ISSN 2221-5646 (Print),
ISSN 2523-4641 (Online)

KARAZIN UNIVERSITY
CLASSICS AHEAD OF TIME

VISNYK OF V.N.KARAZIN KHARKIV NATIONAL UNIVERSITY

Ser. MATHEMATICS, APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Том 99 ' 2024

Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна серія

МАТЕМАТИКА, ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА І МЕХАНІКА

Volume 99, 2024

ISSN 2221–5646 (Print)
ISSN 2523–4641 (Online)
Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна

Серія
«Математика, прикладна математика і механіка»

Серія започаткована 1965 р.

Том 99

Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”
Vol. 99

Харків
2024

До Віснику включено статті з математичного аналізу, математичної фізики, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних наук, категорія «Б» за спеціальностями 111 - Математика та 113 - Прикладна математика (Наказ МОН України №1643 від 28.12.2019 р.).

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол №11 від 21 червня 2024 р.).

Головний редактор–Коробов В.І.–д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ ім. В.Н. Каразіна, Україна

Члени редакційної колегії:

Кадець В.М.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна
Фаворов С.Ю.–д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна
Єгорова І.Є.–д-р ф.-м. наук, проф., ФТІНТ НАН України
Пастур Л.А.—д-р ф.-м. наук, проф., акад. НАН України, ФТІНТ НАН України
Хруслов Є.Я.–д-р ф.-м. наук, проф., акад. НАН України, ФТІНТ НАН України
Шепельский Д.Г.—д-р ф.-м. наук, проф., ФТІНТ НАН України та ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна
Когут П.І.—д-р ф.-м. наук, проф., Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, м.Дніпро, Україна
Чуйко С.М.—д-р ф.-м. наук, проф., Інститут прикладної математики і механіки НАН України, м.Слов'янськ, Україна
Домбровський А.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Щецина, Польща
Карлович Ю.І.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Морелос, Мехіко, Мексика
Корбич Йозеф—д-р ф.-м. наук, проф., чл.-кор. ПАН, Університет Зіелона Гора, Польща
Нгуєн Хоа Шон—д-р ф.-м. наук, проф., Академія наук та технології В'єтнама, Інститут математики, Ханой, В'єтнам
Поляков А.І.—д-р ф.-м. наук, проф., ІНРІА Національний дослідницький інститут інформатики та автоматики, Ле-Шене, Франція
Скляр Г.М.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Щецина, Польща

Відповідальний секретар – Резуненко О.В., д-р ф.-м. наук ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Editor-in-Chief – V.I. Korobov–Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Associate Editors:

S.Yu. Favorov–Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine
V.M. Kadets–Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine
I.E. Egorova–Dr. Sci., Prof., B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine
E.Ya. Khruslov–Dr. Sci., Prof., academician of NASU, B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine
L.A. Pastur–Dr. Sci., Prof., academician of NASU, B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine
D.G. Shepelsky–Dr. Sci., Prof., B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine
S.M. Chujko–Dr. Sci., Prof., Donbas State Pedagogical University, Ukraine
P.I. Kogut–Dr. Sci., Prof., Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine
Andrzej Dabrowski–Dr. Sci., Prof., University of Szczecin, Poland
Yu. Karlovich–Dr. Sci., Prof., Morelos University, Mexico
Jozef Korbicz–Dr. Sci., Prof., corresponding member of PAS, University of Zielona Gora, Poland
Nguyen Khoa Son–Dr. Sci., Prof., Vietnamese Academy of Science and Technology, Institute of Mathematics, Hanoi, Vietnam
A.E. Polyakov–Dr. Sci., Prof., INRIA Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Le Chesnay, France
G.M. Sklyar–Dr. Sci., Prof., University of Szczecin, Poland

Responsible Editor–A.V. Rezounenko, Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

---

Адреса редакційної колегії: 61022, Харків, майдан Свободи, 4, ХНУ імені В.Н. Каразіна, ф-т математики і інформатики, к. 7-27, т. 7075240, 7075135, **e-mail:** vestnik-khnu@ukr.net
Інтернет: http://vestnik-math.univer.kharkov.ua; http://periodicals.karazin.ua/mech _math

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Ідентифікатор медіа у Реєстрі суб'єктів у сфері медіа: R30-04455 (Рішення № 1538 від 09.05.2024 р. Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення. Протокол № 15).

©Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, оформлення, 2024

ЗМІСТ

CONTENTS

ISSN 2221-5646(Print) 2523-4641(Online)
Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics"
2024, Vol. 99, p. 4–21
DOI: 10.26565/2221-5646-2024-99-01
УДК 517.957

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
2024, Том 99, с. 4–21

К. В. Стєпанова
кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри прикладної математики
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
e.v.stiepanova@karazin.ua *http://orcid.org/0000-0003-2294-155X*

Д. Р. Шевчук
магістр кафедри прикладної математики
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
d.shevtchuk@gmail.com *http://orcid.org/0000-0002-2553-9657*

Поведінка узагальненого розв'язку початково-крайової задачі для нелінійного параболічного рівняння

В рамках даної роботи нами вивчається поведінка узагальненого розв'язку (або так званого енергетичного розв'язку) цікавої початково-крайової задачі (а саме розглядається задача Коші-Діріхле) для параболічного рівняння, що є нелінійним. Дослідження проводиться в циліндричній області. На параметри рівняння накладається структурна умова, яка відповідає процесу повільної дифузії. Отже, в статті маємо справу з розподілом концентрації речовини в просторі та часі з урахуванням початкових та крайових умов. Цей процес має прикладний аспект та знаходить своє застосування в фізиці та інженерії, наприклад, для вивчення дифузії речовини в середовищах зі змінною концентрацією чи хімічним впливом. Розв'язання таких задач дозволяє отримати важливі дані щодо еволюції системи та прогнозувати її поведінку в різних умовах. У роботі в результаті проведеного нами дослідження було встановлено декілька інтегральних співвідношень, різних оцінок та нерівностей, які приводять до необхідності аналізу поведінки диференціальної системи нерівностей, яка, в свою чергу, дає змогу встановити наявність властивості локалізації розв'язку. Так, спираючись на добре відомі результати щодо поведінки розв'язку отриманої диференціальної системи, вдається знайти умову, що гарантує локалізацію носія розв'язку для досліджуваної задачі Коші-Діріхле. Основним результатом роботи є теорема, яка доведена при довільній фінітній початковій функції та при умові виконання певного обмеження на граничний режим. Стаття має досить стандартну структуру та, окрім анотацій та літератури, містить наступні структурні елементи: вступ; постановка задачі; основні означення; формулювання основного результату; допоміжні нерівності для доведення основного результату; допоміжні твердження для доведення теореми; доведення основного результату; висновок.

Ключові слова: **поведінка узагальненого розв'язку; початково-крайова задача; граничний режим.**

© Стєпанова К. В., Шевчук Д. Р., 2024; CC BY 4.0 license

2020 Mathematics Subject Classification: 35A23; 35D30.

1. Вступ

Задача, яка буде досліджена в рамках цієї роботи, моделює розподіл концентрації речовини в просторі та часі з урахуванням початкових та крайових умов. Цей процес має практичний аспект та знаходить своє застосування в фізиці та інженерії, наприклад, для вивчення дифузії речовини в середовищах зі змінною концентрацією чи хімічним впливом. Розв'язання таких задач дозволяє отримати важливі дані щодо еволюції системи та прогнозувати її поведінку в різних умовах. Тут вивчається поведінка узагальненого розв'язку початково-крайової задачі для параболічного рівняння, в результаті якого знайдено умову на граничний режим для наявності властивості локалізації розв'язку при довільній фінітній початковій функції.

В якості простого представника досліджуваної задачі розглянемо наступне рівняння:

$$u_t - \Delta_p u = 0,$$

де

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{t} > 0$$

$$p \text{ -- додатнє дійсне число;}$$

$$n \text{ -- розмірність простору,} \quad n \geq 1.$$

Розглянемо окремо більш детально еліптичний оператор, що фігурує в рівнянні:

$$\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) = |\nabla u|^{p-4} |\nabla u|^2 \Delta u + (p-2) \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

В критичних точках ($\nabla u = 0$) оператор є виродженим для $p > 2$ і сингулярним, коли $p < 2$.

Розглянемо декілька випадків:

- при $p = 1$ $\quad \Delta_1 u = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla_u}{|\nabla_u|}\right) = -H$, де H – це оператор середньої кривизни;

- при $p = 2$ маємо звичайний оператор Лапласа:

$$\Delta_2 u = \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

- при $p = n$, де n – це число незалежних змінних, інтеграл має наступний вигляд:

$$\int_\Omega |\nabla u|^n dx = \int \ldots \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 \right\}^{\frac{n}{2}} dx_1 \ldots dx_n.$$

- при $p = \infty$:

$$\Delta_p u \equiv |\nabla u|^{p-4}\left(|\nabla u|^2 \Delta u + (p-2)\Delta_\infty u\right) = 0$$

є граничним рівнянням при $p \to \infty$. Розділивши його на $|\nabla u|^{p-4}$ і $(p-2)$, отримаємо

$$\frac{|\nabla u|^2 \Delta u}{p-2} + \Delta_\infty u = 0.$$

Нехай $p \to \infty$, тоді маємо

$$\Delta_\infty u = 0.$$

Розв'язки цього рівняння називаються ∞-гармонічними функціями, а рівняння ∞-Лапласа записується у вигляді

$$\Delta_\infty \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

де $u = u\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ для n змінних.

Як відомо, Δ_p – це оператор p-Лапласа, який використовується в прикладних задачах фізики та широко представлений в різних галузях, наприклад, в реології, у гляціології або кригознавстві. Деякі нещодавні дослідження вказують на те, що навіть у броунівського руху є аналог і математична гра «Перетягування каната» призводить до випадку $p = \infty$.

2. Постановка задачі

В області $Q = (0,T) \times \Omega, \Omega = \Omega_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < |x| < R\}, n \geq 1$, $0 < T < \infty,\ R < \infty$, розглядається наступна задача Коші-Діріхле:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(|u|^{q-1}u\right) - \psi(t)\Delta_p u = 0, \quad \psi(t) > 0, \quad p > q \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma(1)} = \tilde{f}(t,x);\ u|_{\Gamma(R)} = 0; \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0 \in L_{q+1}(\Omega); \tag{3}$$

$$\text{supp } u_0 \in \{x \in R^n : |x| < d\}, 1 < d < R. \tag{4}$$

Тут

$$\Gamma(\text{s}) \equiv (0,\ \text{T}) \times \partial B(s),$$

$$B(s) = \{x \in R^n : |x| < s\}.$$

Виконується основна структурна умова:

$$0 < q < p, \tag{5}$$

тобто рівняння (1) є рівнянням типу «повільної дифузії». Гранична функція $\tilde{f}$ є слідом на $\Gamma(1)$ деякої функції $f(t,x)$ такої, що

$$f \in L_{\infty}\left((0,T_0)\times\Omega\right) \cap L_{p+1}\left(0,T_0; W^1_{p+1}(\Omega)\right) \quad \forall T_0 < T, \tag{6}$$

$$\operatorname{supp} f \in [0,T] \times \mathrm{B}\left(R_0\right), R_0 < R, \tag{7}$$

$$f'_t \in L_1\left(0,T_0; L_{q+1}(\Omega)\right) \cap L_{\frac{p+1}{p-q+1}}\left(0,T_0; L_{\frac{p+1}{p-q+1}}(\Omega)\right) \quad \forall T_0 < T. \tag{8}$$

Характер загострення граничного режиму описується функцією

$$\begin{aligned} F(t) \equiv & \int_{\Omega} |f(t,x)|^{q+1} dx + \\ & + \int_0^t \psi(\tau) \int_{\Omega} \left|D_x f(\tau,x)\right|^{p+1} dx d\tau + \\ & \int_0^t \psi(\tau)^{\frac{-q}{p-q+1}} \int_{\Omega} \left|f'_{\tau}(\tau,x)\right|^{\frac{p+1}{p-q+1}} dx d\tau + \\ & + \left(\int_0^t \left(\int_{\Omega} \left|f'_{\tau}(\tau,x)\right|^{q+1} dx\right)^{\frac{1}{q+1}} d\tau\right)^{q+1} \forall t < T. \end{aligned} \tag{9}$$

Задача (1) – (5) моделює розподіл концентрації речовини в просторі та часі з урахуванням початкових та крайових умов. Модельність області Ω в задачі (1) – (5) продиктована лише бажанням уникнути додаткових громіздких (хоча при цьому й очевидних) побудов та обчислень. Всі результати залишаються справедливими для областей вигляду $B(R) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, $R < \infty$. Тут Ω – довільна однозв'язна область з C^1 – гладкою границею $\partial\Omega : \overline{\Omega} \subset B(R)$.

У викладках статті також будуть використовуватися наступні області:

$$\Gamma_a^b(\mathrm{s}) \equiv (a,b) \times \partial B(s),$$
$$Q_a^b = (a,b) \times \Omega(s),$$
$$\Omega(s) = \Omega_R \setminus B(s), \quad \forall s > 1,$$
$$B(s) = \left\{x \in R^n : |x| < s\right\}.$$

3. Основні означення

У даному розділі розглянемо ключові та важливі означення, які будуть активно застосовуватися у подальшому.

Означення 1. *Функція $u(t,x)$ є узагальненим (енергетичним) розв'язком задачі (1) – (5), якщо для будь-якого $T_0 < T$ виконується наступна інтегральна тотожність:*

$$\int_0^{T_0} \langle (|u|^{q-1}u)'_t, \eta \rangle dt - \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \psi(t) \Delta_p u \eta_{x_i} dx dt = 0, \tag{10}$$

де $\eta(t,x)$ – довільна функція із $L_{p+1}(0,T_0; W^1_{p+1}(\Omega, \partial\Omega))$,
та виконані наступні умови, що гарантують збіжність інтегралів:

1. *$u - f \in L_{p+1}(0, T_0; W^1_{p+1}(\Omega, \partial\Omega)) \cap L_\infty(0); T_0; L_{q+1}(\Omega))$;*

2. *$(|u|^{q-1})'_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T_0; (W^1_{p+1}(\Omega, \partial\Omega))^*)$*
   та виконується початкова умова (3) в інтегральному сенсі

$$\int_0^{T_0} \langle (|u|^{q-1}u)'_t, \zeta \rangle dt + \int_0^{T_0} \int_\Omega (|u|^{q-1}u - |u_0|^{q-1}u_0)\zeta'_t dx dt = 0$$

   для довільної пробної функції $\zeta(t,x) \in L_{p+1}(0, T_0; W^1_{p+1}(\Omega, \partial\Omega)) \cap \cap W^1_1(0, T_0; L_\infty(\Omega))$, яка обертається в нуль (тобто є зникаючою) в околі $t = T_0$;

3. *початкова та гранична функції $f(t,x)$ задовільняють умові узгодження:*

$$f(0,x) - u_0(x) \in W^1_{p+1}(\Omega, \partial\Omega);$$

Через $W^1_r(\Omega, S)$, як це загальноприйнято, ми позначаємо в статті замикання за нормою $W^1_r(\Omega)$ множини функцій із класу $C^\infty(\Omega)$, які обертаються в нуль в околі $S \subset \partial\Omega, W^1_r(\Omega) \equiv W^1_r(\Omega, \varnothing)$.

В [1] було встановлено та доведено факт існування енергетичного (узагальненого) розв'язку для задачі Коші-Дірихле з більш загальним еліптичним оператором, що для досліджуваного тут рівняння (1) забезпечується першою та другою умовами Означення 1. Згідно з результатами роботи [2] остання (третя) умова в означенні узагальненого (енергетичного) розв'язку гарантує єдиність розв'язку для задачі (1) – (5) в сенсі Означення 1.

Означення 2. *Носієм розв'язку $u(t,x)$ є замикання множини $\operatorname{supp} u(t,\cdot)$, тобто*

$$\operatorname{supp} u(t,\cdot) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : u(t,x) \neq 0\}}.$$

Доречним буде зазначити тут, що для рівняння з градієнтною нелінійністю, яке було розглянуто у вступі:

$$u_t - \Delta_p u = 0,$$

було знайдено автомодельний розв'язок, що відповідає граничній функції

$$f(t) = k(T-t)^{-n}, \quad n \text{ – розмірність простору.}$$

З аналізу структури знайденого розв'язку випливає, що граничний режим не руйнує властивість локалізації, що відповідає значенню $n = (p-1)^{-1},\ p > 1$.

Слід зазначити, що ці та подібні результати були отримані шляхом бар'єрної техніки та пов'язані зі знаходженням рівзноманітних автомодельних розв'язків. А такий підхід у принципі не може бути застосований до рівнянь, які не допускають відповідних теорем порівняння. Тому важливим є пошук альтернативних методів дослідження та їх успішне застосування до вивчення поведінки узагальненого розв'язку початково-крайової задачі для рівняння (1), для якого неможливо побудувати автомодельний розв'язок, що і було зроблено в рамках представленого дослідження.

Означення 3. *Задача (1) – (5) має властивість локалізації, якщо її енергетичний розв'язок $u(t,x)$ має наступну властивість:*

$$\zeta(t) \equiv \inf\{r : \operatorname{supp} u(t,\cdot) \subset B(r)\} < R \quad \forall t < T. \tag{11}$$

4. Основний результат

Основний результат цієї роботи сформульовано в наступній теоремі.

Теорема 1. *Нехай граничний режим досліджуваної задачі Коші-Діріхле для нелінійного параболічного рівняння (1) – (5) задовільняє нерівності:*

$$F(t) \leqslant c\left(\int_t^T \psi(\tau)d\tau\right)^{-\frac{q+1}{p-q}} \quad \forall t < T. \tag{12}$$

Тоді існують такі константи $c_i < \infty$, які «пам'ятають та акумулюють» константи з відомих нерівностей (нерівності Пуанкаре, інтерполяційної нерівності і т.п.), що були застосовані в результаті оцінювання та аналізу інтегралів, та константи $d < \infty$, які не залежать від зовнішнього радіусу R області Ω і такі, що початково-гранична задача (1) – (5) має властивість локалізації.

5. Допоміжні нерівності для доведення основного результату

Для доведення основного результату протягом роботи будуть застосовуватися добре відомі нижченаведені нерівності.

Інтерполяційна нерівність (див. [3]):

$$\|v\|L_{p+1(\partial\Omega(s))} < C_1 \|D_x v\|^{\theta}_{L_{p+1(\Omega(s))}} \|v\|^{1-\theta}_{L_{q+1(\Omega(s))}}, \tag{13}$$

де

$$v \in W^1_{p+1}(\Omega(s), \partial B(R)),$$
$$\Omega(s) = \Omega_R \setminus B(s), \quad \forall s > 1,$$
$$\Omega_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < |x| < R\},$$
$$B(s) = \{x \in R^n : |x| < s\} \quad \forall s > 1,$$
$$0 < \theta := \frac{(q+1) + n(p-q)}{(p+1)(q+1) + n(p-q)} < 1.$$

Нерівність Юнга з ε див., наприклад [4]:

$$ab \leq \varepsilon a^p + c(\varepsilon)b^q, \tag{14}$$

де

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad \varepsilon > 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

Нерівність Пуанкаре [5]:

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{15}$$

де

$$1 \leq p < n;$$

Нерівність Фрідріхса [6]:

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \leq d^k \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p}, \tag{16}$$

де

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n; \qquad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Нерівність Соболєва (p > 1) та Гальярдо (p = 1) [7]:

$$\|u\|^2_{L_r(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|^2_{L_p(\Omega)}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

для

$$1 \leq p < n.$$

6. Допоміжні твердження для доведення теореми

Лема 1. *Нехай $u(t,x)$ – узагальнений розв'язок початково-граничної задачі (1) – (5), тоді справедливою є оцінка*

$$\int_\Omega |u(b,x)|^{q+1} dx + \int_a^b \int_\Omega \psi(t) \, |D_x u|^{p+1} \, dxdt \leq$$
$$\leq c_1 \int_\Omega |u(a,x)|^{q+1} \, dx + c_2 \left(1 + \zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right) F_1(a,b),$$

де

$$F_1(a,b) = \int_\Omega |f(b,x)|^{q+1} \, dx + \int_a^b \psi(t) \int_\Omega |D_x f|^{p+1} \, dxdt +$$
$$+ \left(\int_a^b \|f'_t(t,x)\|_{L_{q+1}(\Omega)} dt \right)^{q+1} + \int_a^b \psi(t)^{-\frac{q}{p-q+1}} \int_\Omega \|f'_t(t,x)\|^{\frac{p+1}{p-q+1}}_{L_{\frac{p+1}{p-q+1}}(\Omega)} dt,$$
$$F_1(0,b) = F(b).$$

Доведення.

Для $0 \le a < b < T$ згідно з формулою інтегрування частинами [1], маємо рівність:

$$\int_a^b \int_\Omega \langle \left(|u|^{q-1}u\right)_t, (u-f)\rangle dxdt =$$
$$= \frac{q}{q+1} \int_\Omega \left(|u(b,x)|^{q+1} - |u(a,x)|^{q+1}\right) dx +$$
$$+ \int_a^b \int_\Omega \left(|u(t,x)|^{q-1}u(t,x) - |u(a,x)|^{q-1}u(a,x)\right) f'_t(t,x) dxdt -$$
$$- \int_\Omega \left(|u(b,x)|^{q-1}u(b,x) - |u(a,x)|^{q-1}u(a,x)\right) f(b,x) dx. \tag{17}$$

Підставимо пробну функцію $\eta = (u(t,x) - f(t,x))$ в другий доданок інтегральної тотожністі (10):

$$- \int_Q \psi(t) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(u-f)\right) dxdt =$$
$$= \int_Q \psi(t) \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}(u-f) dxdt =$$
$$= \int_Q \psi(t) \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p+1} dxdt - \int_Q \psi(t) \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} dxdt,$$

де область $Q = (0,T) \times \Omega$.

Даний перехід дає можливість розглядати внесок часткових похідних розв'язку $u(t,x)$ та його відхилення від граничної умови у рамках інтегральних виразів, спрощуючи аналіз властивостей розв'язку.

Отже, підставляємо пробну функцію в інтегральну тотожність (10) з урахуванням рівності (17) та останньої викладки, отримуємо:

$$\frac{q}{q+1} \int_\Omega |u\,(b,x)|^{q+1} dx + \int_Q \psi(t) \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p+1} dxdt \le$$
$$\le \frac{q}{q+1} \int_\Omega |u\,(a,x)|^{q+1} dx -$$
$$- \int_a^b \int_\Omega \left(|u\,(t,x)|^{q-1}\, u\,(t,x) - |u\,(a,x)|^{q-1}\, u\,(a,x)\right) f'_t(t,x) dxdt +$$
$$+ \int_\Omega \left(|u(b,x)|^{q-1}u(b,x) - |u(a,x)|^{q-1}u(a,x)\right) f(b,x) dxdt +$$
$$+ \int_Q \psi(t) \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} dxdt. \tag{18}$$

Тепер оцінимо зверху стандартним чином за допомогою нерівностей (13) – (16) доданки, що знаходяться в правій частині нерівності (18). Таким чином,

$$I_1 = \int_a^b \int_\Omega |u(a,x)|^q \left|f_t'(t,x)\right| dxdt \le \varepsilon_1 \|u(a,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}(\Omega)} +$$

$$+ c_1(\varepsilon_1) \left(\int_a^b \left(\int_\Omega \left|f_t'(t,x)\right|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} dt \right)^{q+1};$$

$$I_2 = \int_a^b \int_\Omega |u(t,x)|^q \left|f_t'(t,x)\right| dxdt \le \int_a^b \left(\int_\Omega |u(t,x)|^{p+1} dx \right)^{\frac{q}{p+1}} \times$$

$$\times \left(\int_\Omega \left|f_t'(t,x)\right|^{\frac{p+1}{p-q+1}} dx \right)^{\frac{p-q+1}{p+1}} dt \le \int_a^b \psi(t)^{\frac{q}{p+1}} \zeta(t)^q \left(\int_\Omega |D_x u|^{p+1} dx \right)^{\frac{q}{p+1}} \times$$

$$\times \psi(t)^{-\frac{q}{p+1}} \left(\int_\Omega \left|f_t'(t,x)\right|^{\frac{p+1}{p-q+1}} dx \right)^{\frac{p-q+1}{p+1}} dt \le \varepsilon_2 \int_a^b \psi(t) \int_\Omega |D_x u|^{p+1} dxdt +$$

$$+ c(\varepsilon_2) \zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \int_a^b \psi(t)^{-\frac{q}{p-q+1}} \int_\Omega \left|f_t'(t,x)\right|^{\frac{p+1}{p-q+1}} dxdt,$$

де $\zeta_1(s) = \sup_{0\le t<s} \zeta(t)$, $\zeta(t)$ з Означення 3;

$$I_3 = \int_\Omega \left(|u(b,x)|^q + |u(a,x)|^q\right) |f(b,x)| dx \le$$

$$\le \varepsilon_1 \left[\|u(b,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}(\Omega)} + \|u(a,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}(\Omega)} \right] + c_2(\varepsilon_1) \|f(b,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}(\Omega)};$$

$$I_4 = \int_a^b \int_\Omega \psi(t) \, |D_x u|^p \, |D_x f| \, dxdt \le$$

$$\le c \left(\int_Q \psi(t) \left(|D_x u|^{p+1} dxdt \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_Q \psi(t) |D_x f|^{p+1} dxdt \right)^{\frac{1}{p+1}} \right. \le$$

$$\le \varepsilon_3 \left(\int_Q \psi(t) |D_x u|^{p+1} dxdt \right) + c_3(\varepsilon_3) \left(\int_Q \psi(t) |D_x f|^{p+1} dxdt \right).$$

З урахуванням (18), об'єднуючи всі отримані для інтегралів $I1 - I4$ оцінки, приходимо до глобальної апріорної оцінки:

$$\left(\frac{q}{q+1} - \varepsilon_1 \right) \|u(b,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}} + (1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \int_Q \psi(t) \, |D_x u|^{p+1} dxdt \le$$

$$\le \left(\frac{q}{q+1} + 2\varepsilon_1 \right) \|u(a,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}} + c(\varepsilon_2) \zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \int_a^b \psi(t)^{-\frac{q}{p-q+1}} \times$$

$$\times \int_\Omega |f_t'(t,x)|^{\frac{p+1}{p-q+1}} dxdt + c_1(\varepsilon_1) \left(\int_a^b \left(\int_\Omega \left|f_t'(t,x)\right|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} dt \right)^{q+1} +$$

$$+ c_2(\varepsilon_1) \|f(b,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}(\Omega)} + c_3(\varepsilon_3) \left(\int_Q \psi(t) |D_x f|^{p+1} dxdt \right).$$

Зафіксуємо в останій нерівності ε_1 та ε_2 таким чином, що

$$\frac{q}{q+1} - \varepsilon_1 \ge \frac{q}{2(q+1)}; \quad (1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \ge \frac{1}{2},$$

тоді отримаємо:

$$\int_{\Omega} |u(b,x)|^{q+1} dx + \int_a^b \int_{\Omega} \psi(t) \, |D_x u|^{p+1} \, dxdt \leq$$
$$\leq c_1 \int_{\Omega} |u(a,x)|^{q+1} \, dx + c_2 \left(1 + \zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right) F_1(a,b), \text{ де}$$
$$F_1(a,b) = \int_{\Omega} |f(b,x)|^{q+1} \, dx + \int_a^b \psi(t) \int_{\Omega} |D_x f|^{p+1} \, dxdt +$$
$$+ \left(\int_a^b \|f'_t(t,x)\|_{L_{q+1}(\Omega)} dt\right)^{q+1} + \int_a^b \psi(t)^{-\frac{q}{p-q+1}} \int_{\Omega} \|f'_t(t,x)\|^{\frac{p+1}{p-q+1}}_{L_{\frac{p+1}{p-q+1}}(\Omega)} dt,$$
$$F_1(0,b) = F(b).$$

Лема 2. *Нехай $u(t,x)$ – узагальнений розв'язок початково-граничної задачі (1) – (5), тоді справедливою є нерівність*

$$\frac{q}{q+1} \int_{\Omega(s)} |u(b,x)|^{q+1} dx + \int_{Q_a^b(s)} \psi(t) \, |D_x u|^{p+1} \, dxdt \leq$$
$$\leq \frac{q}{q+1} \int_{\Omega(s)} |u(a,x)|^{q+1} \, dx + c \left(\int_{\Gamma_a^b(s)} \psi(t) \, |D_x u|^{p+1} \, d\gamma dt\right)^{\frac{p}{p+1}} \times$$
$$\times \left(\int_{Q_a^b(s)} \psi(t) |D_x u|^{p+1} dxdt\right)^{\frac{\theta}{p+1}} \left(\int_a^b \psi(t) \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx\right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt\right)^{\frac{1-\theta}{p+1}}.$$

Доведення.
Зафіксуємо $s > 1$ та $\delta > 0$;

$$\eta_{s,\delta}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < s; \\ \frac{\tau - s}{\delta}, & s \leq \tau \leq s + \delta; \\ 1, & \tau > s + \delta. \end{cases}$$

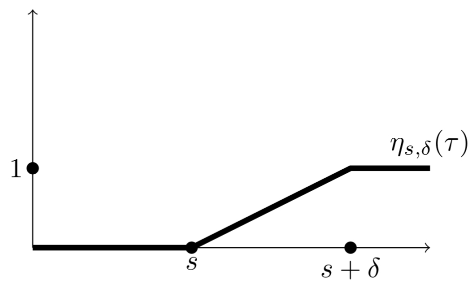


Рис.1. Профіль функції $\eta_{s,\delta}(\tau)$.
Pic.1. Function profile $\eta_{s,\delta}(\tau)$.

В якості пробної функції в інтегральній тотожності покладаємо: $\eta(t,x) = u(t,x)\eta_{s,\delta}(|x|)$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{q}{q+1}\int_{\Omega(s)} |u(b,x)|^{q+1}\eta_{s,\delta}(|x|)dx + \int_{Q_a^b(s)} \psi(t)|D_x u|^{p+1}\eta_{s,\delta}(|x|)dxdt = \\
&= \frac{q}{q+1}\int_{\Omega(s)} |u(a,x)|^{q+1}\eta_{s,\delta}(|x|)dx - \\
&- \int_{Q_a^b(s)\setminus Q_a^b(s+\delta)} \psi(t)\sum_{i=1}^{n}\left(|D_x u|^{p+1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)u(\eta_{s,\delta}(|x|)_{x_i}dxdt.
\end{aligned}
$$

Переходячи до границі при $\delta \to 0$ як це було зроблено в [3] маємо:

$$
\begin{aligned}
&\frac{q}{q+1}\int_{\Omega(s)} |u(b,x)|^{q+1}dx + \int_{Q_a^b(s)} \psi(t)\,|D_x u|^{p+1}\,dxdt = \\
&\frac{q}{q+1}\int_{\Omega(s)} |u(a,x)|^{q+1}\,dx + \int_{\Gamma_a^b(s)} \psi(t)\sum_{i=1}^{n}|D_x u|^{p+1}\,u\nu_i d\gamma dt \le \\
&\le \frac{q}{q+1}\int_{\Omega(s)} |u(a,x)|^{q+1}\,dx + c\left(\int_{\Gamma_a^b(s)} \psi(t)\,|D_x u|^{p+1}\,d\gamma dt\right)^{\frac{p}{p+1}} \times \\
&\times \left(\int_{\Gamma_a^b(s)} \psi(t)|u|^{p+1}d\gamma dt\right)^{\frac{1}{p+1}}.
\end{aligned}
$$

Покладемо тепер:

$$
[a,b] = [t_{j-1},t_j]\,, \quad [0,T) = \bigcup_{j=1}^{\infty}[t_{j-1},t_j]\,, \quad t_0 = 0.
$$

та зробимо оцінку доданку в правій частині попередньої нерівності за допомогою інтерполяційного співвідношення (13):

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi(t)\int_{\partial\Omega(s)}|u|^{p+1}d\gamma dt \le \\
&\le c\int_{t_{j-1}}^{t_j}\int_{\Omega(s)}\psi^{\theta}(t)\|u\|^{p+1}_{L_{(p+1)\theta}(\Omega(s))}\psi(t)^{1-\theta}\|u\|^{(p+1)(1-\theta)}_{L_{p+1}(\Omega(s))}d\gamma dt \le \\
&\le c\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi(t)\|D_x u\|^{p+1}_{L_{p+1}(\Omega(s))}dt\right)^{\theta}\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi(t)\|u\|^{p+1}_{L_{q+1}(\Omega(s))}dt\right)^{1-\theta},
\end{aligned}
$$

тоді нерівність набуває вигляду

$$\int_{\Omega(s)} |u(t_j,x)|^{q+1}dx \leq \int_{\Omega(s)} |u(t_{j-1},x)|^{q+1}dx +$$

$$+ c\left(\int_{\Gamma_{t_{j-1}}^{t_j}(s)} \psi(t)|D_x u|^{p+1} d\gamma dt\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{Q_{t_{j-1}}^{t_j}(s)} \psi(t)|D_x u|^{p+1} dxdt\right)^{\frac{\theta}{p+1}} \times$$

$$\times \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi(t) \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1}dx\right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt\right)^{\frac{1-\theta}{p+1}}, \tag{19}$$

що після інтегрування по $t \in (a,b)$ дає в точності результат Леми 2.

7. Доведення основного результату

Визначаємо два сімейства функцій, що пов'язані з $u(t,x)$:

$$h_j(s) = \text{ess sup}_{t\in[t_{j-1},t_j]} \int_{\Omega(s)} |u(t,x)|^{q+1}dx;$$

$$E_j(s) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi(t) \int_{\Omega(s)} |D_x u(t,x)|^{p+1} dxdt;$$

і монотонну послідовність:

$$t_j \to T, \quad t_0 = 0; \quad t_{j-1} < t_j, \quad j = 1, 2 \ldots.$$

Оскільки

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi(t) \int_{\partial B(s)} |D_x u(t,x)|^{p+1} d\gamma dt = -\frac{d}{ds} E_j(s),$$

то (19) після застосування нерівності Юнга з ε (14) в нових термінах $h_j(s)$ та $E_j(s)$ дає диференціальну систему:

$$E_j(s) \leq r_1 h_{j-1}(s) + r_2 \alpha_j^{\nu} \left(-\frac{dE_j(s)}{ds}\right)^{1+\mu}, \tag{20}$$

$$h_j(s) \leq (1+\delta_j)\, h_j(s) + r_3 \delta_j^{\frac{-(p+1)\nu}{q+1}} \alpha_j^{\nu} \left(-\frac{dE_j}{ds}\right)^{1+\mu}, \tag{21}$$

$$\forall s > 1, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \forall \delta_j > 0,$$

де константи $r_1, r_2, r_3 < \infty$ залежать лише від відомих параметрів

$$\nu = \frac{(1-\theta)(q+1)}{q(p+1)+\theta(p-q)} < 1; \quad \mu = \frac{(1-\theta)(p-q)}{q(p+1)+\theta(p-q)}; \quad \alpha_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi(t)dt.$$

Для зручності домножимо обидві частини введених на початку параграфу функцій на $\alpha_j^{\frac{q+1}{p-q}}$:

$$A_j(s) = \alpha_j^{\frac{q+1}{p-q}} E_j(s); \quad H_j(s) = \alpha_j^{\frac{q+1}{p-q}} h_j(s) \Rightarrow$$

тоді очевидно, що нерівності (20) та (21) набувають вигляду:

$$A_j(s) \leq r_4 H_{j-1}(s) + r_2 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu},$$

$$H_j(s) \leq (1+\delta_j)\, \alpha_{j-1}^{\frac{q+1}{p-q}} h_{j-1}(s) + +r_3' \delta_j^{-\frac{(p+1)\nu}{q+1}} \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu}.$$

Розбиття $\{t_j\}$ та послідовність $\{\delta_j\}$ будемо обирати таким чином, щоб виконувалась строга нерівність:

$$(1+\delta_j) < \lambda = \mathrm{const} \; < 1.$$

Тоді отримаємо:

$$A_j(s) \leq r_4 H_{j-1}(s) + r_2 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu} \tag{22}$$

$$H_j(s) \leq \lambda H_{j-1}(s) + r_3 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu} \tag{23}$$

Ітеруючи співвідношення (22), оцінюючи послідовно в правій частині усі $H_i(s)$ з урахуванням (23), маємо низку послідовних нерівностей:

$$\begin{aligned}
A_j(s) \leqslant\, & r_4 H_{j-1}(s) + r_2 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu} \\
\leqslant\, & r_4 \lambda H_{j-2}(s) + r_4 r_3 \left(-A_{j-1}'(s)\right)^{1+\mu} + r_2 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu} \\
\leqslant\, & r_4 \lambda^2 H_{j-3}(s) + r_4 r_3 \lambda \left(-A_{j-2}'(s)\right)^{1+\mu} \\
& + r_4 r_3 \left(-A_{j-1}'(s)\right)^{1+\mu} + r_2 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu} \\
\leqslant\, & s \leqslant r_4 \lambda^{j-1} H_0(s) + r_4 r_3 \Big[\lambda^{j-2} \left(-A_1'(s)\right)^{1+\mu} + \lambda^{j-3} \left(-A_2'(s)\right)^{1+\mu} \\
& + s + \lambda^2 \left(-A_{j-3}'(s)\right)^{1+\mu} + \lambda \left(-A_{j-2}'(s)\right)^{1+\mu} \\
& + \left(-A_{j-1}'(s)\right)^{1+\mu} + \frac{r_2}{r_3 r_4} \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu}\Big] \leqslant \\
\leqslant\, & r_4 \lambda^{j-1} H_0(s) + r_5 \sum_{i=1}^{j} \left(-\lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} A_i'(s)\right)^{1+\mu}
\end{aligned}$$

і остаточно отримуємо:

$$A_j(s) \leq r_4 \lambda^{j-1} \left(\int_0^T \psi(t)dt\right)^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(s) + r_5 \left[\sum_{i=1}^{j} \left(-\lambda^{\frac{j-i}{i+\mu}} A_i'(s)\right)\right]^{1+\mu}. \tag{24}$$

Якщо ввести сімейство невід'ємних функцій:

$$U_j(s) \equiv \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{i+\mu}} A_i(s), \quad j = 1, 2 \ldots.$$

і зауважити при цьому, що справедливою є наступна рівність

$$A_j(s) = U_j(s) - \lambda_j^{\frac{1}{1+\mu}} U_{j-1}(s),$$

то очевидно, що співвідношення (24) можна переписати наступним чином:

$$U_j(s) - \lambda_j^{\frac{1}{1+\mu}} U_{j-1}(s) \leq r_4 \lambda^{j-1} \left(\int_0^T \psi(t) dt \right)^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(s) + r_5 \left(-U_j'(s) \right)^{1+\mu} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

тобто

$$U_j(s) \leq \lambda_j^{\frac{1}{1+\mu}} U_{j-1}(s) + r_4 \lambda^{j-1} \left(\int_0^T \psi(t) dt \right)^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(s) + r_5 \left(-U_j'(s) \right)^{1+\mu} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

$$U_j(1) = \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{i+\mu}} A_i(1) = \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{i+\mu}} \alpha_i^{\frac{q+1}{p-q}} E_i(1) \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Для оцінки зверху $E_i(1)$ скористаємося нерівністю з Леми 1 при $a = 0,\ b = t_j$ маємо:

$$\int_\Omega |u(t_j, x)|^{q+1} dx + \int_0^{t_j} \int_\Omega |D_x u|^{p+1}\, dx dt$$
$$\leqslant c_1 \int_\Omega |u(0, x)|^{q+1} dx + c_2 \left(1 + \zeta_1(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \right) F_1(0, t_j);$$

$$\int_\Omega |u(t_j, x)|^{q+1} dx + E_j(1)$$
$$\leqslant c_1 h_0(1) + c_2 \left(1 + \zeta_1(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \right) F_1(t_j);$$

$$\int_\Omega |u(t_j, x)|^{q+1} dx + E_j(1)$$
$$\leqslant c_1 h_0(1) + c_2 \left(1 + \zeta_1(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \right) C;$$

$$\int_\Omega |u(t_j, x)|^{q+1} dx + E_j(1)$$
$$\leqslant c_1 h_0(1) + c_2 \left(1 + \zeta_1(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \right) C.$$

Отже,

$$E_j(1) \leqslant c_1 h_0(1) + c_3 \left(1 + \zeta_1\left(t_j\right)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \right).$$

Тоді

$$U_j(1) = \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{i+\mu}} \alpha_i^{\frac{q+1}{p-q}} \left[c_1 h_0(1) + c_3 \left(1 + \zeta_1\left(t_j\right)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \right) \right] \leq$$
$$\leq h_0(1) \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{i+\mu}} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi(t) dt \right)^{\frac{q+1}{p-q}} \left[c_1 + c_3 \left(1 - \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} \right)^{-1} \left(1 + \zeta(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \right) \right].$$

Таким чином, за умови, що

$$\sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi(t)dt \right)^{\frac{q+1}{p-q}} \leq \text{ const}$$

має місце оцінка:

$$U_j(1) \leq c_4 + c_5 \zeta(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}.$$

В свою чергу це приводить до системи диференціальних нерівностей

$$\begin{aligned} &U_j(s) \leq c_6 U_{j-1}(s) + c_7 \left(-U_j'(s) \right)^{1+\mu}, \quad \forall s > d; \\ &U_j(d) \leq c_4 + c_5 \zeta(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}, \qquad \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

А з цієї системи в силу Леми 6.3 статті [8] випливає наступна рівномірна оцінка для носіїв функцій $U_j(s)$:

$$\zeta\left(t_j\right) \leqslant \sup\left\{s : s \in \operatorname{supp} U_j\right\} \leqslant c_8 \left[c_4 + c_5 + c_5 \zeta_1\left(t_j\right)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \right]^{\frac{\mu}{1+\mu}} + d,$$

де $c_8 = \left(\frac{c_7}{1-6}\right)^{\frac{1}{1+\mu}} \frac{1+\mu}{\mu}$.
З останньої нерівності випливає

$$\zeta\left(t_j\right) \leqslant d + c_8\left(c_4 + c_5\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_8 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}} \zeta_1\left(t_j\right)^{\varkappa} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \tag{25}$$

де

$$\varkappa = \frac{q(p+1)(p-q)}{(p-q+1)[n(p-q)+(q+1)(p+1)]} < 1 \quad \forall n \geqslant 1, \quad p > q.$$

Для завершення доведення залишилося лише встановити оцінку зверху для функції $\zeta(t)$ на множині

$$S = \left\{t \in (0, T) : \zeta(t) = \zeta_1(t)\right\}. \tag{26}$$

Візьмемо довільну точку $\tilde{t}$:

$$\tilde{t} \in [T_0, T) \cap S, \quad \tilde{t} = t_{j_0}, \quad j_0 \in \mathbb{N}.$$

З огляду на співвідношення (25) і означення (26) маємо:

$$\begin{aligned} \zeta(\tilde{t}) = \zeta\left(t_{j_0}\right) &\leqslant d + c_8\left(c_4 + c_5\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_8 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}} \zeta(\tilde{t})^{\varkappa} \\ &\leqslant d + c_8\left(c_4 + c_5\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + \varepsilon \zeta(\tilde{t}) + c_9(\varepsilon) \left(c_8 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}} \right)^{\frac{1}{1-\varkappa}}, \end{aligned}$$

Це, у свою чергу, приводить до оцінки

$$\zeta(\tilde{t}) \leqslant (1-\varepsilon)^{-1}\left[d + c_8\left(c_4+c_5\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_9(\varepsilon)\left(c_8 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}}\right)^{\frac{1}{1-\varkappa}}\right] \equiv D(\varepsilon).$$

Розглянемо

$$D(\varepsilon) = (1-\varepsilon)^{-1}\left[d + c_8\left(c_4+c_5\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_9(\varepsilon)\left(c_8 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}}\right)^{\frac{1}{1-\varkappa}}\right] = \frac{D_0}{1-\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{27}$$

Усі постійні c_i, які фігурували у вищенаведених обчисленнях, не залежать від зовнішнього радіуса R області Ω. Тому при виконанні умови

$$d + c_8\left(c_4+c_5\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_9(\varepsilon)\left(c_8 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}}\right)^{\frac{1}{1-\varkappa}} < R \tag{28}$$

можна знайти $\varepsilon_0 > 0$ таке, що

$$\zeta(\tilde{t}) < D(\varepsilon) < R \quad \forall \tilde{t} \in [T_0, T)\,. \tag{29}$$

Ця оцінка є еквівалентною наявності властивості локалізації граничної задачі, що розглядається, при R, що задовольняє співвідношенням (28), (29). Таким чином, Теорему 1, яка є основним результатом роботи, доведено.

Висновок

Основний результат даної роботи має важливе значення в теорії рівнянь у частинних похідних і може бути застосований в різних галузях, таких як, наприклад, моделювання теплопровідності, дифузії та динаміки рідин. Результати, отримані в статті, можуть бути використані в подальших дослідженнях у галузі нелінійних параболічних рівнянь.

Історія статті: отримана: 20 квітня 2024; останній варіант: 19 травня 2024
прийнята: 21 травня 2024.

REFERENCES

1. H. W. Alt, S. Luckhaus. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations, Math. Z. – 1983. – Vol. **183**, No **3**. – P. 311–341. 10.1007/BF01176474

2. Ph. Benilan, P. Wittbold. On mild and weak solutions of elliptic-parabolic problems, Adv. Differential Equations. – 1996. – Vol. **1**, No **6**. – P. 1053–1073. 10.57262/ade/1366895244

3. J. I. Diaz, L. Veron. Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations, Trans. Amer. Math. Soc. – 1985. – Vol. **290**, No **2**. – P. 787–814. 10.2307/2000315

4. G. H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya. Inequalities. Cambridge University Press. – 1952. – P. 324.

5. H. Poincare. Sur les Equations aux Derivees Partielles de la Physique Mathematique, American Journal of Mathematics. – 1890. – Vol. **12**, No. **3** – P. 211–294. 10.2307/2369620

6. K. Rektorys. The Friedrichs Inequality. The Poincare inequality. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering (2nd ed.). Dordrecht: Reidel.– 1977. – P. 188–198. 10.1007/978-94-011-6450-4

7. E. Gagliardo. Ulteriori proprieta di alcune classi di funzioni in the most variabili. Ricerche Mat. – 1959. – Vol. **8**. – P. 24–51.

8. A. E. Shishkov, A. G. Shchelkov. Blow-up boundary regimes for general quasilinear parabolic equations in multidimensional domains, Sb. Math. – 1999. – V. **190**, No **3**. – P. 447–479. 10.1070/sm1999v190n03abeh000398

9. B. H. Gilding, M. A. Herrero. Localization and blow-up of thermal waves in nonlinear heat conduction, Math. Ann. – 1988. – Vol. **282**. – P. 223–242. 10.1007/BF01456972

10. C. Cortazar, M. Elgueta. Localization and boundedness of the solutions of the Neumann problem for a filtration equation, Nonlinear Anal. – 1989. – Vol. **13**, No **1**. – P. 33–41.

Article history: Received: 20 April 2024; Final form: 19 May 2024
Accepted: 21 May 2024.

The behavior of the generalized solution of the initial-boundary value problem for the nonlinear parabolic equation

K. V. Stiepanova, D. R. Shevchuk
V. N. Karazin Kharkiv National University
4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine, 61022

Within the framework of this work, we study the behavior of the generalized solution (or the so-called energy solution) of an interesting initial-boundary value problem (namely, the Cauchy-Dirichlet problem is considered) for nonlinear parabolic equation. The research is carried out in a cylindrical area. A structural condition is imposed on the parameters of the equation corresponding to the slow diffusion process. So, in the article we are dealing with the distribution of the substance concentration in space and time, taking into account the initial and boundary conditions. This process has a practical aspect and is used in physics and engineering, for example, to study the diffusion of matter in environments with variable concentration or chemical influence. Solving such problems allows obtaining important data on the evolution of the system and predicting its behavior in various conditions. In the work, as a result of our research, several integral ratios, various estimates and inequalities were established, which lead to the need to analyze the behavior of the differential system, which in turn makes it possible to establish the presence of the solution localization property. So, relying on the well-known results regarding the behavior of the solution of the resulting differential system, it is possible to find a condition that guarantees the localization of the solution carrier for the Cauchy-Dirichlet problem under study. The main result of the work is a theorem that is proved for an arbitrary finite initial function and under the condition of fulfilling a certain restriction on the limit mode. The article has a fairly standard structure and, in addition to annotations and literature, contains the following structural elements: introduction; Formulation of the problem; basic definitions; formulation of the main result; auxiliary inequalities for proving the main result; auxiliary statements for proving the theorem; proving the main result; conclusions.

Keywords: **behavior of the generalized solution; initial boundary value problem; boundary mode.**

How to cite this article:

K. V. Stiepanova, D. R. Shevchuk. The behavior of the generalized solution of the initial-boundary value problem for the nonlinear parabolic equation. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 99, 2024, p. 4–21 (in Ukrainian). DOI: 10.26565/2221-5646-2024-99-01

ISSN 2221-5646(Print) 2523-4641(Online)
Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics”
2024, Vol. 99, p. 22–35
DOI: 10.26565/2221-5646-2024-99-02
УДК 519.6

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
2024, Том 99, с. 22–35

В. В. Карєва
викладач кафедри прикладної математики
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
valerija.kareva@gmail.com *http://orcid.org/0000-0003-2121-5214*

С. В. Львов
науковий співробітник науково-дослідницького інституту біології
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
lvovser@gmail.com *http://orcid.org/0000-0003-4055-7172*

Методи адаптивно динамічного програмування для визначення оптимальної стратегії регенерації печінки

Кожен живий організм взаємодіє з навколишнім середовищем і використовує цю взаємодію для вдосконалення власних дій, щоб вижити та розвиватися. Процес еволюції показав, що види змінюють свої дії на основі взаємодії з навколишнім середовищем протягом тривалого часу, що призводить до природного відбору та виживання найбільш пристосованих. Це навчання, яке засноване на діях, або навчання з підкріпленням може охопити уявлення про оптимальну поведінку, що відбувається в природних системах. Ми описуємо математичні формулювання для навчання з підкріпленням і метод практичного впровадження, відомий як адаптивне динамічне програмування. Це дає нам уявлення про вигляд керування для штучних біологічних систем, які навчаються та демонструють оптимальну поведінку.

У даній роботі розглядається постановка задачі верхньої оцінки оптимальності, для якої оптимальна стратегія регуляції гарантовано краща чи еквівалентна об'єктивним правилам регуляції, які ми можемо спостерігати в реальних біологічних системах.

У випадку оптимальних алгоритмів навчання з підкріпленням процес навчання переміщується на вищий рівень, об'єктом інтересу якого є не деталі динаміки системи, а індекс продуктивності, який кількісно визначає, наскільки близько до оптимальності працює система керування. У такій схемі навчання з підкріпленням є засобом навчання оптимальній поведінці шляхом спостереження за реакцією оточення на неоптимальні стратегії керування.

Мета цієї статті полягає в тому, щоб показати корисність методів навчання з підкріпленням, зокрема сімейства методів, відомих як адаптивне динамічне програмування (АДП), для керування біологічними системами за допомогою зворотного зв'язку. У цій роботі викладено «он-лайн» методи вирішення задачі визначення верхньої оцінки оптимальності у постановці адаптивного динамічного програмування.

Ключові слова: **динамічне програмування; оптимальне керування; навчання з підкріпленням.**

© Карєва В. В., Львов С. В., 2024; CC BY 4.0 license

2020 Mathematics Subject Classification: 90C39, 65K05.

1. Вступ

Розробка математичних моделей динаміки складних клітинних систем, що володіють задовільною пояснювальною та передбачувальною силою, є однією з фундаментальних проблем математичної біології.

Без явного уявлення принципів, правил і механізмів цілеспрямованої регуляції (керування) у «клітинних системах» будь-яка їхня математична модель дасть нам лише неосяжний набір потенційних стратегій, серед яких є справжня динаміка, що спостерігається в біологічному експерименті.

Ідентифікація об'єктивних принципів і правил регуляції «клітинної системи», що визначає серед усіх можливостей саме справжню динаміку, є необхідною умовою розробки математичних моделей із достатньою пояснювальною та передбачуваною силою.

Перспективним підходом до розв'язання цієї задачі є гіпотеза, що правила регуляції біологічних процесів підпорядковані деяким об'єктивним принципам, критеріям оптимальності[1]. Ця гіпотеза виникла з природнього припущення, що принципи, яким підкоряються правила регуляції процесів відновлення динамічного гомеостазу органів та тканин організму, відповідають процесу природного відбору під час його попередньої еволюції щодо деякого критерію оптимальності [2, 3].

Наразі розв'язати цю задачу, навіть у її спрощеній постановці, досить важко через безліч невизначеностей під час попередньої еволюції організму, динаміки зміни зовнішніх умов, в яких вона відбувалася, а також високої обчислювальної складності розв'язання такої задачі.

Розглядається значно простіша постановка задачі верхньої оцінки оптимальності, для якої оптимальна стратегія регуляції гарантовано краща чи еквівалентна об'єктивним правилам регуляції, які ми можемо спостерігати в реальних біологічних системах.

Задача пошуку верхньої оцінки оптимальності може оцінити особливості регуляції регенераційних процесів в сценаріях, які не охоплені у біологічних експериментах, та проаналізувати можливі процеси регуляції, спостереження яких є поки що технологічно недосяжні. Ця задача дозволяє на якісному рівні попередньо перевірити гіпотези щодо того, як відбувається регуляція процесів регенерації печінки з метою їх подальшої перевірки в біологічному експерименті.

Як було зазначено у роботах [4, 5] у регенерації печінки беруть участь процеси різного часового масштабу. При цьому швидкі процеси можуть відігравати важливу роль. При цьому часовий горизонт розгляду процесів регенерації організму може становити від тижня до кількох місяців.

Тому задача пошуку стратегії регенерації печінки є експоненційно складною щодо відліків часової шкали координат, що кодують переходи з попереднього стану безпосередньо у наступний стан. Природньо постає питання про знаходження ефективних методів наближеного розв'язання цієї задачі за наявності тих чи інших обмежень.

Одним із найуспішніших методів є адаптивне динамічне програмування (АДП) та навчання з підкріпленням. Модифікацію дій на основі взаємодії з навколишнім середовищем навчанням з підкріпленням (reinforcement learning, RL) [6]. Існує багато типів навчання, включаючи контрольоване навчання, неконтрольоване навчання тощо. Навчання з підкріпленням стосується агента, який взаємодіє зі своїм середовищем і змінює свої дії або стратегію керування на основі стимулів, отриманих у відповідь на його дії. Це базується на оціночній інформації з навколишнього середовища і може називатися навчанням, заснованим на діях. RL передбачає причинно-наслідковий зв'язок між діями та винагородою чи покаранням.

Алгоритми RL побудовані на ідеї, що успішні контрольні рішення слід запам'ятовувати за допомогою сигналу підкріплення, щоб вони з більшою ймовірністю були використані вдруге. RL тісно пов'язаний з теоретичної точки зору з прямими та непрямими адаптивними методами оптимального керування. Адаптивне динамічне програмування та навчання з підкріпленням, крім «офлайн» методів передбачає «он-лайн» методи, що працюють у реальному режимі часу і які, зрештою, не вимагають знання рівнянь динаміки системи – методи, що базуються на даних, у тому числі методів, які обробляють дані, що надходять у реальному масштабі часу [12].

У цій роботі ми розглянемо «он-лайн» методи вирішення задачі визначення верхньої оцінки оптимальності у постановці адаптивного динамічного програмування.

2. Постановка задачі АДП визначення стратегії верхньої оцінки оптимальності регенерації печінки організму.

Попередньо було розроблено дискретну, детерміновану, автономну, керовану динамічну систему $S(X, U, f)$ у термінах індексів дискретних часів t [7]:

$$x_{t+1} = f(x_t, \tau_t, \lambda_t), 0 \leq \lambda_t \leq 1, x_0 = x^0, x_t \in X, \lambda_t \in U, t \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

де x_t - типи функціональних клітин печінки в момент часу t; $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - простір допустимих станів системи; $x^0 \in X$ - заданий початковий розподіл функціональних клітин печінки; $U \subseteq \mathbb{R}^m$ - простір допустимих керуючих дій; τ_t - задана функція зовнішньої токсичності.

Функція $f(x_t, \tau_t, \lambda_t)$ задана у явному вигляді для моделі регенерації печінки, яку ми розробили [4, 7]. Запропонована модель процесів регенерації печінки включає такі моделі популяційної динаміки, як узагальнені рівняння Лотки-Вольтерра, рівняння Лотки-Вольтерра з переходами, рівняння Лотки-Вольтерра із запізненням.

Така система задовольняє однокроковій властивісті Маркова, оскільки її стан у момент часу $t + 1$ залежить лише від стану та вхідних даних у попередній момент часу t.

Для полегшення аналізу часто розглядають клас систем з дискретним часом, що описуються нелінійною динамікою у формі різницевого рівняння афінного простору станів:

$$x_{t+1} = g_1(x_t) + g_2(x_t)\lambda_t. \tag{2}$$

Аналіз таких форм зручний і може бути узагальнений на загальну вибірку даних форми (1).

Стратегія керування визначається як функція від простору станів до простору керування $\lambda : X \to U$. Тобто для кожного стану x_t стратегія визначає керуючу дію $\lambda_t = \lambda(x_t)$.

Кожному дискретному переходу системи з поточного стану x_t у наступний стан x_{t+1} під дією керування $x_t \xrightarrow{\lambda_t} x_{t+1}$ приписується його вартість:

$$r_t = r(x_t, \lambda_t),$$

де $r : X \times U \to \mathbb{R}$ є мірою вартості керування за один крок (utility).

Далі припускатимемо, що функція r обмежена. Принаймні для біологічних систем припущення, що вартість, ефективність, корисність стану не може бути необмежено великим, природно.

2.1. Оптимальна вартість.

На відміну від розглянутої в [7] постановки задачі визначення оптимальної стратегії, у задачі АДП розглядають дисконтовану сумарну вартість вперед або собівартість:

$$V_\lambda(x_t) = \sum_{i=t}^{\infty} \gamma^{i-t} r(x_i, \lambda_i), \tag{3}$$

$0 < \gamma \leq 1$ - коефіцієнт дисконтування. Коефіцієнт дисконтування відображає той факт, що ми менше турбуємося про обставини, які виникнуть в майбутньому.

Ми припускаємо, що система є стабілізованою на деякій множині $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, тобто існує стратегія керування $\lambda_t = \lambda(x_t)$ така, що замкнута система (2) є асимптотично стійкою на Ω. Стратегія керування λ_t називається допустимою, якщо вона є стабілізуючою і дає кінцеву вартість $V_\lambda(x_t)$.

Метою теорії оптимального керування є вибір стратегії, яка мінімізує собівартість:

$$V^*(x_t) = \min_{\lambda(.)} \left(\sum_{i=t}^{\infty} \gamma^{i-t} r(x_i, \lambda(x_i)) \right), \tag{4}$$

яка відома як оптимальна вартість. Тоді оптимальна стратегія керування визначається як:

$$\lambda^*(x_t) = \arg\min_{\lambda(.)} \left(\sum_{i=t}^{\infty} \gamma^{i-t} r(x_i, \lambda(x_i)) \right). \tag{5}$$

Раніше, наприклад, ми визначали оптимальну стратегію керування як [7]:

$$\lambda_t^* = \arg\min_{\lambda(.)} \sum_{i=0}^{N} v_{t_i}(K - \Phi_{t_i})^2 \tag{6}$$

$\Phi_t = \sum_{i=1}^{n} c_i x_t^i$ – узагальнений показник функціональності печінки в момент часу t.

$t_i = i\Delta t, \Delta t$ – крок дискретизації, $[0, T] = \Delta t N$ – інтервал життєвого циклу організму.

K – оптимальна функціональна активність організму.

$0 \leq v_{t_i} \leq 1$ – відносна вага моменту життєвого циклу.

Зауваження. *Задача знаходження стратегії регенерації печінки має фізичний зміст кінцевого інтервалу часу (життєвий цикл організму кінцевий). Але формально систему рівнянь, що описують процеси регенерації печінки, можна продовжити на нескінченну вісь* $t \in \mathbb{N}$.

2.2. Рівняння Ляпунова і принцип оптимальності Беллмана.

Запишемо вираз (3) у вигляді:

$$V_\lambda(x_t) = r(x_t, \lambda_t) + \gamma \sum_{i=t+1}^{\infty} \gamma^{i-t-1} r(x_i, \lambda_i). \tag{7}$$

Вираз (7) еквівалентний наступному:

$$V_\lambda(x_t) = r(x_t, \lambda(x_t)) + \gamma V_\lambda(x_{t+1}), V_\lambda(x_0) = 0. \tag{8}$$

Вираз (8) є дискретним нелінійним рівнянням Ляпунова.

На підставі рівнянь (7) визначимо дискретний Гамільтоніан.

$$H(x_t, \lambda(x_t), \triangle V_t) = r(x_t, \lambda(x_t)) + \triangle V_t, \tag{9}$$

де $\triangle V_t = \gamma V_\lambda(x_{t+1}) - V_\lambda(x_t)$ - різницевий оператор, який виражає зміни дисконтованої вартості вперед під час переходу зі стану x_k у стан x_{k+1}, у результаті керуючої дії $\lambda(x_k)$. З рівняння Ляпунова випливає, що дискретний Гамільтоніан для будь-якого керування та будь-якого поточного стану дорівнює нулю.

Оптимальне значення можна записати за допомогою рівняння Беллмана як

$$V^*(x_t) = \min_{\lambda(.)} \left(r(x_t, \lambda(x_t)) + \gamma V_\lambda(x_{t+1}) \right). \tag{10}$$

Цю задачу оптимізації все ще важко вирішити.

Принцип Беллмана [8] є основою оптимального керування, і він стверджує, що "незважаючи на те, якими були попередні рішення (тобто керування), необхідно вибрати такий варіант керування, щоб собівартість на цьому та всіх послідуючих кроках були мінімальними". З точки зору рівнянь, це означає, що:

$$V^*(x_t) = \min_{\lambda(.)} \left(r(x_t, \lambda(x_t)) + \gamma V^*(x_{t+1}) \right). \tag{11}$$

Рівняння (11) відоме як рівняння оптимальності Беллмана або рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана (HJB) з дискретним часом. Тоді оптимальна стратегія виглядає як:

$$\lambda^*(x_t) = \arg\min_{\lambda(.)} \left(r(x_t, \lambda(x_t)) + \gamma V^*(x_{t+1}) \right). \tag{12}$$

Оскільки необхідно знати оптимальну стратегію в момент часу $t+1$ до (11) для визначення оптимальної стратегії в момент часу t, принцип Беллмана дає зворотну в часі процедуру для вирішення проблеми оптимального керування. Це основа для алгоритмів динамічного програмування, які широко використовуються в теорії систем керування, дослідженні операцій тощо.

Позначимо символами L_S і L_S^* безліч функцій Ляпунова і безліч оптимальних функцій Ляпунова шляхів динамічної системи S (1), відповідно:

$$L_S = \{V_\lambda(x) | x \in X, \lambda \in U\}$$

$$L_S = \{V^*(x) | x \in X, \lambda \in U\}$$

Розглянемо безліч функцій Ляпунова та оптимальних функцій Ляпунова динамічної системи S (1) як підмножини Банахова простору $l_\infty(\mathbb{N})$ обмежених функцій $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, v \in l_\infty(\mathbb{N})$, з нормою $||v(.)||_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |v(i)|$.

З огляду на рівняння Ляпунова (8) визначимо пару відображень T і T^* Банахова простору у себе:

$$T : l_\infty(\mathbb{N}) \to l_\infty(\mathbb{N})$$

$$T(v(t)) = r(x_t, \lambda(x_t)) + \gamma v(t+1), v \in l_\infty(\mathbb{N}), t \in \mathbb{N}$$

$$T^* : l_\infty(\mathbb{N}) \to l_\infty(\mathbb{N})$$

$$T(v(t)) = \min_{\lambda(.)} \left(r(x_t, \lambda(x_t)) + \gamma v(t+1) \right), v \in l_\infty(\mathbb{N}), t \in \mathbb{N}$$

Твердження 1. Відображення $T : l_\infty(\mathbb{N}) \to l_\infty(\mathbb{N})$ і $T^* : l_\infty(\mathbb{N}) \to l_\infty(\mathbb{N})$ є стискаючими відображеннями в Банаховому просторі $l_\infty(\mathbb{N})$.

$\exists \alpha, 0 < \alpha < 1 :$

$||v_1(t) - v_2(t)||_\infty \geq \alpha ||T(v_1(t)) - T(v_2(t))||_\infty, \forall v_1, v_2 \in l_\infty(\mathbb{N}),$

$||v_1(t) - v_2(t)||_\infty \geq \alpha ||T^*(v_1(t)) - T^*(v_2(t))||_\infty, \forall v_1, v_2 \in l_\infty(\mathbb{N}).$

Твердження 2. Стискаючі відображення $T : l_\infty(\mathbb{N}) \to l_\infty(\mathbb{N})$ і $T^* : l_\infty(\mathbb{N}) \to l_\infty(\mathbb{N})$ мають єдину «нерухому точку» і, якщо нерухома точка відображення T і нерухома точка відображення T^* належать безлічі функцій Ляпунова та безлічі оптимальних функцій Ляпунова динамічної системи S, то ці нерухомі точки є функції Ляпунова та оптимальні функції Ляпунова.

$$\exists ! \tilde{v} \in l_\infty(\mathbb{N}) : T(\tilde{v}) = \tilde{v}, \tilde{v} \in L_S \Rightarrow \tilde{v} = V_\lambda(x_t).$$

$$\exists!\tilde{v} \in l_\infty(\mathbb{N}) : T^*(\tilde{v}) = \tilde{v}, \tilde{v} \in L_S^* \Rightarrow \tilde{v} = V^*(x_t).$$

Як відомо доказ теореми Банаха про нерухому точку заснований на послідовній ітераційній процедурі використання стискаючих відображень, в нашому випадку T і T^*. Це є математичним обгрунтуванням ітераційних алгоритмів АДП, які будуть наведені у наступному розділі.

3. Навчання з підкріпленням, АДП та адаптивне керування.

Оптимальним рішенням керування з використанням динамічного програмування є процедура зворотного руху в часі. У цьому розділі сформулюємо методи он-лайн навчання з підкріпленням у реальному часі для вирішення задачі оптимального керування [9, 12]. Ці методи широко називаються наближеним динамічним програмуванням (АДП) або нейродинамічним програмуванням (НДП) [10]. Є два ключових компоненти: похибка часової різниці і апроксимація функції вартості.

Похибка часової різниці. На основі рівняння Беллмана (8) визначимо рівняння похибки часової різниці:

$$e_t = r(x_t, \lambda(x_t)) + \gamma V_\lambda(x_{t+1}) - V_\lambda(x_t). \tag{13}$$

Слід зазначити, що права частина цього виразу є гамільтоновою функцією (9). Якщо виконується рівняння Беллмана, похибка часової різниці дорівнює нулю.

Похибка часової різниці може розглядатися як похибка передбачення між прогнозованою вартістю та спостережуваною вартістю у відповідь на керування, застосоване до системи.

Ключовою особливістю рівняння похибки часової різниці є те, що вона не вимагає знання явних рівнянь динаміки системи. Справді, якщо ми маємо такі дані: траекторія системи, що спостерігається, на основі вимірювань $x_0, x_1, x_2, ...$; функція вартості кроку $r_t = r(x_t, \lambda_t)$; деяке передбачуване керування $\lambda(.)$ або деяка передбачувана оцінка вартості $V(x_t)$, тоді, відповідно до рівняння (1), ми можемо послідовно обчислити її похибку часової різниці.

Апроксимація функції вартості. Для апроксимації функції вартості можуть бути використані такі методи: лінійна регресія, нейронні мережі, дерева прийняття рішень, найближчі сусіди, тощо. Припустимо, що функція вартості може бути досить добре апроксимована найпростішою нейронною мережею (лінійною регресією):

$$\widehat{V}_\lambda(x) = W^T \phi(x). \tag{14}$$

де W - вектор коефіцієнтів (параметрів) нейронної мережі, $\phi(.)$ – базисна функція активації.

Апроксимація функції нейронною мережею означає обчислення параметрів (синаптичних ваг і зміщень, якщо такі є) мережі. Цей процес називається навчанням.

Для деякого керування $\lambda(.)$ похибка часової різниці набуває лінійного за параметрами W вигляду:

$$e_t = r(x_t, \lambda(x_t)) + \gamma W^T \phi(x_{t+1}) - W^T \phi(x_t). \tag{15}$$

Рівняння $e_t = 0$ є рівнянням з фіксованою точкою. Це рівняння узгодженості, яке задовольняється в кожен момент часу t для значення $V_\lambda(.)$, що відповідає поточній стратегії $\lambda(x_t)$. Таким чином, можна використовувати ітераційні процедури для вирішення рівняння часових різниць, включаючи ітерацію за стратегіями та ітерацію за значеннями.

Алгоритм ітерації за стратегіями он-лайн (On-line policy iteration, PI).

Ініціалізація. Виберіть будь-яку допустиму стратегію керування $\lambda_0(x_t)$.

Етап оцінки стратегії. Визначити розв'язок W_{i+1}:

$$W_{i+1}^T(\phi(x_t) - \gamma\phi(x_{t+1})) = r(x_t, \lambda_i(x_t)). \tag{16}$$

Зауважимо, що рівняння форми (16) - це саме ті рівняння, які розв'язуються методом найменших квадратів (least squares method, LS). Таким чином, метод найменших квадратів можна запускати в режимі он-лайн до збіжності. Запишемо (16) як:

$$W_{i+1}^T \Phi(t) = r(x_t, \lambda_i(x_t)). \tag{17}$$

$\Phi(t) = \phi(x_t) - \gamma\phi(x_{t+1})$ – вектор регресії. Зверніть увагу, що для збіжності методу найменших квадратів вектор регресії повинен обертатися.

Тоді:

$$W_{i+1}^T = r(x_t, \lambda_i(x_t))\Phi(t)^{-1}. \tag{18}$$

$$LS(W) = \sum_{t=1}^{T} \left(V_\lambda(x_t) - \widehat{V}_\lambda(x_t)\right)^2. \tag{19}$$

$$LS(W) = \sum_{t=1}^{T} \left(V_\lambda(x_t) - r(x_t, \lambda_i(x_t))\Phi(t)^{-1}\phi(x_t)\right)^2. \tag{20}$$

$$W_{i+1} = \arg\min_W \sum_{t=1}^{T} \left(V_\lambda(x_t) - r(x_t, \lambda_i(x_t))\Phi(t)^{-1}\phi(x_t)\right)^2. \tag{21}$$

Як альтернативу методу найменших квадратів, коли нейронна мережа апроксимації більш складна, можна використовувати метод градієнтного спуску і його модифікації.

Етап удосконалення стратегії. Визначте покращену стратегію за допомогою:

$$\lambda_{i+1}(x_t) = \arg\min_{\lambda(.)} \left(r(x_t, \lambda(x_t)) + \gamma W_{i+1}^T \phi(x_{t+1})\right). \tag{22}$$

Подібним чином можна надати он-лайн алгоритм навчання підкріплення на основі ітерації за значеннями.

Алгоритм ітерації за значеннями он-лайн (On-line value iteration, VI).

Ініціалізація. Виберіть будь-яку стратегію керування $\lambda_0(x_t)$, не обов'язково допустиму або стабілізуючу.

Етап оновлення значення. Визначити розв'язок W_{i+1}:

$$W_{i+1}^T \phi(x_t) = r(x_t, \lambda_i(x_t)) + \gamma W_i^T \phi(x_{t+1}). \tag{23}$$

Для знаходження параметрів W_{i+1} можна використовувати метод найменших квадратів так само як і в PI алгоритмі. Зверніть увагу, що старі параметри вагів знаходяться в правій частині (23). Таким чином, вектор регресії тепер $\phi(x_t)$, який повинен обертатися для збіжності методу найменших квадратів.

$$W_{i+1} = \arg\min_{W} \sum_{t=1}^{T} \left(V_\lambda(x_t) - (r(x_t, \lambda_i(x_t)) + \gamma W_i^T \phi(x_{t+1}))\phi(x_t)^{-1}\phi(x_t) \right)^2 .$$

Для розв'язання в режимі реального часу можна також використовувати пакетні методи найменших квадратів, рекурсивних найменших квадратів або градієнтні методи.

Етап удосконалення стратегії. Визначте покращену стратегію за допомогою:

$$\lambda_{i+1}(x_t) = \arg\min_{\lambda(.)} \left(r(x_t, \lambda(x_t)) + \gamma W_{i+1}^T \phi(x_{t+1}) \right) . \tag{24}$$

Алгоритм навчання з підкріпленням PI (або VI) розв'язує нелінійне рівняння Ляпунова на етапі оновлення значення кожного кроку i, спостерігаючи лише набір даних $x_t, x_{t+1}, r(x_t, \lambda_i(x_t))$ кожного разу вздовж траєкторій системи.

Таким чином, навчання з підкріпленням вирішує базове нелінійне рівняння Ляпунова (рівняння Беллмана) на кожному кроці в режимі он-лайн, використовуючи лише дані, що спостерігаються вздовж траєкторій системи.

Зауважимо, що втілення (16) не може бути легко реалізоване в нелінійному випадку, оскільки воно є неявно в керуванні, оскільки x_{t+1} залежить від $\lambda(.)$ і є аргументом нелінійної функції активації.

Ці проблеми вирішуються введенням другої нейронної мережі для стратегії керування, відомої як нейронна мережа діяча [11]. Тому введемо структуру параметричного апроксиматора діяча:

$$\lambda_t = \lambda(x_t) = U^T \sigma(x_t). \tag{25}$$

$\sigma(x) : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^M$ – вектор M функцій активації і $U \in \mathbb{R}^{M \times m}$ – матриця вагових коефіцієнтів або невідомих параметрів.

Реалізація навчання з підкріпленням з використанням двох нейронних мереж, однієї як критика, а іншої як діяча, дає структуру, показану на рис. 1. У цій системі керування критик і діяч налаштовуються послідовно як в PI, так

Рис. 1. Навчання з підкріпленням зі структурою актор/критик.
Pic.1. Reinforcement learning with an actor/critic framework.

і в VI. Тобто ваги однієї нейронної мережі зберігаються постійними, а ваги іншої налаштовуються до збіжності. Ця процедура повторюється до тих пір, поки обидві нейроннні мережі не зійдуться. Таким чином, це адаптивна система оптимального керування он-лайн, у якій параметри функції значення налаштовуються в режимі он-лайн, а збіжність відбувається до оптимального значення та керування. Збіжність нелінійної ітерації за значеннями з використанням двох нейронних була доведена в [13].

4. Q-навчання.

Щоб уникнути будь-якої інформації про динаміку системи, потрібно надати альтернативний шлях для отримання часткових похідних відносно вхідних даних керування, які не проходять через систему. Для цього Пол Вербос використав концепцію зворотного поширення, а Кріс Воткінс ввів подібні поняття для марковського процесу вирішування у дискретному просторі, який він назвав Q-навчанням [14].

Розглянемо рівняння Беллмана (8), яке дозволяє обчислити цінність будь-якої заданої допустимої стратегії $\lambda(.)$. Оптимальне керування визначається за допомогою (5) або (12). Отже, давайте визначимо функцію Q (quality), пов'язану зі стратегією $\lambda_t = \lambda(x_t)$:

$$Q_\lambda(x_t, \lambda_t) = r(x_t, \lambda_t) + \gamma V_\lambda(x_{t+1}). \tag{26}$$

Зауважте, що функція Q є функцією як стану x_t, так і керування λ_t у момент часу t. Вона відповідає «якості» дії, обраної в поточному стані. Визначимо оптимальну функцію Q:

$$Q^*(x_t, \lambda_t) = r(x_t, \lambda_t) + \gamma V^*(x_{t+1}). \tag{27}$$

З точки зору Q^*, можна записати рівняння оптимальності Беллмана і оптимальне керування в дуже простій формі:

$$V^*(x_t) = \min_{\lambda} \left(Q^*(x_t, \lambda) \right), \lambda^*(x_t) = \arg\min_{\lambda} \left(Q^*(x_t, \lambda) \right). \tag{28}$$

Під час вивчення функції вартості необхідно навчити та зберегти оптимальне значення для всіх можливих станів x_t. На відміну від цього при Q-навчанні потрібно зберігати оптимальну функцію Q для всіх значень (x_t, λ_t), тобто для всіх можливих керуючих дій, що виконуються в кожному можливому стані. Це набагато більше інформації.

Щоб застосувати методи підкріплення он-лайн для вивчення функції Q, потрібно визначити: рівняння з фіксованою точкою для Q і відповідну структуру параметричного апроксиматора для Q.

«Рівняння Беллмана» для Q є

$$Q_\lambda(x_t, \lambda(x_t)) = r(x_t, \lambda(x_t)) + \gamma Q_\lambda(x_{t+1}, \lambda(x_{t+1})). \tag{29}$$

Оптимальне значення Q задовольняє:

$$Q^*(x_t, \lambda_t) = r(x_t, \lambda_t) + \gamma Q^*(x_{t+1}, \lambda^*(x_{t+1})). \tag{30}$$

Рівняння (29) є рівнянням з фіксованою точкою або «рівнянням Беллмана» для Q. Тепер можна використовувати будь-який он-лайн метод навчання з підкріпленням вище як основу для АДП, включаючи PI та VI.

Для нелінійних систем допускається параметричний апроксиматор або нейронна мережа вигляду:

$$\widehat{Q}_\lambda(x, \lambda) = W^T \phi(x, \lambda). \tag{31}$$

де $\phi(x, \lambda)$ – множина базисних функцій активації. Тоді похибка часової різниці набуває вигляду:

$$e_t = r(x_t, \lambda(x_t)) + \gamma W^T \phi(x_{t+1}, \lambda_{t+1}) - W^T \phi(x_t, \lambda_t). \tag{32}$$

Для методів навчання з підкріпленням, включаючи PI або VI, етап оновлення стратегії буде базуватися на:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} Q_\lambda(x_t, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} W^T \phi(x_t, \lambda) = 0. \tag{33}$$

Оскільки ця нейронна мережа явно залежить від керуючої дії λ, похідні можуть бути обчислені без знання динаміки системи. Щоб вирішити рівняння для λ і отримати явну стратегію $\lambda_t = \lambda(x_t)$, потрібно застосувати теорему про неявну функцію до цієї структури нейронної мережі.

Алгоритми PI і VI можна використовувати для Q-навчання.

5. Висновки

У цій статті представлено основні ідеї та алгоритми навчання з підкріпленням, зокрема сімейства методів, відомих як адаптивне динамічне програмування (ADP), а також продемонстрована корисність цих методів для визначення оптимальної стратегії керування біологічної системи процесів регенерації печінки людини.

Таким чином, в подальшому викладені методи будуть використані для розв'язання задачі знаходження верхньої оцінки оптимальності процесів регенерації печінки. Також отримані розв'язки планується верифікувати з даними, які отримані в біологічних експериментах.

Історія статті: отримана: 8 травня 2024; останній варіант: 22 травня 2024
прийнята: 8 червня 2024.

REFERENCES

1. E.T. Liu. Systems biology, integrative biology, predictive biology. Cell. – 2005. – Vol. 121(4). – P. 505–506. DOI: 10.1016/j.cell.2005.04.021
2. J.M. Smith. Optimization theory in evolution. Annu Rev Ecol Syst. – 1978. – Vol. 9(1). – P. 31–56. DOI: 10.1146/annurev.es.09.110178.000335
3. G.A. Parker, J.M. Smith et al. Optimality theory in evolutionary biology. Nature. – 1990. – Vol. 348(6296). – P. 27–33. DOI: 10.1038/348027a0
4. V. V. Karieva, S. V. Lvov. Mathematical model of liver regeneration processes: homogeneous approximation. Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University. Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics". – 2018. – Vol. 87. – P. 29–41. DOI: 10.26565/2221-5646-2018-87-03
5. V. V. Karieva, S. V. Lvov, L. P. Artyukhova. Different strategies in the liver regeneration processes. Numerical experiments on the mathematical model. Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University. Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics". – 2020. – Vol. 91. – P. 36–44. DOI: 10.26565/2221-5646-2020-91-03
6. J. M. Mendel, R. W. McLaren. Reinforcement-Learning Control and Pattern Recognition Systems. Mathematics in Science and Engineering. – 1970. – Vol. 66. – P. 287–318. DOI: 10.1016/S0076-5392(08)60497-X
7. V. V. Karieva, S. V. Lvov. Liver regeneration after partial hepatectomy: the upper optimality estimate. Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University. Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics". – 2023. – Vol. 97. – P. 41–58. DOI: 10.26565/2221-5646-2023-97-04

8. R. E. Bellman. Dynamic Programming. Princeton, NJ: Princeton Univ. – 1957. – 392 p. ISBN: 9780691146683

9. R. S. Sutton, A. G. Barto. Reinforcement Learning—An Introduction. Cambridge, MA: MIT Press. – 1998. – 526 p. ISBN: 978-0-262-19398-6

10. D. P. Bertsekas, J. N. Tsitsiklis. Neuro-Dynamic Programming. MA: Athena Scientific. – 1996. – 512 p. DOI: 10.1007/978-0-387-74759-0-440

11. W. T. Miller III, R. S. Sutton, P. J. Werbos. Neural Networks for Control. The MIT Press. – 1995. – 544 p. ISBN: 9780262631617

12. F. L. Lewis, D. L. Vrabie. Reinforcement learning and adaptive dynamic programming for feedback control. IEEE Circuits and Systems Magazine. – 2009. – Vol. 9(3). – P. 32–50. DOI: 10.1109/MCAS.2009.933854

13. Al-Tamimi, F. L. Lewis, M. Abu-Khalaf. Model-free Q-learning designs for linear discrete-time zero-sum games with application to H-infinity control. Automatica. – 2007. – Vol. 43. – P. 473–481. DOI: 10.1016/j.automatica.2006.09.019

14. C. J. C. H. Watkins, P. Dayan. Q-learning. Machine Learning. – 1992. – Vol. 8. – P. 279–292. DOI: 10.1007/BF00992698

Article history: Received: 8 May 2024; Final form: 22 May 2024
Accepted: 8 June 2024.

Adaptive dynamic programming for the optimal liver regeneration control

V. V. Karieva[1], S. V. Lvov[2]
[1] *Departement of Applied Mathematics*
[2] *Research Institute of Biology*
V. N. Karazin Kharkiv National University
sq. Svobody, 4, Kharkiv, Ukraine, 61022

Every living organism interacts with an environment and uses that interaction for an improvement of its own adaptability, and, as a result, one's survival and overall development. The process of evolution shows us that different species change methods of interaction with an environment with passage of time, which leads to natural selection and survival of the most adaptive ones. This learning, which based on actions, or reinforcement learning may embrace the idea of optimal behavior occurring in environmental systems. We describe mathematical formulas for reinforcement learning and the practical integration method also known as adaptive dynamic programming. That gives us the overall concept of controllers for artificial biological systems that both learn and show the optimal behavior.

This paper reviews the formulation of the upper optimality problem, for which the optimal regulation strategy is guaranteed to be better or equivalent to objective regulation rules that can be observed in natural biological systems.

In cases of optimal reinforcement learning algorithms the learning process itself moves from the analysis of the item take on system dynamics to the much higher level. The object of interest now is not the details of the system dynamics, but the quantity efficiency index, which clearly represents how optimally the control system works. Such scheme of reinforcement learning is learning technique of optimal behavior in order to monitor the response to non-optimal control strategies.

The purpose of this article is to show the possibility of using of reinforcement learning methods, the adaptive dynamic programming (ADP) in particular, to control biological systems using feedback. This article shows the on-line methods for solving the problem of searching the upper optimality estimate with adaptive dynamic programming.

Keywords: **Dynamic programming; Optimal control; Reinforcement learning.**

How to cite this article:

V. V. Karieva, S. V. Lvov, Adaptive dynamic programming for the optimal liver regeneration control, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 99, 2024, p. 22–35 (in Ukrainian). DOI: 10.26565/2221-5646-2024-99-02

ISSN 2221-5646(Print) 2523-4641(Online)
Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics”
2024, Vol. 99, p. 36–50
DOI: 10.26565/2221-5646-2024-99-03
УДК 517.977

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
2024, Том 99, с. 36–50

D. M. Andreieva
PhD student
Department of Applied Mathematics
V. N. Karazin Kharkiv National University
Svobody sqr., 4, Kharkiv, Ukraine, 61022
andrejeva_darja@ukr.net *http://orcid.org/0000-0002-1767-5392*

S. Yu. Ignatovich
DSc math, prof.
Department of Applied Mathematics
V. N. Karazin Kharkiv National University
Svobody sqr., 4, Kharkiv, Ukraine, 61022
s.ignatovich@karazin.ua *http://orcid.org/0000-0003-2272-8644*

Homogeneous approximations of nonlinear control systems with output and weak algebraic equivalence

In the paper, we consider nonlinear control systems that are linear with respect to controls with output; vector fields defining the system and the output are supposed to be real analytic. Following the algebraic approach, we consider series S of iterated integrals corresponding to such systems. Iterated integrals form a free associative algebra, and all our constructions use its properties. First, we consider the set of all (formal) functions of such series $f(S)$ and define the set N_S of terms of minimal order for all such functions. We introduce the definition of the maximal graded Lie generated left ideal $\mathcal{J}_S^{\max}$ which is orthogonal to the set N_S. We describe the relation between this maximal left ideal and the left ideal $\mathcal{J}_S$ generated by the core Lie subalgebra of the system which realizes the series. Namely, we show that $\mathcal{J}_S \subset \mathcal{J}_S^{\max}$. In particular, this implies that the graded Lie subalgebra that generates the left ideal $\mathcal{J}_S^{\max}$ has a finite codimension. Also, we give the algorithm which reduces the series S to the triangular form and propose the definition of the homogeneous approximation for the series S. Namely, homogeneous approximation is a homogeneous series with components that are terms of minimal order in each component of this triangular form. We prove that the set N_S coincides with the set of all shuffle polynomials of components of a homogeneous approximation. Unlike the case when the output is identical, the homogeneous approximation is not completely defined by the ideal $\mathcal{J}_S^{\max}$. In order to describe this property, we introduce two different concepts of equivalence of series: algebraic equivalence (when two series have the same homogeneous approximation) and weak algebraic equivalence (when two series have the same maximal left ideal and therefore

© D. M. Andreieva, S. Yu. Ignatovich, 2024; CC BY 4.0 license

have the same minimal realizing system). We prove that if two series are algebraically equivalent, then they are weakly algebraically equivalent. The examples show that in general the converse is not true.

Keywords: **homogeneous approximation; nonlinear control system; series of iterated integrals; core Lie subalgebra; maximal left ideal.**

2020 Mathematics Subject Classification: 93B15; 93B25; 93C10.

1. Introduction

In the paper, we consider nonlinear control systems with output of the form

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} X_i(x)u_i, \quad x(0) = 0, \quad y = h(x), \tag{1}$$

where $X_1(x), \ldots, X_m(x)$ are real analytic vector fields in a neighborhood of the origin in $\mathbb{R}^n$ and $h(x)$ is a real analytic nonzero map from a neighborhood of the origin in $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^p$ such that $h(0) = 0$.

Various problems for such systems including controllability, observability, stability, optimal control were deeply studied during many decades [6]. In particular, differential geometric methods were intensively developed which allowed applying the deep theory related to Lie algebras of vector fields [7]. Another approach based on algebraic and combinatorial tools was proposed by M. Fliess [4] and turned out to be perspective [8]. As the first step, instead of the system (1), the series of iterated integrals is considered. In particular, the algebraic approach was successfully used for studying the problem of homogeneous approximation of nonlinear control systems (1) in the case of identity output $h(x) = x$ [12]. One of the advantages is that the obtained algorithms can be efficiently implemented as computer programs [11]. We recall the main ideas in Section 2. Later, the approach was developed to study homogeneous approximations of systems (1) in the case of one-dimensional output, i.e., when $p = 1$ [1], [2].

In the present paper we consider the general case, when the output can be of arbitrary dimension. The main results are given in Section 3. We propose the definition of a homogeneous approximation of a series of iterated integrals corresponding to the system (1) (Definition 4) and describe the method to construct it (Lemma 2). Further, we introduce two definitions of equivalence for series, namely, algebraic equivalence and weak algebraic equivalence (Definitions 5 and 6), and study their properties (Theorem 1 and Corollary 1). In the case of identity output $h(x) = x$ these two kinds of equivalence coincide.

2. Background

Series of iterated integrals. Let us consider the system (1). The form of the right hand side of the system, namely, linearity in u_i, allows us to express explicitly the output y via controls

$$y(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_k \le m} c_{i_1 \ldots i_k} \eta_{i_1 \ldots i_k}(T, u), \tag{2}$$

where

$$\eta_{i_1\dots i_k}(T,u)=\int_0^T\int_0^{\tau_1}\cdots\int_0^{\tau_{k-1}}u_{i_1}(\tau_1)u_{i_2}(\tau_2)\cdots u_{i_k}(\tau_k)d\tau_k\cdots d\tau_2 d\tau_1 \qquad (3)$$

are iterated integrals and $c_{i_1\dots i_k}\in\mathbb{R}^p$ are constant coefficients that can be found via values of vector fields $X_i(x)$ and the map $h(x)$ and their derivatives at the origin,

$$c_{i_1\dots i_k}=X_{i_k}\cdots X_{i_1}h(0). \qquad (4)$$

Here X_i act as differential operators of the first order, $X_i\psi(x)=\psi'(x)X_i(x)$. Suppose we consider admissible controls from a sufficiently wide class, for example, from the unit ball of the space $L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$

$$B^T=\{u(t)=(u_1(t),\dots,u_m(t))\in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m):u_1^2(t)+\cdots+u_m^2(t)\le 1 \text{ a. e.}\}. \qquad (5)$$

Then one can show [4] that iterated integrals are linearly independent functionals. Hence, they form a basis of the linear space over $\mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_T=\mathrm{Lin}\{\eta_{i_1\dots i_k}(T,u):k\ge 1,\ 1\le i_1,\dots,i_k\le m\}.$$

The form of these basis functionals suggest introducing a concatenation operation,

$$\eta_{i_1\dots i_k}(T,u)\vee\eta_{j_1\dots j_q}(T,u)=\eta_{i_1\dots i_k j_1\dots j_q}(T,u),$$

which turns $\mathcal{F}_T$ into a free associative algebra. This interpretation allows applying algebraic and combinatorial tools for control systems (1). We briefly recall several results used in this paper below.

Abstract free associative algebra. First, let us notice that all algebras $\mathcal{F}_T$ for $T>0$ are isomorphic. Hence, we can consider the unique abstract algebra $\mathcal{F}$ isomorphic to all $\mathcal{F}_T$, and then interpret the series in the right hand side of (2) as a series of elements from $\mathcal{F}$. More specifically, let us introduce m abstract independent elements denoted by $\eta_1,\dots\eta_m$, and consider all finite sequences of these elements

$$\eta_{i_1\dots i_k}=\eta_{i_1}\cdots\eta_{i_k}.$$

Then the linear span of $\eta_{i_1\dots i_k}$ (over $\mathbb{R}$)

$$\mathcal{F}=\mathrm{Lin}\{\eta_{i_1\dots i_k}:k\ge 1,\ 1\le i_1,\dots,i_k\le m\}. \qquad (6)$$

with the concatenation operation

$$\eta_{i_1\dots i_k}\eta_{j_1\dots j_q}=\eta_{i_1\dots i_k j_1\dots j_q}$$

is a free associative algebra isomorphic to any $\mathcal{F}_T$, $T>0$.

For convenience, we use the notation for the set of multi-indices

$$M=\bigcup_{k\ge1}M_k,\quad M_k=\{I=(i_1,\dots,i_k):1\le i_1,\dots,i_k\le m\}.$$

Then, instead of the series of iterated integrals, we consider the formal series

$$S = \sum_{I \in M} c_I \eta_I \tag{7}$$

with coefficients (4). Let us introduce the linear map $c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^p$ defined on basis elements by

$$c(\eta_I) = c_I, \; I \in M.$$

Free Lie algebra and realizability conditions. Let us consider the free Lie algebra $\mathcal{L}$ generated by the same elements $\eta_1, \dots \eta_m$ as $\mathcal{F}$ and by the Lie bracket operation $[\ell_1, \ell_2] = \ell_1 \ell_2 - \ell_2 \ell_1$, $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}$. There exists a close relation between the Lie algebra $\mathcal{L}$ and the Lie algebra of vector fields L generated by $X_1(x), \dots, X_m(x)$. More specifically, let us consider the anti-homomorphism of Lie algebras $\varphi : \mathcal{L} \to L$ defined by $\varphi(\eta_i) = X_i(x)$ and such that $\varphi([\ell_1, \ell_2]) = [\varphi(\ell_2), \varphi(\ell_1)]$. Then for any $(i_1, \dots, i_k)$ and any $\ell \in \mathcal{L}$

$$c(\eta_{i_1 \dots i_k} \ell) = \varphi(\ell) X_{i_k} \cdots X_{i_1} h(0).$$

This property explains why a series of the form (7) defined by system (1) satisfies some additional conditions that require relations between coefficients. We recall the result [6]. The series (7) is called *realizable* if there exist real analytic vector fields $X_1, \dots, X_m$ and a real analytic map h such that equalities (4) are satisfied for any $I = (i_1, \dots, i_k) \in M$. Obviously, a realizable series should satisfy the following growth condition: there exist $C, C_1 > 0$ such that

$$\|c_I\| \le C_1 |I|! C^{|I|} \;\text{ for any } I \in M \tag{8}$$

where $|I|$ denotes the length of the multi-index I. For any $\ell \in \mathcal{L}$, let us denote by $F_c(\ell)$ the series

$$F_c(\ell) = \sum_{I \in M \cup \{\varnothing\}} c(\eta_I \ell) \eta_I$$

assuming $\eta_\varnothing = 1$ and introduce the *Lie rank of the series* S as

$$\rho_L(c) = \dim \{F_c(\ell) : \ell \in \mathcal{L}\}.$$

The following realizability theorem [6] holds: the series (7) satisfying the growth condition (8) is realizable if and only if its Lie rank is finite, $\rho_L(c) < \infty$. In this case, $n = \rho_L(c)$ is the minimal dimension of the system that realizes the series; we call such a system *a minimal realization* of the series.

Iterated integrals and grading in abstract algebras. Let us turn to iterated integrals (3). If the control belongs to the set (5), then obviously $|\eta_I(T, u)| \le \frac{1}{k!} T^k$, where $k = |I|$. Hence, locally, when T is small, the main role is played by terms of the series S containing integrals of minimal length. Algebraically, we express this property introducing the grading in the algebra $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}^k, \quad \mathcal{F}^k = \mathrm{Lin}\{\eta_I : |I| = k\},$$

and the corresponding grading in the Lie algebra $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^k, \quad \mathcal{L}^k = \mathcal{L} \cap \mathcal{F}^k.$$

If $a \in \mathcal{F}^k$, we say that a is homogeneous and has the order k and write $\mathrm{ord}(a) = k$.

In [5], [11], [12], [13], [14], the particular case of systems (1) was considered where $h(x) = x$ was an identity output. In this case, the output coincides with the trajectory of the system. For such systems, the concept of homogeneous approximation was studied by use of algebraic approach. We recall the main constructions.

Core Lie subalgebra of the system and its graded left ideal. Suppose the series (7) with n-dimensional coefficients satisfies the growth condition (8), the Rashevsky-Chow condition

$$c(\mathcal{L}) = \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

and the realizability condition of the following form:

$$\text{if} \ \ c(\ell) = 0 \ \ \text{for some} \ \ \ell \in \mathcal{L}, \ \ \text{then} \ \ c(a\ell) = 0 \ \ \text{for any} \ \ a \in \mathcal{F}. \tag{10}$$

Then it is realizable and the minimal realizing system (1) such that $h(x) = x$ has the dimension n. Let us introduce the subspaces

$$\mathcal{P}^k = \{\ell \in \mathcal{L}^k : c(\ell) \in c(\mathcal{L}^1 + \cdots + \mathcal{L}^{k-1})\}, \ k \geq 0,$$

and the Lie subalgebra [5]

$$\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}^k,$$

which is called *the core Lie subalgebra* of the system (1). One can show that its codimension in $\mathcal{L}$ equals n.

Now, we choose any homogeneous elements $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathcal{L}$ such that

$$\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m} + \mathrm{Lin}\{\ell_1, \ldots, \ell_n\} = \mathcal{L};$$

for convenience we assume that $\mathrm{ord}(\ell_i) \leq \mathrm{ord}(\ell_j)$ if $i < j$. Besides, we choose any homogeneous basis of $\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}$ and denote it by $\{\ell_i\}_{i=n+1}^{\infty}$. Thus, $\{\ell_i\}_{i=1}^{\infty}$ is a homogeneous basis of the Lie algebra $\mathcal{L}$.

This allows us to use the Poincaré-Birkhoff-Witt Theorem [10] which says that a basis of the associative algebra $\mathcal{F}$ can be obtained by use of the basis of the Lie algebra $\mathcal{L}$. Namely, the set

$$\{\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_k}^{q_k} : k \geq 1, \ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k, \ q_1, \ldots, q_k \geq 1\} \tag{11}$$

is a homogeneous basis of $\mathcal{F}$, where we denote $\ell^q = \ell \cdots \ell$ (q times). Having in mind the realizability condition (10), we introduce the *graded left ideal* generated by the core Lie subalgebra,

$$\mathcal{J}_{X_1,\ldots,X_m} = \mathrm{Lin}\{a\ell : a \in \mathcal{F} + \mathbb{R}, \ell \in \mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}\}.$$

It can be shown that if $a \in \mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m} \cap \mathcal{F}^k$, then $c(a) \in c(\mathcal{F}^1 + \cdots + \mathcal{F}^{k-1})$. Roughly speaking, this means that elements from the left ideal $\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$ cannot be leading terms in the series (7) corresponding to the system with respect to the grading in $\mathcal{F}$.

Dual basis and homogeneous approximation of the system. It turns out that the left ideal $\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$ can be described in another way. Let us introduce the inner product in $\mathcal{F}$ assuming that the basis consisting of elements η_I is orthonormal. Also, introduce the *shuffle product* in $\mathcal{F}$ by the recursive rule

$$\begin{gathered}\eta_i \sqcup\!\sqcup\, \eta_j = \eta_{ij} + \eta_{ji},\\ \eta_i \sqcup\!\sqcup\, \eta_{j_1\dots j_k} = \eta_{j_1\dots j_k} \sqcup\!\sqcup\, \eta_i = \eta_i\eta_{j_1\dots j_k} + \eta_{j_1}(\eta_i \sqcup\!\sqcup\, \eta_{j_2\dots j_k}),\ \ k \ge 2,\\ \eta_{i_1\dots i_s} \sqcup\!\sqcup\, \eta_{j_1\dots j_k} = \eta_{i_1}(\eta_{i_2\dots i_s} \sqcup\!\sqcup\, \eta_{j_1\dots j_k}) + \eta_{j_1}(\eta_{i_1\dots i_s} \sqcup\!\sqcup\, \eta_{j_2\dots j_k}),\ \ s,k \ge 2.\end{gathered}$$

This operation is justified by the following relation with multiplication of iterated integrals,

$$\eta_{i_1\dots i_s}(T,u)\,\eta_{j_1\dots j_k}(T,u) = (\eta_{i_1\dots i_s} \sqcup\!\sqcup\, \eta_{j_1\dots j_k})(T,u),$$

where in the left hand side there is the (usual) product of two functionals and in the right hand side we find the shuffle product in $\mathcal{F}$ and then substitute iterated integrals instead of the corresponding elements of $\mathcal{F}$.

Then, the dual (with respect to the inner product) basis for the basis (11) has the form [9]

$$d_{i_1\dots i_k}^{q_1\dots q_k} = \frac{1}{q_1!\cdots q_k!} d_{i_1}^{\sqcup\!\sqcup\, q_1} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup\, d_{i_k}^{\sqcup\!\sqcup\, q_k},$$

where $d^{\sqcup\!\sqcup\, q} = d \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup\, d$ (q times); for brevity we use the notation $d_i = d_i^1$. More specifically, d_i are orthogonal to all elements of the basis (11) except ℓ_i and the inner product of d_i and ℓ_i equals 1. Moreover, due to the special choice of the basis $\{\ell_i\}_{i=1}^{\infty}$, the set

$$\{d_1^{\sqcup\!\sqcup\, q_1} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup\, d_n^{\sqcup\!\sqcup\, q_n} : q_1 + \cdots + q_n \ge 1\}$$

forms a basis of the orthogonal complement $\mathcal{J}^{\perp}_{X_1,\dots,X_m}$ to the left ideal $\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$ [12].

Finally, one can prove that there exists a change of variables $z = F(x)$ in the system (1) which reduces its series to the form

$$F(S) = \begin{pmatrix} d_1 + \rho_1 \\ \cdots \\ d_n + \rho_n \end{pmatrix},$$

where ρ_i contain terms of order greater than $\operatorname{ord}(d_i)$. Taking into account the sense of grading, we can consider the series

$$\widehat{S} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \cdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

as a homogeneous approximation of the series S. Moreover, it can be shown that there exists a system with the series $\widehat{S}$; this system is naturally considered as a homogeneous approximation of the system (1). We emphasize that the series $\widehat{S}$, the system corresponding to this series, and the change of variables can be explicitly found and the algebraic framework allows efficient use of numerical computation [11], [13].

3. Main result

Let us consider a series S of the form (7). We assume that it is realizable and $\rho_L(S) = n$. Without loss of generality we assume that each component S_i of the series S is nonzero.

Definition 1. *Denote by r_j the minimal order of terms included to the component S_j of the series* (7),

$$r_j = \min\{k : (c_I)_j \neq 0 \text{ for some } I \in M_k\}, \ j = 1, \dots, p.$$

Define the minimal part of the series S as

$$S_{\min} = \begin{pmatrix} (S_1)_{\min} \\ \cdots \\ (S_p)_{\min} \end{pmatrix},$$

where

$$(S_j)_{\min} = \sum_{|I|=r_j} (c_I)_j \eta_I, \ j = 1, \dots, p.$$

Remark. In the paper [2] we considered one-dimensional series, i.e., the case $p = 1$, where we used the notation $\widehat{S}$ instead of $S_{\min}$ and called it “a homogeneous approximation” of the series S. However, for $p > 1$, such a definition of a homogeneous approximation is not natural, which is shown by the following example.

Example. Consider the series

$$S = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 + \eta_{21} + \eta_{211} \end{pmatrix}.$$

In this case $S_{\min} = (\eta_1, \eta_1)^\top$. However, the transformation $F(x) = (x_1, x_2 - x_1)^\top$ reduces S to the form $F(S) = (\eta_1, \eta_{21} + \eta_{211})^\top$, and $(F(S))_{\min} = (\eta_1, \eta_{21})^\top$ has more reasons to be considered as a homogeneous approximation of the series S. Actually, in this case S is realized by the system

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_1 + x_1 u_2 + \tfrac{1}{2} x_1^2 u_2 \end{aligned} \tag{12}$$

with the output $y = h(x) = x$ while $(F(S))_{\min}$ is realized by the homogeneous approximation [12] of the system (12)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 u_2 \end{aligned}$$

with the output $y = h(x) = x$.

Below, by a *formal r-dimensional mapping* we mean any formal series of the form

$$f(a_1, \dots, a_p) = \sum_{q_1+\cdots+q_p \geq 1} f_{q_1 \dots q_p} a_1^{ш q_1} \text{ ш } \cdots \text{ ш } a_p^{ш q_p},$$

where $f_{q_1 \dots q_p} \in \mathbb{R}^r$. In particular, if $r = 1$, we call f a *formal function.*

If f is a formal function, then $f(S)$ is a series of elements of $\mathcal{F}$ with one-dimensional coefficients. Then $(f(S))_{\min}$ is the sum of elements of the minimal order from this series.

We adopt the following notation. Given a realizable series (7), we denote by $\mathcal{L}_S$ the core Lie subalgebra of a system which is the minimal realization of the series S; by $\mathcal{J}_S$ we denote the graded left ideal generated by $\mathcal{L}_S$.

Lemma 1. *Let S be a realizable series of the form* (7)*. Then for any formal function $f(a_1, \dots, a_p)$*

$$\mathcal{J}_S \subset (f(S))_{\min}^{\perp}.$$

Proof. Let $\operatorname{codim}(\mathcal{L}_S) = \rho_L(c) = n$. Let us consider a realization of S and its (n-dimensional) series $\widetilde{S}$. Then, without loss of generality, we can choose the series $\widetilde{S}$ in the form

$$\widetilde{S}_k = d_k + R_k,\ k = 1, \dots, n,$$

where d_k are elements of the dual basis constructed as described in the previous section, R_k contains terms of order greater than $\operatorname{ord}(d_k)$, and $S = h(\widetilde{S})$, where h is a formal p-dimensional mapping. It is clear that $(f(S))_{\min} = (f(h(\widetilde{S})))_{\min}$ equals a shuffle polynomial of d_k. Hence, as was shown in [12], $(f(S))_{\min} \in \mathcal{J}_S^{\perp}$, which proves the lemma.

Now, following the idea of the paper [2], we introduce the maximal left ideal which is orthogonal to any element $(f(S))_{\min}$. First, recall the following definition.

Definition 2. [2] *We say that a linear subspace $\mathcal{J}' \subset \mathcal{F}$ is a graded Lie generated left ideal if there exists a graded Lie subalgebra $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ such that*

$$\mathcal{J}' = \operatorname{Lin}\{a\ell : a \in \mathcal{F} + \mathbb{R},\ \ell \in \mathcal{L}'\}.$$

If this is the case, we say that $\mathcal{J}'$ is generated by $\mathcal{L}'$. We denote the set of all graded Lie generated left ideals by D.

In particular, $\mathcal{J}_S \in D$; it is generated by $\mathcal{L}_S$.

Now we introduce the following subset of graded Lie generated left ideals:

$$D_S = \{\mathcal{J} \in D : \mathcal{J} \subset (f(S))_{\min}^{\perp} \text{ for any formal function } f\}.$$

Lemma 1 implies that $\mathcal{J}_S \in D_S$, therefore, $D_S \neq \varnothing$.

Obviously, there exists the unique maximal (in the sense of inclusion) left ideal in the set D_S. We denote it by $\mathcal{J}_S^{\max}$ and denote the Lie subalgebra that generates $\mathcal{J}_S^{\max}$ by $\mathcal{L}_S^{\max}$. Let $r = \operatorname{codim}(\mathcal{L}_S^{\max})$. Since $\mathcal{L}_S \subset \mathcal{L}_S^{\max}$, we have $r \leq n$.

Now we apply the construction of a dual basis described in the previous section to the Lie subalgebra $\mathcal{L}_S^{\max}$. Namely, we choose homogeneous elements $\widehat{\ell}_1, \ldots, \widehat{\ell}_r \in \mathcal{L}$ such that $\mathrm{ord}(\widehat{\ell}_i) \leq \mathrm{ord}(\widehat{\ell}_j)$ if $i < j$ and

$$\mathcal{L}_S^{\max} + \mathrm{Lin}\{\widehat{\ell}_1, \ldots, \widehat{\ell}_r\} = \mathcal{L}.$$

Also, we choose a homogeneous basis $\{\widehat{\ell}_i\}_{i=r+1}^{\infty}$ of $\mathcal{L}_S^{\max}$. Finally, we apply the Poincaré-Birkhoff-Witt Theorem and construct a dual basis

$$\widehat{d}_{i_1\ldots i_k}^{q_1\ldots q_k} = \frac{1}{q_1!\cdots q_k!}\widehat{d}_{i_1}^{\,ш q_1} ш \cdots ш \widehat{d}_{i_k}^{\,ш q_k},$$

where the notation $\widehat{d}_i = \widehat{d}_i^1$ is used. Analogously to [12] it can be shown that the set

$$\{\widehat{d}_1^{\,ш q_1} ш \cdots ш \widehat{d}_r^{\,ш q_r} : q_1 + \cdots + q_r \geq 1\}$$

forms a basis of $(\mathcal{J}_S^{\max})^{\perp}$. Since $(f(S))_{\min} \subset (\mathcal{J}_S^{\max})^{\perp}$, then $(f(S))_{\min}$ is a shuffle polynomial of $\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_r$ for any formal function f.

Definition 3. *For a given set $A \subset \mathcal{F}$, we define a shuffle span of the set A as*

$$A^{sh} = \mathrm{Lin}\{a_1^{ш i_1} ш \cdots ш a_k^{ш i_k} : k \geq 1, a_1, \ldots, a_k \in A,\ i_1, \ldots, i_k \geq 0\}.$$

Let us consider the subspace

$$N_S = \{(f(S))_{\min} : f \text{ is a formal function}\}. \tag{13}$$

As is shown above, any element of N_S is a shuffle polynomial of $\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_r$, that is,

$$N_S \subset \{\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_r\}^{sh}.$$

Thus, any element of N_S is a shuffle polynomial of r elements, where $r \leq n = \rho_L(c)$. However, elements $\widehat{d}_i$ may not belong to the set N_S. We show how one can find a "shuffle basis" of the set N_S, that is, elements of N_S that generate the set N_S by using shuffles. Below we say that several elements are *polynomially independent* if any of them does not equal a shuffle polynomial of the others.

Lemma 2. *There exist $q \leq p$ homogeneous polynomially independent elements $\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_q \in N_S$ such that*

$$N_S = \{\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_q\}^{sh}. \tag{14}$$

Proof. We describe the algorithm for finding such elements $\widehat{a}_i$. It is a generalization of the algorithm [3], [14] for finding a homogeneous approximation of a series of Lie rank n satisfying the Rashevsky-Chow condition (9).

Step 1. Assume that the components of S are nonzero. Find the minimal order of all components,

$$\alpha_1 = \min\{\mathrm{ord}((S_i)_{\min}) : i = 1, \ldots, p\}.$$

Find a linear nonsingular mapping F such that the elements $((F(S))_i)_{\min} \in \mathcal{F}^{\alpha_1}$ for $i = 1, \dots, n_1$ are linearly independent and $(F(S))_i$ contain only elements of order greater than α_1, $i = n_1 + 1, \dots, p$. Denote $S^1 = F(S)$.

Step $k \geq 2$. If $n_{k-1} = p$, then stop. If not, suppose that after the $(k-1)$-th step we obtain the series S^{k-1} for which the elements $(S_1^{k-1})_{\min}, \dots, (S_{n_{k-1}}^{k-1})_{\min}$ of order no greater than α_{k-1} are polynomially independent and S_i^{k-1} equal zero or contain only elements of order greater than α_{k-1} for $i = n_{k-1} + 1, \dots, p$. Here $\alpha_1 < \dots < \alpha_{k-1}$ and $n_1 < \dots < n_{k-1}$. On the current step we find the mapping that does not change the components $S_1^{k-1}, \dots, S_{n_{k-1}}^{k-1}$.

Consider components S_i^{k-1}, $i = n_{k-1} + 1, \dots, p$. If all of them are zero, then stop. Otherwise, find the minimal order of all nonzero components,

$$\alpha_k = \min\{\operatorname{ord}((S_i^{k-1})_{\min}) : i = n_{k-1} + 1, \dots, p,\ S_i^{k-1} \neq 0\} > \alpha_{k-1}.$$

Without loss of generality assume that $(S_i^{k-1})_{\min} \in \mathcal{F}^{\alpha_k}$, $i = n_{k-1} + 1, \dots, n'_k$, and S_i^{k-1} contain only elements of order greater than α_k or $S_i^{k-1} = 0$ for $i > n'_k$. (This can be achieved by swapping components of the series.)

Now consider the components S_i^{k-1} successively, for $i = n_{k-1} + 1, \dots, n'_k$.

Case 1. If $(S_i^{k-1})_{\min}$ belongs to the shuffle span of $(S_1^{k-1})_{\min}, \dots, (S_{i-1}^{k-1})_{\min}$, then there exists a polynomial $F_i(x) = x_i + p_i(x_1, \dots, x_{i-1})$ such that $F_i(S^{k-1})$ equals zero or contains only elements of order greater than α_k. Then replace the i-th component of the series by $F_i(S^{k-1})$ leaving the other components unchanged and pass to the next i.

Case 2. If $(S_i^{k-1})_{\min}$ is polynomially independent of $(S_1^{k-1})_{\min}, \dots, (S_{i-1}^{k-1})_{\min}$, then pass to the next i.

If for all i only Case 1 occurs, we obtain a mapping F such that $(F(S^{k-1}))_i$ for all $i = n_{k-1} + 1, \dots, n'_k$ equals zero or contains only elements of order greater than α_k. Then repeat the k-th step with the series $F(S^{k-1})$.

If not, then we obtain the series $S^k = F(S^{k-1})$ such that $S_i^k = S_i^{k-1}$ for $i = 1, \dots, n_{k-1}$, and $(S_1^k)_{\min}, \dots, (S_{n_k}^k)_{\min}$ have the order no greater than α_k and are polynomially independent, $n_k \geq n_{k-1} + 1$, and S_i^k equal zero or contain only elements of order greater than α_k for $i = n_k + 1, \dots, p$. In this case, pass to the $(k+1)$-th step.

We emphasize that the case when the algorithm needs an infinite number of steps is not excluded. In this case, after an infinite number of steps one or several components of the series become zero.

As a result, we obtain the series

$$F(S) = \begin{pmatrix} \widehat{a}_1 + R_1 \\ \cdots \\ \widehat{a}_q + R_q \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

where $\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_q$ are polynomially independent, that is, any of them does not equal a shuffle polynomial of the others, and R_i contain elements of order greater than $\mathrm{ord}(\widehat{a}_i)$. We notice that the mapping F constructed by this algorithm is invertible. Hence, for any formal function f we obtain that $(f(S))_{\min} = (f(F^{-1}(F(S))))_{\min}$ is a shuffle polynomial of $\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_q$. Moreover, the elements $\widehat{a}_i$ and any shuffle polynomial of them can be obtained as $(f(S))_{\min}$ by some formal function f, which proves the lemma.

As follows from the proof, elements $\widehat{a}_i$ are defined uniquely up to shuffle polynomials. Moreover, all elements $\widehat{a}_i$ belong to N_S and are polynomially independent. Taking into account the equality (14), we say that the set $\{\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_q\}$ given by the algorithm is *a shuffle basis* of the set N_S.

Remark. We notice that the number q can be less than, equal, or greater than r. For example, for the one-dimensional series $S = \eta_{21}$, we have $S_{\min} = S$, that is, $q = p = 1$. In this case, $r = n = 2$, and the dual basis can be chosen as $d_1 = \widehat{d_1} = \eta_1$, $d_2 = \widehat{d_2} = \eta_{21}$. However, for the series

$$S = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_{12} + \eta_{21} \\ \eta_{122} + \eta_{212} + \eta_{221} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 \sqcup\!\sqcup \eta_2 \\ \eta_1 \sqcup\!\sqcup \eta_2 \sqcup\!\sqcup \eta_2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

with $q = p = 3$, we obviously get $r = n = 2$.

Example. For the following series, the algorithm described above requires infinite number of steps:

$$S = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 + \frac{1}{2!}\eta_1^{\sqcup\!\sqcup 2} + \dots + \frac{1}{k!}\eta_1^{\sqcup\!\sqcup k} + \dots \end{pmatrix}$$

Actually, the map $F(x) = (x_1, x_2 - e^{x_1})^\top$ reduces S to the form $F(S) = (\eta_1, 0)^\top$.

Finally, we notice that elements $\widehat{a}_i$, which are polynomially independent, can satisfy shuffle-polynomial equalities. For example, for the series (16), we can choose $\widehat{a}_i = S_i$ and we have $\widehat{a}_1 \sqcup\!\sqcup \widehat{a}_3 = \widehat{a}_2 \sqcup\!\sqcup \widehat{a}_2$.

Taking into account Lemma 2, we propose the following definition of a homogeneous approximation of a series of the form (7).

Definition 4. *We say that the series*

$$\widehat{S} = \begin{pmatrix} \widehat{a}_1 \\ \cdots \\ \widehat{a}_q \end{pmatrix},$$

where $\widehat{a}_i$ are homogeneous polynomially independent elements, is a homogeneous approximation of the series (7) *if there exists an invertible formal mapping F such that the series $F(S)$ has the form* (15).

Remark. If a series is such that $p = \rho_L(c) = n$ and satisfies the Rashevsky-Chow condition (9), then this definition coincides with the usual definition of homogeneous approximation [12], [3]; in this case $q = p = n$ and $\widehat{a}_i$ can be chosen as $\widehat{a}_i = d_i$, $i = 1, \ldots, n$. On the other hand, if $p = 1$, then this definition coincides with the definition of homogeneous approximation proposed in [2]; in this case $\widehat{a}_1$ can be chosen as $\widehat{a}_1 = \widehat{S} = S_{\min}$.

Definition 5. *We say that two series are algebraically equivalent if they have the same homogeneous approximation.*

Lemma 2 implies the following result.

Theorem 1. *Two series S^1 and S^2 are algebraically equivalent if and only if $N_{S^1} = N_{S^2}$, where the sets N_{S^i} are defined for series S^i as in* (13), *i.e.,*

$$N_{S^i} = \{(f(S^i))_{\min} : f \text{ is a formal function}\}, \quad i = 1, 2.$$

As elements $\widehat{a}_i$ of a homogeneous approximation, any shuffle basis of the set N_{S^i} can be chosen.

We emphasize that two algebraically equivalent series can have unequal dimensions.

Definition 5 generalizes the definition of A-equivalence for series with $p = \rho_L(c) = n$ satisfying the Rashevsky-Chow condition [5]. However, this definition is not so natural for general series (7). For example, the series (16) and the series

$$S' = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

are very similar since they can be reconstructed from the same two-dimensional system though they are not algebraically equivalent: obviously, $N_S \neq N_{S'}$. This is because in the general case the set N_S is not completely defined by the maximal left ideal. In order to formulate this property, we propose the following definition.

Definition 6. *We say that two series S^1 and S^2 are weakly algebraically equivalent if their maximal left ideals coincide, i.e., $\mathcal{J}^{\max}_{S^1} = \mathcal{J}^{\max}_{S^2}$.*

Obviously, if $N_{S^1} = N_{S^2}$, then $\mathcal{J}^{\max}_{S^1} = \mathcal{J}^{\max}_{S^2}$. Therefore, we get the following corollary.

Corollary 1. *If two series S^1 and S^2 are algebraically equivalent, then they are weakly algebraically equivalent.*

Example. Let us consider two one-dimensional series

$$S^1 = \eta_1 \quad \text{and} \quad S^2 = \eta_{11}.$$

Recall that $\eta_{11} = \frac{1}{2}\eta_1 ш \eta_1$, therefore, both series have the same maximal left ideal; their one-dimensional realization is $\dot{x}_1 = u_1$. Hence, S^1 and S^2 are weakly algebraically equivalent. However, the sets N_{S^1} and N_{S^2} do not coincide since $\eta_1 \in N_{S^1}$ but $\eta_1 \notin N_{S^2}$. Thus, S^1 and S^2 are not algebraically equivalent.

Example. Consider the series

$$S = \begin{pmatrix} \eta_2 + \eta_{21} \\ \eta_{22} + \eta_{221} \end{pmatrix}.$$

Applying the algorithm described in the proof of Lemma 2, we use the mapping $F(x) = (x_1, -x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^\top$. Since

$$-\eta_{22} - \eta_{221} + \tfrac{1}{2}(\eta_2 + \eta_{21}) ш (\eta_2 + \eta_{21}) = -\eta_{221} + \eta_2 ш \eta_{21} + R = \eta_{221} + \eta_{212} + R,$$

where $\mathrm{ord}(R) = 4$, we obtain

$$F(S) = \begin{pmatrix} \eta_2 + \eta_{21} \\ \eta_{221} + \eta_{212} + R \end{pmatrix}.$$

Hence, as a homogeneous approximation of the series S we can take $(F(S))_{\min}$, i.e.,

$$\widehat{S} = \begin{pmatrix} \widehat{a}_1 \\ \widehat{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_2 \\ \eta_{221} + \eta_{212} \end{pmatrix}.$$

Therefore, $N_S = \{\eta_2, \eta_{221} + \eta_{212}\}^{sh}$. Hence, $\mathcal{L}_S^{\max}$ cannot contain η_2 and $[\eta_2, [\eta_2, \eta_1]]$ since these elements are not orthogonal to the elements $\widehat{a}_1$, $\widehat{a}_2$ respectively and cannot contain η_1 since $\eta_{22}\eta_1$ is not orthogonal to $\widehat{a}_2$. Actually, $\mathcal{L}_S^{\max} = \mathrm{Lin}\{[\eta_1, \eta_2], [\eta_1, [\eta_1, \eta_2]]\} + \sum_{k=4}^{\infty} \mathcal{L}^k$ and therefore the minimal realization of $\widehat{S}$ can be chosen as

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 u_2 \end{aligned}$$

with the dual basis elements $d_1 = \eta_1$, $d_2 = \eta_2$, $d_3 = \eta_{221} + \eta_{212}$. Obviously, $N_S \subset \{d_1, d_2, d_3\}^{sh}$. Let us consider the series

$$S' = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_{221} + \eta_{212} \end{pmatrix}.$$

Obviously, it is weakly algebraically equivalent but not algebraically equivalent to S.

REFERENCES

1. D.M. Andreieva, S.Yu. Ignatovich. Homogeneous approximation for minimal realizations of series of iterated integrals, Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2024. – Vol. **96.** – P. 23–39. 10.26565/2221-5646-2022-96-02

2. D.M. Andreieva, S.Yu. Ignatovich. Homogeneous approximation of one-dimensional series of iterated integrals and time optimality, Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications. – 2023. – Vol. **31**, No **2**. – P. 1–23. 10.15421/142308

3. A. Bellaïche. The tangent space in sub-Riemannian geometry, in: Progress in Mathematics, Bellaïche, A. and Risler, J. J., eds., Birkhäuser Basel, 1996. – Vol. **144**. – P. 1–78. 10.1007/978-3-0348-9210-0_1

4. M. Fliess. Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives, Bull. Soc. Math. France. – 1981. – Vol. **109**. – P. 3–40.

5. S. Yu. Ignatovich. Realizable growth vectors of affine control systems, J. Dyn. Control Syst. – 2009. – Vol. **15**. – P. 557–585. 10.1007/s10883-009-9075-y

6. A. Isidori. Nonlinear control systems. 3-rd ed. Springer-Verlag, London. – 1995. – 549 p. 10.1007/978-1-84628-615-5

7. V. Jurdjevic. Geometric control theory. Cambridge University Press. – 1996. – 508 p. 10.1017/CBO9780511530036

8. M. Kawski. Combinatorial algebra in controllability and optimal control. In: Algebra and Applications-2 : Combinatorial Algebra and Hopf Algebras. A. Makhlouf (Ed.), Hoboken ISTE Ltd. / John Wiley and Sons, 2021. – P. 221-286. ISBN 978-1-119-88091-2

9. G. Melançon, C. Reutenauer. Lyndon words, free algebras and shuffles, Canad. J. Math. – 1989. – Vol. **41**. – P. 577–591. 10.4153/CJM-1989-025-2

10. C. Reutenauer. Free Lie algebras. Clarendon Press, Oxford. – 1993. – 286 p.

11. G. Sklyar, P. Barkhayev, S. Ignatovich, V. Rusakov. Implementation of the algorithm for constructing homogeneous approximations of nonlinear control systems, Mathematics of Control, Signals, and Systems. – 2022. – Vol. **34**. – No **4**. – P. 883–907. 10.1007/s00498-022-00330-5

12. G.M. Sklyar, S.Yu. Ignatovich. Free algebras and noncommutative power series in the analysis of nonlinear control systems: an application to approximation problems, Dissertationes Mathematicae. – 2014. – Vol. **504.** – P. 1–88. 10.4064/dm504-0-1

13. G. Sklyar, S. Ignatovich. Construction of a homogeneous approximation. In: Advanced, Contemporary Control. Advances in Intelligent Systems and Computing, A. Bartoszewicz, J. Kabziński, J. Kacprzyk (Eds.), Springer, Cham. – 2020. – Vol. **1196.** – P. 611-624. 10.1007/978-3-030-50936-1_52

14. G.M. Sklyar, S.Yu. Ignatovich, P.Yu. Barkhayev. Algebraic classification of nonlinear steering problems with constraints on control, in: Advances in Mathematics Research, Nova Science Publishers, Inc.: New York. – 2005. – Vol. **6**. – P. 37–96. ISBN 9781594540325.

Article history: Received: 19 April 2024; Accepted: 20 May 2024.

How to cite this article:

D. M. Andreieva, S. Yu. Ignatovich, Homogeneous approximations of nonlinear control systems with output and weak algebraic equivalence, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 99, 2024, p. 36–50. DOI: 10.26565/2221-5646-2024-99-03

Однорідні апроксимації нелінійних керованих систем з виходом і слабка алгебраїчна еквівалентність

Д. М. Андреєва, С. Ю. Ігнатович

Кафедра прикладної математики,

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

майдан Свободи, 4, м. Харків, 61022, Україна

У роботі ми розглядаємо нелінійні керовані системи, які є лінійними за керуванням, з виходом; векторні поля, що визначають систему, і вихід вважаються дійсно аналітичними. Слідуючи алгебраїчному підходу, ми розглядаємо ряди S ітерованих інтегралів, що відповідають таким системам. Ітеровані інтеграли утворюють вільну асоціативну алгебру, і всі наші конструкції використовують її властивості. Спочатку ми розглядаємо множину всіх (формальних) функцій таких рядів $f(S)$ і визначаємо множину N_S членів мінімального порядку для всіх таких функцій. Ми вводимо означення максимального градуйованого Лі-породженого лівого ідеалу $\mathcal{J}_S^{\max}$, який є ортогональним до множини N_S. Ми описуємо зв'язки між цим максимальним лівим ідеалом і лівим ідеалом $\mathcal{J}_S$, що породжений кореневою підалгеброю Лі системи, яка реалізує ряд. А саме, ми показуємо, що $\mathcal{J}_S \subset \mathcal{J}_S^{\max}$. Зокрема, з цього випливає, що градуйована підалгебра Лі, яка породжує лівий ідеал $\mathcal{J}_S^{\max}$, має скінченну ковимірність. Також ми даємо алгоритм, який приводить ряд S до трикутної форми, і пропонуємо означення однорідної апроксимації ряду S. А саме, однорідною апроксимацією є однорідний ряд, компоненти якого – доданки мінімального порядку в кожній компоненті цієї трикутної форми. Ми доводимо, що N_S збігається з множиною тасуючих поліномів компонентів однорідної апроксимації. На відміну від випадку, коли вихід є тотожним, однорідна апроксимація не визначається повністю ідеалом $\mathcal{J}_S^{\max}$. Для того, щоб описати цю властивість, ми вводимо два різних означення еквівалентності рядів: алгебраїчну еквівалентність (коли два ряди мають одну й ту саму однорідну апроксимацію) і слабку алгебраїчну еквівалентність (коли два ряди мають один і той самий максимальний лівий ідеал і, отже, мають одну й ту саму мінімальну реалізуючу систему). Ми доводимо, що якщо два ряди є алгебраїчно еквівалентними, то вони є слабко алгебраїчно еквівалентними. Приклади показують, що обернене твердження не є правильним.

Ключові слова: **Однорідна апроксимація; нелінійна керована система; ряд ітерованих інтегралів; коренева підалгебра Лі; максимальний лівий ідеал.**

Історія статті: отримана: 19 квітня 2024; прийнята: 20 травня 2024.

ISSN 2221-5646(Print) 2523-4641(Online)
Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics”
2024, Vol. 99, p. 51–61
DOI: 10.26565/2221-5646-2024-99-04
УДК 517.954

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
2024, Том 99, с. 51–61

О. А. Макаров
доцент, кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри прикладної математики
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
makarovifamily07@gmail.com *http://orcid.org/0000-0002-9050-4987*

А. В. Чернікова
магістр з прикладної математики
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 6, Харків, Україна, 61022
chernikova2018.7419475@student.karazin.ua *http://orcid.org/0009-0005-7976-5069*

Коректність та параболічність крайової задачі для систем диференціальних рівнянь у частинних похідних

У роботі досліджується крайова двоточкова задача для систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Не для будь-якої системи існує коректна двоточкова крайова задача. Так, для рівняння

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial x_1} + i\frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial x_2}$$

не існує крайових умов вигляду $au(x_1,x_1,0) + bu(x_1,x_2,T) = \varphi(x_1,x_2)$, при яких ця крайова задача буде буде коректна в просторі Л. Шварца.
У роботі з'ясовано умови для матриці системи, за яких існують коректні крайові задачі в просторі Л. Шварца, а також вказано вигляд ціх крайових умов. Так для систем з ермітовою матрицею крайова задача з умовами наступного вигляду $u(x,0) + u(x,T) = \varphi(x)$ завжди буде коректною в просторі Л. Шварца, а також в просторах функцій кінцевої гладкості степеневого зростання. Для систем з однією просторовою змінною доведено, що завжди існують коректні крайові задачі з умовою $u(x,0) + bu(x,T) = \varphi(x)$ з додатньою b. Крім того досліджуються параболічні крайові задачі, властивостю яких є збільшування гладкості розв'язків.
З'ясовано, що при умові степеневого зростання модуля власних значень матриці системи (тобто $|\operatorname{Re}\lambda_j(s)| \geq c|s|^h - b$ з додатними c і h) існують параболічні крайові задачі. Наведено приклади коректних та параболічних крайових задач.
Аналогічні результати мають місце для лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. В якості прикладу розглянуто рівняння Гельмгольця

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \Delta u(x,t) = ku(x,t),$$

© Макаров О. А., Чернікова А. В., 2024; CC BY 4.0 license

яке не є коректним за Петровським, але для нього існує крайова задача, яка є параболічною. Для рівняння з однією просторовою змінною наведено достатні умови на рівняння другого порядку за часом, при яких існують параболічні крайові задачі.
Ключові слова: **крайова задача; коректність; параболічність; перетворення Фур'є; простір Л. Шварца.**

2020 Mathematics Subject Classification: 35S15.

Вступ

Крайова двоточкова задача для системи диференціальних рівнянь у частинних похідних відіграє важливу роль, як у самій математиці, так і в фізиці й інших застосуваннях [1, 2]. Ця задача неодноразово досліджувалася харківськими математиками Борок В. М., Макаровим О. А., Фардиголою Л. В. [3, 4, 5, 6]. Ними були отримані класи єдиності та умови коректності в класах функцій степеневого та експоненціального зростання. Не для будь-якої ситеми існує коректна двоточкова крайова задача [5].

У цій роботі досліджуються випадки систем, для яких існує коректна двоточкова крайова задача в просторі Л. Шварца, а також за яких умов ця задача буде параболічною, тобто за яких умов збільшується гладкість розв'язків. Доведено, що якщо власні значення матриці системи зростають степеневим чином, то існують параболічні крайові задачі.

Аналогічні результати справедливі також для лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку за часом.

Показано, що існує параболічна крайова задача для рівняння Гельмгольця. Детально розглянуто випадок рівняння другого порядку з однією просторовою змінною і вказано умови існування параболічної крайової задачі.

1. Постановка задачі

Розглянемо наступну крайову задачу

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) u(x,t), \tag{1}$$

$$Au(x,0) + Bu(x,T) = \varphi(x), \tag{2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$, $P\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)$ — квадратна матриця, елементами якої є диференціальні оператори зі сталими коефіцієнтами; A і B є постійними квадратними матрицями.

Важливу роль у дослідження цієї задачі відіграє визначник крайової задачі $\Delta(s) = \det\left(A + Be^{TP(s)}\right)$.

Означення 1. Задача (1)–(2) *називається коректно розв'язною* із простору Φ_1 у простір Φ_2, якщо для будь-якої функції $\varphi(x)$ із простору Φ_1 існує единий розв'язок $u(x,t)$ із простору Φ_2 $(t \in [0;t])$; і цей розв'язок неперевно залежить від $\varphi(x)$ у топології відповідних просторів.

У якості просторів Φ_1 і Φ_2 будемо розглядати простір Л. Шварца $S = \bigcap\limits_{s,l} C_l^s$, який складається з нескінченно диференційовних функцій, що спадають швидше ніж будь-який ступінь, де C_l^s – нормований простір з нормою $\|\varphi(x)\| = \sup\limits_{|k|\le s;\ x\in\mathbb{R}^n} \left(|D^k\varphi(x)|\cdot(1+|x|)^l\right)$.

Означення 2. Задача (1)–(2) називається *параболічною*, якщо $Q(s,t) = e^{tP(s)}\left(A+Be^{TP(s)}\right)^{-1}$ задовольняє оцінку $\|Q(s,t)\| \le C(1+|s|)^p \exp\left(-b\rho(t)|s|^h\right)$ з деякими додатними C, p, h, де $\rho(t) = \min\{t, T-t\}$.

У роботі [6] доведено, що коректна крайова задача буде параболічною, якщо власні значення матриці $P(s)$ задовольняють умову $\min\limits_j |\operatorname{Re}\lambda_j(s)| \ge C|s|^h - b$ при деяких додатних C, h та $b \in \mathbb{R}$.

З'ясуємо — для яких систем (1) існують коректні крайові задачі з крайовими умовами (2), і в яких випадках ці задачі будуть параболічними.

2. Випадок ермітової матриці

Розглянемо випадок, коли матриця є ермітовою

$$P(s) = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & \dots & P_{1n}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{n1}(s) & \dots & P_{nn}(s) \end{pmatrix},$$

тобто $P_{ij} = \overline{P}_{ji}$ — комплексно спряжені.

Теорема 1. *Якщо матриця $P(s)$ — ермітова, то крайова задача з умовою*

$$u(x,0) + u(x,T) = \varphi(x), \tag{3}$$

коректна у просторі S.

Доведення. Оскільки власні значення ермітової матриці є дійсними, то визначник крайової задачі $\Delta(s) = \left(1+e^{T\lambda_1(s)}\right)\dots\left(1+e^{T\lambda_n(s)}\right) \ne 0$.

Покажемо, що розв'язувальна матриця $Q(s,t) = e^{tP(s)}\left(E+e^{TP(s)}\right)^{-1}$ задовольняє степеневу оцінку. Розглянемо функцію $f(\lambda) = e^{t\lambda}\left(1+e^{T\lambda}\right)^{-1}$. Дана функція визначена на дійсній осі.
Тому матриця $Q(s,t) = f(P(\lambda))$ також визначена та задовольняє степеневу оцінку $\|Q(s,t)\| \le C(1+|s|)^p$ (див. [5]).
Тому крайова задача (1)—(3) коректна в просторі S, а також у просторах C_l^s (див. [7]).

Приклад 1. Розглянемо матрицю

$$P(s) = \begin{pmatrix} s^2 & is \\ -is & -s^2 \end{pmatrix}.$$

Це ермітова матриця, власні значення якої $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{s^4 + s^2}$. Тоді крайова задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(x,0) + u_1(x,T) = \varphi_1(x), \\ u_2(x,0) + u_2(x,T) = \varphi_2(x). \end{cases}$$

коректна у просторі S, а також у просторі C_l^s.

Теорема 2. *Якщо власні значення ермітової матриці $P(s)$ задовольняють умову $|\lambda_j(s)| \geq C|s|^h - b$ із деякими додатними C, h і дійсним b, то крайова задача (1)—(3) буде параболічною. Це означає що, якщо $\varphi(x) \in C_l^s$, то $u(x,t) \in C_{l_2}^{\infty}$, тобто будуть нескінченно диференційовними по x.*

Доведення. Це випливає з [6].

Зауваження. За цією теоремою задача, що розглядається у Прикладі 1, є параболічною.

3. Випадок загальної матриці

Розглянемо довільну поліноміальну матрицю $P(s)$.

Теорема 3. *Якщо існує дійсне число α таке, що на множинах $N_j = \{s \in \mathbb{R}^n \ : \ Re\,\lambda_j = \alpha\}$ $j = 1, 2$ виконується нерівність $Im\,\lambda_j(s) \neq \dfrac{(2k+1)}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$ то при $b = e^{-\alpha T}$ крайова задача для системи (1) з умовою*

$$u(x,0) + bu(x,T) = \varphi(x) \tag{4}$$

коректна в просторі S.

Доведення. Оскільки визначник крайової задачі

$$\Delta(s) = \left(1 + e^{T(\lambda_1(s)-\alpha)}\right) \dots \left(1 + e^{T(\lambda_n(s)-\alpha)}\right),$$

то він набуває значення 0 при $\lambda_j = \alpha + \dfrac{(2k+1)\pi i}{T}$ з деяким j. Це рівносильно умові

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\lambda_j(s) = \alpha, \\ \operatorname{Im}\lambda_j(s) = \dfrac{(2k+1)\pi}{T}. \end{cases}$$

з деякими s.

Але, у силу умови теореми, це не виконується.

Доведемо тепер, що розв'язувальна матриця $Q(s,t) = e^{tP(s)} + \left(1 + be^{TP(s)}\right)^{-1}$ задовольняє степеневу оцінку. Ця матриця визначена на спектрі матриць $P(s)$, оскільки $\Delta(s) \neq 0$.

Якщо $\operatorname{Re}\lambda < \alpha$, то $|f(\lambda)| = \left|e^{t\lambda}\left(1+e^{T(\lambda-\alpha)}\right)^{-1}\right| < C_1$, так як $|e^{t\lambda}| = e^{t\operatorname{Re}(\lambda)} \le e^{T\alpha}$.

Якщо $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$, то $|f(\lambda)| = \left|e^{(t-T)(\operatorname{Re}(\lambda)-\alpha)}\left(1+e^{-T(\lambda-\alpha)^{-1}}\right)^{-1}\right| < C_2$, так як $e^{(t-T)(\operatorname{Re}(\lambda)-\alpha}) \le 1$.

Тому значення функції $f(\lambda)$ на спектрі матриці $P(s)$ обмежені, а це означає, що й $\|Q(s,t)\| \le C(1+|s|)^p$, так як $f(P(s)) = \sum_j f(\lambda_j(s))H_j(P(s))$.

Отже, крайова задача коректна у просторі S, а також із простору $C_{l_1}^{s_1}$ в простір $C_{l_2}^{s_2}$ з деякими s_j, l_j (див. [8]).

Приклад 2.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x_1,x_2,t)}{\partial t} = u_1(x_1,x_2,t) + \dfrac{\partial^2 u_2(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_2(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^2}, \\ \dfrac{\partial u_1(x_1,x_2,t)}{\partial t} = u_1(x_1,x_2,t) + u_2(x_1,x_2,t). \end{cases}$$

Матриця $P(s) = \begin{pmatrix} 1 & -s_1^2+s_2^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Її характеристичне рівняння $(\lambda-1)^2 + s_1^2 - s_2^2 = 0$, а власні значення $\lambda_{1,2}(s) = 1 \pm \sqrt{s_2^2 - s_1^2}$.

Це означає, що $\lambda_{1,2}(s) = \begin{cases} 1 \pm \sqrt{s_2^2-s_1^2}, & \text{при} \quad |s_2| \ge |s_1|, \\ 1 \pm i\sqrt{s_1^2-s_2^2}, & \text{при} \quad |s_2| < |s_1|. \end{cases}$

Тоді для будь-яких додатніх $\alpha \ne 1$ виконуються умови теореми 3, а це означає, що відповідна крайова задача коректна в просторі S.

Теорема 4. *Якщо власні значення матриці $P(s)$ задавольняють умові $\min\limits_j |\operatorname{Re}\lambda_j(s)| \ge C|s|^h - b$ з деякими додатними C, h і дійсним b, то існує параболічна задача.*

Доведення. Покажемо, що з умов теореми 4 випливає виконання умов теореми 3.

Із умов теореми 4 випливає, що існує таке додатне r, при якому для будь яких $s : |s| > r$ виконується нерівність $|\operatorname{Re}\lambda_j(s)| \ge m > 0$.

Тоді множина $G_k = \left\{ s \in \bar{U}_r(0) \ : \ \operatorname{Im}\lambda_j(s) = \dfrac{(2k+1)\pi}{T} \right\}$ є компакт такий що $\dim G_k < n$.

Тоді $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} G_k \ne \bar{U}_r(0)$, а значить існує $s_0 \ : \ \operatorname{Re}\lambda_j(s_0) = \alpha$ таке, що $\operatorname{Im}\lambda_j(s_0) \ne \dfrac{(2k+1)\pi}{T}$, тобто виконана умова теореми 3. Таким чином, існує коректна крайова задача з умови (4), яка також буде параболічною.

Теорему доведено.

Зауваження. В Прикладі 2 крайова задача була коректною, але не параболічною. Наведемо приклад параболічної задачі.

Приклад 3.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = u_1(x,t) - \dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x_2^2}, \\ \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = u_1(x,t) + u_2(x,t). \end{cases}$$

Матриця $P(s) = \begin{pmatrix} 1 & s_1^2 + s_2^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Власні значення цієї матриці $\lambda_{1,2}(s) = 1 \pm \sqrt{s_2^2 + s_1^2}$. Вони задавольняють умовам теореми 4 і тому крайова задача з крайовими умовами

$$\begin{cases} u_1(x,0) + bu_1(x,T) = \varphi_1(x), \\ u_2(x,0) + bu_2(x,T) = \varphi_2(x), \end{cases}$$

при будь-яких додатних b буде параболічною.

4. Система з однією просторовою змінною

Розглянемо систему з однією просторовою змінною, тобто $x \in \mathbb{R}$. Тоді з теореми 3 випливає наступний результат.

Наслідок 1. Для системи (1) у випадку $x \in \mathbb{R}$ завжди існує коректна крайова задача в просторі S.
Доведення. Якщо власні значення матриці $P(s)$ дійсні, то $\operatorname{Im} \lambda_j(s) = 0$ і виконуються умови теореми 3, тобто $\operatorname{Im} \lambda_j(s) \neq \dfrac{(2k+2)\pi}{T}$; і це означає, що крайова задача з умовою $u(x,0) + bu(x,T) = \varphi$ з будь-якими $b > 0$ буде коректна в просторі S.

Якщо $\operatorname{Im} \lambda_j(s)$ — не тотожній 0, то рівняння $\lambda_j(s) - \alpha = \dfrac{(2k+2)\pi i}{T}$ рівносильно умові

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \lambda_j(s) = \alpha, \\ \operatorname{Im} \lambda_j(s) = \dfrac{(2k+2)\pi}{T}. \end{cases}$$

Друге рівняння при фіксованому k має скінченну кількість коренів, а при $k \in \mathbb{Z}$ таких коренів — зліченна множина s_k. Тоді множина значень $\operatorname{Re} \lambda_j(s_k)$ теж зліченна, тобто існує α таке, що $\operatorname{Re} \lambda_j(s) = \alpha$. Отже, виконується умова теореми 3 й існує коректна крайова задача з умовою $u(x,0) + e^{-\alpha T} u(x,T) = \varphi(x)$.

З Наслідка 1 випливає:
Наслідок 2. Якщо умова $|\operatorname{Re} \lambda_j(s)| \geq C|s|^h - b$ виконується з додатними C і h, то існує параболічна крайова задача.

Приклад 4.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = u_2(x,t). \\ \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + k^2 u_1(x,t). \end{cases}$$

Матриця $P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-s^2+k^2) & 0 \end{pmatrix}$, її власні значення $\lambda_{1,2}(s) = \pm\sqrt{s^2-k^2}$.
При $|s| \geq k$ корені $\lambda_j(s)$ дійсні, а при $|s| < k$ — корені уявні $\lambda_j(s) = \pm i\sqrt{k^2-s^2}$.
Тому крайова задача з умовою

$$\begin{cases} u_1(x,0) + bu_1(x,T) = \varphi_1(x), \\ u_2(x,0) + bu_2(x,T) = \varphi_2(x) \end{cases}$$

при $b \in (0;1)$ буде параболічною.

5. Крайова задача для диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку за часом.

Застосуємо отримані результати до рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + R\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) = 0. \tag{5}$$

Це рівняння зводиться до системи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = u_2(x,t). \\ \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = -Q\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)u_1 - R\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)u_2(x,t). \end{cases}$$

Тоді матриця $P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q(s) & -R(s) \end{pmatrix}$, а характеристичне рівняння для неї $\lambda^2 + R(s)\lambda + Q(s) = 0$.

Позначимо корені цього рівняння $\lambda_{1,2}(s)$. Тоді з теореми (3) випливає результат:

Наслідок 3. Якщо існує дійсне число α таке, що на множині $N_j = \{s \in \mathbb{R}^n \ : \ \operatorname{Re}\lambda_j(s) = \alpha\}$ $(j = 1,2)$ виконується нерівність $\operatorname{Im}\lambda_j(s) \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{T}$ при $k \in \mathbb{Z}$, то при $b = e^{-\alpha T}$ крайова задача для рівняння (5) з умовою

$$\begin{cases} u(x,0) + bu(x,T) = \varphi_1(x), \\ u'_t(x,0) + bu'_t(x,T) = \varphi_2(x) \end{cases} \tag{6}$$

буде коректна у просторі S.

Наслідок 4. Якщо $\min_j |\operatorname{Re}\lambda_j(s)| \geq C|s|^h - b$ з додатними C і h і дійсним b , тоді крайова задача для рівнянь (4) з крайовими умовами (5) буде парболічною.

В якості прикладу розглянемо рівняння Гельмгольця:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \Delta u(x,t) = ku(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ \ t \in [o,T], \ \ k \in \mathbb{R}.$$

з крайової умовою (6), де $b > 0$.

Після перетворення Фур'є за просторовими змінними отримаємо крайову задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\tilde{u}(s,t)}{\partial t^2} - |s|^2\Delta\tilde{u}(s,t) = k\tilde{u}(s,t), \\ \tilde{u}(s,0) + b\tilde{u}(s,T) = \widetilde{\varphi}_1(s), \\ \tilde{u}'_t(s,0) + b\tilde{u}'_t(s,T) = \widetilde{\varphi}_2(s). \end{cases}$$

Розв'язок має вигляд $\tilde{u}(s,t) = C_1(s)e^{\lambda(s)t} + C_2(s)e^{-\lambda(s)t}$, де $\lambda(s) = \sqrt{k+|s|^2}$. Враховуючі крайові умови, знайдемо розв'язок крайової задачі:

$$\tilde{u}(xs,t) = \\ = \frac{(\operatorname{ch}\lambda t + b\operatorname{ch}\lambda(T-t))\widetilde{\varphi}_1(s) + \left(\dfrac{\operatorname{sh}\lambda t}{\lambda} + b\cdot\dfrac{\operatorname{sh}\lambda(T-t)}{\lambda}\right)\widetilde{\varphi}_2(s)}{(1+be^{\lambda T})\,(1+be^{-\lambda T})} \tag{7}$$

при $|s|^2 + k \geq 0$.

Якщо $|s|^2 + k < 0$, то розв'язок має вигляд

$$\tilde{u}(s,t) = \\ = \frac{\left(\cos t\sqrt{-|s|^2-k} + b\cos(T-t)\sqrt{-|s|^2-k}\right)\widetilde{\varphi}_1(s)}{1+b^2+2b\cdot\cos T\sqrt{-|s|^2-k}} + \\ + \left(\sin t\sqrt{-|s|^2-k} + b\sin(T-t)\sqrt{-|s|^2-k}\right)\cdot\frac{\widetilde{\varphi}_2(s)}{\sqrt{-|s|^2-k}}. \tag{8}$$

Таким чином, розв'язок належіть простору S, якщо $\varphi_1(s)$ і $\varphi_2(s)$ належать цьому простору.

Крім того, оскільки при великих s, $\tilde{u}(s,t)$ має вигляд (7) і виконується нерівність $\tilde{u}(s,t) \leq C\exp(-\rho(t)|s|)$, то $u(x,t)$ — нескінченно диференційовна (якщо $\varphi_1(s)$ і $\varphi_2(s)$ належать простору $L_2(\mathbb{R}^n)$), тобто ця крайова задача параболічна.

6. Диференціальні рівняння з однією просторовою змінною.

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + R\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) = 0. \tag{9}$$

З'ясуємо при яких R і Q існують параболічні крайові задачі.

1. Нехай $R(s) = 0$, а $Q(s) = b_0 s^{2k} + b_1 s^{2k-1} + \ldots + b_{2k}$ з $b_0 < 0$. Тоді корені характеристичного рівняння

$$\lambda_j(s) = \pm\sqrt{-b_0 s^{2k} - b_1 s^{2k-1} - \ldots - b_{2k}} \sim \pm\sqrt{|b_0|}\cdot|s^k|, \quad \text{при } s\to\infty$$

і виконані умови Наслідку 4, тобто крайова задача з умовами

$$\begin{aligned} &u(x,0) + bu(x,T) = \varphi_1(x), \\ &u'_t(x,0) + bu'_t(x,T) = \varphi_2(x) \end{aligned} \tag{10}$$

буде параболічною з деяким додатним b.

2. Якщо $Q(s) = b_0 s^{2k} + b_1 s^{2k-1} + \ldots + b_{2k}$ з $b_0 < 0$, а степінь полінома $R(s)$ менше k, то

$$\lambda_j(s) = \frac{1}{2}\left(-R(s) \pm \sqrt{R(s)^2 - 4Q(s)}\right) \sim \pm\sqrt{|b_0|} \cdot |s|^k, \quad \text{при } s \to \infty$$

і теж виконані умови Наслідку 4, тобто крайова задача з умовами (10) буде параболічною.

3. Якщо $R(s) = a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \ldots + a_m$ з $a_0 \in \mathbb{R}$, а $D(s) = R(s^2) - 4Q(s) = c_0 s^m + c_1 s^{m-1} + \ldots + c_{2m}$ з додатним $c_0 \neq a_0^2$, тоді $\lambda_j(s) = \dfrac{1}{2}\left(-R(s) \pm \sqrt{R(s)^2 - 4Q(s)}\right)$.

При таких умовах $\min\limits_j |\operatorname{Re}\lambda_j(s)| \sim \dfrac{1}{2}\left|\sqrt{c_0} - |a_0|\right| \cdot |s|^m$ при $s \to \infty$ і теж виконані умови Наслідку 4, тобто існує параболічна крайова задача.

Приклад 5.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \left(a_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2)\right) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = 0.$$
$$R(s) = -a_0 s^2 - i a_1 s + a_2, \quad Q(s) = -s^4.$$

При $a_0 \neq \pm 1$ виконані умови попереднього пункту 3 і тому існує параболічна крайова задача з умовами (10) з деяким додоатним b.

Висновки.

У цій роботі досліджуються випадки систем диференціальних рівнянь у частинних похідних, для яких існує коректна двоточкова крайова задача в просторі Л. Шварца; а також з'ясовується при яких додаткових умовах на власні значення матриці $P(s)$ ця задача буде параболічною, тобто збільшується гладкість розв'язків.

Доведено що при степеневому зростанні власних значень матриці існують параболічні крайові задачі.

Аналогічні результати справедливі також для лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку за часом.

Крім того, показано що існує параболічна крайова задача для рівняння Гельмгольця.

Докладно розглянутий випадок рівнянь другого порядку за часом з однією просторовою змінною, і вказані умови, при яких існує параболічна крайова задача.

Історія статті: отримана: 29 січня 2024; останній варіант: 29 травня 2024
прийнята: 31 травня 2024.

REFERENCES

1. B. J. Ptashnik. Nonlocal boundary value problems for partial differential equations. / [B. J. Ptashnik., V. S. Ilkiv, I. I. Kmit, V. M. Polishchuk]. – 2002. K.: Scientific thought. – 416 p.
2. D. A. Levkin, O. A. Makarov, A. I. Zavgorodniy, A. V. Levkin. The theoretical research of multi-point boundary tasks. / Academic notes of the Tavri National University named after V.I. Vernadskyi. Series: Technical sciences. – 2020. — Vol. 31 (70). – №3. – P. 126–130.
DOI https://doi.org/10.32838/TNU-2663-5941/2020.3-1/20
3. V. M. Borok. On correct solvability of a boundary value problem in an infinite slab for linear equations with constant coefficients/Mathematics of the USSR-Izvestiya. – 1971. – Volume 5, Issue 4, Pages 935–953.
4. L. V. Fardigola. Nonlocal two-point boundary-value problems in a layer with differential operators in the boundary condition / Ukr.mat. journal. – 1995. – Vol.47, No **8**. – P. 1122–1128.
5. A. A. Makarov. The existence of a correct two-point boundary value problem in a layer for systems of pseudo-differential equations, Differential Equations. – 1994. – Vol. **30**, No. **1**. – P. 144–150.
6. A. A. Makarov. Parabolic boundary value problems for systems of pseudodifferential equations in an infinite layer, Differential Equations. – 1996. – Vol. **32**, No. **5**. – P. 636–642.
7. A. A. Makarov. A criterion for the correct solvability of a boundary value problem in a layer for a system of linear equations in convolutions in topological spaces. / Theoretical and applied questions of differential equations and algebra. / Sb. scientific works. – Kiev: Naukova Dumka. – 1978. – P. 178–180.
8. L. Hörmander. The Analysis of linear partial differential operators. II. / Differential operators with constant coefficients. – Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York Tokyo. – 1983. – 455 p.

Article history: Received: 29 January 2024; Final form: 29 May 2024
Accepted: 31 May 2024.

Well-posedness and parabolicity of the boundary-value problem for systems of partial differential equations

A. A. Makarov, A. V. Chernikova
Departement of Applied Mathematics
V. N. Karazin Kharkiv National University
Svobody sq., 4, Kharkiv, Ukraine, 61022

The two-point boundary value problem for systems of linear partial differential equations is studied in the paper. A correct two-point boundary value problem exists not for any arbitrary system. Thus, for example, for equation

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + i\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2}$$

there are no boundary conditions of the form $au(x_1, x_1, 0) + bu(x_1, x_2, T) = \varphi(x_1, x_2)$, under which this boundary value problem will be correct in the Schwartz space.
In the paper found the conditions for the matrix of the system under which exist well posed boundary-value problem are found in the Schwartz space, and also indicates the form of these boundary conditions. So, for systems with a Hermitian matrix, the boundary value problem with conditions of form

$$u(x, 0) + u(x, T) = \varphi(x)$$

will always be of a well posed in the Schwartz spaces, as well as in the spaces of functions of finite smoothness of power growth. For systems with one space variable, it is proved that always exist well posed boundary value problems with the condition $u(x, 0) + bu(x, T) = \varphi(x)$ if b is positive. In addition, parabolic boundary value problems with property of increasing smoothness of the solutions are investigated.
It was found that there are parabolic boundary value problems under the condition of power-law growth of the modulus of the eigenvalues of the matrix of the system (that is, $|\operatorname{Re}\lambda_j(s)| \geq c|s|^h - b$ with positive c and h). Examples of correct and parabolic boundary value problems are given.

Similar results hold for linear partial differential equations. The Helmholtz equation

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \Delta u(x,t) = ku(x,t),$$

is considered as an example. It is not well posed according to Petrovsky, but for it exist a boundary value problem that is parabolic. For equation with one space variable, sufficient conditions for the second-order equation in time are given, under which parabolic boundary value problems exist.

Keywords: **boundary-value problem; well-posedness; parabolicity; Fourier transformation; the space of L. Schwartz.**

How to cite this article:

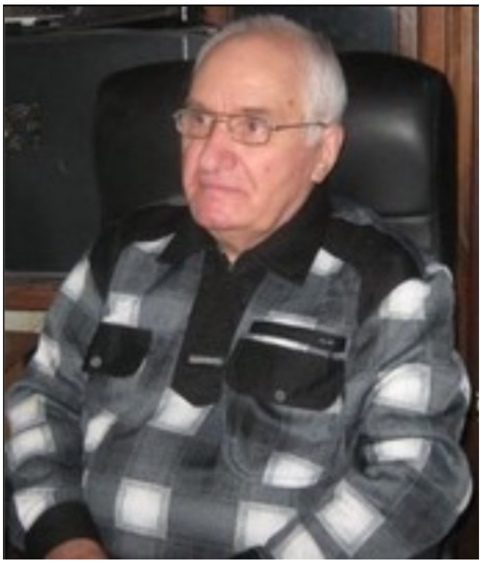
A. A. Makarov, A. V. Chernikova. Well-posedness and parabolicity of the boundary-value problem for systems of partial differential equations. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 99, 2024, p. 51–61 (in Ukrainian). DOI: 10.26565/2221-5646-2024-99-04

ISSN 2221-5646(Print) 2523-4641(Online)
Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics"
2024, Vol. 99, p. 62–63
DOI: 10.26565/2221-5646-2024-99-05
УДК 929

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
2024, Том 99, с. 62–63

АНАТОЛІЙ ВАСИЛЬОВИЧ ЛУЦЕНКО (некролог)

29.03.1936 – 14.08.2023



14 серпня 2023 року пішов з життя доцент, заслужений викладач Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна Анатолій Васильович Луценко.

Народився Анатолій Васильович 29 березня 1936 року в Харкові. Після закінчення школи, у 1953 році вступив до фізико-математичного факультету Харківського державного університету, який закінчив у 1958 році за спеціальністю математика. Потім навчався в аспірантурі і захистив кандидатську дисертацію. Його науковим керівником був Гершон Іхелевич Дрінфельд.

Усе подальше життя Анатолія Васильовича було пов'язано з механіко-математичним факультетом, на якому він працював з вересня 1962 до квітня 2015 року. Останні роки працював на посаді доцента кафедри диференціальних рівнянь та керування. Викладав дисципліни «Диференціальні рівняння» (для студентів усіх спеціальностей факультету), «Функціональний аналіз», «Теорія стійкості», «Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь у банахових просторах» та багато інших. Лекції та практичні заняття, які проводив Анатолій Васильович, запам'ятовувалися студентам за бездоганну організацію та найвищий математичний рівень викладання матеріалу. За невтомну

© Коробов В. І., Сморцова Т. І., 2024; CC BY 4.0 license

працю та значні досягнення у викладанні, 25 січня 2002 року рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна Анатолію Васильовичу було присвоєно звання «Заслужений викладач».

Наукові дослідження Анатолія Васильовича були пов'язані з теорією стійкості розв'язків диференціальних та різницевих рівнянь та систем, теорією керованості та стабілізовності динамічних систем. Він є автором кількох десятків наукових та науково-методичних праць. Тривалий час Анатолій Васильович був відповідальним виконавцем науково-дослідних робіт, які виконувались на кафедрі диференціальних рівнянь та керування.

Деякий час Анатолій Васильович виконував обов'язки вченого секретаря спеціалізованої ради із захисту дисертацій, яка діяла при механіко-математичному факультеті.

Світла пам'ять про Анатолія Васильовича назавжди залишиться в серцях його колег, учнів, друзів.

Бебія М. О., Жолткевич Г. М., Ігнатович С. Ю.,
Коробов В. І., Ревіна Т. В., Резуненко О. В.,
Скляр Г. М., Сморцова Т. І., Фардигола Л. В.

V. I. Korobov *https://orcid.org/0000-0001-8421-1718*
T. I. Smortsova *https://orcid.org/0000-0001-5535-1383*

Історія статті: отримана: 8 квітня 2024; прийнята: 11 травня 2024.

How to cite this article:

A. V. Lutsenko (1936 – 2023), Obituary. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 99, 2024, p. 62–63 (in Ukrainian). DOI: 10.26565/2221-5646-2024-99-05

Article history: Received: 8 April 2024; Accepted: 11 May 2024.

Правила для авторів
«Вісника Харківського національного університету
імені В. Н. Каразіна»,
Серія «Математика, прикладная математика і механіка»

Редакція просить авторів при направленні статей керуватися наступними правилами.

1. В журналі публікуються статті, що мають результати математичних досліджень (англійською або українською мовами).

2. Поданням статті вважається отримання редакцією файлів статті оформлених у редакторі LaTeX, анотацій, відомостей про авторів та архіва, що включає LaTeX файли статті та файли малюнків. Файл-зразок оформлення статті можна знайти на офіційній веб-сторінці журналу (http://periodicals.karazin.ua/mech_math). Авторам необхідно зареєструватись та **завантажити подання** на цій сторінці. Будьте уважними, заповнюючи форму подання двома мовами (українською та англійською).

3. Стаття повинна починатися з розширеної анотації (обсягом **не менш ніж 1800 знаків**), в якій повинні бути чітко сформульовані мета та результати роботи. Анотація повинна бути тією мовою (англійською або українською), якою є основний текст статті. Закордонні автори можуть звернутися до редакції за допомогою з перекладом анотацій на українську мову. Повинні бути наведені прізвища, ініціали авторів, назва роботи, ключові слова та номер за міжнародною математичною класифікацією (Mathematics Subject Classification 2020). Анотація не повинна мати посилань на літературу чи малюнки. На першій сторінці вказується номер УДК класифікації. В кінці статті треба додати переклад анотації (обсягом **не менш ніж 1800 знаків**) на другу мову (англійську чи українську).

4. Список літератури повинен бути оформлений латинським шрифтом. Приклади оформлення списка літератури:

1. A.M. Lyapunov. A new case of integrability of differential equations of motion of a solid body in liquid, Rep. Kharkov Math. Soc., – 1893. – 2. V.**4**. – P. 81-85.
2. A.M. Lyapunov. The general problem of the stability of motion. Kharkov Mathematical Society, Kharkov. - 1892. - 251 p.

5. Кожний малюнок повинен бути пронумерований та представлений окремим файлом в одному з форматів: EPS, BMP, JPG. В файлі статті малюнок повинен бути вставлений автором. Під малюнком повинен бути підпис. Назви файлів малюнків повинні починатись з прізвища першого автора.

6. Відомості про авторів повинні містити: прізвища, імена, по батькові, службові адреси та номери телефонів, науковий ступінь, посаду, адреси електронних скриньок та інформацію про наукові профайли авторів (orcid.org, www.researcherid.com, www.scopus.com) з відповідними посиланями. Прохання також повідомити прізвище автора, з яким треба вести листування.

7. Рекомендуємо використовувати в якості зразка оформлення останні випуски журналу (http://periodicals.karazin.ua/mech_math).

8. У випадку порушення правил оформлення редакція не буде розглядати статтю.

Електронна скринька: vestnik-khnu@ukr.net

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна,
Серія "Математика, прикладна математика і механіка", Том 99, 2024 р.

Збірник наукових праць

Англійською та українською мовами

Підписано до друку 29. 06. 2024 р.
Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. 3,17
Обл.– вид. арк. 3,97
Наклад 100 пр. Зам. № 9/24
Безкоштовно.

Видавець і виготовлювач Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

Видавництво Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
тел. 705-24-32