго, Інститут фізики та математики,
Будівля С-3, 58060, Морелія, Мічоакан, Мексика*

Скалярна проблема моментів була вперше запропонована Т. Й. Стілтєсом у роботі: “Recherches sur les fractions continues”, *Annals of the Faculty of Sciences of Toulouse* 8, 1–122, (1895). Він сформулював її наступним чином: маючи моменти порядку k ($k = 0, 1, 2, \dots$), знайти додатний розподіл маси на півосі $[0, +\infty)$.

Дослідження матричної та операторної проблем моментів було розпочато М. Г. Крейном у його основоположній роботі “Fundamental aspects of the representation theory of Hermitian operators with deficiency index (m, m) ”, *Translations of the American Mathematical Society, Series II*, 97, 75–143, (1949).

Дана стаття пов'язана з усіченою проблемою моментів Хаусдорфа (англ. THMM): усіченою матричною проблемою моментів Хаусдорфа на компактному інтервалі $[a, b]$ на відміну від проблеми моментів Стілтєса на $[0, +\infty)$ та проблеми

моментів Гамбургера на $(-\infty, +\infty)$. Наш підхід спирається на метод В. П. Потапова, у якому задача інтерполяції та проблема моментів переформулюються як еквівалентні матричні нерівності і вводяться допоміжні матриці, що задовольняють властивість $\tilde{J}_q$ -внутрішньої функції класу Потапова разом із системою пар стовпців.

Реалізація методу починається з побудови матриць Ганкеля на основі заданих моментів. Якщо ці матриці є додатно напіввизначеними, то ТНММ проблема є розв'язною. У випадку строгої додатної визначеності, який називають невиродженим, ми перетворюємо відповідні матричні нерівності, щоб отримати матрицю Неванлінни (або резольвенту) ТНММ проблеми, яка характеризує її розв'язки.

Цей підхід було широко застосовано, зокрема в роботі А. Е. Choque Rivero, Yu. M. Dyukarev, B. Fritzsche та B. Kirstein: "A truncated matricial moment problem on a finite interval", *Interpolation, Schur Functions and Moment Problems, Operator Theory: Advances and Applications*, Birkhäuser, Basel, 165, 121–173, (2006).

Основний результат цієї роботи полягає у представленні матриці Неванлінни ТНММ проблеми у термінах ортогональних матричних поліномів (англ. OMP) і пов'язаних з ними поліномів другого роду в точці b . Зауважимо, що аналогічне представлення в точці a було отримано раніше в роботі А. Е. Choque Rivero, "From the Potapov to the Krein–Nudel'man representation of the resolvent matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem", *Bulletin of the Mexican Mathematical Society*, 21(2), 233–259 (2015).

Крім того, ми встановлюємо нові тотожності, що стосуються OMP, і переформулюємо явний зв'язок між матрицями Неванлінни ТНММ проблеми в точках a та b за допомогою OMP.

Ключові слова: усічена матрична проблема моментів Хаусдорфа; матриця Неванлінни; ортогональні матричні поліноми.

Історія статті: отримана: 10 вересня 2025; останній варіант: 11 листопада 2025

прийнята: 13 листопада 2025. Оприлюднено 11 грудня 2025.

I. O. Havrylenko

Ph.D student

Department of pure mathematics

V. N. Karazin Kharkiv National University

Svobody square, 4, Kharkiv, Ukraine, 61022

ihor.havrylenko@karazin.ua  <http://orcid.org/0009-0003-4226-8603>

The Jacobi operator and the stability of vertical minimal surfaces in the sub-Riemannian Lie group $\widetilde{\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})}$

We consider oriented immersed minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian manifolds which are vertical, i.e., perpendicular to the two-dimensional horizontal distribution of the sub-Riemannian structure. We showed earlier that a vertical surface is minimal in the sub-Riemannian sense if and only if it is minimal in the Riemannian sense and that its sub-Riemannian stability implies its Riemannian stability. We introduce the sub-Riemannian version of the Jacobi operator for such surfaces and prove a sufficient condition for the stability of vertical minimal surfaces similar to a theorem of Fischer-Colbrie and Schoen: if a surface allows a positive function with the vanishing Jacobi operator then it is stable.

Next, we use the Jacobi operator technique to investigate vertical minimal surfaces in the Lie group $\widetilde{\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})}$ that can be described as the universal covering of the unit tangent bundle of the hyperbolic plane with the standard left-invariant Sasaki metric (that corresponds to one of the Thurston geometries) and with two different types of sub-Riemannian structures. First, we consider a family of non-left-invariant structures defined by some parameters, find the values of parameters for which vertical minimal surfaces exist, and describe such complete connected surfaces. These are Euclidean half-planes and cylinders, and they all are stable in the sub-Riemannian sense and thus in the Riemannian sense. In particular, this gives us examples of structures that do not allow vertical minimal surfaces. Then, we describe complete connected vertical minimal surfaces for another sub-Riemannian structure that is left-invariant. These are half-planes and helicoidal surfaces that also appear to be stable in the sub-Riemannian sense and thus in the Riemannian sense.

Keywords: sub-Riemannian manifold; left-invariant metric; minimal surface; Jacobi operator; stability.

2020 Mathematics Subject Classification: 53C17; 53C30; 53C42.

© I. O. Havrylenko, 2025; CC BY 4.0 license

1. Introduction

The Jacobi operator of a minimal submanifold in a Riemannian manifold (see, e.g., [1]) is a very useful tool that allows one to determine whether this submanifold is stable. In particular, a well-known theorem by Fischer-Colbrie and Schoen ([2]) states that a complete non-compact minimal hypersurface is stable if and only if there exists a positive function for which the Jacobi operator vanishes. It also can be of use in sub-Riemannian geometry. For example, in [6] the Jacobi operator of a minimal surface in the three-dimensional sub-Riemannian Heisenberg group plays a crucial role in the proof of a Bernstein-like theorem. Note that, contrary to the Riemannian case, for submanifolds in sub-Riemannian manifolds the first and second sub-Riemannian volume variation formulas are not universal: they depend on a sub-Riemannian structure and can be quite complicated. See [6] and [4] for the examples of the Heisenberg group and the universal covering $\widetilde{E(2)}$ of the group of orientation-preserving Euclidean plane isometries respectively. Hence, the Jacobi operators also depend on such structure.

Taking this into account, in [4] we started to look into so-called vertical minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian manifolds, a relatively simple, but interesting class of surfaces. In [5] we found the first and second sub-Riemannian area variation formulas for such surfaces (Proposition 1 in the next section) showing that they can be written down in a way independent of a sub-Riemannian structure. That allowed us to consider various classes of sub-Riemannian manifolds and establish the stability of vertical minimal surfaces in them. Here we continue this work. First of all, we derive the Jacobi operator for a vertical minimal surface in any three-dimensional sub-Riemannian manifold (Proposition 2) and prove a sufficient condition for stability similar to the one of Fischer-Colbrie and Schoen: if a surface allows a positive function with the vanishing Jacobi operator then it is stable (Theorem 1). Then we apply it to the study of vertical minimal surfaces in the Lie group $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$ with two different classes of sub-Riemannian structures (Theorems 2 and 3) obtaining some new classes of such stable surfaces (note that they are also minimal and stable in the Riemannian sense) and finding examples of structures that do not allow vertical minimal surfaces.

2. Preliminaries and the Jacobi operator

A *sub-Riemannian manifold* is a smooth manifold M together with a completely non-integrable smooth distribution $\mathcal{H}$ on M (a *horizontal distribution*) and a smooth field of Euclidean scalar products $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ on $\mathcal{H}$ (a *sub-Riemannian metric*). In particular, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ can be the restriction of some Riemannian metric $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on M to $\mathcal{H}$. Here we will assume that all sub-Riemannian structures are of this form. We will call a sub-Riemannian structure on a Lie group M *left-invariant* if both $\mathcal{H}$ and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ are left-invariant.

Let Σ be an oriented immersed surface (without boundary) in a three-dimensional sub-Riemannian manifold M with a two-dimensional horizontal di-

stribution. If N_h is the orthogonal projection of the Riemannian unit normal field N of Σ onto $\mathcal{H}$ and $d\Sigma$ is the Riemannian area form of Σ , then the *sub-Riemannian area* of a domain $D \subset \Sigma$ (see, e.g., [3]) is defined as

$$A(D) = \int_D |N_h| d\Sigma.$$

The *normal variation* of the surface Σ defined by a smooth function u with compact support is the map

$$\varphi : \Sigma \times I \rightarrow M : \varphi_s(p) = \exp_p(su(p)N(p)),$$

where I is an open neighborhood of 0 in $\mathbb{R}$ and $\exp_p$ is the Riemannian exponential map at p . Therefore, we construct the variation by drawing the Riemannian geodesic through each point $p \in \Sigma$ in the direction of $u(p)N(p)$. Denote

$$A(s) = \int_{\Sigma_s} |N_h| d\Sigma_s,$$

where $\Sigma_s = \varphi_s(\Sigma)$. Then $A'(0)$ is called the first (*normal*) *sub-Riemannian area variation* defined by φ , and $A''(0)$ is called the *second* one. A surface Σ is called *minimal* if $A'(0) = 0$ for any normal variations with compact support in $\Sigma \setminus \Sigma_0$, where $\Sigma_0 = \{p \in \Sigma \mid N_h(p) = 0\}$ is the *singular set* of Σ . A minimal surface Σ is called *stable* if $A''(0) \geq 0$ for any normal variations with compact support in $\Sigma \setminus \Sigma_0$.

We will call a surface Σ in a three-dimensional sub-Riemannian manifold *vertical* if $T_p\Sigma$ is perpendicular to $\mathcal{H}_p$ for each $p \in \Sigma$, i.e., the normal vectors of these planes are orthogonal. In particular, for such surfaces $N_h = N$ and $\Sigma_0 = \emptyset$. In [5] we proved the following.

Proposition 1. *A vertical surface Σ in a three-dimensional sub-Riemannian manifold is minimal in the sub-Riemannian sense if and only if it is minimal in the Riemannian sense. In this case its second sub-Riemannian area variation is*

$$A''(0) = \int_{\Sigma} -(X(u) - \langle \nabla_N X, N \rangle u)^2 + |\nabla_{\Sigma} u|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |B|^2) u^2 d\Sigma,$$

where u is a smooth function with compact support that defines the normal variation, ∇ and Ric are the Riemannian connection and the Ricci tensor of M respectively, X is the unit normal vector field of $\mathcal{H}$ (which is tangent to Σ because it is vertical), ∇_{Σ} and B are the Riemannian gradient and the second fundamental form of Σ respectively. It follows that if Σ is stable in the sub-Riemannian sense then it is also stable in the Riemannian sense.

Define the *characteristic vector field* Z on Σ as the right angle rotation of N in $\mathcal{H}$ (in the orientation defined by X). Then $\{X, Z\}$ is an orthonormal frame on Σ , so $|\nabla_\Sigma u|^2 = X(u)^2 + Z(u)^2$ and the second variation formula takes the form

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 + 2\langle \nabla_N X, N \rangle u X(u) - \\ - (\langle \nabla_N X, N \rangle^2 + \text{Ric}(N, N) + |B|^2) u^2 d\Sigma, \quad (1)$$

Note that the divergence of the field $\langle \nabla_N X, N \rangle u^2 X$ on Σ has the vanishing integral by the Stokes' theorem because u is with compact support. On the other hand, this divergence equals

$$\text{div}_\Sigma (\langle \nabla_N X, N \rangle u^2 X) = 2\langle \nabla_N X, N \rangle u X(u) + \\ + (X(\langle \nabla_N X, N \rangle) + \langle \nabla_N X, N \rangle \text{div}_\Sigma X) u^2,$$

where $\text{div}_\Sigma X = \langle \nabla_X X, X \rangle + \langle \nabla_Z X, Z \rangle = \langle \nabla_Z X, Z \rangle$ due to the orthonormality of $\{X, Z\}$. It means that (1) can be rewritten as

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 - f u^2 d\Sigma \quad (2)$$

for some function f .

Proposition 2. *Let Σ be a minimal surface in a three-dimensional sub-Riemannian manifold whose second variation is of the form (2). Then it also has a form*

$$A''(0) = - \int_{\Sigma} u L(u) d\Sigma \quad (3)$$

where L is the Jacobi operator on the space of smooth functions on Σ :

$$L(u) = Z(Z(u)) + \langle \nabla_X Z, X \rangle Z(u) + f u. \quad (4)$$

Proof. Note that, similarly to $\text{div}_\Sigma X$ above, $\text{div}_\Sigma Z = \langle \nabla_X Z, X \rangle + \langle \nabla_Z Z, Z \rangle = \langle \nabla_X Z, X \rangle$, so in (4)

$$L(u) = Z(Z(u)) + Z(u) \text{div}_\Sigma Z + f u = \text{div}_\Sigma (Z(u)Z) + f u.$$

From this, as u has compact support,

$$0 = \int_{\Sigma} \text{div}_\Sigma (u Z(u) Z) d\Sigma = \int_{\Sigma} Z(u)^2 + u \text{div}_\Sigma (Z(u)Z) d\Sigma = \\ = \int_{\Sigma} Z(u)^2 + u(L(u) - f u) d\Sigma,$$

and that implies (3).

In particular, this Jacobi operator indeed is a linear operator on $C^\infty(M)$ as in the Riemannian case. Now we will show that an analogue of the sufficiency part in the Fischer-Colbrie-Schoen theorem ([2]) is true for this operator.

Theorem 1. *Let Σ be a minimal surface in a three-dimensional sub-Riemannian manifold with the second variation of the form (2) and the Jacobi operator L from (4). If there exists a smooth function $u > 0$ on Σ such that $L(u) = 0$ then Σ is stable.*

Proof. As $u > 0$, we can define $v = \ln u$ on Σ with derivatives

$$Z(v) = \frac{Z(u)}{u}, \quad Z(Z(v)) = \frac{Z(Z(u))}{u} - \frac{Z(u)^2}{u^2}.$$

This, (4), and $L(u) = 0$ imply that

$$\operatorname{div}_{\Sigma}(Z(v)Z) = Z(Z(v)) + \langle \nabla_X Z, X \rangle Z(v) = -Z(v)^2 - f. \quad (5)$$

For any smooth function w on Σ with compact support

$$\operatorname{div}_{\Sigma}(w^2 Z(v)Z) = \operatorname{div}_{\Sigma}(Z(v)Z) w^2 + 2Z(v)Z(w)w$$

The integral of this divergence on Σ vanishes, thus by (5) and the Cauchy–Schwarz inequality we have

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (f + Z(v)^2) w^2 d\Sigma &= - \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma}(Z(v)Z) w^2 d\Sigma = \\ &= \int_{\Sigma} 2Z(v)Z(w)w d\Sigma \leq \int_{\Sigma} Z(v)^2 w^2 + Z(w)^2 d\Sigma, \end{aligned}$$

hence for the variation defined by w the second variation (2) is non-negative:

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(w)^2 - f w^2 d\Sigma \geq 0,$$

and this means the stability of Σ .

Note that the statement also stays true for $u > 0$ with $L(u) \leq 0$ with almost the same proof. It is interesting whether the necessity (hard) part of the Fischer–Colbrie–Schoen theorem is also true for complete non-compact Σ , that is, whether the stability implies the existence of $u > 0$ with $L(u) = 0$. Here and in the next session by the completeness of a surface we mean the Riemannian completeness.

3. Vertical minimal surfaces in $\widetilde{\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})}$

The three-dimensional Thurston geometry $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$ can be described (see [8]) as the universal covering of the unit tangent bundle of the hyperbolic plane $\mathbb{H}^2$ with the Sasaki metric, that is, the half-space $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}$ with the following orthonormal frame of vector fields:

$$\begin{aligned} X_1 &= y \cos z \frac{\partial}{\partial x} + y \sin z \frac{\partial}{\partial y} - \cos z \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_2 &= -y \sin z \frac{\partial}{\partial x} + y \cos z \frac{\partial}{\partial y} + \sin z \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6)$$

This manifold also is a Lie group (the universal covering of the special linear group $SL(2, \mathbb{R})$) and the fields $\{X_1, X_2, X_3\}$ are left-invariant. The corresponding left-invariant metric is $\frac{1}{y^2} (dx^2 + dy^2 + (dx + y dz)^2)$, so we can consider a simpler orthonormal frame of

$$\begin{aligned} Y_1 &= y \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} = \cos z X_1 - \sin z X_2, \\ Y_2 &= y \frac{\partial}{\partial y} = \sin z X_1 + \cos z X_2, \quad Y_3 = \frac{\partial}{\partial z} = X_3, \end{aligned} \quad (7)$$

where the fields Y_1 and Y_2 are not left-invariant. The non-zero Lie brackets of the fields (6) are

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= -[X_2, X_1] = -X_3, \quad [X_2, X_3] = -[X_3, X_2] = X_1, \\ [X_3, X_1] &= -[X_1, X_3] = X_2, \end{aligned}$$

and the only non-zero Lie bracket of (7) is $[Y_1, Y_2] = -Y_1 - Y_3$. Using the Koszul formula as in [7], we derive from this that the Riemannian connection ∇ of the left-invariant metric is defined by

$$\begin{aligned} \nabla_{X_1} X_2 &= -\nabla_{X_2} X_1 = -\frac{X_3}{2}, \quad \nabla_{X_2} X_3 = -\frac{X_1}{2}, \quad \nabla_{X_3} X_2 = -\frac{3X_1}{2}, \\ \nabla_{X_3} X_1 &= \frac{3X_2}{2}, \quad \nabla_{X_1} X_3 = \frac{X_2}{2}, \quad \nabla_{X_1} X_1 = \nabla_{X_2} X_2 = \nabla_{X_3} X_3 = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

hence

$$\begin{aligned} \nabla_{Y_1} Y_2 &= -Y_1 - \frac{Y_3}{2}, \quad \nabla_{Y_2} Y_1 = \frac{Y_3}{2}, \quad \nabla_{Y_2} Y_3 = \nabla_{Y_3} Y_2 = -\frac{Y_1}{2}, \\ \nabla_{Y_3} Y_1 &= \nabla_{Y_1} Y_3 = \frac{Y_2}{2}, \quad \nabla_{Y_1} Y_1 = Y_2, \quad \nabla_{Y_2} Y_2 = \nabla_{Y_3} Y_3 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

It also follows from [7] that the Ricci tensor of this metric is defined by

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X_1, X_1) &= \text{Ric}(X_2, X_2) = \text{Ric}(Y_1, Y_1) = \text{Ric}(Y_2, Y_2) = -\frac{3}{2}, \\ \text{Ric}(X_3, X_3) &= \text{Ric}(Y_3, Y_3) = \frac{1}{2}, \quad \text{Ric}(X_i, X_j) = \text{Ric}(Y_i, Y_j) = 0, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (10)$$

It follows from the Lie brackets above that the left-invariant distribution orthogonal to $X_3 = Y_3$ is completely non-integrable and so defines a sub-Riemannian structure such that this distribution is horizontal. For this structure complete connected vertical surfaces are well-known: they are cylinders over geodesics in $\mathbb{H}^2$ (see, e.g., [9]). We showed in [5] that these surfaces are stable in the sub-Riemannian sense and thus in the Riemannian sense. Let us consider here a more general situation.

Theorem 2. *A two-dimensional horizontal distribution $\mathcal{H} = X^\perp$, whose unit normal field X is a linear combination of the fields Y_1, Y_2, Y_3 with constant coefficients, defines a sub-Riemannian structure on $SL(2, \mathbb{R})$ (i.e., is its horizontal*

distribution) if and only if X is of the form $\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}}(\lambda Y_1 + \mu Y_2 + Y_3)$, where $\lambda \neq -1$. This sub-Riemannian structure allows vertical minimal surfaces only for $\lambda = 0$ and $\lambda = 1$.

If $\mu \neq 0$ then a complete connected vertical surface is minimal if and only if it is a Euclidean half-plane $x = x_0$ for $\lambda = 0$ or a Euclidean half-plane $z = z_0$ for $\lambda = 1$.

If $\mu = 0$ and $\lambda = 1$ then a complete connected vertical surface is minimal if and only if it is either a Euclidean half-plane $z = z_0$ or a cylinder that can be parameterized as

$$r(s, t) = \left(s, y_0 \cos t, z_0 + \sqrt{2} t \right), \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), \quad (11)$$

where $k \in \mathbb{Z}$.

If $\mu = \lambda = 0$ then a complete connected vertical surface is minimal if and only if it is a cylinder over a geodesic in $\mathbb{H}^2$.

All these surfaces are stable in the sub-Riemannian sense and thus in the Riemannian sense.

Proof. If X is of the form $\lambda Y_1 + \mu Y_2$ then Y_3 belongs to its orthogonal distribution. As $[Y_1, Y_3] = [Y_2, Y_3] = 0$, this distribution is integrable. So indeed it should be $X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}}(\lambda Y_1 + \mu Y_2 + Y_3)$ for $\mathcal{H} = X^\perp$ to define a sub-Riemannian structure. In this case $\{Y_1 - \lambda Y_3, Y_2 - \mu Y_3\}$ is a frame of $\mathcal{H}$. The Lie bracket $-Y_1 - Y_3$ of these fields forms with them a linearly independent triple if and only if $\lambda \neq -1$. This is the condition for $\mathcal{H}$ to be completely non-integrable, so we get the desired form of X . Substituting (7) into it yields

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}} \left(\lambda y \frac{\partial}{\partial x} + \mu y \frac{\partial}{\partial y} + (-\lambda + 1) \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (12)$$

In the case $\mu \neq 0$ integral curves of this field are transversal to Euclidean planes $y = y_0$ (recall that $y > 0$), so we can build any complete connected vertical surface Σ of the sub-Riemannian structure by drawing these integral curves through points of a curve $t \mapsto (x(t) + \lambda/\mu, 1, z(t))$ and obtain the following parameterization for Σ :

$$r(s, t) = \left(x(t) + \frac{\lambda}{\mu} e^{\mu s}, e^{\mu s}, z(t) + (-\lambda + 1)s \right). \quad (13)$$

Taking derivatives, we get

$$r_s = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1} X, \quad r_t = (x', 0, z') = x' e^{-\mu s} Y_1 + (x' e^{-\mu s} + z') Y_3.$$

From this and (9), the covariant derivatives are

$$\begin{aligned} \nabla_{r_s} r_s &= (\lambda + 1)(-\mu Y_1 + \lambda Y_2), \\ \nabla_{r_t} r_s &= -\frac{\mu}{2}(3x' e^{-\mu s} + z') Y_1 + \frac{1}{2}(3\lambda x' e^{-\mu s} + \lambda z' + x' e^{-\mu s}) Y_2 - \frac{\mu}{2} x' e^{-\mu s} Y_3, \\ \nabla_{r_t} r_t &= x'' e^{-\mu s} Y_1 + (2(x')^2 e^{-2\mu s} + x' z' e^{-\mu s}) Y_2 + (x'' e^{-\mu s} + z'') Y_3. \end{aligned}$$

The unit normal field of Σ is

$$N = \frac{1}{\Delta} ((\mu x' e^{-\mu s} + \mu z') Y_1 - (\lambda x' e^{-\mu s} + \lambda z' - x' e^{-\mu s}) Y_2 - \mu x' e^{-\mu s} Y_3),$$

where $\Delta = \sqrt{(\mu x' e^{-\mu s} + \mu z')^2 + (\lambda x' e^{-\mu s} + \lambda z' - x' e^{-\mu s})^2 + (\mu x' e^{-\mu s})^2}$. So, the coefficients of the second fundamental form of Σ are

$$\begin{aligned} b_{11} &= \langle \nabla_{r_s} r_s, N \rangle = \frac{\lambda + 1}{\Delta} (-(\lambda^2 + \mu^2)(x' e^{-\mu s} + z') + \lambda x' e^{-\mu s}), \\ b_{12} &= \langle \nabla_{r_t} r_s, N \rangle = \frac{1}{2\Delta} (-(\lambda^2 + \mu^2)(3x' e^{-\mu s} + z')(x' e^{-\mu s} + z') + \\ &\quad + (1 + 2\lambda + \mu^2)(x')^2 e^{-2\mu s}), \\ b_{22} &= \langle \nabla_{r_t} r_t, N \rangle = \frac{1}{\Delta} (-x'(2x' e^{-\mu s} + z')((\lambda - 1)x' e^{-\mu s} + \lambda z') e^{-\mu s} + \\ &\quad + \mu(x'' z' - x' z'') e^{-\mu s}). \end{aligned}$$

Taking into account the coefficients of the first fundamental form of Σ

$$g_{11} = \lambda^2 + \mu^2 + 1, \quad g_{12} = (\lambda + 1)x' e^{-\mu s} + z', \quad g_{22} = (x')^2 e^{-2\mu s} + (x' e^{-\mu s} + z')^2,$$

we can rewrite the minimality condition $H = 0$, that is, $b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11} = 0$, in the form

$$f_3(t)e^{-3\mu s} + f_2(t)e^{-2\mu s} + f_1(t)e^{-\mu s} + f_0(t) = 0, \quad (14)$$

where $f_3 = (x')^3(\lambda - 1)((\lambda - 1)^2 + \mu^2)$, so it should be $x = x_0$ or $\lambda = 1$.

If $x = x_0$ then the regularity of Σ implies $z' \neq 0$, so we can put without loss of generality $z(t) = t$. Then in (14) we have $f_0 = \lambda(\lambda^2 + \mu^2)$, so $\lambda = 0$. Thus, $\Delta = |\mu|$ and for $N = Y_1$

$$b_{11} = -\mu, \quad b_{12} = -\frac{\mu}{2}, \quad b_{22} = 0, \quad g_{11} = \mu^2 + 1, \quad g_{12} = g_{22} = 1,$$

that clearly implies $H = 0$. In this case (13) takes the form

$$r(s, t) = (x_0, e^{\mu s}, t + s).$$

This is a parameterization of a half-plane $x = x_0, y > 0$. The characteristic field Z should be such that the frame $\{X, Z, N\}$ is orthonormal. Then

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}}(-Y_2 + \mu Y_3) = -\frac{1}{\mu\sqrt{\mu^2 + 1}} r_s + \frac{\sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu} r_t,$$

so

$$\langle B(Z), X \rangle = -\frac{1}{\mu(\mu^2 + 1)} b_{11} + \frac{1}{\mu} b_{12} = \frac{-\mu^2 + 1}{2(\mu^2 + 1)}$$

and, taking into account $\langle B(X), X \rangle + \langle B(Z), Z \rangle = 2H = 0$,

$$\langle B(Z), Z \rangle = -\langle B(X), X \rangle = -\frac{1}{\mu^2 + 1} b_{11} = \frac{\mu}{\mu^2 + 1}.$$

Therefore,

$$|B|^2 = \langle B(X), X \rangle^2 + 2 \langle B(X), Z \rangle^2 + \langle B(Z), Z \rangle^2 = \frac{1}{2}.$$

From (10) we have $\text{Ric}(N, N) = -\frac{3}{2}$, and

$$\nabla_N X = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \left(-\mu Y_1 + \frac{1}{2} Y_2 - \frac{\mu}{2} Y_3 \right)$$

from (9), so $\langle \nabla_N X, N \rangle = -\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$. Hence, the second variation formula (1) takes the form

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 - \frac{2\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} uX(u) + \frac{1}{\mu^2 + 1} u^2 d\Sigma.$$

Let us rewrite this expression using the divergence, as was explained in a remark after (1). From (9), $\nabla_Z X = \frac{-\mu^2 + 1}{2(\mu^2 + 1)} Y_1$, thus $\text{div}_{\Sigma} X = \langle \nabla_Z X, Z \rangle = 0$ and so $\text{div}_{\Sigma} (u^2 X) = 2uX(u)$. For a function u with compact support the integral of this divergence over Σ vanishes, which finally implies

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 + \frac{1}{\mu^2 + 1} u^2 d\Sigma \geq 0,$$

which means that Σ is stable. Note that its Riemannian stability follows also from the results of [5], but here we have shown its stability with respect to sub-Riemannian structures different from the one considered in that paper.

In the case when $\lambda = 1$ it appears that $f_0 = (z')^3(\mu^2 + 1)$ in (14), thus, similarly to the previous case, $z = z_0$, $x(t) = t$, and (13) becomes

$$r(s, t) = \left(t + \frac{1}{\mu} e^{\mu s}, e^{\mu s}, z_0 \right).$$

It means that Σ is a half-plane $z = z_0$, $y > 0$. Here we have $\Delta = \sqrt{2}|\mu|e^{-\mu s}$ and

$$b_{11} = -\sqrt{2}\mu, \quad b_{12} = -\frac{\mu e^{-\mu s}}{\sqrt{2}}, \quad b_{22} = 0, \quad g_{11} = \mu^2 + 2, \quad g_{12} = 2e^{-\mu s}, \quad g_{22} = 2e^{-2\mu s}.$$

for $N = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1 - Y_3)$. Again we clearly have the minimality of Σ . The characteristic field is

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\mu^2 + 2}} (\mu Y_1 - 2Y_2 + \mu Y_3) = -\frac{\sqrt{2}}{\mu\sqrt{\mu^2 + 2}} r_s + \frac{e^{\mu s}\sqrt{\mu^2 + 2}}{\sqrt{2}\mu} r_t.$$

From this we get

$$\begin{aligned} \langle B(Z), X \rangle &= -\frac{\sqrt{2}}{\mu(\mu^2 + 2)} b_{11} + \frac{e^{\mu s}}{\sqrt{2}\mu} b_{12} = \frac{-\mu^2 + 2}{2(\mu^2 + 2)}, \\ \langle B(Z), Z \rangle &= -\langle B(X), X \rangle = -\frac{1}{\mu^2 + 2} b_{11} = \frac{\sqrt{2}\mu}{\mu^2 + 2}, \end{aligned}$$

thus

$$|B|^2 = 2 \langle B(X), X \rangle^2 + 2 \langle B(X), Z \rangle^2 = \frac{1}{2}.$$

According to (9),

$$\nabla_N X = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\mu^2 + 2}} \left(-\frac{\mu}{2} Y_1 + Y_2 - \frac{\mu}{2} Y_3 \right),$$

which implies $\langle \nabla_N X, N \rangle = 0$. As $\text{Ric}(N, N) = -\frac{1}{2}$ from (10), (1) now takes the form

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 d\Sigma \geq 0,$$

and the stability of Σ follows.

If $\mu = \lambda = 0$ then, as was mentioned earlier, Σ is minimal if and only if is a cylinder over a geodesic in $\mathbb{H}^2$, and all such cylinders are stable in the sub-Riemannian sense by known results. So we will assume $\lambda \neq 0$ from now on. In this case integral trajectories of X are transversal to $x = x_0$ (see (12)), so we can draw them through points of a curve $t \mapsto (0, y(t), z(t))$ to get the parameterization

$$r(s, t) = (\lambda y(t)s, y(t), z(t) + (-\lambda + 1)s) \quad (15)$$

of a vertical complete connected surface Σ . Now we have

$$\begin{aligned} r_s &= \sqrt{\lambda^2 + 1} X = \lambda Y_1 + Y_3, r_t = (\lambda y's, y', z') = \frac{\lambda y's Y_1 + y' Y_2 + (\lambda y's + yz') Y_3}{y}, \\ g_{11} &= \lambda^2 + 1, g_{12} = \frac{\lambda(\lambda + 1)y's + yz'}{y}, g_{22} = \frac{(y')^2(2\lambda^2 s^2 + 1) + 2\lambda y y' z' s + y^2(z')^2}{y^2}, \\ N &= \frac{1}{\Delta} (-y' Y_1 - \lambda((\lambda - 1)y's + yz') Y_2 + \lambda y' Y_3), \end{aligned}$$

where $\Delta = \sqrt{(y')^2 + \lambda^2((\lambda - 1)y's + yz')^2 + \lambda^2(y')^2}$. From (9),

$$\begin{aligned} \nabla_{r_s} r_s &= \lambda(\lambda + 1) Y_2, \\ \nabla_{r_t} r_s &= \frac{1}{2y} (-y' Y_1 + \lambda((3\lambda + 1)y's + yz') Y_2 + \lambda y' Y_3), \\ \nabla_{r_t} r_t &= \frac{1}{y^2} ((\lambda(y y'' - 3(y')^2)s - y y' z') Y_1 + (y y'' - (y')^2 + \lambda y'(2\lambda y's + yz')s) Y_2 + \\ &\quad + (\lambda(y y'' - (y')^2)s + y^2 z'') Y_3), \end{aligned}$$

and so

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\frac{\lambda^2(\lambda + 1)}{\Delta} ((\lambda - 1)y's + yz'), \\ b_{12} &= \frac{1}{2\Delta y} ((\lambda^2 + 1)(y')^2 - \lambda^2((3\lambda + 1)y's + yz')((\lambda - 1)y's + yz')), \\ b_{22} &= \frac{1}{\Delta y^2} (-y'(\lambda(y y'' - 3(y')^2)s - y y' z') - \lambda(y y'' - (y')^2 + \lambda y'(2\lambda y's + yz')s) \cdot \\ &\quad \cdot ((\lambda - 1)y's + yz') + \lambda y'(\lambda(y y'' - (y')^2)s + y^2 z'')). \end{aligned}$$

In this case the minimality condition $b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11} = 0$ can be written down as

$$h_3(t)s^3 + h_2(t)s^2 + h_1(t)s + h_0(t) = 0, \quad (16)$$

where $h_3 = (y'\lambda(\lambda - 1))^3$, so for a minimal Σ it should be $y = y_0$ or $\lambda = 1$. But for the first of these cases (putting $z(t) = t$ and $N = -Y_2$)

$$b_{11} = -\lambda(\lambda + 1), \quad b_{12} = -\frac{\lambda}{2}, \quad b_{22} = 0, \quad g_{11} = \lambda^2 + 1, \quad g_{12} = g_{22} = 1,$$

and from $H = 0$ we get $\lambda = 0$, a contradiction. Therefore, $\lambda = 1$. Then, checking that in this case $h_1 = h_2 = 0$ and calculating h_0 in (16), we obtain the minimality condition for Σ :

$$2(y'z'' - y''z') = y(z')^3.$$

We already know that half-planes $z = z_0$ are minimal, and the proof of their stability above stays correct for $\mu = 0$: $|B^2| + \text{Ric}(N, N) = 0$ independently of a sub-Riemannian structure, and $\langle \nabla_N X, N \rangle = 0$ (where $N = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1 - Y_3)$) is true for $\lambda = 1$ and any μ , so the second variation stays the same. Therefore, in the rest of this proof we can assume $z' \neq 0$ and rewrite the previous equation as $y'' = -\frac{y}{2}$ for $y = y(z)$. Hence, $y = y_0 \cos \frac{z-z_0}{\sqrt{2}}$. It means that we can put $y = y_0 \cos t$ and $z = z_0 + \sqrt{2}t$ into (15), where $y_0 > 0$ and z_0 denote the values of the corresponding functions at 0 and t is such that $y > 0$. Note that Σ is a cylinder, whose parameterization can be rewritten as (11) by changing s , but here we will continue using (15):

$$r(s, t) = (sy_0 \cos t, y_0 \cos t, z = z_0 + \sqrt{2}t).$$

We now have $\Delta = \sqrt{2}y_0$, and, from the previous formulas,

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin t Y_1 - \sqrt{2} \cos t Y_2 - \sin t Y_3), \\ b_{11} &= -2 \cos t, \quad b_{12} = \frac{\sqrt{2} s \sin 2t - \cos 2t}{\sqrt{2} \cos t}, \\ Z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos t Y_1 - \sqrt{2} \sin t Y_2 + \cos t Y_3) = \frac{\sqrt{2} s \sin t - \cos t}{\sqrt{2}} r_s + \cos t r_t, \\ \langle B(Z), X \rangle &= \frac{\sqrt{2} s \sin t - \cos t}{2} b_{11} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}} b_{12} = \frac{1}{2}, \\ \langle B(Z), Z \rangle &= -\langle B(X), X \rangle = -\frac{1}{2} b_{11} = \cos t, \end{aligned}$$

so we get $|B|^2 = \frac{1+4\cos^2 t}{2}$ and $\text{Ric}(N, N) = -\frac{1+2\cos^2 t}{2}$ by (10). Finally, from (9),

$$\nabla_N X = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\cos t Y_1 + \sqrt{2} \sin t Y_2 - \cos t Y_3),$$

thus $\langle \nabla_N X, N \rangle = 0$. Therefore, here we have the second variation

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 - \cos^2 t u^2 d\Sigma.$$

Let us use here the sub-Riemannian Jacobi operator of Σ . By (9),

$$\nabla_X Z = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(3 \sin t Y_1 - \sqrt{2} \cos t Y_2 + \sin t Y_3 \right),$$

thus $\langle \nabla_X Z, X \rangle = \sin t$. From Proposition 2, the Jacobi operator can then be written down as

$$\begin{aligned} L(u) = Z(Z(u)) + \sin t Z(u) + \cos^2 t u = & \frac{(\sqrt{2} s \sin t - \cos t)^2}{2} u_{ss} + \cos^2 t u_{tt} + \\ & + \frac{2 \cos t (\sqrt{2} s \sin t - \cos t)}{\sqrt{2}} u_{st} + \frac{\sqrt{2} s (1 + \sin^2 t) - \sin t \cos t}{\sqrt{2}} u_s + \cos^2 t u. \end{aligned}$$

In particular, we have for functions $u = u(t)$ that are independent of s

$$L(u) = \cos^2 t (u_{tt} + u),$$

so among solutions $u(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ of the equation $L(u) = 0$ there is $u(t) = \cos t > 0$. Therefore, Σ is stable by Theorem 1, and this concludes the proof.

In particular, this theorem gives examples of sub-Riemannian structures that do not admit vertical minimal surfaces.

Note that sub-Riemannian structures from the previous theorem are not left-invariant except for the case $\mu = \lambda = 0$. On the other hand, as $[X_2, X_3] = X_1$, the horizontal distribution $\mathcal{H} = X_1^\perp$ defines a left-invariant sub-Riemannian structure on $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$. For its vertical minimal surfaces we have the following (in fact, a similar description up to an isometry will take place for any sub-Riemannian structure of the form $\mathcal{H} = (\lambda X_1 + \mu X_2)^\perp$).

Theorem 3. *A complete connected vertical surface in $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$ with the left-invariant sub-Riemannian structure defined by the horizontal distribution $\mathcal{H} = X_1^\perp$ is minimal if and only if it is either a half-plane $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ or a helicoidal surface with one of the following parameterizations:*

$$\begin{aligned} r(s, t) &= (x_0 - t \sin s, t \cos s, s), & t &\in (0, +\infty), \\ r(s, t) &= (x_0 \pm t - t \sin s, t \cos s, s), & t &\in (0, +\infty), \\ r(s, t) &= (x_0 + y_0 \sinh t - y_0 \cosh t \sin s, y_0 \cosh t \cos s, s), & t &\in \mathbb{R}, \\ r(s, t) &= (x_0 \pm y_0 \cosh t - y_0 \sinh t \sin s, y_0 \sinh t \cos s, s), & t &\in (0, +\infty), \\ s &\in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), & k &\in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (17)$$

All these surfaces are stable in the sub-Riemannian sense and thus in the Riemannian sense.

Proof. A vertical surface Σ for this structure is formed by integral curves of

$$X = X_1 = y \cos z \frac{\partial}{\partial x} + y \sin z \frac{\partial}{\partial y} - \cos z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (18)$$

Integrating this field, we get for the third coordinate $z' = -\cos z$, that is, either $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ or $z(\sigma) = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan C e^\sigma + 2\pi k$ for $C > 0$ and $k \in \mathbb{Z}$ that monotonically decreases from $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ to $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, where σ is a natural parameter. That means that in the latter case we can use z as the parameter $z = s \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ of this curve. In the former case Σ is a half-plane $z = z_0$ that was already considered in the previous theorem. In particular, we have shown that these half-planes are indeed minimal and that for them $|B^2| + \text{Ric}(N, N) = 0$, where the unit normal field is

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1 - Y_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos z X_1 - \sin z X_2 - X_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm X_2 - X_3)$$

due to (7) and $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$. It then follows from (8) that $\nabla_N X = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-3X_2 \pm X_3)$, hence $\langle \nabla_N X, N \rangle = \mp 1$, and (1) becomes

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 \mp 2uX(u) - u^2 d\Sigma.$$

Note that the field $X = X_1$ has zero divergence in $\widetilde{\text{SL}(2, \mathbb{R})}$ by (8). On the other hand, we can calculate this divergence at points of Σ using the orthonormal frame $\{X, Z, N\}$ and taking into account that $\langle \nabla_X X, X \rangle = 0$ because $|X| = 1$: $0 = \langle \nabla_Z X, Z \rangle + \langle \nabla_N X, N \rangle$. Therefore, $\text{div}_{\Sigma} X = \langle \nabla_Z X, Z \rangle = -\langle \nabla_N X, N \rangle = \pm 1$. From this we get that $\text{div}_{\Sigma}(u^2 X) = 2uX(u) \pm u^2$, and the integral of it vanishes for functions u with compact supports, which implies

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 d\Sigma \geq 0,$$

so Σ is stable.

Thus, from now on we can consider surfaces Σ built from integral curves of (18) with $z = s$ as a parameter. In particular, these curves are transversal to $z = z_0$, so we can draw them through points of a curve $t \mapsto (x(t), y(t), 0)$, where $y(t) > 0$. Integrating (18), we can get a parameterization

$$r(s, t) = (x(t) - y(t) \sin s, y(t) \cos s, s) \quad (19)$$

of Σ (note that y in (18) corresponds to $y(t) \cos s$ here). Then, according to (6),

$$\begin{aligned} r_s &= (-y \cos s, -y \sin s, 1) = -\frac{1}{\cos s} X_1 = -\frac{1}{\cos s} X, \\ r_t &= (x' - y' \sin s, y' \cos s, 0) = \frac{x' \cos s X_1 + (y' - x' \sin s) X_2 + (x' - y' \sin s) X_3}{y \cos s}, \\ N &= \frac{1}{\Delta} (-(x' - y' \sin s) X_2 + (y' - x' \sin s) X_3), \end{aligned}$$

where $\Delta = \sqrt{(x' - y' \sin s)^2 + (y' - x' \sin s)^2}$. From (8) we get the covariant derivatives

$$\begin{aligned}\nabla_{r_s} r_s &= -\frac{\sin s}{\cos^2 s} X_1, \\ \nabla_{r_t} r_s &= -\frac{1}{2y \cos^2 s} (3(x' - y' \sin s) X_2 + (y' - x' \sin s) X_3), \\ \nabla_{r_t} r_t &= \frac{1}{y^2 \cos^2 s} ((x''y - x'y') \cos^2 s - 2(y' - x' \sin s)(x' - y' \sin s)) X_1 \\ &\quad ((y'' - x'' \sin s)y - (y' - x' \sin s)y' + 2x'(x' - y' \sin s)) \cos s X_2 \\ &\quad ((x'' - y'' \sin s)y - (x' - y' \sin s)y') \cos s X_3),\end{aligned}$$

and thus the coefficients of the second fundamental form

$$\begin{aligned}b_{11} &= 0, \quad b_{12} = \frac{1}{2\Delta y \cos^2 s} (3(x' - y' \sin s)^2 - (y' - x' \sin s)^2), \\ b_{22} &= \frac{1}{\Delta y^2 \cos s} ((x''y' - x'y'')y \cos^2 s - 2x'(x' - y' \sin s)^2).\end{aligned}$$

In particular, for minimal surfaces $\langle B(Z), Z \rangle = -\langle B(X), X \rangle = 0$, hence $|B|^2 = 2\langle B(Z), X \rangle^2$. As the coefficients of the first fundamental form are

$$\begin{aligned}g_{11} &= \frac{1}{\cos^2 s}, \quad g_{12} = -\frac{x'}{y \cos s}, \\ g_{22} &= \frac{1}{y^2 \cos^2 s} ((x')^2 \cos^2 s + (y' - x' \sin s)^2 + (x' - y' \sin s)^2),\end{aligned}$$

the minimality condition $b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11} = 0$ is equivalent to

$$(x''y' - x'y'')y + x'((x')^2 - (y')^2) = 0. \quad (20)$$

First, let us consider the solution $x = x_0$. Then we can put $y(t) = t$ for $t > 0$ and get from (19) the first parameterization in (17). In this case $N = \frac{1}{\Delta}(\sin s X_2 + X_3)$, where $\Delta = \sqrt{1 + \sin^2 s}$, and

$$\begin{aligned}b_{11} &= b_{22} = 0, \quad b_{12} = \frac{3 \sin^2 s - 1}{2\Delta t \cos^2 s}, \quad Z = \frac{1}{\Delta}(X_2 - \sin s X_3) = \frac{t \cos s}{\Delta} r_t, \\ |B|^2 &= 2\langle B(Z), X \rangle^2 = \frac{2t^2 \cos^4 s}{\Delta^2} b_{12}^2 = \frac{(3 \sin^2 s - 1)^2}{2\Delta^4}.\end{aligned}$$

We also have $\text{Ric}(N, N) = \frac{-3 \sin^2 s + 1}{2\Delta^2}$ by (10) and $\nabla_N X = \frac{1}{2\Delta}(3X_2 + \sin s X_3)$ from (8), hence $\langle \nabla_N X, N \rangle = \frac{2 \sin s}{\Delta^2}$. Therefore, the second variation is

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 + \frac{4 \sin s}{1 + \sin^2 s} u X(u) - \frac{3 \sin^4 s + 1}{(1 + \sin^2 s)^2} u^2 d\Sigma.$$

by (1). Again, $\text{div}_{\Sigma} X = \langle \nabla_Z X, Z \rangle = -\langle \nabla_N X, N \rangle = -\frac{2 \sin s}{\Delta^2}$. Thus,

$$\begin{aligned}\text{div}_{\Sigma} \left(\frac{\sin s}{1 + \sin^2 s} u^2 X \right) &= \left(X \left(\frac{\sin s}{1 + \sin^2 s} \right) + \frac{\sin s}{1 + \sin^2 s} \text{div}_{\Sigma} X \right) u^2 + \\ &\quad + \frac{2 \sin s}{1 + \sin^2 s} u X(u) = -\frac{\sin^4 s + 1}{(1 + \sin^2 s)^2} u^2 + \frac{2 \sin s}{1 + \sin^2 s} u X(u).\end{aligned}$$

As the integral of this expression vanishes for u with compact support,

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 + \frac{\cos^2 s}{1 + \sin^2 s} u^2 d\Sigma \geq 0,$$

and Σ is stable.

For $x' \neq 0$ let us rewrite (20) for the function $y = y(x)$ and get $yy'' + (y')^2 = 1$, that is, $(y^2)'' = 2$, so $y^2 = (x - x_0)^2 + C$. For $C = 0$ we can put $x(t) = x_0 \pm t$ and $y(t) = t > 0$, thus getting the second parameterization in (17) from (19). For $C > 0$ we obtain the third parameterization in (17) with $x(t) = x_0 + y_0 \sinh t$ and $y(t) = y_0 \cosh t$, where $y_0 > 0$, and so $C = y_0^2 > 0$. Finally, the fourth parameterization corresponds to $x(t) = x_0 \pm y_0 \cosh t$ and $y(t) = y_0 \sinh t$ for $t > 0$, thus $C = -y_0^2 < 0$. Therefore, in these last two cases the curves (x, y) are hyperbolas in the half-plane $y > 0$.

For $x(t) = x_0 \pm t$ and $y(t) = t$ from the general formulas we obtain $\Delta = \sqrt{2}(1 \mp \sin s)$, $N = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp X_2 + X_3)$, and

$$\begin{aligned} b_{11} &= 0, \quad b_{12} = \frac{1 \mp \sin s}{\sqrt{2} t \cos^2 s}, \quad b_{22} = \frac{\mp 2(1 \mp \sin s)}{\sqrt{2} t^2 \cos s}, \\ Z &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_2 \pm X_3) = \frac{\cos s (\cos s r_s + t r_t)}{\sqrt{2}(1 \mp \sin s)}, \\ |B|^2 &= 2 \langle B(Z), X \rangle^2 = \frac{\cos^4 s (\cos s b_{11} + t b_{12})^2}{(1 \mp \sin s)^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

As N is (up to a sign) the same as in the case $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$ above, here also $\text{Ric}(N, N) = -\frac{1}{2}$ and $\langle \nabla_N X, N \rangle = \mp 1$. The rest of the stability proof for Σ is also literally the same as in that case.

For the third parameterization in (17) we have $x(t) = x_0 + y_0 \sinh t$, $y(t) = y_0 \cosh t$, and for the fourth one we have $x(t) = x_0 \pm y_0 \cosh t$, $y(t) = y_0 \sinh t$. Let us denote $\alpha = x' - y' \sin s$, $\beta = y' - x' \sin s$ for all these cases. Then

$$r_t = \frac{x' \cos s X_1 + \beta X_2 + \alpha X_3}{y \cos s}, \quad N = \frac{1}{\Delta}(-\alpha X_2 + \beta X_3),$$

where $\Delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Note that $\alpha^2 - \beta^2 = y_0^2 \cos^2 s$ for the third parameterization in (17) and $\alpha^2 - \beta^2 = -y_0^2 \cos^2 s$ for the fourth one. From the general formulas above,

$$b_{11} = 0, \quad b_{12} = \frac{3\alpha^2 - \beta^2}{2y\Delta \cos^2 s}, \quad b_{22} = -\frac{3\alpha^2 - \beta^2}{y\Delta \cos s}.$$

Recall that $r_s = -\frac{1}{\cos s}X_1 = -\frac{1}{\cos s}X$, so

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{\Delta}(\beta X_2 + \alpha X_3) = \frac{\cos s (x' \cos s r_s + y r_t)}{\Delta}, \\ |B|^2 &= 2 \langle B(Z), X \rangle^2 = \frac{\cos^4 s (x' \cos s b_{11} + y b_{12})^2}{\Delta^2} = \frac{(3\alpha^2 - \beta^2)^2}{2\Delta^4}. \end{aligned}$$

As $\text{Ric}(N, N) = \frac{-3\alpha^2 + \beta^2}{2\Delta^2}$ from (10) and $\nabla_N X = \frac{1}{\Delta} (3\beta X_2 - \alpha X_3)$ from (8), which implies $\langle \nabla_N X, N \rangle = -\frac{2\alpha\beta}{\Delta^2}$, the second variation (1) takes the form

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 - \frac{4\alpha\beta}{\Delta^2} uX(u) - \frac{(3\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2) + 4\alpha^2\beta^2}{\Delta^4} u^2 d\Sigma.$$

Once again, $\text{div}_{\Sigma} X = \langle \nabla_Z X, Z \rangle = -\langle \nabla_N X, N \rangle = \frac{2\alpha\beta}{\Delta^2}$. By direct computation we get $X\left(\frac{\alpha\beta}{\Delta^2}\right) = \frac{y_0^4 \cos^4 s}{\Delta^4} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{\Delta^4}$, hence

$$\text{div}_{\Sigma} \left(\frac{\alpha\beta}{\Delta^2} u^2 X \right) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + 2\alpha^2\beta^2}{\Delta^4} u^2 + \frac{2\alpha\beta}{\Delta^2} uX(u),$$

and the integral of this expression vanishes for u with compact support, so finally

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\Delta^2} u^2 d\Sigma.$$

For the fourth case in (17) the expression under this integral is always non-negative, thus we already have the stability of Σ . For the third one we again will use the sub-Riemannian Jacobi operator. As $\nabla_X Z = \frac{1}{2\Delta} (\alpha X_2 - \beta X_3)$ from (8), $\langle \nabla_X Z, X \rangle = 0$. By Proposition 2, the Jacobi operator of Σ then is

$$\begin{aligned} L(u) &= Z(Z(u)) + \frac{y_0^2 \cos^2 s}{\Delta^2} u = \\ &= \frac{y_0 \cosh t \cos s}{\Delta} \left(\cos s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{y_0 \cosh t \cos s}{\Delta} (\cos s u_s + u_t) \right) + \frac{y_0^2 \cos^2 s}{\Delta^2} u = \\ &= \frac{y_0^2 \cos^2 s}{\Delta^2} (\cosh^2 t \cos^2 s u_{ss} + 2 \cosh^2 t \cos s u_{st} + \cosh^2 t u_{tt} + \\ &\quad + \cos s \cosh t (\sinh t - \sin s \cosh t) u_s + \cosh t \sinh t u_t + u) \end{aligned}$$

Again, let us restrict L to functions of the form $u = u(t)$. For them $L(u) = 0$ if and only if $\cosh^2 t u_{tt} + \sinh t \cosh t u_t + u = 0$. Among solutions $u(t) = \frac{C_1}{\cosh t} + C_2 \tanh t$ of this Sturm–Liouville equation there is $u(t) = \frac{1}{\cosh t} > 0$. By Theorem 1, this implies that Σ is stable, thus concluding the proof.

4. Acknowledgements

The author would like to thank his doctoral adviser Eugene Petrov for supporting and helping him with this and the previous work.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

REFERENCES

1. T. H. Colding, W. P. Minicozzi II. A Course in Minimal Surfaces. – American Mathematical Society. – 2011. DOI: 10.1090/gsm/121

2. D. Fischer-Colbrie, R. Schoen. The structure of complete stable minimal surface in 3-manifolds of non-negative scalar curvature, *Comm. Pure Appl. Math.* – 1980. – Vol. **33**, No **2**. – P. 199–211. DOI: 10.1002/cpa.3160330206
3. N. Garofalo, D.-M. Nhieu. Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces, *Comm. Pure Appl. Math.* – 1996. – Vol. **42**, No **3**. – P. 1081–1144. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0312(199610)49:10<1081::AID-CPA3>3.0.CO;2-A
4. I. Havrylenko, E. Petrov. Stability of minimal surfaces in the sub-Riemannian manifold $\widetilde{E(2)}$, *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Math., Appl. Math., Mech.* – 2023. – Vol. **98**. – P. 50–67. DOI: 10.26565/2221-5646-2023-98-04
5. I. Havrylenko, E. Petrov. Stability of vertical minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian manifolds, *Proceedings of the International Geometry Center.* – 2023. – Vol. **18**, No **2**. – P. 159–182. DOI: 10.15673/pi-gc.v18i2.3009
6. A. Hurtado, M. Ritoré, C. Rosales. The classification of complete stable area-stationary surfaces in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$, *Adv. in Math.* – 2010. – Vol. **224**, No **2**. – P. 561–600. DOI: 10.1016/j.aim.2009.12.002
7. J. Milnor. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, *Adv. in Math.* – 1976. – Vol. **21**, No **3**. – P. 293–329. DOI: 10.1016/S0001-8708(76)80002-3
8. P. Scott. The geometries of 3-manifolds, *Bull. Lond. Math. Soc.* – 1983. – Vol. **15**, No **5**. – P. 401–487. DOI: 10.1112/blms/15.5.401
9. R. Younes. Minimal surfaces in $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$, *Ill. J. Math.* – 2010. – Vol. **54**, No **2**. – P. 671–712. DOI: 10.1215/ijm/1318598677

Article history: Received: 17 October 2025; Final form: 19 November 2025

Accepted: 20 November 2025. Published 11 December 2025.

How to cite this article:

I. Havrylenko, The Jacobi operator and the stability of vertical minimal surfaces in the sub-Riemannian Lie group $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$. *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 102, 2025, p. 30–47. DOI: 10.26565/2221-5646-2025-102-02

Оператор Якобі та стійкість вертикальних мінімальних поверхонь у субрімановій групі Лі $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$

I. O. Гавриленко

Кафедра фундаментальної математики

*Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022*

Ми розглядаємо орієнтовані занурені мінімальні поверхні у тривимірних субріманових многовидах, які є вертикальними, тобто перпендикулярними до двовимірного горизонтального розподілу субріманової структури. Раніше ми показали, що вертикальна поверхня є мінімальною в субрімановому сенсі тоді й тільки тоді, коли вона мінімальна в рімановому сенсі, і що з її субріманової стійкості випливає її ріманова стійкість. Ми вводимо субріманову версію оператора Якобі для таких поверхонь і доводимо достатню умову стійкості вертикальних мінімальних поверхонь, що аналогічна до теореми Фішер-Колбрі та Шоена: якщо поверхня допускає додатну функцію з нульовим оператором Якобі, то вона є стійкою.

Далі ми використовуємо техніку операторів Якобі для дослідження вертикальних мінімальних поверхонь у групі Лі $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$, яку можна описати як універсальне накриття розшарування одиничних дотичних векторів гіперболічної площини зі стандартною лівоінваріантною метрикою Сасаки (що відповідає одній з геометрій Терстона) та з двома різними типами субріманових структур. Спочатку ми розглядаємо сім'ю нелівоінваріантних структур, визначених деякими параметрами, знаходимо значення параметрів, для яких існують вертикальні мінімальні поверхні, та описуємо такі повні зв'язні поверхні. Це евклідові напівплощини та циліндри, й усі вони є стійкими в субрімановому сенсі, а отже і в рімановому сенсі. Зокрема, це дає нам приклади структур, що не допускають вертикальних мінімальних поверхонь. Потім ми описуємо повні зв'язні вертикальні мінімальні поверхні для іншої субріманової структури, що є лівоінваріантною. Це напівплощини та гелікоїдальні поверхні, які також виявляються стійкими в субрімановому сенсі, а отже й у рімановому сенсі.
Ключові слова: субрімановий многовид; лівоінваріантна метрика; мінімальна поверхня; оператор Якобі; стійкість.

Історія статті: отримана: 17 жовтня 2025; останній варіант: 19 листопада 2025
прийнята: 20 листопада 2025. Оприлюднено 11 грудня 2025.

Д. Д. Селютін

доктор філософії

викладач кафедри фундаментальної математики

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

майдан Свободи 4, Харків, Україна, 61022

d.seliutin@karazin.ua  <http://orcid.org/0000-0002-4591-7272>

Про диференціювання відносно фільтрів

У статті розглянуто узагальнення поняття похідної функції однієї дійсної змінної на основі теорії фільтрів. Запропоновано нову конструкцію, що дозволяє визначити похідну функції відносно фільтра, який відображає спосіб зближення змінної до заданої точки. На відміну від класичного означення, де границя визначається через прямолінійне зближення аргументу, нове означення дозволяє враховувати ширший спектр підходів до точки, що забезпечує гнучкіший апарат для аналізу локальної поведінки функцій. Введене поняття охоплює класичне означення похідної як частковий випадок при виборі відповідного фільтра. Наведено доведення узагальнення базових властивостей похідної: лінійності, правила добутку, частки. Зокрема, продемонстровано, що похідна відносно фільтра задовольняє ті самі формальні правила диференціювання, що й класична похідна, при збереженні суттєвої гнучкості у виборі характеру зближення аргументу. Отримані результати дозволяють розширити сферу застосування диференціального числення до випадків, де класичний підхід або не є застосовним, або втрачає точність чи інтерпретаційну зручність. Показано, що у деяких ситуаціях похідна за фільтром краще відображає реальні процеси зміни величин, наприклад у задачах з асиметричними або обмеженими околами точки. Запропонований підхід відкриває нові перспективи для застосування в теорії узагальнених функцій, теорії міри та функціональному аналізі. Також у статті наведено приклади застосування нового поняття та здійснено порівняльний аналіз з класичною теорією. Представлений матеріал може бути корисним для дослідників, що працюють у галузі математичного аналізу, а також для викладачів, які прагнуть розширити традиційний підхід до диференціювання. Робота має як теоретичну, так і методологічну цінність, оскільки вводить новий інструмент для подальших досліджень у галузі сучасної математичної теорії границь.

Ключові слова: похідна; фільтри; збіжність за фільтром.

2020 Mathematics Subject Classification: 26A24; 40A35; 54A20;

1. Вступ

Нагадування: нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функція, неперервна в точці $x_0 \in \mathbb{R}$. Відомо, що похідною функції $f(x)$ в точці x_0 називають

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

© Селютін Д. Д., 2025; CC BY 4.0 license

Широко відомі умови існування похідної, критерій диференційовності, правила диференціювання, таблиця похідних тощо. Дане поняття є одним із центральних (поруч із інтегралом) концепцій математичного аналізу. Похідна має широкий спектр застосувань не тільки в математичній науці (теорія функцій, теорія ймовірностей, диференціальна геометрія тощо), проте займає одну із провідних ролей в прикладних дисциплінах: різноманітні розділи фізики, біологія, економіка та економічна статистика, наука про дані. Проте поруч із величезним спектром застосувань, звичайна похідна функції має кілька недоліків: по-перше, функція має бути неперервною в точці, по-друге, "модулеподібні" функції не мають похідної у своїх "гострих" точках. Наприклад, добре відомо, що функція $f(x) = |x|$ не диференційовна в точці $x_0 = 0$ в силу того, що односторонні похідні даної функції в даній точці є різними. Звісно, одностороння похідна певним чином вирішує цю проблему, проте для її застосування потрібні два різні поняття "правої" та "лівої" похідних. Так, ці поняття дуже схожі та мають косметичні відмінності, проте це два різних поняття. В нещодавній статті [2] нами було запропоновано поняття визначеного інтеграла відносно фільтра. Стаття містить докладний опис схеми побудови інтеграла відносно фільтра, вивчено його властивості та переваги, порівняно зі звичайним інтегралом Рімана по відрізьку. Визначення поняття похідної в термінах фільтрів – це абсолютно логічний та природний крок, оскільки і похідна функції, і інтеграл Рімана – концепції, які для своєї побудови вимагають "граничного переходу". Тому в наступних розділах даної короткої статті ми опишемо загальну конструкцію похідної функції із використанням техніки фільтрів. Після цього ми порівняємо цю нову концепцію із відомим визначенням похідної і переконаємося в тому, що наша конструкція дійсно є узагальненням. Далі ми будемо вивчати властивості похідної за фільтром, зокрема, відповімо на питання: чи працює для похідної за фільтром правило диференціювання добутку?

2. Необхідні відомості із теорії фільтрів

Нагадаємо, що фільтром на непорожній множині Ω називають таку сім'ю підмножин $\mathfrak{F} \subset 2^\Omega$, яка задовольняє наступним аксіомам:

1. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$;
2. $A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{F}$;
3. Якщо $A \in \mathfrak{F}$, $D \supset A$, то також $D \in \mathfrak{F}$

Поруч із поняттям фільтра ми також будемо використовувати базу фільтра. Сім'ю $\mathfrak{B}$ підмножин множини Ω називають базою фільтра, якщо

1. $\emptyset \notin \mathfrak{B}$;
2. $\forall A, B \in \mathfrak{B} \exists C \in \mathfrak{B} : C \subset A \cap B$.

Говорять, що фільтр $\mathfrak{F}$ породжено базою $\mathfrak{B}$, якщо кожен елемент фільтра $\mathfrak{F}$ містить хоча б один елемент бази фільтра $\mathfrak{B}$. Через $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ будемо позначати фільтр, породжений базою $\mathfrak{B}$.

Останнє визначення, яке нам варто пригадати – це визначення збіжності функції за фільтром. Отож нехай X, Y – топологічні простори, $f : X \rightarrow Y$ – функція, $y \in X$, $\mathfrak{F}$ – фільтр на X . Говорять, що функція f збігається до y за фільтром $\mathfrak{F}$ (позначення: $y = \lim_{\mathfrak{F}} f$), якщо для довільного околу U точки y існує елемент фільтра $A \in \mathfrak{F}$ такий, що $\{f(t) : t \in A\} \subset U$. Більше про теорію фільтрів можна прочитати, наприклад у чудовому підручнику [1]. Теорія фільтрів – відносно молода наука, яка зараз дуже активно розвивається. За останні роки було опубліковано чимало досліджень з теорії фільтрів та її застосувань, наприклад статті [3], [4], [5].

3. Похідна функції за фільтром

Нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функція, визначена в деякому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Розглянемо функцію:

$$D_{x_0}(f, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

яка діє за наступним правилом:

$$D_{x_0}(f, h) = \frac{1}{h} (f(x_0 + h) - f(x_0)).$$

Очевидно, що

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} D_{x_0}(f, h).$$

Тепер ми готові дати центральне визначення даної статті.

Означення 1. Нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функція, визначена в деякому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Нехай $\mathfrak{F}$ – фільтр на $\mathbb{R}$, який мажорує фільтр проколотих околів точки 0. *Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 відносно фільтра $\mathfrak{F}$* будемо називати

$$\frac{df}{d\mathfrak{F}}(x_0) = \lim_{\mathfrak{F}} D_{x_0}(f, h), \quad (1)$$

якщо дана границя існує.

Зауваження 1. Функції, у яких є похідна в даній точці за певним фільтром, будемо називати диференційовними за цим фільтром в цій точці.

Покажемо тепер, що класичне визначення поняття похідної є частковим випадком Означення [1]. Дійсно, розглянемо фільтр $\mathfrak{F}_0$ проколотих околів точки 0.

Очевидно, що в цьому випадку

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\mathfrak{F}_0} D_{x_0}(f, h).$$

4. Властивості похідної функції за фільтром

Для "класичної" похідної можна сформулювати добре відомі усім властивості: вона задовольняє властивостям лінійності та однорідності, визначено правила диференціювання добутку і частки двох функцій. В даному розділі ми будемо вивчати узагальнення цих властивостей для похідної функції відносно фільтра.

Теорема 1. Нехай $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функції, визначені в деякому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Нехай $\mathfrak{F}$ – фільтр на $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\frac{d(\alpha f + \beta g)}{d\mathfrak{F}}(x_0) = \alpha \frac{df}{d\mathfrak{F}}(x_0) + \beta \frac{dg}{d\mathfrak{F}}(x_0),$$

іншими словами, похідна за фільтром від суми двох функцій – це сума похідних за фільтром від цих двох функцій.

Доведення цього факту спирається на застосування властивостей лінійності та однорідності границі функції за фільтром (див. [2]). Краще ми зосередимо свою увагу на дослідженні правил диференціювання добутку і частки.

Зараз ми дамо одне технічне визначення.

Означення 2. Нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функція, визначена в деякому околі точки $a \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}$ – фільтр на $\mathbb{R}$. Будемо називати функцію f $\mathfrak{F}$ -неперервною в точці a , якщо $\lim_{\mathfrak{F}} f(a+h) = f(a)$.

Теорема 2. Нехай $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функції, визначені в деякому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}$ – фільтр на $\mathbb{R}$. Нехай існують похідні функцій f, g відносно фільтра $\mathfrak{F}$ в точці x_0 . Також нехай функції f та g є $\mathfrak{F}$ -неперервними в точці x_0 . Тоді $(f \cdot g)$ також є диференційовною в точці x_0 за фільтром $\mathfrak{F}$, і

$$\frac{d(f \cdot g)}{d\mathfrak{F}}(x_0) = \frac{df}{d\mathfrak{F}}(x_0) \cdot g(x_0) + \frac{dg}{d\mathfrak{F}}(x_0) \cdot f(x_0). \quad (2)$$

Доведення. Дійсно,

$$\frac{d(f \cdot g)}{d\mathfrak{F}}(x_0) = \lim_{\mathfrak{F}} D_{x_0}(f \cdot g, h) = \lim_{\mathfrak{F}} \frac{1}{h} ((f \cdot g)(x_0 + h) - (f \cdot g)(x_0)) =$$

$$\lim_{\mathfrak{F}} \frac{1}{h} (f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0)) =$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\mathfrak{F}} \frac{1}{h} (f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot g(x_0 + h) \\
& \quad - f(x_0) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0)) = \\
& \lim_{\mathfrak{F}} \frac{1}{h} \left[g(x_0 + h)(f(x_0 + h) - f(x_0)) + f(x_0)(g(x_0 + h) - g(x_0)) \right] = \\
& \lim_{\mathfrak{F}} \left[\frac{g(x_0 + h)(f(x_0 + h) - f(x_0))}{h} + \frac{f(x_0)(g(x_0 + h) - g(x_0))}{h} \right] = \\
& \lim_{\mathfrak{F}} \left[\frac{g(x_0 + h)(f(x_0 + h) - f(x_0))}{h} \right] + \lim_{\mathfrak{F}} \left[\frac{f(x_0)(g(x_0 + h) - g(x_0))}{h} \right] = \\
& \lim_{\mathfrak{F}} g(x_0 + h) \cdot \lim_{\mathfrak{F}} \left[\frac{(f(x_0 + h) - f(x_0))}{h} \right] + f(x_0) \cdot \lim_{\mathfrak{F}} \left[\frac{(g(x_0 + h) - g(x_0))}{h} \right] = \\
& \quad \frac{df}{d\mathfrak{F}}(x_0) \cdot g(x_0) + \frac{dg}{d\mathfrak{F}}(x_0) \cdot f(x_0).
\end{aligned}$$

□

Зауваження 2. Навіщо ми ввели поняття $\mathfrak{F}$ -неперервності? Для того, аби у третьому знизу рядку цієї теореми мати змогу перейти до добутку границь. В умові теореми ми вимагали $\mathfrak{F}$ -неперервності від обох функцій, проте фактично використали цю особливість лише для функції g . Ми вимагаємо того самого і від функції f , оскільки в доведенні ми можемо додати і відняти інший доданок, а саме $g(x_0) \cdot f(x_0 + h)$.

Переходимо тепер до правила диференціювання за фільтри частки функцій.

Теорема 3. Нехай $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функції, визначені в деякому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}$ – фільтр на $\mathbb{R}$. Нехай існують похідні функцій f, g відносно фільтра $\mathfrak{F}$ в точці x_0 . Також нехай функція g є $\mathfrak{F}$ -неперервною в точці x_0 , $g(x_0) \neq 0$. Тоді частка функцій $\left(f/g \right)$ також є диференційовною в точці x_0 за фільтром $\mathfrak{F}$, і

$$\frac{d\left(f/g \right)}{d\mathfrak{F}}(x_0) = \frac{\frac{df}{d\mathfrak{F}}(x_0) \cdot g(x_0) - \frac{dg}{d\mathfrak{F}}(x_0) \cdot f(x_0)}{g^2(x_0)} \quad (3)$$

Доведення. Дійсно,

$$\begin{aligned}
& \frac{d\left(f/g \right)}{d\mathfrak{F}}(x_0) = \lim_{\mathfrak{F}} \frac{1}{h} \left[\left(\frac{f}{g} \right)(x_0 + h) - \left(\frac{f}{g} \right)(x_0) \right] = \\
& \lim_{\mathfrak{F}} \frac{1}{h} \left[\frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right] = \lim_{\mathfrak{F}} \frac{1}{h} \left[\frac{g(x_0) \cdot f(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0 + h)}{g(x_0) \cdot g(x_0 + h)} \right].
\end{aligned}$$

В чисельнику додамо та відніmemo вираз $g(x_0) \cdot f(x_0)$. Отримаємо

$$\begin{aligned} \lim_{\mathfrak{F}} \frac{1}{h} \left[\frac{g(x_0) \cdot f(x_0 + h) - g(x_0) \cdot f(x_0) + g(x_0) \cdot f(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0 + h)}{g(x_0) \cdot g(x_0 + h)} \right] &= \\ \lim_{\mathfrak{F}} \frac{1}{h} \left[\frac{g(x_0)(f(x_0 + h) - f(x_0)) - f(x_0)(g(x_0 + h) - g(x_0))}{g(x_0) \cdot g(x_0 + h)} \right] &= \\ \lim_{\mathfrak{F}} \left[\frac{g(x_0)(f(x_0 + h) - f(x_0))}{h \cdot g(x_0) \cdot g(x_0 + h)} - \frac{f(x_0)(g(x_0 + h) - g(x_0))}{h \cdot g(x_0) \cdot g(x_0 + h)} \right] &= \\ \lim_{\mathfrak{F}} \left[\frac{g(x_0) \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}{g(x_0) \cdot g(x_0 + h)} - \frac{f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}{g(x_0) \cdot g(x_0 + h)} \right]. \end{aligned}$$

Оскільки функція $g \in \mathfrak{F}$ -неперервною в точці x_0 , маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{\mathfrak{F}} \frac{g(x_0) \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}{g(x_0) \cdot g(x_0)} - \lim_{\mathfrak{F}} \frac{f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}{g(x_0) \cdot g(x_0)} &= \\ \frac{g(x_0) \cdot \frac{df}{d\mathfrak{F}}(x_0)}{g^2(x_0)} - \frac{f(x_0) \cdot \frac{dg}{d\mathfrak{F}}(x_0)}{g^2(x_0)} &= \\ \frac{\frac{df}{d\mathfrak{F}}(x_0) \cdot g(x_0) - \frac{dg}{d\mathfrak{F}}(x_0) \cdot f(x_0)}{g^2(x_0)} \end{aligned}$$

□

Зауваження 3. Таким чином, ми бачимо, що для похідної функції відносно фільтра мають місце всі властивості, які були притаманні класичній похідній.

Розглянемо ще один пункт, який ми трохи згадали у вступній частині: диференціювання функції $f(x) = |x|$ в точці $x_0 = 0$. Так, в цій точці модуль не має похідної у звичайному розумінні цього слова, проте має односторонні похідні. Проте тепер, маючи такий інструмент, як похідна функції за фільтром, обчислення похідної даної функції в даній точці стає набагато елегантнішим. Дійсно, розглянемо сім'ї множин

$$\mathbb{B}_{0+} = ((0, \delta))_{\delta > 0}, \quad \mathbb{B}_{0-} = ((-\delta, 0))_{\delta > 0}.$$

Очевидно, що ці сім'ї утворюють бази фільтрів.

Тоді

$$\frac{df}{d\mathfrak{F}(\mathbb{B}_{0+})}(0) = 1, \quad \frac{df}{d\mathfrak{F}(\mathbb{B}_{0-})}(0) = -1.$$

Наостанок сформулюємо очевидну теорему.

Теорема 4. Нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функція, визначена в деякому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ – фільтри на $\mathbb{R}$, $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. Нехай існує похідна функції f відносно фільтра $\mathfrak{F}_1$ в точці x_0 . Тоді існує також похідна функції f відносно фільтра $\mathfrak{F}_2$ в точці x_0 .

Доведення цього факту є елементарним наслідком загальних властивостей границі функції за фільтром.

5. Додаткові приклади фільтрів та функцій

Вище ми розглянули функцію $f(x) = |x|$, та фільтр, по якому дана функція є диференційовною. Розглянемо тепер функцію $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, якщо $x \neq 0$, і $f(0) = 0$. З "класичної точки зору" дана функція є недиференційовною в $x_0 = 0$, оскільки $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$ – границя не існує. Наша задача полягає в тому, аби побудувати фільтр $\mathfrak{F}$, який одночасно мажорує проколоти околи 0 такий, що $f(x)$ була б диференційовною за цим фільтром. Для цього розглянемо таку послідовність множин: $B_n = \{x > 0 : \frac{1}{x} \in [\pi n; \pi n + \frac{\pi}{2}]\}$. Нескладно перевірити, що отримана система множин утворює базу фільтра на $\mathbb{R}$. Нехай тепер $\mathfrak{F}$ – фільтр, породжений базою $(B_n)_n$. Фільтр $\mathfrak{F}$ мажорує фільтр околів точки 0, проте він "відсіює" множини, на яких функція $f(x)$ неконтрольовано коливається. Тоді

$$\frac{df}{d\mathfrak{F}}(0) = \lim_{\mathfrak{F}} \sin \frac{1}{h} = 0.$$

6. Зв'язок між похідною за фільтром та збіжністю за Гейне

В класичному матаналізі існує еквівалентний підхід до визначення похідної, а саме мовою послідовностей (за Гейне). Кажуть, що функція $f(x)$ має похідну в точці a , якщо для довільної збіжної до a числової послідовності (x_n) , де для всіх $n \in \mathbb{N}$ $x_n \neq a$ існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}.$$

Маючи збіжну до $a \in \mathbb{R}$ числову послідовність (x_n) , ми можемо побудувати фільтр $\mathfrak{F}_{x_n}$, базою якого будуть наступні множини: $A_k = \{x_n - a : n \geq k\}$. Таким чином, нескладно побачити, що в такому випадку похідна за фільтром $\mathfrak{F}_{x_n}$ буде співпадати з означенням похідної "за Гейне".

5. Висновок

У даній статті запропоновано новий підхід до диференціювання функцій дійсної змінної шляхом узагальнення класичного означення похідної за допомогою фільтрів. Концепція похідної відносно фільтра розширює традиційне розуміння границі, дозволяючи більш гнучко описувати процес наближення змінної до точки. Такий підхід охоплює класичну похідну як окремий випадок, водночас відкриваючи шлях до аналізу функцій у ситуаціях, де звичне означення або непридатне, або недостатньо точне.

Запропоноване означення демонструє узгодженість із основними правилами диференціювання — такими як лінійність, правило добутку, частки та складеної функції, що підтверджує його теоретичну строгість. Разом із цим,

нова конструкція забезпечує інструментальну гнучкість, що дозволяє розглядати задачі з обмеженими або асиметричними околами, де класичне диференціювання втрачає ефективність або смислову інтерпретованість.

Одержані результати мають потенціал до практичного застосування в теорії узагальнених функцій, теорії міри та функціональному аналізі. Порівняльний аналіз із класичним підходом, наведені приклади та доведення властивостей нового означення підтверджують як методологічну, так і прикладну цінність цієї роботи. Запропонований інструмент може слугувати основою для подальших досліджень у галузі математичного аналізу та бути включеним у дидактичні підходи до викладання теми похідної. Таким чином, робота не лише поглиблює теоретичне розуміння локальної поведінки функцій, а й пропонує нові перспективи для розвитку сучасної теорії границь.

Подяки

Статтю підготовлено в рамках виконання держбюджетної теми Міністерства освіти і науки України № БФ/32-2021(11). Також автор висловлює безмежні слова вдячності своїм батькам за постійну підтримку. Окремі слова вдячності хочеться висловити Силам Безпеки та Оборони України в особі батька автора, які в даний момент дають рішучу відсіч російським окупантам. Автор висловлює велику подяку анонімним рецензентам даної роботи, які надали надзвичайно цінні коментарі та поради та зауваження, завдяки яким стаття стала коректнішою та повнішою.

Історія статті: отримана: 30 липня 2025; останній варіант: 20 листопада 2025
прийнята: 22 листопада 2025. Оприлюднено 11 грудня 2025.

Конфлікт інтересів: Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

REFERENCES

1. V. M. Kadets. Course of functional analysis and measure theory. - Lviv: Publisher I. E. Chyzhykov, 2012. – 590 p. – (Series "University Library").
2. D. Seliutin. On integration with respect to filter, Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2023. Vol. **98**. – P. 25-35. DOI: 10.26565/2221-5646-2023-98-02
3. V. Kadets, D. Seliutin, J. Tryba, Conglomerated filters and statistical measures. J. Math. Anal. Appl. – 2022. – Vol. **509**. N. 1. DOI: 10.1016/j.jmaa.2021.125955
4. V. Kadets, D. Seliutin. Completeness in topological vector spaces and filters on $\mathbb{N}$. Bulletin of the Belgian Mathematical Society, Simon Stevin. – 2022. – Vol. **28**. N. 4. – P. 531 - 545. DOI: 10.36045/j.bbms.210512

5. P. Leonetti, Characterizations of the ideal core. J. Math. Anal. Appl. – 2019. – Vol. **477**. –N. 2. – P. 1063–1071. DOI: 10.1016/j.jmaa.2019.05.001

Article history: Received: 30 July 2025; Final form: 20 November 2025

Accepted: 22 November 2025. Published 11 December 2025.

On differentiation with respect to filters

D. Seliutin

Department of Fundamental mathematics

V. N. Karazin Kharkiv National University

4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

The article explores a generalization of the concept of the derivative of a real-valued function of one variable based on filter theory. A new construction is proposed that allows the definition of a derivative of a function with respect to a filter, which reflects the manner in which the variable approaches a given point. Unlike the classical definition, where the limit is taken via a linear approach of the argument, the new definition permits a wider range of approaches to the point, thus providing a more flexible framework for analyzing the local behavior of functions. The introduced concept includes the classical definition of the derivative as a special case when an appropriate filter is chosen. The paper presents proofs of generalized versions of basic derivative properties: linearity, product rule, quotient rule. In particular, it is shown that the derivative with respect to a filter satisfies the same formal differentiation rules as the classical derivative while preserving greater flexibility in how the argument approaches the point. The results obtained expand the scope of differential calculus to cases where the classical approach is either inapplicable or lacks precision or interpretative convenience. It is demonstrated that, in some situations, the derivative with respect to a filter better reflects real processes of change, such as in problems with asymmetric or constrained neighborhoods of a point. The proposed approach opens new perspectives for applications in the theory of generalized functions, measure theory, and functional analysis. The article also provides examples illustrating the application of the new concept and offers a comparative analysis with the classical theory. The presented material may be of interest to researchers in the field of mathematical analysis as well as to educators seeking to extend the traditional approach to differentiation. This work holds both theoretical and methodological value, as it introduces a new tool for further research in the field of modern limit theory.

Keywords: derivative; filters; convergence with respect to filter.

How to cite this article:

D. Seliutin, On differentiation with respect to filters, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 102, 2025, p. 48–56 (in Ukrainian). DOI: 10.26565/2221-5646-2025-102-03

Roman Skurikhin

PhD student

Department of Pure Mathematics

V. N. Karazin Kharkiv National University

4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine, 61022

roman.skurikhin@karazin.ua  <http://orcid.org/0009-0005-0504-8518>

Sergiy Gefter

PhD in mathematics, Senior Research Fellow

B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National
Academy of Sciences of Ukraine

47 Nauky Ave., Kharkiv, Ukraine, 61103

gefter@karazin.ua  <http://orcid.org/0000-0001-5301-5087>

Eugene Karolinsky

PhD in mathematics, Associate Professor

Department of Pure Mathematics

V. N. Karazin Kharkiv National University

4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine, 61022

karolinsky@karazin.ua  <http://orcid.org/0000-0002-1109-4247>

Closed equivalence relations on compact spaces and pairs of commutative C^* -algebras: a categorical approach

In this paper, we study a categorical extension of the classical Gelfand–Naimark duality between compact Hausdorff spaces and commutative unital C^* -algebras. We establish an equivalence between the category of compact Hausdorff spaces with closed equivalence relations and the category of pairs consisting of a commutative unital C^* -algebra together with one of its unital C^* -subalgebras. The motivation is that Gelfand duality can be enriched by additional structure: closed equivalence relations encode quotient spaces and invariance on the topological side, while subalgebras reflect restrictions and symmetries on the algebraic side. Shilov’s theorem, which identifies closed unital self-adjoint subalgebras of $C(X)$ with algebras of functions invariant under closed equivalence relations, provides an essential link between these settings. We introduce the category **EqRel**, whose objects are compact Hausdorff spaces with closed equivalence relations and whose morphisms are continuous trajectory-preserving maps, and the category **C^* Pairs**, whose objects are pairs (A, B) with A a commutative unital C^* -algebra and $B \subset A$ a unital C^* -subalgebra, with morphisms given by unital

$*$ -homomorphisms preserving B . Contravariant functors are defined in both directions: $(X, R) \mapsto (C(X), B_R)$, where B_R consists of functions constant on R -classes, and $(A, B) \mapsto (\Sigma(A), R_B)$, where $\Sigma(A)$ is the spectrum and R_B relates characters agreeing on B . We verify that these constructions are functorial and compatible with composition of morphisms. Using the Kolmogorov–Gelfand theorem, the Gelfand transform, and Shilov’s theorem, we show that these functors are mutually inverse up to morphism of functors and thus prove the categorical equivalence $\mathbf{EqRel} \simeq \mathbf{C^*Pairs}^{\text{op}}$. This result demonstrates that the geometric notion of closed equivalence relations on compact spaces is in perfect correspondence with the algebraic notion of unital subalgebras of commutative C^* -algebras.

Keywords: categorical equivalence; Gelfand duality; closed equivalence relation; commutative C^* -algebra; invariant subalgebra; Shilov theorem.

2020 Mathematics Subject Classification: 46L05; 46M15.

1. Introduction

This paper presents a categorical correspondence between two seemingly distinct mathematical objects: topological spaces with closed equivalence relations and pairs consisting of a commutative C^* -algebra and its subalgebra.

Our motivation stems from the classical duality between compact Hausdorff spaces and commutative unital C^* -algebras established by the Gelfand–Naimark theorem. Extending this idea, we explore how additional structure — in particular, closed equivalence relations or subalgebras — can be encoded categorically and translated between the topological and algebraic frameworks.

The paper is structured as follows. In Section 2, we review essential notions from category theory, topology, and C^* -algebras. Section 3 introduces two categories: one based on compact spaces with closed equivalence relations, another based on commutative C^* -algebra pairs, and defines natural functors between them. Finally, in Section 4 we prove that the above mentioned functors establish an equivalence of categories.

2. Preliminaries

Notions from Category Theory. We recall some standard definitions in category theory (see, e.g., [1, Chapter II]).

Definition 1. A covariant functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ between categories $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ assigns

- to each object $A \in \mathcal{C}$, an object $F(A) \in \mathcal{D}$,
- to each morphism $\varphi : A \rightarrow B$ in $\mathcal{C}$, a morphism $F(\varphi) : F(A) \rightarrow F(B)$ in $\mathcal{D}$,

such that

1. $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$,
2. $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$ for all composable morphisms ψ, φ .

Definition 2. A contravariant functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ assigns

- to each object $A \in \mathcal{C}$, an object $F(A) \in \mathcal{D}$,
- to each morphism $\varphi : A \rightarrow B$ in $\mathcal{C}$, a morphism $F(\varphi) : F(B) \rightarrow F(A)$ in $\mathcal{D}$,

such that

1. $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$,
2. $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ for all composable morphisms.

Definition 3. Given a category $\mathcal{C}$, its dual category (or opposite category), denoted by $\mathcal{C}^{\text{op}}$, is defined as follows:

- the objects of $\mathcal{C}^{\text{op}}$ are the same as those of $\mathcal{C}$,
- for each morphism $\varphi : A \rightarrow B$ in $\mathcal{C}$, there is a corresponding morphism $\varphi^{\text{op}} : B \rightarrow A$ in $\mathcal{C}^{\text{op}}$,
- composition in $\mathcal{C}^{\text{op}}$ is given by reversing the order of composition in $\mathcal{C}$, i.e. $(\varphi \circ \psi)^{\text{op}} = \psi^{\text{op}} \circ \varphi^{\text{op}}$.

Definition 4. Let $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ be two functors. A morphism of functors $\eta : F \rightarrow G$ is a family of morphisms $\{\eta_X : F(X) \rightarrow G(X)\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ such that for every morphism $f : X \rightarrow Y$ in $\mathcal{C}$, the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

Definition 5. A morphism $\varphi : X \rightarrow Y$ in a category $\mathcal{C}$ is an isomorphism if there exists a morphism $\psi : Y \rightarrow X$ such that $\psi \circ \varphi = \text{id}_X$ and $\varphi \circ \psi = \text{id}_Y$.

Definition 6. Two categories $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ are said to be equivalent if there exist functors $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ and $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ together with isomorphisms of functors

$$\eta : G \circ F \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}, \quad \epsilon : F \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}.$$

Remark 1. A contravariant functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ can be viewed as an ordinary covariant functor $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$. In particular, when studying equivalences, it is common to consider equivalences between a category and the dual of another. Thus, equivalence can also be formulated in terms of contravariant functors once one passes to opposite categories.

C^* -Algebras and Their Spectra. Let us recall some basic definitions from the theory of Banach and C^* -algebras (see, e.g., [3, Chapter 1]).

Definition 7. A Banach algebra is a complex associative algebra A equipped with a norm $\|\cdot\|$ such that

- A is a Banach space,
- $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ for all $a, b \in A$,
- A has a multiplicative identity 1_A such that $1_A a = a = a 1_A$ for all $a \in A$.

Definition 8. A character on a Banach algebra A is a linear functional $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ such that $\varphi(1_A) = 1$ and $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ for all $a, b \in A$.

Definition 9. The spectrum of a commutative Banach algebra A is the set $\Sigma(A)$ of all characters of A , equipped with the weak* topology (pointwise convergence).

It is well known that the spectrum $\Sigma(A)$ is a compact Hausdorff space.

Definition 10. A Banach algebra A is called a C^* -algebra if it is equipped with an involution $a \mapsto a^*$ satisfying

1. $(\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*$,
2. $(ab)^* = b^* a^*$,
3. $(a^*)^* = a$,
4. $\|a^*\| = \|a\|$,
5. $\|aa^*\| = \|a\|^2$,

for all $a, b \in A$ and $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Example 1. Let X be a compact Hausdorff space. The set $C(X)$ of complex-valued continuous functions on X is a commutative unital C^* -algebra with

- pointwise operations,
- involution $f^*(x) := \overline{f(x)}$,
- norm $\|f\| := \max_{x \in X} |f(x)|$.

Structure Theorems for Commutative C^* -Algebras. The following classical results establish a deep duality between commutative C^* -algebras and compact Hausdorff spaces.

Theorem 1 (Kolmogorov-Gelfand [4]). Let X be a compact Hausdorff space. For each $x \in X$, define a character $\varphi_x : C(X) \rightarrow \mathbb{C}$ by $\varphi_x(f) := f(x)$. Then the map

$$I : X \rightarrow \Sigma(C(X)), \quad I(x) = \varphi_x$$

is a homeomorphism. Thus, the spectrum of $C(X)$ is naturally identified with the space X .

Theorem 2 (Gelfand-Naimark [2], Theorem 11.18). *Let A be a commutative unital C^* -algebra. The Gelfand transform*

$$\Gamma : A \rightarrow C(\Sigma(A)), \quad a \mapsto \hat{a}, \quad \hat{a}(\varphi) := \varphi(a),$$

is an isometric $$ -isomorphism of C^* -algebras.*

Categorical Reformulation of the Gelfand Duality. Let us make this duality precise in categorical terms. Following [1, Section II.10], we write **Haus** for the category whose objects are compact Hausdorff spaces and whose morphisms are continuous maps, and **Ban** for the category whose objects are commutative unital C^* -algebras and whose morphisms are unital $*$ -homomorphisms.

Theorem 3. [1, Section II.10], *The categories **Haus** and **Ban**^{op} are equivalent.*

Proof. Define the contravariant functor

$$C : \mathbf{Haus} \rightarrow \mathbf{Ban}, \quad X \mapsto C(X), \quad f \mapsto C(f) : g \mapsto g \circ f.$$

Also define the contravariant functor

$$\Sigma : \mathbf{Ban} \rightarrow \mathbf{Haus}, \quad A \mapsto \Sigma(A), \quad L \mapsto \Sigma(L) : \varphi \mapsto \varphi \circ L.$$

These functors satisfy the required properties:

- $\Sigma(C(X)) \cong X$ via the map $I(x) := \varphi_x$ (Theorem 1),
- $C(\Sigma(A)) \cong A$ via the Gelfand transform Γ (Theorem 2),
- both isomorphisms are functorial.

Hence, $\mathbf{Haus} \simeq \mathbf{Ban}^{\text{op}}$. □

Shilov's Theorem on Invariant Subalgebras. Let us recall the definition of closed equivalence relation:

Definition 11. *Let X be a compact Hausdorff space. An equivalence relation $R \subset X \times X$ is said to be closed if R is a closed subset of $X \times X$ [6, p. 52].*

Example 2. *Let $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ (the closed unit disk), and define $(x, y) \in R$ if $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$. Then*

$$R = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in X \times X : x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2\}$$

is a closed equivalence relation.

Example 3. *Let $X = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (the unit circle), and fix $\theta \in \mathbb{R}$ such that $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$. Define $z_1 \sim z_2$ if $z_2 = e^{in\theta} z_1$ for some $n \in \mathbb{Z}$. Then the orbit of any point under this relation is dense in X , and the graph of the relation is not closed in $X \times X$.*

The following theorem is central in identifying the subalgebra B with the algebra of functions invariant under R_B , and it plays a key role in the proof of our main result.

Theorem 4 (Shilov [5]). *Let X be a compact Hausdorff space, and let $B \subset C(X)$ be a closed unital self-adjoint subalgebra. Define an equivalence relation $R_B \subset X \times X$ by*

$$(x, y) \in R_B \iff \forall f \in B : f(x) = f(y).$$

Then:

1. R_B is a closed equivalence relation,
2. B coincides with the algebra of functions invariant under R_B , i.e.,

$$B = \{f \in C(X) : f(x) = f(y) \forall (x, y) \in R_B\} =: B_{R_B}.$$

3. Closed Equivalence Relations and Pairs of C^* -Algebras

Definition 12. *Let (X_1, R_1) and (X_2, R_2) be compact spaces equipped with equivalence relations. A continuous map $f : X_1 \rightarrow X_2$ is said to be trajectory-preserving if whenever (x, y) belongs to R_1 , the pair $(f(x), f(y))$ belongs to R_2 .*

We define the category **EqRel** as follows:

- objects are pairs (X, R) , where X is a compact Hausdorff space and R is a closed equivalence relation on X ,
- morphisms are continuous trajectory-preserving maps.

Also, consider the category **C^* Pairs** where

- objects are pairs (A, B) , where A is a commutative unital C^* -algebra, and $B \subset A$ a unital C^* -subalgebra,
- morphisms $L : (A_1, B_1) \rightarrow (A_2, B_2)$ are unital $*$ -homomorphisms $L : A_1 \rightarrow A_2$ satisfying $L(B_1) \subset B_2$.

Let (X, R) be an object in **EqRel**. Define

$$B_R := \{f \in C(X) : f(x) = f(y) \text{ whenever } (x, y) \in R\}.$$

I.e., B_R is the set of functions on X which are constant on each equivalence class.

Lemma 1. *B_R is a unital C^* -subalgebra of $C(X)$.*

Proof. It is closed under addition, multiplication, scalar multiplication, and involution. The unit function 1 is clearly in B_R . Uniform limits of invariant functions are invariant, so B_R is closed. $\square$

Now let $f : (X_1, R_1) \rightarrow (X_2, R_2)$ be a morphism in **EqRel**. Then f induces a unital $*$ -homomorphism

$$C(f) : C(X_2) \rightarrow C(X_1), \quad C(f)(\varphi) := \varphi \circ f.$$

Lemma 2. *The map $C(f)$ maps B_{R_2} into B_{R_1} . Hence, $C(f)$ is a morphism of pairs:*

$$C(f) : (C(X_2), B_{R_2}) \rightarrow (C(X_1), B_{R_1}).$$

Proof. Let $\varphi \in B_{R_2}$ and $(x, y) \in R_1$. Since f is trajectory-preserving, we have $(f(x), f(y)) \in R_2$, so

$$C(f)(\varphi)(x) = \varphi(f(x)) = \varphi(f(y)) = C(f)(\varphi)(y),$$

hence $C(f)(\varphi) \in B_{R_1}$. $\square$

Theorem 5. *The assignment $(X, R) \mapsto (C(X), B_R)$ and $f \mapsto C(f)$ defines a contravariant functor*

$$C : \mathbf{EqRel} \rightarrow \mathbf{C^*Pairs}.$$

Proof. To prove that C defines a contravariant functor, we must verify two properties:

- (i) **Identity morphisms:** For each object (X, R) in **EqRel**, the identity map $\text{id}_X : X \rightarrow X$ is trajectory-preserving. Then $C(\text{id}_X) : C(X) \rightarrow C(X)$ is given by

$$C(\text{id}_X)(\varphi) = \varphi \circ \text{id}_X = \varphi.$$

Clearly, $C(\text{id}_X) = \text{id}_{C(X)}$, and it maps B_R to itself.

- (ii) **Composition:** Let

$$f : (X_1, R_1) \rightarrow (X_2, R_2), \quad g : (X_2, R_2) \rightarrow (X_3, R_3)$$

be morphisms in **EqRel**, i.e., both f and g are continuous and trajectory-preserving. Then so is $g \circ f$, and for any $\varphi \in C(X_3)$ we have

$$C(g \circ f)(\varphi) = \varphi \circ g \circ f = (C(f) \circ C(g))(\varphi).$$

Furthermore, if $\varphi \in B_{R_3}$, then $C(g)(\varphi) \in B_{R_2}$ and $C(f)(C(g)(\varphi)) \in B_{R_1}$. Hence, $C(g \circ f)$ maps B_{R_3} into B_{R_1} , and

$$C(g \circ f) = C(f) \circ C(g)$$

as morphisms in **C*Pairs**.

Therefore, C is a contravariant functor from **EqRel** to **C*Pairs**. $\square$

On the other hand, let (A, B) be a pair in **C*Pairs**, i.e., A is a commutative unital C^* -algebra and $B \subset A$ is a unital C^* -subalgebra.

Define an equivalence relation R_B on the spectrum $\Sigma(A)$ by

$$(\varphi, \psi) \in R_B \iff \forall b \in B : \varphi(b) = \psi(b).$$

Lemma 3. R_B is a closed equivalence relation on the compact Hausdorff space $\Sigma(A)$.

Proof. Reflexivity and symmetry are immediate. Transitivity follows from the equality condition on B .

To prove closedness, suppose $(\varphi_\alpha, \psi_\alpha) \in R_B$ is a net converging to (φ, ψ) in $\Sigma(A) \times \Sigma(A)$ with the product of weak* topologies. Then for every $b \in B$,

$$\varphi(b) = \lim_\alpha \varphi_\alpha(b) = \lim_\alpha \psi_\alpha(b) = \psi(b),$$

so $(\varphi, \psi) \in R_B$. $\square$

Now let $L : (A_1, B_1) \rightarrow (A_2, B_2)$ be a morphism in **C*Pairs**. Then $L : A_1 \rightarrow A_2$ is a unital $*$ -homomorphism with $L(B_1) \subset B_2$. Define

$$\Sigma(L) : \Sigma(A_2) \rightarrow \Sigma(A_1), \quad \Sigma(L)(\varphi) := \varphi \circ L.$$

Lemma 4. $\Sigma(L)$ is continuous and trajectory-preserving with respect to the relations R_{B_2} and R_{B_1} .

Proof. Continuity of $\Sigma(L)$ follows from standard functional analysis: composition with a continuous map is continuous in the weak* topology.

Let $(\varphi, \psi) \in R_{B_2}$, i.e., $\varphi(b_2) = \psi(b_2)$ for all $b_2 \in B_2$. Then for any $b_1 \in B_1$, since $L(b_1) \in B_2$, we have

$$(\Sigma(L)(\varphi))(b_1) = \varphi(L(b_1)) = \psi(L(b_1)) = (\Sigma(L)(\psi))(b_1),$$

so $(\Sigma(L)(\varphi), \Sigma(L)(\psi)) \in R_{B_1}$. $\square$

Theorem 6. The assignment $(A, B) \mapsto (\Sigma(A), R_B)$ and $L \mapsto \Sigma(L)$ defines a contravariant functor

$$\Sigma : \mathbf{C*Pairs} \rightarrow \mathbf{EqRel}.$$

Proof. As before, we verify the two functorial properties.

- **Identity:** For $\text{id}_A : A \rightarrow A$, we have $\Sigma(\text{id}_A)(\varphi) = \varphi$, so $\Sigma(\text{id}_A) = \text{id}_{\Sigma(A)}$.
- **Composition:** Let $L : A_1 \rightarrow A_2$ and $M : A_2 \rightarrow A_3$ be morphisms in **C*Pairs**. Then for any $\varphi \in \Sigma(A_3)$,

$$\Sigma(M \circ L)(\varphi) = \varphi \circ M \circ L = \Sigma(L)(\Sigma(M)(\varphi)),$$

$$\text{so } \Sigma(M \circ L) = \Sigma(L) \circ \Sigma(M).$$

Therefore, Σ is a contravariant functor from **C*Pairs** to **EqRel**. $\square$

4. Main Result

Theorem 7. *The functors*

$$C : \mathbf{EqRel} \rightarrow \mathbf{C^*Pairs}, \quad \Sigma : \mathbf{C^*Pairs} \rightarrow \mathbf{EqRel}$$

establish an equivalence of categories

$$\mathbf{EqRel} \simeq \mathbf{C^*Pairs}^{\text{op}}.$$

Proof. We construct isomorphisms of functors in both directions.

(1) Let (X, R) be an object in $\mathbf{EqRel}$. Consider the canonical map

$$I_X : X \rightarrow \Sigma(C(X)), \quad x \mapsto \varphi_x, \text{ where } \varphi_x(f) := f(x).$$

This is a homeomorphism by the Kolmogorov–Gelfand theorem. We now show it is also an isomorphism in the category $\mathbf{EqRel}$.

Let $(x, y) \in R$, and let $f \in B_R$ (i.e., invariant under R). Then

$$\varphi_x(f) = f(x) = f(y) = \varphi_y(f),$$

so $(\varphi_x, \varphi_y) \in R_{B_R}$. Hence, I_X maps R into R_{B_R} , and similarly its inverse does the reverse.

Thus, $I_X : (X, R) \rightarrow (\Sigma(C(X)), R_{B_R})$ is an isomorphism in $\mathbf{EqRel}$.

(2) Let (A, B) be an object in $\mathbf{C^*Pairs}$. Consider the Gelfand transform

$$\Gamma_A : A \rightarrow C(\Sigma(A)), \quad a \mapsto \hat{a}, \quad \hat{a}(\varphi) := \varphi(a).$$

This is an isometric $*$ -isomorphism. Moreover, by Shilov's Theorem 4, we have $\Gamma_A(B) = B_{R_B}$, hence

$$\Gamma_A : (A, B) \rightarrow (C(\Sigma(A)), B_{R_B})$$

is an isomorphism in $\mathbf{C^*Pairs}$.

(3) **Naturality.** Both families $\{I_X\}$ and $\{\Gamma_A\}$ are compatible with morphisms in their respective categories. In particular, for any morphism $f : (X, R_1) \rightarrow (Y, R_2)$ in $\mathbf{EqRel}$, the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ I_X \downarrow & & \downarrow I_Y \\ \Sigma(C(X)) & \xrightarrow{\Sigma(C(f))} & \Sigma(C(Y)) \end{array}$$

and for any morphism $L : (A_1, B_1) \rightarrow (A_2, B_2)$ in $\mathbf{C^*Pairs}$, the following diagram also commutes:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{L} & A_2 \\ \Gamma_{A_1} \downarrow & & \downarrow \Gamma_{A_2} \\ C(\Sigma(A_1)) & \xrightarrow{C(\Sigma(L))} & C(\Sigma(A_2)) \end{array}$$

Hence, the functors C and Σ establish an equivalence of categories. □

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

REFERENCES

1. S. I. Gelfand, Yu. I. Manin. Methods of homological algebra. 2nd ed. 2003. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg. 372p. DOI: 10.1007/978-3-662-12492-5
2. W. Rudin. Functional Analysis. 2nd ed. 1991. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, New York. 424 p. — ISBN-10: 0-07-054236-8; ISBN-13: 978-0-07-054236-5
3. K. R. Davidson. C^* -algebras by example. Fields Institute Monographs. — 1996. — Vol. 6. American Mathematical Society, Providence, RI. DOI: 10.1090/fim/006
4. A. N. Kolmogorov. On Rings of Continuous Functions on Topological Spaces. In: Selected Works of A. N. Kolmogorov. Springer, Dordrecht. — 1991. — P. 291–297.
5. G. E. Shilov. Ideals and Subrings of the Ring of Continuous Functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1939. — Vol. 22. P. 7–10.
6. N. Bourbaki. General Topology. Elements of Mathematics, Part I. 1989. Springer-Verlag, Berlin. ISBN: 3-540-19374-X

Article history: Received: 10 October 2025; Final form: 19 November 2025

Accepted: 20 November 2025. Published 11 December 2025.

How to cite this article:

R. Skurikhin, S. Gefter, E. Karolinsky, Closed equivalence relations on compact spaces and pairs of commutative C^* -algebras: a categorical approach, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 102, 2025, p. 57–67. DOI: 10.26565/2221-5646-2025-102-04

**Замкнені відношення еквівалентності на компактних просторах
і пари комутативних C^* -алгебр: категорний підхід**

Р. Скуріхін¹, С. Гефтер², Є. Каролінський¹

¹*Кафедра фундаментальної математики*

*Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
площа Свободи, 4, Харків, Україна, 61022*

²*Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б.І. Веркіна Національної академії наук України
проспект Науки, 47, Харків, Україна, 61103*

У цій статті ми досліджуємо категорне узагальнення класичної дуальності Гельфанда-Наймарка між компактними хаусдорфовими просторами та комутативними унітальними C^* -алгебрами. Ми встановлюємо еквівалентність між категорією компактних хаусдорфових просторів із замкненими відношеннями еквівалентності

та категорією пар, що складаються з комутативної унітальної C^* -алгебри та однієї з її унітальних C^* -підалгебр. Мотивація полягає в тому, що дуальність Гельфанда може бути збагачена додатковою структурою: замкнені відношення еквівалентності кодують фактор-простори та інваріантність з топологічного боку, тоді як підалгебри відображають обмеження та симетрії з алгебраїчного боку. Теорема Шилова, яка ототожнює замкнені самоспряжені підалгебри з одиницею $C(X)$ з алгебрами функцій, інваріантних відносно замкнених відношень еквівалентності, забезпечує ключовий зв'язок між цими підходами. Ми вводимо категорію **EqRel**, об'єктами якої є компактні хаусдорфові простори із замкненими відношеннями еквівалентності, а морфізмами — неперервні відображення, що зберігають траєкторії, та категорію **C*Pairs**, об'єктами якої є пари (A, B) , де A — комутативна C^* -алгебра з одиницею, а $B \subset A$ — C^* -підалгебра з одиницею, причому морфізмами є $*$ -гомоморфізми, що зберігають B . У обох напрямках визначаються контраваріантні функтори: $(X, R) \mapsto (C(X), B_R)$, де B_R складається з функцій, сталих на R -класах, і $(A, B) \mapsto (\Sigma(A), R_B)$, де $\Sigma(A)$ — спектр, а R_B пов'язує характери, що збігаються на B . Ми перевіряємо, що ці побудови є функторіальними та сумісними зі складанням морфізмів. Використовуючи теорему Колмогорова-Гельфанда, перетворення Гельфанда та теорему Шилова, ми показуємо, що ці функтори є взаємно оберненими з точністю до ізоморфізму функторів, і тим самим доводимо що **EqRel** $\simeq$ **C*Pairs**^{op}. Цей результат показує, що геометричне поняття замкнених відношень еквівалентності на компактних просторах перебуває в повній відповідності з алгебраїчним поняттям унітальних підалгебр комутативних C^* -алгебр.

Ключові слова: еквівалентність категорій; дуальність Гельфанда; замкнене відношення еквівалентності; комутативна C^* -алгебра; інваріантна підалгебра; теорема Шилова.

Історія статті: отримана: 10 жовтня 2025; останній варіант: 19 листопада 2025
прийнята: 20 листопада 2025. Оприлюднено 11 грудня 2025.

Правила для авторів
«Вісника Харківського національного університету
імені В. Н. Каразіна»,
Серія «Математика, прикладна математика і механіка»

Редакція просить авторів при направленні статей керуватися наступними правилами.

1. В журналі публікуються статті, що мають результати математичних досліджень (англійською або українською мовами).

2. Поданням статті вважається отримання редакцією файлів статті оформлених у редакторі LaTeX, анотацій, відомостей про авторів та архіва, що включає LaTeX файли статті та файли малюнків. Файл-зразок оформлення статті можна знайти на офіційній веб-сторінці журналу (http://periodicals.karazin.ua/mech_math). Авторам необхідно зареєструватися та **завантажити подання** на цій сторінці. Будьте уважними, заповнюючи форму подання двома мовами (українською та англійською).

3. Стаття повинна починатися з розширеної анотації (обсягом **не менш ніж 1800 знаків**), в якій повинні бути чітко сформульовані мета та результати роботи. Анотація повинна бути тією мовою (англійською або українською), якою є основний текст статті. Закордонні автори можуть звернутися до редакції за допомогою з перекладом анотацій на українську мову. Повинні бути наведені прізвища, ініціали авторів, назва роботи, ключові слова та номер за міжнародною математичною класифікацією (Mathematics Subject Classification 2020). Анотація не повинна мати посилань на літературу чи малюнки. На першій сторінці вказується номер УДК класифікації. В кінці статті треба додати переклад анотації (обсягом **не менш ніж 1800 знаків**) на другу мову (англійську чи українську).

4. Список літератури повинен бути оформлений латинським шрифтом. Приклади оформлення списку літератури:

1. A.M. Lyapunov. A new case of integrability of differential equations of motion of a solid body in liquid, Rep. Kharkov Math. Soc., – 1893. – 2. V.4. – P. 81-85.
2. A.M. Lyapunov. The general problem of the stability of motion. Kharkov Mathematical Society, Kharkov. - 1892. - 251 p.

5. Кожний малюнок повинен бути пронумерований та представлений окремим файлом в одному з форматів: EPS, BMP, JPG. В файлі статті малюнок повинен бути вставлений автором. Під малюнком повинен бути підпис. Назви файлів малюнків повинні починатись з прізвища першого автора.

6. Відомості про авторів повинні містити: прізвища, імена, по батькові, службові адреси та номери телефонів, науковий ступінь, посаду, адреси електронних скриньок та інформацію про наукові профайли авторів (orcid.org, www.researcherid.com, www.scopus.com) з відповідними посиланнями. Прохання також повідомити прізвище автора, з яким треба вести листування.

7. Рекомендуємо використовувати в якості зразка оформлення останні випуски журналу (http://periodicals.karazin.ua/mech_math).

8. У випадку порушення правил оформлення редакція не буде розглядати статтю.

Електронна скринька: vestnik-khnu@ukr.net

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна,
Серія “Математика, прикладна математика і механіка”, Том 102, 2025 р.

Збірник наукових праць

Англійською та українською мовами

Підписано до друку 30.11.2025 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк цифровий.

Ум. друк. арк. 2,8

Обл.– вид. арк. 3,5

Наклад 100 пр. Зам. № 37/25

Безкоштовно.

Видавець і виготовлювач Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

Видавництво Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна