



KARAZIN UNIVERSITY
CLASSICS AHEAD OF TIME

ISSN 2221-5646 (Print),
ISSN 2523-4641 (Online)



Том 101 ' 2025

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н.Каразіна
серія

**МАТЕМАТИКА,
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
І МЕХАНІКА**

Volume 101, 2025

VISNYK OF V.N.KARAZIN
KHARKIV NATIONAL UNIVERSITY

**Ser. MATHEMATICS, APPLIED
MATHEMATICS AND MECHANICS**

ISSN 2221–5646 (Print)

ISSN 2523–4641 (Online)

Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна

Серія

«Математика, прикладна математика і механіка»

Серія започаткована 1965 р.

Том 101



Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”

Vol. 101

Харків
2025

До Вісника включено статті з математичного аналізу, математичної фізики, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення. УДК 51+531/534](062.552).

Засновник журналу Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна. Рік заснування 1965. Періодичність виходу 2 рази на рік.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних наук, категорія «Б» за спеціальностями 111 - Математика та 113 - Прикладна математика (Наказ МОН України №1643 від 28.12.2019 р.).

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол №17 від 30 червня 2025 р.).

Головний редактор: Коробов В.І. – д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Члени редакційної колегії:

Фаворов С.Ю.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Єгорова І.Є.—д-р ф.-м. наук, проф., ФТІНТ НАН України

Пастур Л.А.—д-р ф.-м. наук, проф., акад. НАН України, ФТІНТ НАН України

Хрусьов Є.Я.—д-р ф.-м. наук, проф., акад. НАН України, ФТІНТ НАН України

Шепельський Д.Г.—д-р ф.-м. наук, проф., ФТІНТ НАН України та

ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Когут П.І.—д-р ф.-м. наук, проф., Дніпровський національний університет

імені Олеся Гончара, м.Дніпро, Україна

Чуйко С.М.—д-р ф.-м. наук, проф., Інститут прикладної математики і

механіки НАН України, м.Слов'янськ, Україна

Домбровський А.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Щецина, Польща

Кадець В.М.—д-р ф.-м. наук, проф., Технологічний інститут Холона, Ізраїль

Карлович Ю.І.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Морелос, Мехіко, Мексика

Корбич Йозеф—д-р ф.-м. наук, проф., чл.-кор. ПАН, Університет Зелона Гора, Польща

Нгуєн Хоа Шон—д-р ф.-м. наук, проф., Академія наук та технології В'єтнама,

Інститут математики, Ханой, В'єтнам

Поляков А.І.—д-р ф.-м. наук, проф., ІНРІА Національний дослідницький інститут

інформатики та автоматики, Ле-Шене, Франція

Скляр Г.М.—д-р ф.-м. наук, проф., Західнопоморський технологічний університет,

Щецин, Польща

Чоке Рівєро А.Е.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Мічоакана де Сан Ніколас

де Ідальго, Мексика

Відповідальний секретар – Резуненко О.В., д-р ф.-м. наук

ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Адреса редакційної колегії: 61022, Харків, майдан Свободи, 4, ХНУ імені В.Н. Каразіна, ф-т математики і інформатики, к. 7-27, т. 7075240, **e-mail:** vestnik-khnu@ukr.net

Інтернет: <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>; http://periodicals.karazin.ua/mech_math

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Ідентифікатор медіа у Реєстрі суб'єктів у сфері медіа: R30-04455 (Рішення № 1538

від 09.05.2024 р. Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення.

Протокол № 15).

©Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, оформлення, 2025

The journal includes articles on mathematical analysis, mathematical physics, differential equations, mathematical control theory and mechanics, which contain new theoretical results in the indicated fields and have applied significance. UDC 51+531/534](062.552).

The founder of the Journal is V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine.

Year of foundation 1965. The journal is published twice a year.

For Professors, researchers, postgraduate students working in the relevant or related fields.

The journal is a professional publication in the field of physical and mathematical sciences, category «B» in specialties 111 - Mathematics and 113 - Applied Mathematics (Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 1643 dated 28 December 2019).

Approved for publication by the decision of the Academic Council of V. N. Karazin Kharkiv National University (protocol No. 17 of June 30, 2025).

Editor-in-Chief – V.I. Korobov–Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University,
Ukraine

Associate Editors:

S.Yu. Favorov–Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

I.E. Egorova–Dr. Sci., Prof., B.Verkin Institute for Low Temperature Physics
and Engineering, Ukraine

E.Ya. Khruslov–Dr. Sci., Prof., academician of NASU,
B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine

L.A. Pastur–Dr. Sci., Prof., academician of NASU,
B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine

D.G. Shepelsky–Dr. Sci., Prof., B.Verkin Institute for Low Temperature Physics
and Engineering, Ukraine

S.M. Chujko–Dr. Sci., Prof., Donbas State Pedagogical University, Ukraine

P.I. Kogut–Dr. Sci., Prof., Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine

A.E. Choque Rivero–Dr. Sci., Prof., Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo,
Mexico

Andrzej Dabrowski–Dr. Sci., Prof., University of Szczecin, Poland

V.M. Kadets–Dr. Sci., Prof., Holon Institute of Technology, Israel

Yu. Karlovich–Dr. Sci., Prof., Morelos University, Mexico

Jozef Korbicz–Dr. Sci., Prof., corresponding member of PAS, University of Zielona Gora, Poland

Nguyen Khoa Son–Dr. Sci., Prof., Vietnamese Academy of Science and Technology,
Institute of Mathematics, Hanoi, Vietnam

A.E. Polyakov–Dr. Sci., Prof., INRIA Institut National de Recherche
en Informatique et en Automatique, Le Chesnay, France

G.M. Sklyar–Dr. Sci., Prof., West Pomeranian University of Technology, Szczecin, Poland

Responsible Editor–A.V. Rezounenko, Dr. Sci., Prof.,
V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Editorial Board Address: 4, Svobody Square, Kharkiv, 61022, V.N. Karazin KhNU,
Faculty of Mathematics and Informatics, room 7-27, tel. 7075240, **e-mail:** vestnik-khnu@ukr.net
Internet: <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>; http://periodicals.karazin.ua/mech_math

The articles have undergone internal and external peer review.

Media identifier in the Register of Media Entities: R30-04455 (Decision No. 1538
dated 09.05.2024 of the National Council of Ukraine on Television and Radio Broadcasting.
Protocol No. 15).

© V. N. Karazin Kharkiv National University
design, 2025

ЗМІСТ

Коробов В. І., Возняк О. С. Умова повертання для коливальних систем	5
Генералов М. В. Неявні лінійні різницеві рівняння над скінченними комутативними кільцями порядку p^2 з одиницею	21
Макаров О. А., Ніколенко І. Г. Умови керованості еволюційної системи лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних.	31
Вишневецький О. Л. Згортка ймовірностей, сталих на підгрупі та поза підгрупою	40

CONTENTS

V. I. Korobov, O. S. Vozniak. Return condition for oscillating systems	5
M. V. Heneralov. Implicit linear difference equations over finite commutative rings of order p^2 with identity	21
O. A. Makarov, I. G. Nikolenko. Controllability conditions for evolutionary systems of linear partial differential equations.	31
O. L. Vyshnevetskiy. Convolution of probabilities constant in a subgroup and outside a subgroup	40

V. I. Korobov

D.Sc. in physics and mathematics, Prof.
Head Dep. of Applied Mathematics
V. N. Karazin Kharkiv National University
4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine, 61022
valeriikorobov@gmail.com  <http://orcid.org/0000-0001-8421-1718>

O. S. Vozniak

MS in applied mathematics
PhD applied mathematics student
V. N. Karazin Kharkiv National University
Svobody Sq., 4, Kharkiv, Ukraine, 61022
o.vozniak0@gmail.com  <http://orcid.org/0000-0001-9729-0742>

Return condition for oscillating systems

This paper is devoted to the problem of null-controllability for the oscillating linear system $\dot{x}_{2i-1} = x_{2i}, \dot{x}_{2i} = -x_{2i-1} + u, i = \overline{1, n}$ under control constraints $u \in [c, 1]$ and $u \in \{c, 1\}, c > 0$. In this case the origin is not an equilibrium point. Null-controllability means the existence of a moment of time T_0 such that, for any time $T \geq T_0$ it is possible to reach the origin precisely at time T . The criterion of controllability to a non-equilibrium point was obtained by V. I. Korobov and a new condition called the return condition on an interval was introduced, which must be satisfied, together with the classical conditions for controllability to an equilibrium point. This condition requires the existence of a time interval $I = [T, T + \alpha], \alpha > 0$, such that a trajectory starting at the origin may return to it at any moment $T \in I$ with some control $u_T(t)$. The objective of this paper is to show that the return conditions are satisfied for the considered oscillatory system, and to obtain an analytical solution for the control which ensures this condition. The considered approach involves constructing a piecewise-constant control using values $u = c$ and $u = 1$. This problem admits multiple solutions, and in our paper we present one involving $2n$ switching points and another with only 2 in the case when $c \leq \frac{1}{2}$. The solution with 2 switching moments is especially interesting since it does not depend on the dimensionality of the system. We also generalize the problem to the case where the eigenvalues are of the form $\lambda_{2k}, \lambda_{2k-1} = \pm i\nu_k$, where ν_k are rational numbers. Additionally, we discuss some partial cases where the eigenvalues are irrational.

Keywords: return condition on an interval; null-controllability; trigonometric moment-problem; linear control systems

2020 Mathematics Subject Classification: 93B05; 93C05; 93C15; 93C35

© V. I. Korobov, O. S. Vozniak, 2025; CC BY 4.0 license

1. Introduction

In this paper, we consider the problem of null-controllability for the linear control system,

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}, \quad u(t) \in L^1[0, T], \quad (1)$$

with an assumption that the origin is not an equilibrium point. Null-controllability means that there exists a time moment $T_0 \geq 0$ such that, for any $T \geq T_0$, we can select a control $u_T(t)$ such that the origin is reachable precisely at time T . The set S of points that can be transferred to the origin is called the null-controllability set [2]. If $0 \in \text{int } S$, the system is called null-controllable from a neighbourhood, and if $S = \mathbb{R}^n$ it is called globally null-controllable. This problem has been considered in many papers, for example [1, 2, 4, 5]. Typically, the null-controllability into an equilibrium point is achieved by steering the system to the origin at some time T , and then selecting the value of control $u = 0$, to stay in the equilibrium indefinitely [1].

However, it is also natural to consider the case when such value of control does not exist – namely, the problem of controllability into a non-equilibrium point. Such a system may occur, for example, after applying a change of variables, when solving the controllability problem into a point different from the origin [3]. This more general case has also been studied in many works [3, 4, 6]. For instance, in the paper [6] it is shown that for controllability into a non-equilibrium point the necessary and sufficient conditions are complete controllability of the reduced system and existence of an internal feedback control.

The criterion used in this work was developed by V. I. Korobov in the paper [3], where a new concept called the return condition on an interval was also introduced. In the present paper, we examine the problem of null-controllability for the following oscillating linear system:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \\ \dot{x}_3 = 2x_4, \\ \dot{x}_4 = -2x_3 + u, \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n-1} = nx_{2n}, \\ \dot{x}_{2n} = -nx_{2n-1} + u, \end{cases} \quad (2)$$

with control constraints $u \in [c, 1]$, $c > 0$ and $u \in \{c, 1\}$. In the case $n = 1$, this system corresponds to the classic pendulum problem, and for $n > 1$, it represents a system of pendulums, and also serves as a model of first n terms of the decomposition of an oscillating string. Notice that each pair of coordinates is independent of the other, but all pendulums are coupled through the common control u and must reach the origin simultaneously. However, we are not able to choose the

control $u = 0$ because of the constraints, and the system leaves origin immediately after reaching it. This is why for null-controllability, we have to check the return condition.

Let us first consider the problem of null-controllability for the system (1) in the case when origin is an equilibrium point. This means that we can select $u = 0$ after reaching the origin. We consider here the geometrical criterion for null-controllability obtained in the paper [2], which is the following:

Theorem 1. [2] *The system (1) is null-controllable from a neighbourhood if and only if there exists $m \geq 0$ for which the following inclusions hold:*

1. $0 \in \text{int co} L = \text{int co}\{b\Omega, Ab\Omega, \dots, A^m b\Omega\},$
2. $0 \in \text{int co} L^- = \text{int co}\{b\Omega, -Ab\Omega, \dots, (-1)^m A^m b\Omega\}.$

For example, the linear control system:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad (3)$$

with control constraints $u \in [0, 1]$ is not null-controllable. Here

$$bu = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}, Abu = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, A^2 bu = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}, A^3 bu = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \quad (4)$$

so

$$L = (bu, Abu) = \begin{pmatrix} 0 & u \\ u & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$L^- = (bu, -Abu) = \begin{pmatrix} 0 & -u \\ u & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

For $u \in [0, 1]$, the columns of the matrix L span two line segments in the space $\mathbb{R}^2$, and their convex hull is a triangle with vertices at $(1, 0)$, $(0, 1)$ and $(0, 0)$. Clearly, $0 \notin \text{int co} L$ and the system is not null-controllable. However, if the control constraints are extended to $u \in [-1, 1]$, the system will be null-controllable since the convex hull for both L and L^- would be a square with vertices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ and $(0, -1)$.

Let us now give the definition of the return condition introduced in [3].

Definition 1. [3] *For the system (1) the return condition is satisfied on the interval $I = [T^*, T^* + \alpha]$, ($\alpha > 0, T^* \geq 0$), if for any $T \in I$, there exists a control $u_T(t)$, such that the solution $\dot{x} = Ax + bu_T(t)$, $x(0) = 0$, satisfies the condition $x(T) = 0$.*

In other words, the return condition means that for any $T \in [T^*, T^* + \alpha]$ we are able to construct a control $u_T(t)$ such that the trajectory starting at the origin return there at time T . It should be noted that the condition $\alpha > 0$, meaning the non-zero length of the interval I , is essential in this definition.

The following theorem extends the null-controllability criterion to the more general case:

Theorem 2. [3] *The system (1) is null-controllable from a neighbourhood if and only if the following conditions hold:*

1. *there exists an interval $I = [T^*, T^* + \alpha]$ such that the return condition is satisfied,*

2. *there exists an $m \geq 0$ such that:*

$$0 \in \text{int co} L = \text{int co}\{b\Omega, Ab\Omega, \dots, A^m b\Omega\},$$

$$0 \in \text{int co} L^- \text{int co}\{b\Omega, -Ab\Omega, \dots, (-1)^m A^m b\Omega\}.$$

This theorem also includes the previous case when the origin is an equilibrium. Indeed, after reaching the origin at time T , we may select $u = 0$. Then the system remains at rest, satisfying the return condition on any interval $[T, T + \alpha]$, $\alpha > 0$.

2. Return condition for oscillating system

Let us now consider the return condition for the system (2) with control constraints $u \in \{c, 1\}$. For a linear system of the form $\dot{x} = Ax + bu$ for the control that transfers a point x_0 to a point x_1 we can write:

$$x_1 = e^{At} \left(x_0 + \int_0^T e^{-A\tau} bu(\tau) d\tau \right). \quad (7)$$

In the case when $x_0 = x_1 = 0$, this simplifies to:

$$0 = \int_0^T e^{-At} bu(t) dt. \quad (8)$$

We will look for a solution in the form of a piecewise-constant function, with u alternating between the values c and 1:

$$u(t) = \begin{cases} c, & 0 \leq t \leq T_1, \\ 1, & T_1 < t \leq T_2, \\ c, & T_2 < t \leq T_3, \\ \vdots & \\ 1, & T_{k-1} < t \leq T_k, \\ c, & T_k < t \leq T, \end{cases} \quad (9)$$

with switching moments $T_1, \dots, T_k$. The number of switching moments k is unknown, and multiple solutions may exist. We will be looking for such a control where number of switching moments is even, $k = 2\bar{k}$, and they are placed symmetrically, that is, $T_i = T - T_{k-i+1}$ for $i = 1, \bar{k}$. For the system (2), we have:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2t & \sin 2t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin 2t & \cos 2t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \cos nt & \sin nt \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\sin nt & \cos nt \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Substituting into equation (8), we obtain the system

$$\begin{cases} \int_0^T u(t) \sin t \, dt = 0, \\ \int_0^T u(t) \cos t \, dt = 0, \\ \vdots \\ \int_0^T u(t) \sin nt \, dt = 0, \\ \int_0^T u(t) \cos nt \, dt = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Thus, we obtain a trigonometric moment problem [7], for which we need the solution $u_T(t)$ to exist for each $T \in [T^*, T^* + \alpha]$. This system can also be written in exponential form as

$$\begin{cases} \int_0^T u(t) e^{it} \, dt = 0, \\ \int_0^T u(t) e^{it} \, dt = 0, \\ \vdots \\ \int_0^T u(t) e^{nit} \, dt = 0. \end{cases} \quad (12)$$

By substituting the control (9) into the system (11), we obtain:

$$\begin{cases} c \sin T_1 + (\sin T_2 - \sin T_1) + \dots + c (\sin T - \sin T_k) = 0, \\ c \cos T_1 - c + \dots + c (\cos T - \cos T_k) = 0, \\ \vdots \\ \frac{c}{n} \sin n T_1 + \frac{1}{n} (\sin n T_2 - \sin n T_1) + \dots + \frac{c}{n} (\sin n T - \sin n T_k) = 0, \\ \frac{c}{n} \cos n T_1 - \frac{c}{n} + \dots + \frac{c}{n} (\cos n T - \cos n T_k) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

For $c = \frac{1}{2}$, we present two solutions: one with $2n$ switching moments, and another, which has only 2 for any dimension n .

3. Control with $2n$ switching moments

First, we consider the case when $k = 2n$, which is equal to the dimension of system (2). Let us first notice that for $T = 2\pi$ the system (2) has a solution

$u = c = \text{const.}$ We now explore how to construct a solution on a slightly larger time interval by introducing short segments during which $u = 1$. More precisely, we claim that for $c = \frac{1}{2}$ for any T on the time interval $[2\pi, 2\pi + \alpha]$, where $\alpha \in [0, \frac{2\pi}{n+1}]$, the origin can be reached using the following control:

$$u_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{n+1}, \\ 1, & \frac{2\pi}{n+1} < t \leq \frac{2\pi}{n+1} + \alpha, \\ \frac{1}{2}, & \frac{2\pi}{n+1} + \alpha < t \leq 2 \frac{2\pi}{n+1}, \\ 1, & 2 \frac{2\pi}{n+1} < t \leq 2 \frac{2\pi}{n+1} + \alpha, \\ \vdots & \\ 1, & n \frac{2\pi}{n+1} < t \leq n \frac{2\pi}{n+1} + \alpha, \\ \frac{1}{2}, & n \frac{2\pi}{n+1} + \alpha < t \leq 2\pi + \alpha. \end{cases} \quad (14)$$

Proof. For the control (14) the switching moments are:

$$T_1 = \frac{2\pi}{n+1}, T_2 = \frac{2\pi}{n+1} + \alpha, \dots, T_{2n-1} = \frac{2\pi n}{n+1}, T = 2\pi + \alpha. \quad (15)$$

The system (13) consists of independent pairs of equalities that need to be proven for $m \leq n$, and, in the case $c = \frac{1}{2}$, they take the form:

$$\begin{cases} \frac{1}{2m} \sin mT_1 + \frac{1}{m}(\sin mT_2 - \sin nT_1) + \dots + \frac{1}{2m}(\sin mT - \sin nT_{2n}) = 0, \\ \frac{1}{2m} \cos mT_1 - \frac{1}{2m} + \dots + \frac{1}{2m}(\cos mT - \cos nT_{2n}) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

For the switching moments T_i from (15), this becomes

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \left(\sin \left(\frac{2\pi mk}{n+1} + \alpha \right) - \sin \left(\frac{2\pi mk}{n+1} \right) \right) + \sin(2\pi + \alpha) = 0, \\ \sum_{k=1}^n \left(\cos \left(\frac{2\pi mk}{n+1} + \alpha \right) - \cos \left(\frac{2\pi mk}{n+1} \right) \right) + \cos(2\pi + \alpha) - 1 = 0, \end{cases} \quad (17)$$

or,

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \left(\sin \left(\frac{2\pi mk}{n+1} + \alpha \right) - \sin \left(\frac{2\pi mk}{n+1} \right) \right) = 0, \\ \sum_{k=0}^n \left(\cos \left(\frac{2\pi mk}{n+1} + \alpha \right) - \cos \left(\frac{2\pi mk}{n+1} \right) \right) = 0, \end{cases} \quad (18)$$

This is equivalent to

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{2\pi mk}{n+1} + \frac{\alpha}{2} \right) = 0, \\ \sum_{k=0}^n \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{2\pi mk}{n+1} + \frac{\alpha}{2} \right) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

or factoring out the common term:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \cos \left(\frac{2\pi mk}{n+1} + \frac{\alpha}{2} \right) = 0, \\ \sum_{k=0}^n \sin \left(\frac{2\pi mk}{n+1} + \frac{\alpha}{2} \right) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Applying the angle addition formula, this leads to:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi mk}{n+1}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi mk}{n+1}\right) \right) = 0, \\ \sum_{k=0}^n \left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi mk}{n+1}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi mk}{n+1}\right) \right) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Then, it is enough to show that:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{2\pi mk}{n+1}\right) = 0, \\ \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{2\pi mk}{n+1}\right) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

or

$$\sum_{k=0}^n \left(\cos\left(\frac{2\pi mk}{n+1}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi mk}{n+1}\right) \right) = 0, \quad (23)$$

which is equivalent to

$$\sum_{k=0}^n \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right) \right)^m = 0. \quad (24)$$

This identity is true because the numbers $\cos\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right)$ are the roots x_{k+1} of the polynomial

$$x^{n+1} - 1 = 0, \quad (25)$$

and by the Vieta's formulas:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = 0, \\ x_1 x_2 + \dots + x_n x_{n+1} = 0, \\ \vdots \\ x_1 \dots x_n + \dots + x_2 \dots x_{n+1} = 0 \\ x_1 x_2 \dots x_{n+1} = -1. \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 + \dots + x_{n+1} = 0, \\ x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 0, \\ \vdots \\ x_1^n + \dots + x_{n+1}^n = 0, \\ x_1^{n+1} + \dots + x_{n+1}^{n+1} = n + 1. \end{cases} \quad (26)$$

Thus, the equality (24), and consequently the original system (16), holds for all $m \leq n$, and the proof is complete.

Example 1. The Figures 1 and 2 illustrate the control and individual trajectories in the case of $n = 4$ and time $T = 2\pi + 0.5$.

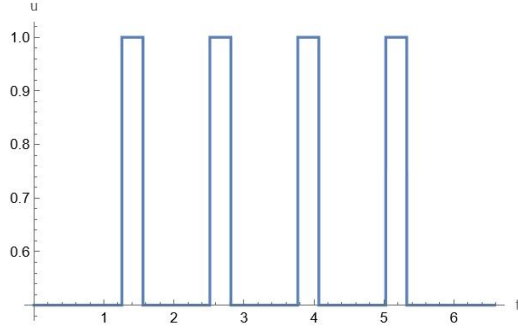


Fig. 1. The graph of control
Рис. 1. Графік керування

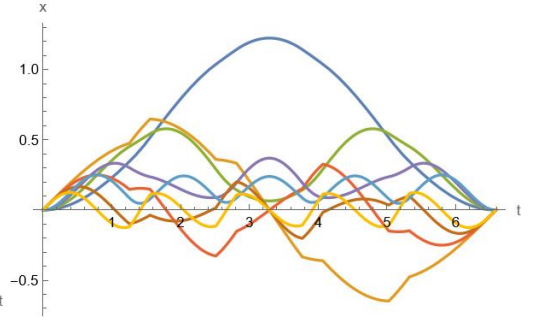


Fig. 2. Individual trajectories
Рис. 2. Індивідуальні траєкторії

The trajectories for coordinates pairs (x_1, x_2) (blue) and (x_3, x_4) (red) are shown on the Figure 3, and for pairs (x_5, x_6) (purple) and (x_7, x_8) (green) on the Figure 4. If we had constant control $u = c$ the trajectories would be circles. However, for the piecewise control considered here, we have some symmetrical trajectories along the arcs of circles.

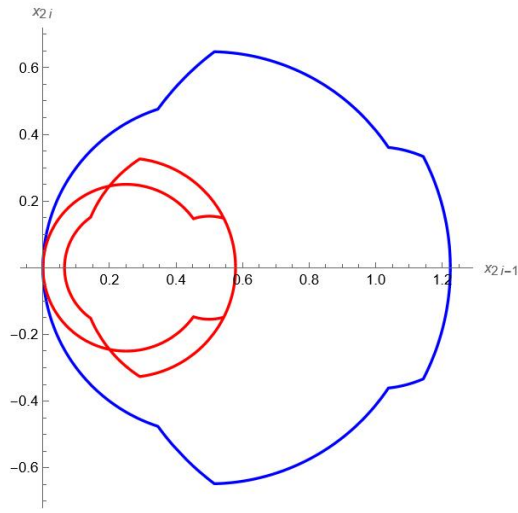


Fig. 3. Pairwise trajectories, $x_1 - x_4$
Рис. 3. Парні траєкторії, $x_1 - x_4$

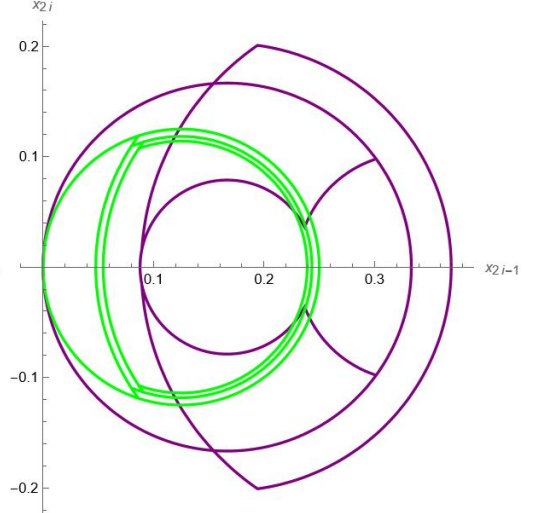


Fig. 4. Pairwise trajectories, $x_5 - x_8$
Рис. 4. Парні траєкторії, $x_5 - x_8$

Remark 1. Since the equations (15) are independent for different values of n , the control $u_n(t)$ is also a solution for any system $x_{2j-1} = k_j x_{2j}$, $x_{2j} = -k_j x_{2j-1} + u$, $k_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, N}$ if we select $n = \max k_j$.

Remark 2. If we modify any pair of equations to the form $x_{2j-1} = -k_j x_{2j}$, $x_{2j} = k_j x_{2j-1} + u$ then the corresponding 2×2 block in the matrix exponent changes to

$$\begin{pmatrix} \cos k t & -\sin k t \\ \sin k t & \cos k t \end{pmatrix} \quad (27)$$

changing the corresponding pair of equations to

$$\begin{cases} -\int_0^T u(t) \sin t \, dt = 0, \\ \int_0^T u(t) \cos t \, dt = 0, \end{cases} \quad (28)$$

which has the same solution. Therefore, the remark 1 can be extended to the case where $k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Remark 3. The solution also remains valid for the control constraints of the form $u \in \{\frac{d}{2}, d\}$, since the constant d simply appears as the multiplicative factor outside the integrals in the equation (16).

Let us now consider the system with simple purely imaginary eigenvalues $\lambda_{2k-1,2k} = \pm i \nu_k$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \nu_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -\nu_1 x_1 + u, \\ \dot{x}_3 = \nu_2 x_4, \\ \dot{x}_4 = -\nu_2 x_3 + u, \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n-1} = \nu_n x_{2n}, \\ \dot{x}_{2n} = -\nu_n x_{2n-1} + u, \end{cases} \quad (29)$$

where $\nu_k = \frac{n_k}{d_k}$, $n_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $d_k \in \mathbb{N}$, and $\nu_i \neq \nu_j$ for $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$. Let us introduce the rescaled time variable $\tau = \frac{t}{D}$, where $D = \prod_{i=1}^n d_i$. Then for the k -th pair of equations, we have:

$$\begin{aligned} \frac{dx_{2k-1}}{d\tau} &= \frac{dx_{2k-1}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = n_k \prod_{j=1, j \neq k}^n (d_j) x_{2k} = N_k x_{2k}, \\ \frac{dx_{2k}}{d\tau} &= \frac{dx_{2k}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = -n_i \prod_{j=1, j \neq k}^n (d_j) x_{2k-1} + Du = -N_k x_{2k-1} + Du, \end{aligned} \quad (30)$$

where $N_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. We may now rescale the control as $v = Du$, $v \in \{\frac{D}{2}, D\}$, and using the previous remarks, construct the control for the transformed system:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = N_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -N_1 x_1 + v, \\ \dot{x}_3 = N_2 x_4, \\ \dot{x}_4 = -N_2 x_3 + v, \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n-1} = N_n x_{2n}, \\ \dot{x}_{2n} = -N_n x_{2n-1} + v. \end{cases} \quad (31)$$

Remark 4. *The result also holds when $\nu_k \in \mathbb{R}$, but there exists a common number $\nu \in \mathbb{R}$ such that $\frac{\nu_k}{\nu} \in \mathbb{Q}$ for all $i = 1, \dots, n$.*

Let us now consider the general system

$$\dot{x} = Ax + bu, u \in \left\{ \frac{d}{2}, d \right\}, \quad (32)$$

where the matrix $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ has simple purely imaginary eigenvalues $\lambda_{2k-1, 2k} = \pm i\nu_k$, $k = \overline{1, n}$, and $\nu_k \in \mathbb{Q}$. In this case, there exists an invertible matrix P , such that

$$A = PNP^{-1}, \quad (33)$$

where N is a matrix of the system (29). Then we can write

$$e^{At} = Pe^{Nt}P^{-1}, \quad (34)$$

where

$$e^{Nt} = \begin{pmatrix} \cos \nu_1 t & \sin \nu_1 t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\sin \nu_1 t & \cos \nu_1 t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \nu_2 t & \sin \nu_2 t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \nu_2 t & \cos \nu_2 t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \cos \nu_n t & \sin \nu_n t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\sin \nu_n t & \cos \nu_n t \end{pmatrix}, \quad (35)$$

Therefore, each element of the matrix exponent e^{At} is a linear combination of functions $\sin \nu_i t$, $\cos \nu_i t$ and in each equation of the system (9) left-hand side is a linear combination of terms $\int_0^T u(t) \sin \nu_i t$, $\int_0^T u(t) \cos \nu_i t$. Because solving the problem for the system 29 implies that all these terms are equal to zero, the exact same control would also solve the problem for system (32).

Example 2. *Let us consider the system*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{2}x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{2}x_1 + u, \\ \dot{x}_3 = 3x_2 + \frac{1}{3}x_4 + u, \\ \dot{x}_4 = x_1 - \frac{1}{3}x_3 + u, \end{cases} \quad u \in \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}. \quad (36)$$

It has eigenvalues $\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2}i$, $\lambda_{3,4} = \pm \frac{1}{3}i$. In the previous notation we have $D = 2 \cdot 3 = 6$, $\tau = \frac{t}{6}$, $v = 6u$, and a new system of equations

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 + v, \\ \dot{x}_3 = 18x_2 + 2x_4 + v, \\ \dot{x}_4 = 6x_1 - 2x_3 + v, \end{cases} \quad (37)$$

with $\lambda_{1,2} = \pm 3i$, $\lambda_{3,4} = \pm 2i$. Using the remark 1 we select $n = 3$ and obtain control with 6 switching moments: $T_1 = \frac{2\pi}{4}$, $T_2 = \frac{2\pi}{4} + \alpha$, $T_3 = 2 \cdot \frac{2\pi}{4}$, $T_4 = 2 \cdot \frac{2\pi}{4} + \alpha$, $T_5 = 3 \cdot \frac{2\pi}{4}$, $T_6 = 3 \cdot \frac{2\pi}{4} + \alpha$. Since these switching moments are for the rescaled time variable τ , multiplying by $D = 6$ gives the switching moments for the original time t , and the control is:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq t \leq 3\pi, \\ 1, & 3\pi < t \leq 3\pi + \beta, \\ \frac{1}{2}, & 3\pi + \beta < t \leq 6\pi, \\ 1, & 6\pi < t \leq 6\pi + \beta, \\ \frac{1}{2}, & 6\pi + \beta < t \leq 9\pi, \\ 1, & 9\pi < t \leq 9\pi + \beta, \\ \frac{1}{2}, & 9\pi + \beta < t \leq 12\pi + \beta, \end{cases} \quad (38)$$

where $\beta = 6\alpha$. The figure below illustrates the pairwise trajectories in the case when $\beta = 1$ for the pairs of variables (x_1, x_2) and (x_3, x_4) . Since the subsystem for pair (x_1, x_2) has the same form as in system (2), its trajectory (blue) is still circular. However, the trajectory for the pair (x_3, x_4) (red) is no longer circular or symmetrical.

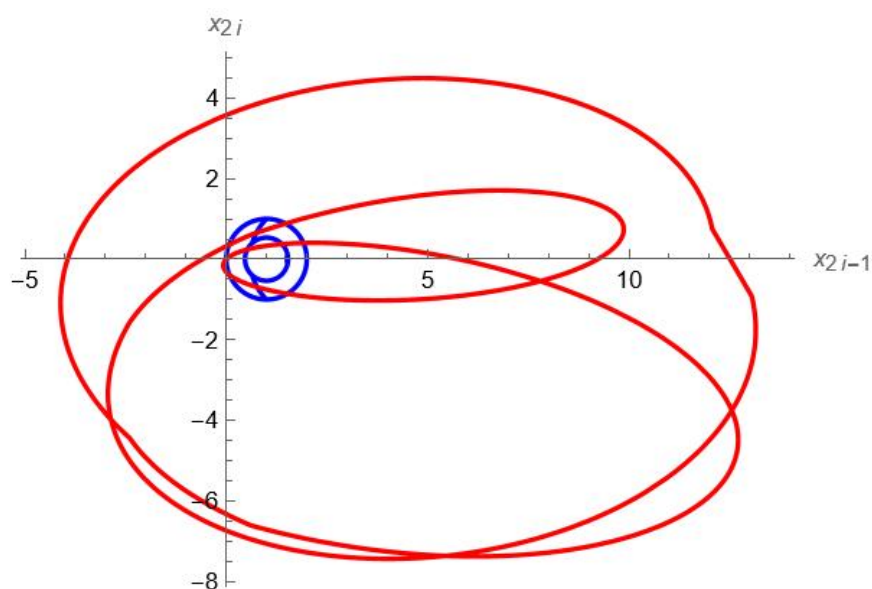


Fig. 5. Pairwise trajectories for the system (36)

Рис. 5. Попарні траєкторії для системи (36)

4. Control with 2 switching moments

The assumption of symmetry also allows us to construct a control with only two switching points in the case $c = \frac{1}{2}$. To do this, we write the system in

exponential form as in (12) and consider the control:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq t \leq T_1, \\ 1, & T_1 < t \leq T_2, \\ \frac{1}{2}, & T_2 < t \leq T. \end{cases} \quad (39)$$

Let us set $T - T_2 = T_1$. Then, by making the substitution $e^{T_1} = x, e^T = s$, we obtain $e^{T_2} = \frac{s}{x}$. This leads to the following the system of equations for the variables x and s :

$$\begin{cases} -1 - x + \frac{s}{x} + s = 0, \\ -1 - x^2 + \frac{s^2}{x^2} + s^2 = 0, \\ \vdots \\ -1 - x^n + \frac{s^n}{x^n} + s^n = 0, \end{cases} = 0. \quad (40)$$

This system has the solutions $x = s$. We choose s such that: $|s| = 1$. Since $x = e^{T_1}$ and $s = e^T$, both T_1 and T are defined up to the shift 2π . Taking $T = 2\pi + T_1$, we obtain a valid solution to the problem.

Remark 5. *The solution $u(t)$ does not depend on the dimensionality of the system and remains valid for any value of n .*

Remark 6. *An alternative construction of the solution is possible under the constraint $u \in \{c, 1 - c, 1\}$, where $0 < c < 1$. In this case the switching points are kept symmetric with respect to the midpoint of the interval, but the values of the control are chosen asymmetrically:*

$$u(t) = \begin{cases} c, & 0 \leq t \leq T_1, \\ 1, & T_1 < t \leq T_2, \\ 1 - c, & T_2 < t \leq T. \end{cases} \quad (41)$$

Since all the remarks for the control with $2n$ switching moments remain valid, then we have the following theorem:

Theorem 3. *For the linear system*

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (42)$$

with control constraints $u \in [c, 1]$, where $c \leq \frac{1}{2}$ and matrix $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ has simple purely imaginary eigenvalues $\lambda_{2k-1, 2k} = \pm i\nu_k$, $k = 1, \dots, n$, the return condition is satisfied if $\nu_k \in \mathbb{Q}$ or $\nu_k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, but there exists a positive real number k such that $\frac{\nu_k}{k}$ is rational for all $k = \overline{1, n}$.

Remark 7. *In both cases, the control constraints must be of the form $u \in [c, 1]$, $c \leq \frac{1}{2}$ or $u \in \{\frac{1}{2}, 1\}$. The question for an arbitrary c in the general case remains open.*

5. The case of irrational coefficients

The condition of rationality guarantees the existence of a time moment $T > 0$ such that there exists a solution with control $u = \text{const}$. For mutually irrational frequencies such a time T does not exist. However, this does not mean that it is impossible to construct a control that returns the system to the point 0. For example, in the case $n = 2$ the following control is possible:

Statement 1. *For the linear system*

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (43)$$

with eigenvalues $\pm\nu_1 i$, $\pm\nu_2 i$ the control

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\nu_2}, \\ 1, & \frac{\pi}{\nu_2} < t \leq \frac{2m_1\pi}{\nu_1}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{2m_1\pi}{\nu_1} < t \leq \frac{2m_1\pi}{\nu_1} + \frac{\pi}{\nu_1} + \frac{\pi}{\nu_2}, \\ 1, & \frac{2m_1\pi}{\nu_1} + \frac{\pi}{\nu_1} + \frac{\pi}{\nu_2} < t \leq \frac{2m_1\pi}{\nu_1} + \frac{\pi}{\nu_2} + \frac{2m_2\pi}{\nu_2}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{2m_1\pi}{\nu_1} + \frac{\pi}{\nu_2} + \frac{2m_2\pi}{\nu_2} < t \leq \frac{2m_1\pi}{\nu_1} + \frac{\pi}{\nu_1} + \frac{\pi}{\nu_2} + \frac{2m_2\pi}{\nu_2}, \end{cases} \quad (44)$$

with numbers $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ chosen such that $\frac{\pi}{\nu_2} < \frac{2m_1\pi}{\nu_1}$, $\frac{\pi}{\nu_1} < \frac{2m_2\pi}{\nu_2}$, returns the system to the origin at time $T = \frac{2m_1\pi}{\nu_1} + \frac{\pi}{\nu_1} + \frac{\pi}{\nu_2} + \frac{2m_2\pi}{\nu_2}$.

The conditions on m_1 and m_2 are present to ensure that the switching moments are selected in the right order.

Example 3. *As an example, Figure 3 shows the illustrates trajectories for the system*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \\ \dot{x}_3 = \sqrt{2}x_4, \\ \dot{x}_4 = -\sqrt{2}x_3 + u, \end{cases} \quad (45)$$

with eigenvalues $\pm i$ and $\pm i\sqrt{2}$.

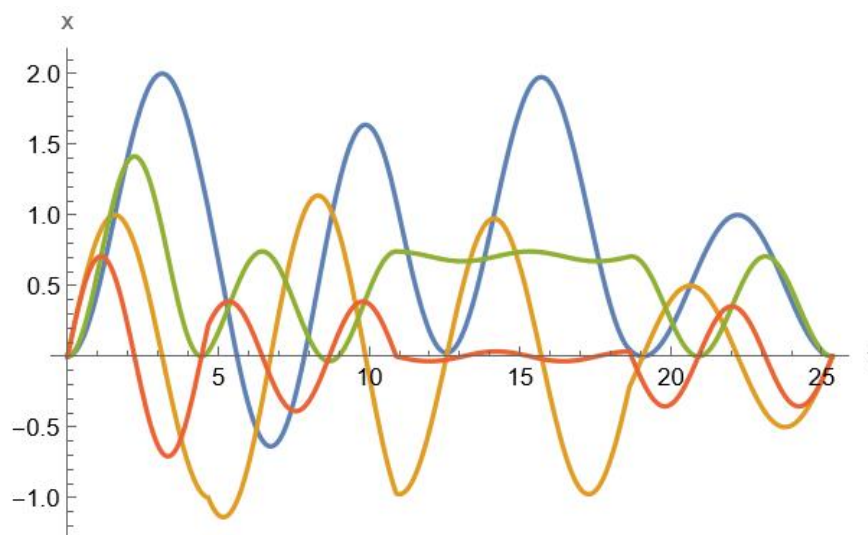


Fig. 6. Individual trajectories for the system (45)
 Рис. 6. Індивідуальні траєкторії для системи (45)

Conclusions

In this paper, we considered the problem of null-controllability and the return condition on an interval. For the controllability it was earlier assumed the existence of rest point for the system (1), that is $u = 0 \in \Omega$, implying that $x = 0$ is the rest point.

In the paper, we did not assume the existence of rest point for the system (1) ($u = 0 \notin \Omega$). In such cases the return condition on an interval can be used to establish local controllability. We showed that the return condition on the interval is satisfied for the linear system $\dot{x} = Ax + bu$, where matrix A has simple purely imaginary eigenvalues $\lambda_{2k-1,2k} = \pm i\nu_k$, $k = 1, \dots, n$, with $\nu_k \in \mathbb{Q}$. We presented two ways of constructing controls that solve this problem under control constraints $u \in \{\frac{1}{2}, 1\}$.

Also, an example of control construction is discussed for the case when eigenvalue ratios are irrational. However, this case, and the case of control constraints $u = c, 1, c \neq \frac{1}{2}$ require further study.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

REFERENCES

1. V. I. Korobov, A. P. Marinich, E. N. Podol'skii, Controllability of linear autonomous systems with restrictions on the control. Differential Equations. - 11. - 1976. -P. 1465-1474.

2. V. I. Korobov, A geometrical criterion of local controllability of dynamical systems in the presence of constraints on the control. Differential Equations. 1980. -15, - P. 1136-1142.
3. V. I. Korobov, Geometric Criterion for Controllability under Arbitrary Constraints on the Control. J. of Optim Theory Appl. - 2007. - 134, - P. 161-176. DOI: 10.1007/s10957-007-9212-2
4. R. M. Bianchini, Local Controllability, Rest States, and Cyclic Points, SIAM Journal on Control and Optimization, - 1983. - Vol. 21, - P. 714-720.
5. R. Conti, Return sets of a linear control process. J. Optim. Theory Appl. - 1983. - 41, - P. 37-53. DOI: 10.1007/BF00934435
6. A. M. Zverkin, V. N. Rozova, Reciprocal controls and their applications, Differential Equations, - 1987. - 23:2, - P. 228-236.
7. M. G. Krein, A. A. Nudelman, The Markov moment problem and extremal problems. M. Nauka, 1978. - 552 p. (in Russian)

Article history: Received: 5 May 2025; Accepted: 9 June 2025.

How to cite this article:

V. I. Korobov, O. S. Vozniak, Return condition for oscillating systems, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 101, 2025, p. 5–20. DOI: 10.26565/2221-5646-2025-101-01

Умова повертання для коливальних систем

Коробов В. І., Возняк О. С.

кафедра прикладної математики

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

610226 м. Харків, майд. Свободи, 4

Дана стаття присвячена задачі нуль-керovanості для коливальної лінійної системи вигляду $\dot{x}_{2i-1} = x_{2i}, \dot{x}_{2i} = -x_{2i-1} + u, i = \overline{1, n}$ з обмеженнями на керування $u \in [c, 1]$ або $u \in \{c, 1\}, c > 0$. У цьому випадку початок координат не є точкою рівноваги. Нуль-керovanість означає, що існує такий момент часу T_0 , що для будь-якого часу $T \geq T_0$ ми можемо побудувати керування яке досягає початку координат саме в момент часу T . Критерій керovanості в точку, що не є рівноважною, був запропонований В. І. Коробовим, і включає нову умову, яка називається умовою повертання на інтервалі, яка повинна виконуватися разом з класичними умовами керovanості в точку рівноваги. Ця умова означає, що існує проміжок часу $I = [T, T + \alpha], \alpha > 0$, для якого траєкторія з початком в точці 0 може повернутись назад в будь-який момент часу $T \in I$ за деякого керування $u_T(t)$.

Метою даної роботи є показати, що умови повертання виконуються для розглянутої коливальної системи з даними обмеженнями на керування, і отримати аналітичний розв'язок для керування, що задовольняє цю умову. Розглянутий підхід використовує побудову кусково-сталого керування зі значеннями $u = c$ і $u = 1$. Ця

задача має неєдиний розв'язок, і в нашій статті ми представляємо один розв'язок з $2n$ точками перемикання та інший лише з двома, у випадку, коли $c \leq \frac{1}{2}$. Розв'язок з 2 моментами перемикання є особливо цікавим, оскільки не залежить від розмірності системи. Ми також узагальнюємо задачу на випадок, коли власні значення мають вигляд $\lambda_{2k}, \lambda_{2k-1} = \pm i\nu_k$, де ν_k — раціональні числа. Ми також розглядаємо деякі часткові випадки коли власні значення є ірраціональними.

Ключові слова: умова повертання на інтервалі, нуль-керованість; тригонометрична проблема моментів; лінійні керовані системи

Історія статті: отримана: 5 травня 2025; прийнята: 9 червня 2025.

М. В. Генералов

аспірант

кафедра фундаментальної математики

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

майдан Свободи, 4, Харків, 61022, Україна

mykola.heneralov@karazin.ua  <http://orcid.org/0009-0001-4855-6337>

Неявні лінійні різницеві рівняння над скінченними комутативними кільцями порядку p^2 з одиницею

Відомо, що, з точністю до ізоморфізму, існує рівно чотири скінченні комутативні кільця з одиницею, порядок яких дорівнює p^2 , де p — просте число. А саме, цими кільцями є кільце лишків за модулем p^2 , пряма сума двох полів лишків $\mathbb{Z}_p$ за модулем p , поле з p^2 елементів і кільце $\mathcal{S}_p = \mathbb{Z}_p[t]/(t^2)$. Нещодавно було встановлено критерій розв'язності лінійного різницевого рівняння першого порядку над кільцем лишків за модулем $m \geq 2$. З огляду на це, актуальною є задача розв'язання лінійного різницевого рівняння над кільцем $\mathcal{S}_p$ порядку p^2 .

У статті досліджуються неявні лінійні різницеві рівняння першого порядку над кільцем $\mathcal{S}_p$. Встановлено необхідні та достатні умови розв'язності розглянутого рівняння над цим кільцем. Крім того, отримані у статті результати описують як кількість розв'язків у випадку їх існування, так і вигляд загального розв'язку цього рівняння. Аналогічні результати встановлено для відповідної початкової задачі над кільцем $\mathcal{S}_p$. Зокрема, показано, що, на відміну від випадку цілісного кільця, початкова задача над кільцем $\mathcal{S}_p$ може мати нескінченно багато розв'язків. Водночас, якщо вона має скінченну кількість розв'язків, то її розв'язок є єдиним. Також отримано наслідки з одержаного критерію розв'язності розглянутого неявного лінійного різницевого рівняння над кільцем $\mathcal{S}_p$. Зокрема, аналогічно до теорії Фредгольма, показано, що якщо відповідне однорідне рівняння має тільки тривіальний розв'язок, то досліджуване неоднорідне рівняння має єдиний розв'язок.

У статті наведено приклад, що демонструє застосування отриманих теоретичних результатів до розв'язання конкретного рівняння над кільцем $\mathcal{S}_p$ і відповідної початкової задачі.

Результати роботи можуть бути використані для подальшого вивчення лінійних різницевого рівнянь над скінченними кільцями, а також у загальній теорії дискретних динамічних систем.

Ключові слова: неявне лінійне різницеве рівняння; скінченне кільце; початкова задача; розв'язність.

2020 Mathematics Subject Classification: 39A06; 11B37; 16P10.

1. Вступ

Нещодавно неявні лінійні різниці рівняння над цілісними кільцями було досліджено у [1, 2], і більш детально над кільцем цілих чисел у [3, 4, 5]. Неявне лінійне різницеве рівняння першого порядку над кільцем $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ лишків за модулем m досліджувалось у [6].

Нехай p — просте число. У роботі [7] було показано, що, з точністю до ізоморфізму, існує всього 4 комутативних кільця порядку p^2 з одиницею, а саме поле з p^2 елементів, пряма сума $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, кільце лишків $\mathbb{Z}_{p^2}$ і “спеціальне” кільце $\mathcal{S}_p = \mathbb{Z}_p[t]/(t^2)$ (див. також [8]). З огляду на цю класифікацію і результати роботи [6], актуальною є задача розв’язання неявного лінійного різницевого рівняння над кільцем $\mathcal{S}_p$.

Нехай A, B, F_n ($n \in \mathbb{Z}_+$) — задані елементи кільця $\mathcal{S}_p$, причому $B \neq 0$. Розглянемо наступне лінійне різницеве рівняння першого порядку над кільцем $\mathcal{S}_p$:

$$BX_{n+1} = AX_n + F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1)$$

де через $\mathbb{Z}_+$ позначено множину цілих невід’ємних чисел. Як і в [2, 6], рівняння (1) називається *неявним*, якщо B є необоротним елементом кільця $\mathcal{S}_p$, і *явним* у протилежному випадку.

Для рівняння (1) розглядається початкова умова

$$X_0 = Y_0 \in \mathcal{S}_p. \quad (2)$$

Послідовність $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ елементів кільця $\mathcal{S}_p$ називається розв’язком початкової задачі (1), (2), якщо вона задовольняє рівняння (1) і початкову умову (2).

Допоміжні результати, що стосуються властивостей елементів кільця $\mathcal{S}_p$, наведено у розділі 2. Основні результати містяться в розділах 3, 4. Теорема 1 описує необхідні і достатні умови розв’язності рівняння (1), а також визначає число розв’язків і її загальний розв’язок цього рівняння. З теореми 1 випливає критерій існування і єдиності розв’язку рівняння (1) (див. наслідок 2). Як і у теорії Фредгольма (див., наприклад, [9, розділ 7]), наслідок 3 показує, що якщо відповідне до (1) однорідне рівняння має тільки тривіальний розв’язок, то для будь-якої послідовності $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ елементів кільця $\mathcal{S}_p$ рівняння (1) має єдиний розв’язок (див. також [6, наслідок 3.4], де отримано аналогічний результат для кільця $\mathbb{Z}_m$). Теорема 2 описує необхідні і достатні умови розв’язності початкової задачі (1), (2), а також визначає число розв’язків і загальний розв’язок цієї початкової задачі. Зауважимо, що, як і в [6], ця початкова задача може мати нескінченне число розв’язків. У розділі 5 розглянуто приклад застосування результатів теорем 1, 2, а також наслідку 2.

2. Властивості елементів кільця $\mathcal{S}_p$

Нагадаємо, що кільце $\mathcal{S}_p$ визначається як факторкільце $\mathbb{Z}_p[t]/(t^2)$. Відповідно, елементи цього кільця мають вигляд $x = a + bt$, де a, b — елементи кільця $\mathbb{Z}_p$, причому $t^2 = 0$. Тепер додавання та множення у кільці $\mathcal{S}_p$ задаються наступним чином: якщо $x_1 = a_0 + a_1t$ і $x_2 = b_0 + b_1t$, то

- $x_1 + x_2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t$,
- $x_1 \cdot x_2 = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)t$.

Нехай $x_1 = a_1 + b_1t$, $x_2 = a_2 + b_2t$ — елементи кільця $\mathcal{S}_p$. Тоді рівність $x_1 = x_2$ рівносильна системі рівностей

$$\begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Наступне твердження описує оборотні та необоротні елементи кільця $\mathcal{S}_p$.

Лема 1. *Нехай $x = a + bt \in \mathcal{S}_p$, де $a, b \in \mathbb{Z}_p$. Справедливі наступні твердження.*

1. *Якщо $a \neq 0$, то x є оборотним елементом кільця $\mathcal{S}_p$ і вірною є формула $x^{-1} = a^{-1} - a^{-2}bt$.*
2. *Якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то x є нільпотентним елементом кільця $\mathcal{S}_p$ і його індекс нільпотентності дорівнює 2.*

Доведення. Справді, нехай $x = a + bt$, де $a \in \mathbb{Z}_p, b \in \mathbb{Z}_p$. Якщо $a \neq 0$, то $x \cdot (a^{-1} - a^{-2}bt) = 1$, тобто x є оборотним елементом кільця $\mathcal{S}_p$. Якщо ж $a = 0$, тобто $x = bt$, то $x^2 = b^2t^2 = 0$. Отже, кожен необоротний елемент кільця $\mathcal{S}_p$ є нільпотентним, причому індекс нільпотентності будь-якого ненульового елемента дорівнює 2. $\square$

3. Розв'язність неявного лінійного різницевого рівняння над кільцем $\mathcal{S}_p$

Повернемося до неявного лінійного різницевого рівняння (1), в якому $A = A_0 + tA_1$, $B = B_0 + tB_1 \neq 0$, $F_n = F_{0,n} + tF_{1,n}$, де $A_0, B_0, F_{0,n}, A_1, B_1, F_{1,n}$ — елементи поля $\mathbb{Z}_p$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Наступна теорема є критерієм розв'язності цього рівняння над кільцем $\mathcal{S}_p$.

Теорема 1. *Справедливі наступні твердження.*

1. *Рівняння (1) має скінченну кількість розв'язків тоді і тільки тоді, коли або $A_0 \neq 0$, або $B_0 \neq 0$. При цьому рівняння (1) має*

$$N = \begin{cases} p^2, & B_0 \neq 0, \\ 1, & B_0 = 0, A_0 \neq 0 \end{cases}$$

розв'язків і загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$X_n = \begin{cases} B^{-n} A^n X_0 + \sum_{s=0}^{n-1} B^{-s-1} A^s F_{n-s-1}, & B_0 \neq 0, \\ -A^{-1} F_n - B A^{-2} F_{n+1}, & B_0 = 0, A_0 \neq 0, \end{cases} \quad (3)$$

де X_0 — довільний елемент кільця $\mathcal{S}_p$ у випадку $B_0 \neq 0$.

2. Рівняння (1) має нескінченну кількість розв'язків тоді і тільки тоді, коли $A_0 = B_0 = 0$, $F_{0,n} = 0$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. При цьому загальний розв'язок цього рівняння визначено рівністю $X_n = X_{0,n} + t X_{1,n}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де $\{X_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$ — довільна послідовність елементів поля $\mathbb{Z}_p$, а послідовність $\{X_{0,n}\}_{n=0}^{\infty}$ елементів у $\mathbb{Z}_p$ визначено рівністю

$$X_{0,n} = B_1^{-n} A_1^n X_{0,0} + \sum_{s=0}^{n-1} B_1^{-s-1} A_1^s F_{1,n-s-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

де $X_{0,0}$ — довільний елемент поля $\mathbb{Z}_p$.

3. Рівняння (1) не має розв'язків тоді і тільки тоді, коли $A_0 = B_0 = 0$ і $F_{0,n} \neq 0$ при деякому $n \in \mathbb{Z}_+$.

Доведення. Доведемо достатність першого твердження теореми. Якщо $B_0 \neq 0$, то, за першим твердженням леми 1, елемент B є оборотним елементом кільця $\mathcal{S}_p$. Отже, рівняння (1) є явним, тому загальний розв'язок рівняння (1) визначається формулою (див. наприклад [10, с. 4])

$$X_n = B^{-n} A^n X_0 + \sum_{s=0}^{n-1} B^{-s-1} A^s F_{n-s-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де X_0 — довільний елемент кільця $\mathcal{S}_p$. Таким чином, у випадку $B_0 \neq 0$ рівняння (1) має p^2 розв'язків.

Тепер нехай $B_0 = 0$ і $A_0 \neq 0$. Тоді, за лемою 1, елемент A є оборотним елементом кільця $\mathcal{S}_p$, а елемент B є нільпотентним з індексом нільпотентності 2. Відповідно, рівняння (1) можна переписати у вигляді

$$X_n = B A^{-1} X_{n+1} - A^{-1} F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Скориставшись цією рівністю двічі, з урахуванням рівності $B^2 = 0$ отримаємо:

$$X_n = -A^{-1} F_n - B A^{-2} F_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (5)$$

Підставляючи (5) у рівняння (1) і враховуючи, що $B^2 = 0$, переконаємось, що послідовність (5) є розв'язком рівняння (1):

$$\begin{aligned} B X_{n+1} &= -B(A^{-1} F_{n+1} + B A^{-2} F_{n+2}) = -B A^{-1} F_{n+1} - B^2 A^{-2} F_{n+2} = \\ &= A(-A^{-1} F_n - B A^{-2} F_{n+1}) + F_n = A X_n + F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Достатність твердження 1 доведено повністю.

Доведемо достатності тверджень 2 і 3 теореми. Нехай $B_0 = A_0 = 0$. Тоді рівняння (1) приймає наступний вигляд:

$$B_1 t (X_{0,n+1} + X_{1,n+1}t) = A_1 t (X_{0,n} + X_{1,n}t) + F_{0,n} + F_{1,n}t, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Прирівнюючи в цьому рівнянні коефіцієнти при степенях t (див. розділ 2), отримуємо, що рівняння (1) еквівалентне наступній системі рівнянь над $\mathbb{Z}_p$:

$$\begin{cases} F_{0,n} = 0 \text{ при всіх } n, \\ B_1 X_{0,n+1} = A_1 X_{0,n} + F_{1,n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \end{cases} \quad (6)$$

Тому для розв'язності рівняння (1) є необхідною умова $F_{0,n} = 0$ при всіх n . Якщо цю умову не виконано, то рівняння (1) не має розв'язків, тобто доведено достатність твердження 3 теореми.

Тепер нехай $F_{0,n} = 0$ при всіх n . Оскільки $B \neq 0$ і $B_0 = 0$, то $B_1 \neq 0$. Отже, за першим твердженням леми 1, існує обернений елемент B_1^{-1} в полі $\mathbb{Z}_p$. За [10, с. 4], загальний розв'язок другого рівняння системи (6) визначається рівністю

$$X_{0,n} = B_1^{-n} A_1^n X_{0,0} + \sum_{s=0}^{n-1} B_1^{-s-1} A_1^s F_{1,n-s-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

де $X_{0,0}$ — довільний елемент поля $\mathbb{Z}_p$. Якщо $\{X_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$ — довільна послідовність елементів поля $\mathbb{Z}_p$, то $(\{X_{0,n}\}_{n=0}^{\infty}, \{X_{1,n}\}_{n=0}^{\infty})$ є загальним розв'язком системи (6).

Отже, загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд $X_n = X_{0,n} + tX_{1,n}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де $X_{0,0}$ — довільний елемент поля $\mathbb{Z}_p$, $\{X_{0,n}\}_{n=1}^{\infty}$ визначається формулою (7), а $\{X_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$ — довільна послідовність елементів поля $\mathbb{Z}_p$.

Ми довели достатність кожного з тверджень теореми. Оскільки достатні умови всіх трьох тверджень теореми вичерпують всі можливості і попарно не перетинаються, то доведення критерію завершено. $\square$

Лема 1 і теорема 1 призводять до наступного наслідку.

Наслідок 1. *Якщо або A , або B є оборотним елементом кільця $\mathcal{S}_p$, то рівняння (1) завжди має розв'язок.*

З першого твердження теореми 1 безпосередньо впливає наступний критерій існування та єдиності розв'язку рівняння (1), і, зокрема, критерій існування тільки тривіального розв'язку відповідного однорідного рівняння.

Наслідок 2. *Справедливі наступні твердження.*

1. Рівняння (1) над кільцем $\mathcal{S}_p$ має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли $B_0 = 0$ і $A_0 \neq 0$. Цей розв'язок визначається формулою

$$X_n = -A^{-1}F_n - BA^{-2}F_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (8)$$

2. Однорідне рівняння

$$BX_{n+1} = AX_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (9)$$

має тільки тривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли $B_0 = 0$, $A_0 \neq 0$.

З наслідку 2 випливає наступне твердження.

Наслідок 3. Якщо однорідне рівняння (9) має тільки тривіальний розв'язок, то для будь-якої послідовності $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ елементів кільця $\mathcal{S}_p$ рівняння (1) має єдиний розв'язок. Цей розв'язок визначається формулою (8).

Доведення. За першим твердженням наслідку 2, маємо $B_0 = 0$, $A_0 \neq 0$. Застосовуючи друге твердження наслідку 2, одержуємо, що рівняння (1) має єдиний розв'язок. Цей розв'язок визначається формулою (8). $\square$

4. Розв'язність початкової задачі для неявного лінійного різницевого рівняння над кільцем $\mathcal{S}_p$

В (2) зобразимо $Y_0 = Y_{0,0} + Y_{1,0}t$, де $Y_{0,0}, Y_{1,0} \in \mathbb{Z}_p$. Користуючись результатами теореми 1, сформулюємо і доведемо наступний критерій розв'язності початкової задачі (1), (2).

Теорема 2. Справедливі наступні твердження.

1. Початкова задача (1), (2) має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконано одну з наступних умов:

(a) $B_0 \neq 0$.

(б) $B_0 = 0$, $A_0 \neq 0$ і $Y_0 = -A^{-1}F_0 - BA^{-2}F_1$;

При цьому єдиний розв'язок початкової задачі (1), (2) має вигляд

$$X_n = \begin{cases} B^{-n}A^nY_0 + \sum_{s=0}^{n-1} B^{-s-1}A^sF_{n-s-1}, & B_0 \neq 0, \\ -A^{-1}F_n - BA^{-2}F_{n+1}, & B_0 = 0, A_0 \neq 0, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Початкова задача (1), (2) має нескінченно багато розв'язків тоді і тільки тоді, коли $A_0 = B_0 = 0$ і $F_{0,n} = 0$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. При цьому загальний розв'язок цієї початкової задачі визначено рівністю $X_n = X_{0,n} + tX_{1,n}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де $X_{1,0} = Y_{1,0}$, $\{X_{1,n}\}_{n=1}^\infty$ — довільна послідовність елементів поля $\mathbb{Z}_p$, а послідовність $\{X_{0,n}\}_{n=0}^\infty$ має наступний вигляд:

$$X_{0,0} = Y_{0,0}, \quad X_{0,n} = B_1^{-n}A_1^nY_{0,0} + \sum_{s=0}^{n-1} B_1^{-s-1}A_1^sF_{1,n-s-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

3. Початкова задача (1), (2) не має розв'язків тоді і тільки тоді, коли $B_0 = 0$ і виконано одну з наступних умов:

(а) $A_0 = 0$ і $F_{0,n} \neq 0$ при деякому $n \in \mathbb{Z}_+$;

(б) $A_0 \neq 0$ і $Y_0 \neq -A^{-1}F_0 - BA^{-2}F_1$.

Доведення. Доведемо достатність першого твердження теореми. Якщо виконано умову 1а або 1б, то, за теоремою 1, рівняння (1) має скінченне число розв'язків, при цьому загальний розв'язок визначено формулою (3). Ця формула показує, що розв'язок початкової задачі (1), (2) однозначно визначається початковою умовою (2). Це доводить достатність першого твердження теореми.

Доведемо достатність другого твердження теореми. Нехай тепер $A_0 = B_0 = 0$ і $F_{0,n} = 0$ при всіх n . За другим твердженням теореми 1, загальний розв'язок рівняння (1) визначено рівністю $X_n = X_{0,n} + tX_{1,n}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де $\{X_{1,n}\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів поля $\mathbb{Z}_p$, а послідовність $\{X_{0,n}\}_{n=0}^\infty$ визначено рівністю (4), де $X_{0,0}$ — довільний елемент поля $\mathbb{Z}_p$. Тому загальний розв'язок початкової задачі (1), (2) визначено рівністю $X_n = X_{0,n} + tX_{1,n}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де $X_{1,0} = Y_{1,0}$, $\{X_{1,n}\}_{n=1}^\infty$ — довільна послідовність елементів поля $\mathbb{Z}_p$, а послідовність $\{X_{0,n}\}_{n=0}^\infty$ визначено рівністю (10). Достатність другого твердження теореми 2 доведено.

Доведемо достатність третього твердження теореми. Якщо $B_0 = 0$ і виконано умову 3а, то, за третім твердженням теореми 1, рівняння (1) не має розв'язків, відповідно і початкова задача (1), (2) не має розв'язків. Якщо ж $B_0 = 0$ і виконано умову 3б, то, за першим твердженням теореми 1, рівняння (1) має єдиний розв'язок, який задовольняє умову $X_0 = -A^{-1}F_0 - BA^{-2}F_1$. Тому при $Y_0 \neq -A^{-1}F_0 - BA^{-2}F_1$ початкова задача (1), (2) не має розв'язків. Достатність третього твердження теореми 2 доведено.

Ми довели достатність кожного з тверджень теореми. Аналогічно доведенню теореми 1, оскільки достатні умови всіх трьох тверджень теореми вичерпують всі можливості і попарно не перетинаються, то доведення критерію завершено. $\square$

5. Приклад

Розглянемо приклад застосування отриманих результатів.

Приклад 1. Нехай $A_0, A_1 \in \mathbb{Z}_p$. Розглянемо рівняння

$$tX_{n+1} = (A_0 + A_1t)X_n + F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (11)$$

над кільцем $\mathcal{S}_p$. Рівняння (11) має вигляд (1), де $A = A_0 + A_1t$, $B = t$, $B_0 = 0$, $B_1 = 1$. Якщо $A_0 \neq 0$, то, за першим твердженням леми 1, елемент A є

оборотним, і $A^{-1} = A_0^{-1} - A_0^{-2}A_1t$. За наслідком 2, існує єдиний розв'язок рівняння (11). Він визначається наступним чином:

$$\begin{aligned} X_n &= -A^{-1}F_n - A^{-2}BF_{n+1} = -(A_0^{-1} - A_0^{-2}A_1t)F_n - (A_0^{-2} - 2A_0^{-3}A_1t)tF_{n+1} = \\ &= (A_0^{-2}A_1t - A_0^{-1})F_n - A_0^{-2}tF_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \quad (12)$$

За першим твердженням теореми 2, якщо виконано умову $A_0 \neq 0$, то початкова задача (11), (2) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $Y_0 = (A_0^{-2}A_1t - A_0^{-1})F_0 - A_0^{-2}tF_1$. Відповідний розв'язок початкової задачі (11), (2) визначається рівністю (12).

Тепер нехай $A_0 = 0$ і $F_{0,n} = 0$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. За другим твердженням теореми 1, існує нескінченно багато розв'язків рівняння (11). При цьому загальний розв'язок цього рівняння має вигляд $X_n = X_{0,n} + X_{1,n}t$, де $X_{0,0}$ — довільний елемент поля $\mathbb{Z}_p$, $\{X_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$ — довільна послідовність елементів поля $\mathbb{Z}_p$, а послідовність $\{X_{0,n}\}_{n=1}^{\infty}$ визначається формулою

$$\begin{aligned} X_{0,n} &= B_1^{-n}A_1^nX_{0,0} + \sum_{s=0}^{n-1} B_1^{-s-1}A_1^sF_{1,n-s-1} = \\ &= A_1^nX_{0,0} + \sum_{s=0}^{n-1} A_1^sF_{1,n-s-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

При цьому, за другим твердженням теореми 2, початкова задача (11), (2) також має нескінченно багато розв'язків, і її загальний розв'язок має вигляд $X_n = X_{0,n} + X_{1,n}t$, де $X_{1,0} = Y_{1,0}$, $\{X_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ — довільна послідовність елементів поля $\mathbb{Z}_p$, а послідовність $\{X_{0,n}\}_{n=0}^{\infty}$ визначається формулою

$$X_{0,0} = Y_{0,0}, \quad X_{0,n} = A_1^nY_{0,0} + \sum_{s=0}^{n-1} A_1^sF_{1,n-s-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Якщо $A_0 = 0$ і $F_{0,n} \neq 0$ для деякого $n \in \mathbb{Z}_+$, то, за третім твердженням теореми 1, рівняння (11) не має розв'язків і, відповідно, початкова задача (11), (2) також не має розв'язків.

6. Висновки

У даній статті досліджено неявне лінійне різницеве рівняння першого порядку над скінченними комутативними кільцями з одиницею, порядок яких дорівнює p^2 . Встановлено необхідні і достатні умови розв'язності цього рівняння над кільцем $\mathcal{S}_p$, а за умови існування розв'язку визначено кількість розв'язків та загальний вигляд розв'язку. Аналогічні результати отримано для початкової задачі над кільцем $\mathcal{S}_p$.

Наведено приклад, що демонструє використання одержаних теоретичних результатів. У подальшому планується дослідити неявне лінійне різницеве рівняння над іншими класами скінченних комутативних кілець з одиницею.

Подяки. Цю роботу було частково підтримано грантом Фонду Ахієзера (Харків).

Історія статті: отримана: 27 лютого 2025; прийнята: 31 травня 2025.

REFERENCES

1. A. B. Goncharuk. Implicit linear difference equations over a non-Archimedean ring, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics". — 2021. — Vol. **93**. — P. 18–33. 10.26565/2221-5646-2021-93-03
2. S. Gefter, A. Goncharuk, A. Piven. Implicit Linear First Order Difference Equations Over Commutative Rings, In: Elaydi, S., Kulenovic, M.R.S., Kalabusic, S. (eds) Advances in Discrete Dynamical Systems, Difference Equations and Applications. ICDEA 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — 2023. — Vol. **416**. — P. 199–216. 10.1007/978-3-031-25225-9_10
3. V. A. Gerasimov, S. L. Gefter, A. B. Goncharuk. Application of the p -adic Topology on $\mathbb{Z}$ to the Problem of Finding Solutions in Integers of an Implicit Linear Difference Equation, J. Math. Sci. — 2018. — Vol. **235**, No. 2. — P. 256–261. 10.1007/s10958-018-4072-x
4. V. V. Martseniuk, S. L. Gefter, A. L. Piven. Uniqueness criterion and Cramers rule for implicit higher order linear difference equations over $\mathbb{Z}$, Progress on Difference Equations and Discrete Dynamical Systems (eds. S. Baigent, M. Bohner, S. Elaydi), Springer. — 2020. — Vol. **341**. — P. 311–325. 10.1007/978-3-030-60107-2_16
5. S. L. Gefter, A. L. Piven'. Implicit Linear Nonhomogeneous Difference Equation over $\mathbb{Z}$ with a Random Right-Hand Side, J. Math. Physics, Analysis, Geometry. — 2022. — Vol. **18**, No. 1. — P. 105–117. 10.15407/mag18.01.105
6. M. V. Heneralov, A. L. Piven'. Implicit linear difference equation over residue class rings, Algebra and Discrete Mathematics. — 2024. — Vol. **37**, No. 1. — P. 85–105. 10.12958/adm2110
7. B. Fine. Classification of Finite Rings of Order p^2 , Mathematics Magazine. — 1993. — Vol. **66**, No. 2. — P. 248–252. 10.2307/2690742
8. A. Nowicki. Tables of finite commutative local rings of small orders. Conference: UMK, Torun. — 2018. <https://www.researchgate.net/publication/328319576>
9. N. Dunford, J. T. Schwartz. Linear Operators. Part I: General theory. 1988. John Wiley & Sons, New York, 851 p.

10. S. Elaydi. Introduction to difference equations. 2005. Springer-Verlag, New York.

Article history: Received: 27 February 2025; Accepted: 31 May 2025.

Implicit linear difference equations over finite commutative rings of order p^2 with identity

M. V. Heneralov

Department of Fundamental Mathematics

V. N. Karazin Kharkiv National university

4 Svobody sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

It is known that, up to isomorphism, there are exactly four finite commutative rings with identity, whose order is equal to p^2 , where p is a prime number. Namely, these rings are the residue class ring modulo p^2 , the direct sum of two residue class rings $\mathbb{Z}_p$ modulo p , the field of order p^2 and the ring $\mathcal{S}_p = \mathbb{Z}_p[t]/(t^2)$. Recently, a solvability criterion was established for the first-order linear difference equation over the residue class ring modulo $m \geq 2$. Considering this, it appears necessary to solve the solvability problem for the linear difference equation over the ring $\mathcal{S}_p$ of order p^2 .

This paper investigates first-order implicit linear difference equations over the ring $\mathcal{S}_p$. The paper presents the solvability criterion for the mentioned equation over this ring. In addition, the obtained results describe both the number of solutions and the form of the general solution of this equation. Analogous results were obtained for the initial problem over the ring $\mathcal{S}_p$. In particular, it was established that, unlike in the case of an integral domain, the initial problem over the ring $\mathcal{S}_p$ may have infinitely many solutions. Moreover, if it has a finite number of solutions, then the solution of this initial problem is unique. We obtain several corollaries of the solvability criterion for the implicit linear difference equation over the ring $\mathcal{S}_p$. In particular, as in Fredholm theory, we show that if a homogeneous equation, which corresponds to the non-homogeneous equation, has only the trivial solution, then the non-homogeneous equation, which is being investigated, has a unique solution.

The article includes an example demonstrating the application of the obtained theoretical results to solving a certain equation over the ring $\mathcal{S}_p$ and the corresponding initial problem.

The results may be applied to further studies of linear difference equations over finite rings, and also to the general theory of discrete dynamical systems.

Keywords: implicit linear difference equation; finite ring; initial problem; solvability.

How to cite this article:

M. V. Heneralov, Implicit linear difference equations over finite commutative rings of order p^2 with identity, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 101, 2025, p. 21–30, (in Ukrainian). DOI: 10.26565/2221-5646-2025-101-02

О. А. Макаров

доцент, кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри математичного моделювання та аналізу даних
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 6, Харків, Україна, 61022
makarovfamily07@gmail.com  <http://orcid.org/0000-0002-9050-4987>

І. Г. Ніколенко

кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри математичного моделювання та аналізу даних
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 6, Харків, Україна, 61022
iryna.nikolenko@karazin.ua  <http://orcid.org/0000-0002-2904-6761>

Умови керованості еволюційної системи лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних

Керованості систем диференціальних рівнянь з частинними похідними, які описують різноманітні природні процеси, присвячено безліч робіт. Особливістю цієї статті є розглядання керованості лінійної системи диференціальних рівнянь у частинних похідних загального вигляду.

Раніше у статті Макарова О.А. "Керованість еволюційної системи диференціальних рівнянь у частинних похідних" / Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, Серія "Математика, прикладна математика і механіка" 2016, Т. 83, с. 47–56" розглядалась система диференціальних рівнянь у частинних похідних. У даній роботі була досліджена 0-керованість таких систем у просторі Л. Шварца при певних умовах на керування. Зокрема, було доведено, що якщо власні значення матриці системи є дійсними, то існує керування, яке не залежить від часу. Крім того, досліджений випадок, при якому власні значення є уявними.

Метою цієї статті є дослідження керованості системи лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних для довільної матриці системи при обмеженнях на пошук керування у вигляді $u(x, t) = u(x) \cdot \exp(-\alpha t)$, де вектор-функція $u(x)$ належить простору Л. Шварца.

Отримано необхідні та достатні умови 0-керованості цієї системи, а також наведено приклади як керованої системи, так і некерованої. Як наслідки цієї теореми отримано достатні умови 0-керованості системи, дійсні частини власних значень матриці $P(s)$ обмежені зверху або знизу. Крім того, доведено, що якщо просторова змінна належить простору $\mathbb{R}$, то така система є 0-керованою. До кожного випадку наведено приклади.

Розглянуто також диференціальне рівняння у частинних похідних другого порядку за часом. Для нього доведено, що якщо корені характеристичного рівняння

задовольняють умовам критерію, то це рівняння буде 0-керованим. Так рівняння Гельмгольца є 0-керованими.

Ключові слова: диференціальні рівняння у частинних похідних; 0-керованість; перетворення Фур'є; простір Л. Шварца.

2020 Mathematics Subject Classification: 35C10, 93B28.

Вступ

Керованості систем диференціальних рівнянь з частинними похідними, яки описують різноманітні природні процеси, присвячено безліч робіт. Наприклад, у роботі [1] досліджено керування хвільового рівняння.

У статті [2] розглянута еволюційна система диференціальних рівнянь у частинних похідних, де досліджена 0-керованість таких систем у просторі Л. Шварца при певних умовах на керування. Зокрема було доведено, що якщо власні значення матриці системи $P(s)$ дійсні, то існує керування, яке не залежить від часу. Крім того був досліджен випадок для уявних власних значень.

Метою цієї роботи є дослідження керованості системи лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних при обмеженнях на пошук керування у вигляді $u(x, t) = u(x) \exp(-\alpha t)$, де вектор-функція $u(x)$ належить простору Л. Шварца. Був отриман критерій 0-керованості цієї системи у просторі Л. Шварца та наведені приклади як керованої так і некерованої систем. Як наслідок цього критерію було доведено, що системи з обмеженими зверху або знизу дійсними частинами $\operatorname{Re} \lambda_j(s)$ теж є 0-керованими.

Крім того доведено, що системи з одновимірною просторовою змінною є 0-керованими. Наведені приклади на усі випадки.

Розглянуто також диференціальне рівняння у частинних похідних другого порядку за часом. Для нього доведено, що якщо корені характеристичного рівняння задовольняють умовам критерію, то це рівняння 0-керовано. Так рівняння Гельмгольца є 0-керованими.

1. Критерій керованості

Розглянемо систему диференціальних рівнянь у частинних похідних зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = P \left(\frac{\partial}{i \partial x} \right) w(x, t) + e^{-\alpha t} u(x), \quad t \in [0; T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

де $P(s)$ — поліноміальна матриця $n \times n$, $u(x)$ і $w(x, t)$ — вектор-функції, яки належать простору Л. Шварца S , тобто нескінченно диференційовні та швидко спадають [3].

Означення 1. Система (1) називається 0-керованою у просторі S , якщо для будь-якої функції $\varphi(x) \in S$ існує керування $u(x) \in S$ таке, що розв'язок цієї системи (1) з умовами $w(x, 0) = \varphi(x)$ та $w(x, T) = 0$ належить простору S по просторовим змінним.

У роботі [2] доведена наступна теорема.

Теорема. Система (1) з керуванням вигляду $u(x)v(t)$ буде 0-керованою у просторі S , тоді і тільки тоді, коли існує обернена матриця

$$\left(\int_0^T v(t) \exp(-tP(s)dt) \right)^{-1} \in C_{-\infty}^{\infty} \quad \forall s \in \mathbb{R}^n,$$

де $C_{-\infty}^{\infty}$ — простір нескінченно-диференційовних функцій, які зростають не швидше степені.

За її допомогою доведемо наступний критерій.

Теорема 1. Система (1) 0-керована у просторі Л. Шварца S тоді і тільки тоді, коли виконується умова: існує таке $\alpha \in \mathbb{R}$, що на множині

$$N_j = \{s \in \mathbb{R}^n : \operatorname{Re} \lambda_j(s) = -\alpha\} \quad j = \overline{1, n}$$

виконується нерівність

$$\operatorname{Im} \lambda_j(s) \neq \frac{2k\pi}{T}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Доведення. У випадку керування вигляду $u(x) \exp(-\alpha t)$ умова попередньої теореми виглядає так:

існує обернена матриця

$$\left(\int_0^T \exp(-\alpha t) \cdot \exp(-tP(s)) dt \right)^{-1} \in C_{-\infty}^{\infty}. \quad (2)$$

У роботі Л. В. Фардигіли [4] було доведено: якщо

$$\Delta = \det \int_0^T \exp tQ(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^n,$$

то матриця

$$\left(\int_0^T \exp tQ(s) dt \right)^{-1} \in C_{-\infty}^{\infty}.$$

Там же доведено, що ця умова еквівалентна умові $\exp(T\lambda_j(s)) \neq 1$, $j = \overline{1, n}$.

У нашому випадку остання умова означає, що

$$\exp(-T(\lambda_j(s) + \alpha)) \neq 1, \quad j = \overline{1, n} \quad \forall s \in \mathbb{R}^n,$$

тобто

$$\lambda_j(s) + \alpha \neq \frac{2k\pi i}{T} \quad (k \neq 0),$$

а ця нерівність еквівалентна сукупності нерівностей $\operatorname{Re} \lambda_j(s) \neq -\alpha$, або

$$\operatorname{Im} \lambda_j(s) \neq \frac{2k\pi i}{T}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Теорема доведена.

Приклад 1. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} = 4w_2(x, t) + \Delta w_2(x, t) + u_1(x)e^{-\alpha t}, \\ \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t} = -2w_2(x, t) + \Delta w_1(x, t) + u_2(x)e^{-\alpha t}. \end{cases}$$

Матриця $P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 4 - |s|^2 \\ -|s|^2 & -2 \end{pmatrix}$, де $|s|^2 = \sum_{k=1}^n s_k^2$.

Тоді характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2\lambda - |s|^4 + 4|s|^2 = 0$, а власні значення $\lambda_{1,2}(s) = -1 \pm \sqrt{1 - 4|s|^2 + |s|^4} = -1 \pm \sqrt{(2 - |s|^2)^2 - 3}$.

$|\operatorname{Im} \lambda_j(s)| \leq \sqrt{3}$ і тому при $T = 1$ маємо $\operatorname{Im} \lambda_j(s) \neq 2k\pi$ при $k \neq 0$.

Тобто виконана умова теореми 1, значить дана система 0-керована при $T \geq 1$.

Приклад 2.

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1(x_1, x_2, t)}{\partial t} = w_2(x_1, x_2, t) + e^{-\alpha t} u_1(x_1, x_2), \\ \frac{\partial w_2(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \\ = -\frac{\partial^2 w_1(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 w_1(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial w_2(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + e^{-\alpha t} u_2(x). \end{cases}$$

Матриця $P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s_1^2 + s_2^2 & -2is_1 \end{pmatrix}$.

Тоді характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2\lambda s_1 - s_1^2 - s_2^2 = 0$, і власні значення

$$\lambda_{1,2}(s) = -is_1 \pm \sqrt{-s_1^2 + s_1^2 + s_2^2} = -is_1 \pm s_2.$$

Отже у рівняння $-is_1 - s_2 + \alpha = \frac{2k\pi i}{T}$ завжди є корінь $s_2 = \alpha$, $s_1 = \frac{2k\pi}{T}$, а значить система некерована.

2. Достатні умови керованості

Теорема 2. Якщо дійсні частини власних значень матриці $P(s)$ обмежені зверху або знизу, то система (1) 0-керована.

Доведення. Якщо $\operatorname{Re} \lambda_j(s) < C$, $j = \overline{1, n}$, $\forall s \in \mathbb{R}^n$, то при $\alpha < C$ виконана нерівність $\operatorname{Re} \lambda_j(s) + \alpha < 0$, тобто виконуються умови теореми 1.

Аналогічно: якщо $\operatorname{Re} \lambda_j(s) > -C$, то при $\alpha > C$ виконується нерівність $\operatorname{Re} \lambda_j(s) + \alpha > 0$, тобто виконуються умови теореми 1.

Теорема доведена.

Приклад 3. Розглянемо систему еквівалентну рівнянню звука у в'язкому середовищі

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} = w_2(x) + e^{-\alpha t} u_1(x), \\ \frac{\partial w_2(x)}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 w_2(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1(x)}{\partial x^2} + w_2(x) e^{-\alpha t}, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -s^2 & -\lambda - 2s^2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda s^2 + s^2 = 0.$$

Його корені $\lambda_{1,2}(s) = -s^2 \pm \sqrt{s^4 - s^2}$.

При $|s| \geq 1$ корені дійсні і $\max \lambda_j(s) < 0$.

При $|s| < 1$ корені комплексні і $\max \operatorname{Re} \lambda_j(s) \leq 0$.

Тобто виконана умова теореми 2, а значить система 0-керована з керуванням, яке не залежить від часу.

3. Керованість системи з однією просторовою змінною

Розглянемо систему (1) з однією просторовою змінною.

Теорема 3. Система (1) з $x \in \mathbb{R}$ завжди 0-керована з деяким α .

Доведення. Рівняння $\lambda_j(s) = \frac{2k\pi i}{T}$, $k \neq 0$ еквівалентно системі

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \lambda_j(s) = -\alpha, \\ \operatorname{Im} \lambda_j(s) = \frac{2k\pi i}{T}, \end{cases} \quad j = \overline{1, n}.$$

Випадок дійсних $\lambda_j(s)$ був розглянут у статті [2]. Тому у даній роботі ми розглянемо тільки випадок, коли $\operatorname{Im} \lambda_j(s) \neq 0$.

В цьому випадку $\operatorname{Im} \lambda_j(s) = \frac{2k\pi i}{T}$ має скінченну кількість коренів при фіксованому k , а всього цих коренів зліченна множина $s_p \in \mathbb{R}$ при $k \in \mathbb{N}$.

Тоді множина значень $\operatorname{Re} \lambda_j(s_p)$ теж зліченна і тому завжди знайдеться таке α , при якому $\operatorname{Re} \lambda_j(s_p) \neq -\alpha$.

Отже, виконані умови теореми 1, тобто система (1) 0-керована.

Теорема доведена.

Приклад 4. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} = w_2(x, t) + u_1(x)e^{-\alpha t}, \\ \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial^2 w_1(x, t)}{\partial x^2} - bw_1(x, t) + u_2(x)e^{-\alpha t}, \end{cases} \quad b > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Власні значення знаходяться із рівняння

$$\lambda^2 + b - s^2 = 0, \quad \lambda_{1,2}(s) = \pm \sqrt{s^2 - b}.$$

При $|s| \geq b$ власні значення дійсні, а при $|s| < b$ власні значення уявні $\lambda_{1,2}(s) = \pm i\sqrt{b - s^2}$ і $|\operatorname{Im} \lambda_j(s)| \leq b$.

Тому, якщо $T < \frac{2\pi}{\sqrt{b}}$, то $\lambda_j(s) \neq \frac{2k\pi i}{N}$ і система 0-керована.

4. Керованість диференціального рівняння другого порядку за часом

Розглянемо керованість диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w(x, t) = 0, \quad (3)$$

де $P(s)$ і $Q(s)$ — поліноми, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0; T]$.

Розглянемо систему, еквівалентну цьому рівнянню.

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} = w_2(x, t), \\ \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t} = -P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w_2(x, t) - Q\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w_1(x, t) \end{cases}$$

Як і раніше, будемо розглядати керування вигляду $e^{-\alpha t}u_j(x)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} = w_2(x, t) + e^{-\alpha t}u_1(x), \\ \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t} = -P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w_2(x, t) - Q\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w_1(x, t) + e^{-\alpha t}u_2(x). \end{cases}$$

З першого рівняння знайдемо функцію

$$w_2(x, t) = \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} - e^{-\alpha t} u_1(x).$$

Підставляючи цю функцію у друге рівняння, отримаємо нове рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_1(x, t)}{\partial t^2} + P \left(\frac{\partial}{i\partial x} \right) \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} + Q \left(\frac{\partial}{i\partial x} \right) w_1(x, t) + \\ + \alpha e^{-\alpha t} u_1(x) - e^{-\alpha t} P \left(\frac{\partial}{i\partial x} \right) u_1(x) - e^{-\alpha t} u_2(x) = 0. \end{aligned}$$

Отже, отримали рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_1(x, t)}{\partial t^2} + P \left(\frac{\partial}{i\partial x} \right) \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} + Q \left(\frac{\partial}{i\partial x} \right) w_1(x, t) = \\ = e^{-\alpha t} \left(P \left(\frac{\partial}{i\partial x} \right) u_1(x) - \alpha u_1(x) + u_2(x) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

з початковими умовами

$$\begin{cases} u_1(x, 0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial w_1(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) + u_1(x). \end{cases}$$

Застосовуючи теорему 1, маємо наступний наслідок.

Наслідок. Якщо корені характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + P(s)\lambda + Q(s) = 0$$

задовольняють умовам теореми 1, то рівняння (4) 0-кероване у просторі Л. Шварца.

Приклад 5. Розглянемо рівняння Гельмгольца (див. [5])

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \Delta w(x, t) + kw(x, t) = f(x, t).$$

Оскільки характеристичні корені цього рівняння

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{|s|^2 - k}$$

задовольняють умовам теореми 1, то рівняння Гельмгольца 0-кероване.

Висновки

У цієї роботі отриман критерій керованості системи лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних у просторі Л. Шварца. Даний критерій формулюється у термінах обмежень на власні значення матриці системи.

Наведені приклади як керованих, так і некерованих систем.

Як наслідок отримані також умови керованості диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку за часом.

Конфлікт інтересів: Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

REFERENCES

1. L. V. Fardigola, Controllability Problems for the String Equation on a Half-Axis with a Boundary Control Bounded by a Hard Constant. / SIAM J. Control Optim., 2008. — Vol. 47, No. 4. — P. 2179-2199.
<https://doi.org/10.1137/070684057>
2. A. A. Makarov. Controllability of evolution partial differential equation. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, — Vol. 83, — 2016, p. 47-56.
<https://doi.org/10.26565/2221-5646-2016-83-04>
3. L. Hörmander. The Analysis of linear partial differential operators. II. / Differential operators with constant coefficients. — Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York Tokyo. — 1983. — 455 p.
4. L. V. Fardigola. An integral boundary-value problem in a layer for a system of linear partial differential equations. — 1995, Sb. Math. 186 1671 DOI 10.1070/SM1995v186n11ABEH000088.
5. A. A. Makarov, A. V. Chernikova. Well-posedness and parabolicity of the boundary-value problem for systems of partial differential equations. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, — Vol. 99, — 2024, p. 51–61 (in Ukrainian). DOI: <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2024-99-04>

Історія статті: отримана: 27 лютого 2025; останній варіант: 28 квітня 2025
прийнята: 19 травня 2025.

**Controllability conditions for evolutionary systems
of linear partial differential equations**

A. A. Makarov, I. G. Nikolenko

Department of Mathematical Modeling and Data Analysis

Educational and Scientific Institute of Computer Science

and Artificial Intelligence

V. N. Karazin Kharkiv National University

sq. Svobody, 6, Kharkiv, Ukraine, 61022

Many works have been devoted to the controllability of systems of partial differential equations that describe various natural processes. The peculiarity of this article is the consideration of the controllability of a linear system of partial differential equations of general forms.

In the article by Makarov O.A. "Controllability of an evolutionary system of partial differential equations. / Bulletin of the Kharkiv National University named after V. N. Karazin, Series "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics 2016, Vol. 83. pp. 47–56" a system of partial differential equations has previously been considered. The null-controllability of such systems in the L. Schwartz space under certain control conditions has been investigated in this work. In particular, it was proved that if the eigenvalues of the system matrix are real, then there is a time-independent control. In addition, the

case when the eigenvalues are imaginary was investigated.

The purpose of this article is to study the controllability of a system of linear partial differential equations for an arbitrary matrix of the system under the constraints on the search for control in the form $u(x, t) = u(x) \cdot \exp(-\alpha t)$, where the vector of the function $u(x)$ belongs to the L. Schwartz space.

Necessary and sufficient conditions for the null-controllability of this system are obtained and examples of both controllable and uncontrollable systems are given. As a consequence of this theorem, sufficient conditions for the null-controllability of the system are obtained, the real parts of the eigenvalues of the matrix $P(s)$ are bounded from above or below. In addition, it is proved that if the spatial variable belongs to the space $\mathbb{R}$, then such a system is null-controllable. Examples are given for each case.

A partial differential equation of the second order in time is also considered. It has been proven that if the roots of the characteristic equation satisfy the conditions of the criterion, then this equation is null-controllable. Thus, the Helmholtz equation are null-controllable.

Keywords: partial differential equations; null-controllability; Fourier transform; L. Schwartz space.

Article history: Received: 27 February 2025; Final form: 28 April 2025

Accepted: 19 May 2025.

How to cite this article:

O. A. Makarov, I. G. Nikolenko, Controllability conditions for evolutionary systems of linear partial differential equations. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 101, 2025, p. 31–39, (in Ukrainian). DOI: 10.26565/2221-5646-2025-101-03

O. L. Vyshnevetskiy

Associate Professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences
 Associate Professor of the Department of Higher Mathematics
 Kharkiv National Automobile and Highway University
 25 Yaroslava Mudryho St., Kharkiv, 61002, Ukraine
 alexwish50@gmail.com  <http://orcid.org/0000-0003-1757-0416>

Convolution of probabilities constant in a subgroup and outside a subgroup

Let be P the probability on a finite group G , i.e. the function $P(g)$ takes non-negative values and $\sum_g P(g) = 1$ ($g \in G$). For any two functions $F_1(g)$ and $F_2(g)$ their G convolution

$$(F_1 * F_2)(t) = \sum_{h \in G} F_1(h) F_2(h^{-1}t), t \in G$$

is also a function on G .

In recent years, the topic of studying random walks (and not only on groups) has become very popular. From an analytical point of view, the study of random walks is only the study of their transition function, that is, the n -fold convolution of probability measures. It is well known that under simple conditions, imposed on the probability support P on the group G , n -fold convolution $P^{(n)} = P * \dots * P$ (n times) with $n \rightarrow \infty$ converges to uniform probability $U(g) = \frac{1}{|G|}$ ($g \in G$), which is obviously a constant on G .

We study convolution of functions that may be different but are constant in or outside some subgroup. In short, we study the cases where the convolution of such functions has the same properties of constancy with respect to some subgroup.

The article considers the convolution of probabilities (and, in general, real functions) constant outside (or inside) a subgroup of H the finite group G . Let $D = G \setminus H$. For a given function F on G the subgroup H , for which F is constant on D , is unique in the following sense: there is at most one such number c and one smallest subgroup H of the group G such that $F(g) = c$ for all elements $g \in D$.

It is proved that if the functions F_1, F_2 are constants on D , $F_1(x) = c_1, F_2(x) = c_2$ for arbitrary $x \in D$, then their convolution $F_1 * F_2$ is also a constant on D . The value for this constant is found in terms of the numbers c_1, c_2 . Functions on the group G that are constant on D form a semigroup with respect to the convolution.

If one of functions F_1, F_2 is constant on the subgroup H and other is constant on D , then it is proved that the convolution $F_1 * F_2$ is constant on H . The value for this constant is found.

In the above statements about a convolution, one of two factors is constant outside the subgroup. But if both factors are constant on the same subgroup, then their convolution is not necessarily constant on the subgroup. An example is given of two functions that are constant on subgroup H , but their convolution is not constant on H .

This example is not presented in the language of probabilities (or functions) on a group (as in all other parts of the article), but in the language of group algebras. The group algebra KG of the group G over the field K appears in questions related to convolutions of functions on the group G in the following way: each function $F(g)$ on G with values in an arbitrary field K determines an element $\sum_g F(g)g$ ($g \in G$) of the algebra KG ; the convolution of probabilities corresponds to the product of elements of the algebra KG . So usage of group algebra is natural for studying convolution on a group. If the function $F(g)$ is a probability, then K is the field of real numbers.

Keywords: probability; finite group; convolution.

2020 Mathematics Subject Classification: 620D99; 60B15.

1. Introduction

In the article we consider convolution of probabilities (and in general, real-valued functions) that are constant outside (or in) a subgroup of a finite group. We prove that convolution of such probabilities is also constant outside (or in) the subgroup. We also evaluate the constant of the convolution.

From analytical point of view, study of random walks is just study of its transition function, i.e. n -fold convolution of probability measures. We refer to the interesting works A. Bendikov, L. Saloff-Coste [1], [2] and L. Saloff-Coste [3]. We study convolution of probability measures that may be different, but are constant in or outside a subgroup. We show that their convolution has the same property. It is well known (see [3], some refinements see in [4]) that under mild conditions on the carrier of a probability P on a group G , its n -fold convolution power $P^{(n)}$ (n times) at $n \rightarrow \infty$ tends to the uniform probability, which is constant on G .

Let H be a subgroup of a finite group G , $H \neq G$ (we write $H < G$), $D = G \setminus H$.

Lemma 1. 1. Element $g \in D$ if and only if $g^{-1} \in D$.

2. For a fixed element $h \in H$ mapping $x \rightarrow hx$ ($x \in D$) is a bijection $D \rightarrow D$.

Proof.

1. By contradiction, because $g \in H$ if and only if $g^{-1} \in H$.
2. By contradiction $hx \in D$. $|hD| = |D|$ and elements of the set hD are pairwise distinct.

Lemma 2. *If $H_1, H_2 < G$ then $H_1 \cup H_2 \neq G$.*

Proof. By contradiction, let $H_1 \cup H_2 = G$. For any $x \in H_1, y \in H_2$ their product $xy \in G = H_1 \cup H_2$. We may suppose $xy \in H_1$. Then $y \in H_1$, so $H_2 \subset H_1$ and $G = H_1$.

Let F be a function on a group G . For a subset $M \subset G$ we denote $F(M) = \sum_{g \in M} F(g)$ and $\overline{M} = G \setminus M$. We write $F \in S(H, c)$ if there exist a subgroup H of G and a number c such that $F(t) = c$ for any $t \in \overline{H}$; if number c does not matter we drop it and write $F \in S(H)$.

Theorem 1. *If $F \in S(H_1, c_1)$, $F \in S(H_2, c_2)$, then $F \in S(H_1 \cap H_2, c)$, where $c = c_1 = c_2$.*

Proof. Due to Lemma 2 $H_1 \cup H_2 \neq G$, so there exist an element $x \in \overline{H_1 \cup H_2}$. Since $\overline{H_1 \cup H_2} = \overline{H_1} \cap \overline{H_2}$, then $c_1 = F(x) = c_2$. Put $c = c_1 = c_2$. So $F(t) = c$ for any $t \in \overline{H_1 \cup H_2} = \overline{H_1} \cap \overline{H_2}$.

Corollary 1. *For a given function F and all subgroups H of G there exist*

1. *at most one number c such that $F \in S(H, c)$*
2. *the smallest (with respect to inclusion) subgroup H such that $F \in S(H)$.*

Let function F be a real-valued one and $q = F(G)$.

Theorem 2. *If $F \in S(H, c)$ and $F \geq 0$, then $|q - c|G|| \leq q$ with equality if and only if either a) $|H| = \frac{|G|}{2}$ and $F(h) = 0$ for any $h \in H$ or b) $c = 0$.*

Proof. Rewrite the last inequality as

$$-q \leq q - c|G| \leq q \quad (1)$$

The right-hand inequality is obvious and is equality if and only if $c = 0$. The left-hand inequality is equivalent to

$$c|G| \leq 2q.$$

As H is a subgroup of G , then $|H| \leq \frac{|G|}{2}$, $|D| \geq \frac{|G|}{2}$ and

$$q = F(G) = \sum_{g \in D} F(g) + \sum_{h \in H} F(h) \geq c|D| \geq c \frac{|G|}{2},$$

so (1) is proved. Left-hand inequality in (1) is equality if and only if two last inequalities are equalities. First of the equalities yields $F(h) = 0$ ($h \in H$), second yields $|H| = \frac{|G|}{2}$.

Corollary 2. *If $P \in S(H, c)$ for a probability P on group G , then $|1 - c|G|| \leq 1$ and*

$$|1 - c|G|| < 1 \quad (2)$$

if and only if neither of conditions a) and b) of the last theorem satisfy.

If $c = 0$ we can take $G = H$.

2. Convolution of functions and probabilities

For a function F defined on some set $M \supseteq H$, we denote F_H restriction F to H . For example, such a restriction of convolution of functions F_1, F_2 , defined on G is:

$$(F_1 * F_2)_H(t) = \sum_{h \in H} F_1(h) F_2(h^{-1}t), t \in H.$$

If $H = G$ we drop the subscript H . We remind that $F_i(M) = \sum_{g \in M} F_i(g)$ for a subset $M \subset G, i = 1, 2$. Let $q_i = F_i(G), i = 1, 2$.

Theorem 3. *Let functions F_1, F_2 be defined on group G and constant on $D = G \setminus H: F_i(t) = c_i, i = 1, 2 (t \in D)$. Then*

1. *If $x \in D$, then $(F_1 * F_2)(x) = c$, where*

$$q_1 q_2 - c |G| = (q_1 - c_1 |G|)(q_2 - c_2 |G|) \quad (3)$$

2. *If $x \in H$, then*

$$(F_1 * F_2)(x) = (F_1 * F_2)_H(x) + c_1 c_2 |D|, \quad (4)$$

Proof. For any $x \in G$ we have

$$\begin{aligned} F_1 * F_2(x) &= \sum_{g \in G} F_1(g) F_2(g^{-1}x) = \\ &= \sum_{h \in H} F_1(h) F_2(h^{-1}x) + \sum_{g \in D} F_1(g) F_2(g^{-1}x) \end{aligned} \quad (5)$$

We denote the last two sums $S_1(x)$ and $S_2(x)$.

1. Let $x \in D$. Then in $S_1(x)$ we have $h^{-1}x \in D$, so $F_2(h^{-1}x) = c_2$; besides, since $F_1(G) = F_1(H) + F_1(D)$, then $F_1(H) = q_1 - c_1 |D|$. So $S_1(x) = c_2 F_1(H) = c_2 (q_1 - c_1 |D|)$.

In the sum $S_2(x)$ in (5) we have $F_1(g) = c_1$. So

$$S_2(x) = \sum_{g \in D} c_1 F_2(g^{-1}x) = c_1 \left(\sum_{g \in G} F_2(g^{-1}x) - \sum_{g \in H} F_2(g^{-1}x) \right) \quad (6)$$

In the first of two last sums element $g^{-1}x$ runs over group G when g does the same; in the second sum $g^{-1}x$ runs over D when g does the same (Lemma 1, point 2). So expression (6) equals to $c_1 (q_2 - c_2 |H|)$, and coming back to (5), we get

$$F_1 * F_2(x) = S_1(x) + S_2(x) = c_2 (q_1 - c_1 |D|) + c_1 (q_2 - c_2 |H|) = c_2 q_1 + c_1 q_2 - |G| c_1 c_2.$$

For $c = c_2 q_1 + c_1 q_2 - |G| c_1 c_2$, equality (3) is identity, so point 1 of the theorem is proved.

2. Let $x \in H$. Then $S_1(x) = (F_1 * F_2)_H(x)$. If $g \in D$, then $g^{-1}x \in D$. So in $S_2(x)$ we have $F_1(g) = c_1$, $F_2(g^{-1}x) = c_2$ and we get (4).

Since $\sum_{g \in G} P(g) = 1$ for a probability $P(g)$ on a group G , than equalities (3) and (4) prove

Corollary 3. *Assume that conditions of Theorem 3 hold. If functions F_1, F_2 are probabilities P_1, P_2 on group G , then*

1. If $x \in D$, then $(P_1 * P_2)(x) = c$, where

$$1 - c|G| = (1 - c_1|G|)(1 - c_2|G|). \quad (7)$$

2. If $x \in H$, then

$$(P_1 * P_2)(x) = (P_1 * P_2)_H(x) + c_1c_2|D| \quad (8)$$

Indeed, $q_1 = q_2 = 1$ for probabilities P_1, P_2 .

Corollary 4. *The functions on group G constant on D form a semigroup on convolution; the same is true for probabilities on group G constant on D .*

We denote these semigroups T and T_P .

Theorem 4. *Let function F_2 be constant on D : $F_2(x) = c_2$ ($x \in D$). If F_1 is constant on H : $F_1(h) = c_1$ ($h \in H$), then $F_1 * F_2$ is constant on H : $(F_1 * F_2)(h) = c$, where*

$$q_1q_2 - c|G| = (q_1 - c_1|G|)(q_2 - c_2|G|) \quad (9)$$

Proof. For any $h \in H$ we have

$$\begin{aligned} F_1 * F_2(h) &= \sum_{g \in G} F_1(g)F_2(g^{-1}h) = \\ &= \sum_{g \in H} F_1(g)F_2(g^{-1}h) + \sum_{g \in D} F_1(g)F_2(g^{-1}h) \end{aligned} \quad (10)$$

In the first of two last sums $F_1(g) = c_1$, and for $h \in H$ fixed, $g^{-1}h$ runs over H when g runs over H , so the sum equals to

$$c_1 \sum_{g \in H} F_2(g^{-1}h) = c_1 F_2(H) = c_1 (F_2(G) - F_2(D)) = c_1q_2 - c_1c_2|D|.$$

In the second sum $F_2(g^{-1}h) = c_2$, since $g^{-1}h$ runs over D when g runs over D (Lemma 1), so the sum is

$$c_2 \sum_{g \in D} F_1(g) = c_2 F_1(D) = c_2 (F_1(G) - F_1(H)) = c_2q_1 - c_1c_2|H|$$

So right-hand part of (10) equals to

$$c_1q_2 - c_1c_2|D| + c_2q_1 - c_1c_2|H| = c_1q_2 + c_2q_1 - |G|c_1c_2$$

It is equivalent to (9) at $c = c_1q_2 + c_2q_1 - |G|c_1c_2$.

Theorem 5. *Previous theorem is true for $F_2 * F_1$.*

First we note that this theorem is not a direct corollary of the previous one, because:

1. in general $Q_1 * Q_2 \neq Q_2 * Q_1$ for functions Q_1 and Q_2 on a group,
2. F_1 and F_2 are constant on different subsets of group G .

Proof. Interchanging F_1 and F_2 in (10), we obtain

$$F_2 * F_1(h) = \sum_{g \in H} F_2(g) F_1(g^{-1}h) + \sum_{g \in D} F_2(g) F_1(g^{-1}h);$$

in the first sum $F_1(g^{-1}h) = c_1$ as $g^{-1}h$ runs over H when g does the same and $h \in H$ is fixed; so the sum equals to

$$c_1 \sum_{g \in H} F_2(g) = c_1 F_2(H) = c_1 (q_2 - F_2(D)) = c_1 q_2 - c_1 c_2 |D|, \quad (11)$$

In the second sum $F_2(g) = c_2$ and by the Lemma 1 $g^{-1}h$ runs over D when g does the same and $h \in H$ is fixed, so the sum equals to

$$c_2 \sum_{g \in D} F_1(g^{-1}h) = c_2 F_1(D) = c_2 (F_1(G) - F_1(H)) = c_2 q_1 - c_1 c_2 |H|. \quad (12)$$

Sum of (11) and (12) is $c_1 q_2 + c_2 q_1 - |G| c_1 c_2$.

Corollary 5. *Let a probability P_2 be constant on D : $P_2(x) = c_2$ ($x \in D$). If P_1 is constant on H : $P_1(h) = c_1$ ($h \in H$), then $P_1 * P_2$ is too: $(P_1 * P_2)(h) = c$, where*

$$1 - c|G| = (1 - c_1|G|)(1 - c_2|G|) \quad (13)$$

*The same is true for $P_2 * P_1$.*

Indeed, $q_1 = q_2 = 1$ in (9) for probabilities P_1, P_2 .

In Theorem 3 we proved that convolution $F_1 * F_2$ is constant on $D = G \setminus H$ if one of functions F_1, F_2 is constant on D , another on D or on H . But if both F_1, F_2 are constant on H , then $F_1 * F_2$ can be not constant on H . The corresponding example is given below.

We use group algebra instead of functions on group G . Namely, let RG be a group algebra of the group G over the field R of real numbers. Each function $F(g)$ on the group G corresponds to an element $f = \sum_{g \in G} F(g)g \in RG$. We denote a function (or a probability) on the group G with a capital letter and the corresponding element of RG with the same (but small) letter, and call the latter a probability on RG . Convolution of two functions P, Q on G corresponds to product pq of corresponding elements $p, q \in RG$. In particular, $P * P$ corresponds to $p^2 \in RG$.

Let $G = \langle a, b; a^2 = b^2 = 1, ab = ba \rangle$ be an elementary abelian 2-group of order 4. We define a function (even a probability) P on G as follows: $P(b) = 0$, $P(1) = P(a) = P(ab) = \frac{1}{3}$. Corresponding to P element of RG is $p = \frac{1}{3}(1 + a + ab)$. Then

$$p^2 = \frac{1}{9}(1 + a + ab)^2 = \frac{1}{9}(3 + 2(a + ab + b)) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}(a + ab + b)$$

Function P is constant on subgroup $H = \{1, a\}$, but function $P * P$ corresponding to element $p^2 \in RG$ takes different values $\frac{1}{3}$ and $\frac{2}{9}$ on H . So $P * P$ is not a constant on H .

REFERENCES

1. A. Bendikov, L. Saloff-Coste. Random walks on groups and discrete subordination, Math. Nachr., 285(5-6), 2012. -P. 580–605,
2. A. Bendikov, L. Saloff-Coste, Random walks on some countable groups, Groups, graphs and random walks, London Math. soc. Lecture Note Ser., 436, Cambridge Univ. Press, 2017. -P. 77–103.
3. L. Saloff-Coste, Random walks on finite groups, in: Probability on Discrete Structures, H. Kesten (ed.), Springer, 2004.
4. O. L. Vyshnevetskiy, Conditions of convergence of a random walk on a finite group, Colloquium Mathematicum. -167, -2022. -P. 109-113.

Article history: Received: 8 March 2025; Final form: 1 June 2025

Accepted: 5 June 2025.

How to cite this article:

O. L. Vyshnevetskiy. Convolution of probabilities constant in a subgroup and outside a subgroup, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 101, 2025, p. 40–47. DOI: 10.26565/2221-5646-2025-101-04

Згортка ймовірностей, сталих на підгрупі та поза підгрупою

Вишневецький О. Л.

кафедра вищої математики

Харківський національний автомобільно-дорожній університет

25 Ярослав Мудрого вул., Харків, 61002, Україна

Нехай P - ймовірність на скінченній групі G , тобто функція $P(g)$ приймає невід'ємні значення і $\sum_g P(g) = 1$ ($g \in G$). Для будь-яких двох функцій $F_1(g)$ і $F_2(g)$ на G їх згортка

$$(F_1 * F_2)(t) = \sum_{h \in G} F_1(h) F_2(h^{-1}t), t \in G$$

також є функцією на G .

За останні роки тематика дослідження випадкових блукань (і не тільки на групах) стала дуже популярною. З аналітичної точки зору, дослідження випадкових блукань є лише вивченням їх функції переходу, тобто n -кратної згортки ймовірнісних мір. Добре відомо, що за нескладних умов, накладених на носій ймовірності P на групі G , n -кратна згортка $P^{(n)} = P * \dots * P$ (n разів) при $n \rightarrow \infty$ збігається до рівномірної ймовірності $U(g) = \frac{1}{|G|}$ ($g \in G$), яка, очевидно, є сталою на G .

Ми вивчаємо згортку функцій, які можуть бути різними, але сталими на деякій підгрупі або поза нею. Коротко кажучи, ми вивчаємо випадки, коли згортка таких функцій має ті ж властивості сталості відносно деякої підгрупи.

У статті розглядається згортка ймовірностей (і, взагалі, дійсних функцій), сталих поза (або всередині) підгрупи H скінченної групи G . Нехай $D = G \setminus H$. Для даної функції F на G підгрупа H , для якої F є сталою на D , є єдиною в наступному сенсі: існує щонайбільше одна таке число c та одна найменша підгрупа H групи G такі, що $F(g) = c$ для усіх елементів $g \in D$.

Доведено, що якщо функції F_1, F_2 є сталими на D , $F_1(x) = c_1, F_2(x) = c_2$ для довільного $x \in D$, то їхня згортка $F_1 * F_2$ також є сталою (константою) на D . Знайдено вираз для цієї константи через числа c_1, c_2 . Функції на групі G , які є сталими на D , утворюють підгрупу відносно згортки.

Якщо одна з функцій F_1, F_2 є сталою на підгрупі H , а інша є сталою на D , то доведено, що згортка $F_1 * F_2$ є сталою на H . Знайдено значення цієї сталої.

У наведених твердженнях про згортку принаймні один її множник був сталим поза підгрупою. Але якщо обидва множники є сталими на деякій підгрупі, то їхня згортка не обов'язково має ту ж властивість. Наведений приклад двох функцій, які є сталими на підгрупі H , але їхня згортка не є сталою на H .

Цей приклад викладений не мовою ймовірностей (чи функцій) на групі (як в усіх інших частинах статті), а мовою групових алгебр. Групова алгебра KG групи G над полем K з'являється у питаннях, пов'язаних зі згортками функцій на групі G , наступним чином: кожна функція $F(g)$ на G із значеннями у довільному полі K визначає елемент $\sum_g F(g)g$ ($g \in G$) алгебри KG ; згортці ймовірностей відповідає добуток елементів алгебри KG . Отже використання групової алгебри є природним при вивченні згортки на групі. Якщо функція $F(g)$ є ймовірністю, то K є полем дійсних чисел.

Ключові слова: ймовірність; скінченна група; згортка; групова алгебра.

Історія статті: отримана: 8 березня 2025; останній варіант: 1 червня 2025
прийнята: 5 червня 2025.

Правила для авторів
«Вісника Харківського національного університету
імені В. Н. Каразіна»,
Серія «Математика, прикладна математика і механіка»

Редакція просить авторів при направленні статей керуватися наступними правилами.

1. В журналі публікуються статті, що мають результати математичних досліджень (англійською або українською мовами).

2. Поданням статті вважається отримання редакцією файлів статті оформлених у редакторі LaTeX, анотацій, відомостей про авторів та архіва, що включає LaTeX файли статті та файли малюнків. Файл-зразок оформлення статті можна знайти на офіційній веб-сторінці журналу (http://periodicals.karazin.ua/mech_math). Авторам необхідно зареєструватися та **завантажити подання** на цій сторінці. Будьте уважними, заповнюючи форму подання двома мовами (українською та англійською).

3. Стаття повинна починатися з розширеної анотації (обсягом **не менш ніж 1800 знаків**), в якій повинні бути чітко сформульовані мета та результати роботи. Анотація повинна бути тією мовою (англійською або українською), якою є основний текст статті. Закордонні автори можуть звернутися до редакції за допомогою з перекладом анотацій на українську мову. Повинні бути наведені прізвища, ініціали авторів, назва роботи, ключові слова та номер за міжнародною математичною класифікацією (Mathematics Subject Classification 2020). Анотація не повинна мати посилань на літературу чи малюнки. На першій сторінці вказується номер УДК класифікації. В кінці статті треба додати переклад анотації (обсягом **не менш ніж 1800 знаків**) на другу мову (англійську чи українську).

4. Список літератури повинен бути оформлений латинським шрифтом. Приклади оформлення списку літератури:

1. A.M. Lyapunov. A new case of integrability of differential equations of motion of a solid body in liquid, Rep. Kharkov Math. Soc., – 1893. – 2. V.4. – P. 81-85.
2. A.M. Lyapunov. The general problem of the stability of motion. Kharkov Mathematical Society, Kharkov. - 1892. - 251 p.

5. Кожний малюнок повинен бути пронумерований та представлений окремим файлом в одному з форматів: EPS, BMP, JPG. В файлі статті малюнок повинен бути вставлений автором. Під малюнком повинен бути підпис. Назви файлів малюнків повинні починатись з прізвища першого автора.

6. Відомості про авторів повинні містити: прізвища, імена, по батькові, службові адреси та номери телефонів, науковий ступінь, посаду, адреси електронних скриньок та інформацію про наукові профайли авторів (orcid.org, www.researcherid.com, www.scopus.com) з відповідними посиланнями. Прохання також повідомити прізвище автора, з яким треба вести листування.

7. Рекомендуємо використовувати в якості зразка оформлення останні випуски журналу (http://periodicals.karazin.ua/mech_math).

8. У випадку порушення правил оформлення редакція не буде розглядати статтю.

Електронна скринька: vestnik-khnu@ukr.net

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна,
Серія “Математика, прикладна математика і механіка”, Том 101, 2025 р.

Збірник наукових праць

Англійською та українською мовами

Підписано до друку 30.06.2025 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк цифровий.

Ум. друк. арк. 3,31

Обл.– вид. арк. 4,14

Наклад 100 пр. Зам. № 18/25

Безкоштовно.

Видавець і виготовлювач Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

Видавництво Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна