ISSN 2221-5646 (Print),
ISSN 2523-4641 (Online)

KARAZIN UNIVERSITY
CLASSICS AHEAD OF TIME

VISNYK OF V.N.KARAZIN KHARKIV NATIONAL UNIVERSITY

Ser. MATHEMATICS, APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Том 98 ' 2023

Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна серія

МАТЕМАТИКА, ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА І МЕХАНІКА

Volume 98, 2023

ISSN 2221–5646 (Print)
ISSN 2523–4641 (Online)
Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна

Серія
«Математика, прикладна математика і механіка»

Серія започаткована 1965 р.

Том 98

Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 98

Харків
2023

До Віснику включено статті з математичного аналізу, математичної фізики, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних наук, категорія «Б» за спеціальностями 111 - Математика та 113 - Прикладна математика (Наказ МОН України №1643 від 28.12.2019 р.).

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 21 від 27 листопада 2023 р.).

Адреса редакційної колегії: 61022, Харків, майдан Свободи, 4, ХНУ імені В.Н. Каразіна, ф-т математики і інформатики, к. 7-27, т. 7075240, 7075135, **e-mail:** vestnik-khnu@ukr.net
Інтернет: http://vestnik-math.univer.kharkov.ua; http://periodicals.karazin.ua/mech _math

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21568-11468 Р від 21.08.2015

ЗМІСТ

CONTENTS

ISSN 2221-5646(Print) 2523-4641(Online)
Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics”
2023, Vol. 98, p. 4–24
DOI: 10.26565/2221-5646-2023-98-01
УДК 517.587

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
2023, Том 98, с. 4–24

S. M. Zagorodnyuk
PhD math
Assoc. Prof. Dep. of math and computer sciences
V. N. Karazin Kharkiv National University
Svobody square, 4, Kharkiv, Ukraine, 61022
Sergey.M.Zagorodnyuk@gmail.com *http://orcid.org/0000-0002-1063-1776*

On some hypergeometric Sobolev orthogonal polynomials with several continuous parameters

In this paper we study the following hypergeometric polynomials:

$$\mathcal{P}_n(x) = \mathcal{P}_n(x;\alpha,\beta,\delta_1,\ldots,\delta_\rho,\kappa_1,\ldots,\kappa_\rho) =$$

$$= {}_{\rho+2}F_{\rho+1}(-n, n+\alpha+\beta+1, \delta_1+1,\ldots,\delta_\rho+1; \alpha+1, \kappa_1+\delta_1+1,\ldots,\kappa_\rho+\delta_\rho+1; x),$$

and

$$\mathcal{L}_n(x) = \mathcal{L}_n(x;\alpha,\delta_1,\ldots,\delta_\rho,\kappa_1,\ldots,\kappa_\rho) =$$

$$= {}_{\rho+1}F_{\rho+1}(-n, \delta_1+1,\ldots,\delta_\rho+1; \alpha+1, \kappa_1+\delta_1+1,\ldots,\kappa_\rho+\delta_\rho+1; x), \qquad n\in\mathbb{Z}_+,$$

where $\alpha,\beta,\delta_1,\ldots,\delta_\rho \in (-1,+\infty)$, and $\kappa_1,\ldots,\kappa_\rho \in \mathbb{Z}_+$, are some parameters. The natural number ρ of the continuous parameters $\delta_1,\ldots,\delta_\rho$ can be chosen arbitrarily large. It is seen that the special case $\kappa_1 = \cdots = \kappa_\rho = 0$ leads to Jacobi and Laguerre orthogonal polynomials. Of course, such polynomials and more general ones appeared in the literature earlier. Our aim here is to show that polynomials $\mathcal{P}_n(x)$ and $\mathcal{L}_n(x)$ are Sobolev orthogonal polynomials on the real line with some explicit matrices of measures.

The importance of the orthogonality property was our main reason to concentrate our attention on polynomials $\mathcal{P}_n(x)$ and $\mathcal{L}_n(x)$. Here we shall use some our tools developed earlier. In particular, it was shown recently that Sobolev orthogonal polynomials are related by a differential equation with orthogonal systems $\mathcal{A}$ of functions acting in the direct sums of usual L^2_μ spaces of square-summable (classes of the equivalence of) functions with respect to a positive measure μ. The case of a unique L^2_μ is of a special interest, since it allows to use OPRL to obtain explicit systems of Sobolev orthogonal polynomials. The main problem here is *to choose a suitable linear differential operator in order to get explicit representations for Sobolev orthogonal polynomials*. The proof of the orthogonality relations is then a verification of such a choice and it goes in another direction: we start from the already known polynomials to their properties.

We also study briefly such properties of the above polynomials: integral representations, differential equations and location of zeros. A system of such polynomials with a kind of the bispectrality property is constructed.

Keywords: **orthogonal polynomials; Sobolev orthogonality; recurrence relations.**

2010 Mathematics Subject Classification: 42C05.

1. Introduction

The theory of orthogonal polynomials on the real line (OPRL) is a classical subject of analysis having a lot of applications [29],[9],[14]. The theory of Sobolev orthogonal polynomials is less developed and recognized and it still remains to be a *terra incognita* in some aspects [21]. As this theory may be viewed as a generalization of the classical one, then one can expect that some properties and objects from the classical theory will have their mirrors and extensions in the theory of Sobolev orthogonal polynomials. For instance, the important property for OPRL is that the multiplication by x operator in the corresponding L^2_μ space is symmetric. Under some general assumptions, a weaker property of symmetry with respect to an indefinite metric holds for Sobolev orthogonal polynomials [32]. We intend to define and study some generalizations of Jacobi and Laguerre orthogonal polynomials. Namely, we shall study the following polynomials:

$$\mathcal{P}_n(x) = \mathcal{P}_n(x;\alpha,\beta,\delta_1,\dots,\delta_\rho,\kappa_1,\dots,\kappa_\rho) =$$

$$= {}_{\rho+2}F_{\rho+1}(-n, n+\alpha+\beta+1, \delta_1+1,\dots,\delta_\rho+1; \alpha+1, \kappa_1+\delta_1+1,\dots,\kappa_\rho+\delta_\rho+1; x), \tag{1}$$

and

$$\mathcal{L}_n(x) = \mathcal{L}_n(x;\alpha,\delta_1,\dots,\delta_\rho,\kappa_1,\dots,\kappa_\rho) =$$

$$= {}_{\rho+1}F_{\rho+1}(-n, \delta_1+1,\dots,\delta_\rho+1; \alpha+1, \kappa_1+\delta_1+1,\dots,\kappa_\rho+\delta_\rho+1; x), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{2}$$

where $\alpha,\beta,\delta_1,\dots,\delta_\rho \in (-1,+\infty)$, and $\kappa_1,\dots,\kappa_\rho \in \mathbb{Z}_+$, are some parameters. Observe that the number $\rho \in \mathbb{N}$ of the continuous parameters $\delta_1,\dots,\delta_\rho$ can be arbitrarily large. It is clear that the special case $\kappa_1 = \dots = \kappa_\rho = 0$ leads to the Jacobi and Laguerre orthogonal polynomials on the real line. There are also some other special cases and related systems of hypergeometric polynomials which were studied before, including Fasenmyer's polynomials, see [26]. In general, polynomials $\mathcal{P}_n(x)$ and $\mathcal{L}_n(x)$ turns out to be Sobolev orthogonal polynomials on the real line with some explicit matrix measures. This can be derived on a way proposed in papers [30] and [31].

Notice that we can consider the following more general hypergeometric polynomials:

$$\mathbf{P}_n(x) = \mathbf{P}_n(x;a,\alpha_1,\dots,\alpha_p;\beta_1,\dots,\beta_q) =$$

$$= {}_{p+2}F_q(-n, n+a, \alpha_1,\dots,\alpha_p; \beta_1,\dots,\beta_q; x), \tag{3}$$

and

$$\mathbf{L}_n(x) = \mathbf{L}_n(x; \alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q) =$$
$$= {}_{p+1}F_q(-n, \alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; x), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{4}$$

where $a \in (-1, +\infty)$; $\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q \in (0, +\infty)$, are some parameters. Here $p, q \in \mathbb{Z}_+$, and the case $p = 0$ and/or $q = 0$ means that α_ks and/or β_ks are absent, respectively.

Polynomials $\mathbf{P}_n(x)$, probably, appeared for the first time in a paper of Chaundy [5] (see formula (26) therein). For the case $a = 1$ they appeared later in formula (21) on page 266 in [10]. Polynomials $\mathbf{L}_n(x)$ also appeared for the first time in the paper of Chaundy [5] (see formula (25) therein). Ten years later they appeared in [10] (see formula (25) on page 267).

Observe that

$$\mathcal{P}_n(x; \alpha, \beta, \delta_1, \dots, \delta_\rho, \kappa_1, \dots, \kappa_\rho) =$$
$$= \mathbf{P}_n(x; \alpha+\beta+1, \delta_1+1, \dots, \delta_\rho+1; \alpha+1, \kappa_1+\delta_1+1, \dots, \kappa_\rho+\delta_\rho+1), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{5}$$

and

$$\mathcal{L}_n(x; \alpha, \delta_1, \dots, \delta_\rho, \kappa_1, \dots, \kappa_\rho) =$$
$$= \mathbf{L}_n(x; \delta_1 + 1, \dots, \delta_\rho + 1; \alpha + 1, \kappa_1 + \delta_1 + 1, \dots, \kappa_\rho + \delta_\rho + 1), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{6}$$

where $\alpha, \beta, \delta_1, \dots, \delta_\rho \in (-1, +\infty)$, and $\kappa_1, \dots, \kappa_\rho \in \mathbb{Z}_+$, are arbitrary parameters; $\rho \in \mathbb{N}$.

The importance of the orthogonality property was our main reason to concentrate our attention on polynomials $\mathcal{P}_n(x)$ and $\mathcal{L}_n(x)$. Sobolev orthogonality for the polynomials $\mathcal{P}_n(x)$ and $\mathcal{L}_n(x)$ will be obtained in Theorem 1. Here we shall use tools developed earlier in [30] and [31]. In [31] it was shown that Sobolev orthogonal polynomials are related by a differential equation with orthogonal systems $\mathcal{A}$ of functions acting in the direct sums of usual L^2_μ spaces of square-summable (classes of the equivalence of) functions with respect to a positive measure μ. The case of a unique L^2_μ is of a special interest, since it allows to use OPRL to obtain explicit systems of Sobolev orthogonal polynomials. The main problem here is *to choose a suitable linear differential operator in order to get explicit representations for Sobolev orthogonal polynomials.* The proof of Theorem 1 is then a verification of such a choice and it goes in another direction: we start from the already known polynomials to their properties.

Differential equations for the polynomials $\mathcal{P}_n(x)$ and $\mathcal{L}_n(x)$ will be presented in Proposition 2. Obtaining linear differential operators which have orthogonal polynomials (OP) as eigenfunctions is an old and important subject. In this paper we start with hypergeometric representations of polynomials and therefore they are eigenfunctions of differential pencils quite directly. Then we move to the orthogonality. However the mainstream of this subject is to move in the opposite direction: one starts from an explicit orthogonality and then seeks for differential operators. Of course, the first classical examples of OP being eigenfunctions of a differential operator are Jacobi, Laguerre and Hermite polynomials.

H.L. Krall in [20] initiated the study of differential operators of higher orders for OPRL systems. Many years later, in 1980th, investigations of Krall were continued by Littlejohn, J. Koekoek, R. Koekoek and later by other mathematicians. In these investigations an important role was played by generalized Jacobi and Laguerre weights. This generalization includes additions of Dirac masses at endpoints of the orthogonality measure supports. For more details one can see the books [19] and [18].

The above investigations were continued by using inner products which involved derivatives (Sobolev OP), see [4],[17]. Observe that in [17] generalized Laguerre polynomials $L_n^{\alpha,M_0,M_1,\ldots,M_N}(x)$ were related with ordinary Laguerre polynomials by a linear differential operator with real coefficients, not depending on n (the index of a polynomial). This shows that this case fits in the above new scheme from [30],[31] (cf. Condition 1 in [30]). It is shown in [17] that polynomials $L_n^{\alpha,M_0,M_1,\ldots,M_N}(x)$ are orthogonal with respect to the following inner product:

$$< f,g >= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} f(x) g(x) dx + \sum_{\nu=0}^{N} M_{\nu} f^{(\nu)}(0) g^{(\nu)}(0),$$

where $\alpha > -1$, $N \in \mathbb{N}$, and $M_\nu \geq 0$. These polynomials were called Laguerre-Sobolev orthogonal polynomials. An explicit hypergeometric representation of type $\mathbf{L}_n(x)$ from (4) was obtained, with $p = N+1$, $q = N+2$. A $(2N+3)$-term recurrence relation for the Laguerre-Sobolev OP was derived in [17] as well. The particular case $N = 1$ of Laguerre-Sobolev OP was studied in [16]. In this case, when α is a nonnegative integer it is deduced in [15] that these polynomials are eigenfunctions of a linear differential operator with polynomial coefficients. The differential operator has order $2\alpha + 4$ if $M_0 > 0$, $M_1 = 0$; it has order $2\alpha + 8$ if $M_0 = 0$, $M_1 > 0$; and it is of order $4\alpha + 10$ if $M_0, M_1 > 0$. In the above case, but without the constraint concerning the parameter α, differential operators of infinite order, having the Laguerre-Sobolev type orthogonal polynomials as eigenfunctions, were obtained in [2].

Sobolev type Jacobi polynomials $P_n^{\alpha,\beta,M_1,M_2}(x, l_1, l_2)$ were studied by Bavinck in [3]. They are orthogonal with respect to the inner product:

$$< p,q >= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_{-1}^{1} p(x) q(x) (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} dx +$$
$$+ M_1 p^{(l_1)}(-1) q^{(l_1)}(-1) + M_2 p^{(l_2)}(1) q^{(l_2)}(1),$$

where $\alpha, \beta > -1$, $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$, $M_1, M_2 \geq 0$. $P_n^{\alpha,\beta,M_1,M_2}(x, l_1, l_2)$ are shown to be eigenfunctions of linear differential operators. Conditions which imply the finiteness of the order of operators are presented. Observe that the particular case of Gegenbauer-Sobolev OP was studied before in papers [4],[1], where similar problems were adressed. A representation as ${}_4F_3$ was given in [4].

The foregoing inner products were generalized by Durán and de la Iglesia replacing Dirac addents at the endpoints c_j by addents of the form

$$(p(c_j), p'(c_j), \ldots, p^{(N)}(c_j)) M (q(c_j), q'(c_j), \ldots, q^{(N)}(c_j))^*,$$

where M is a positive semi-definite matrix, see [7],[8]. By using Casoratti determinants they obtained explicit representations of polynomials and showed that polynomials are eigenfunctions of a finite-order differential operators.

In [23] new representations for Jacobi Sobolev OP and Laguerre Sobolev OP were given. It was also shown that the Laguerre-Sobolev OP can be obtained from Jacobi-Sobolev OP by confluence.

Notice that some polynomial matrix perturbations of classical measures were studied in [27].

Known methods for generating functions (see, e.g., [10, Chapter XIX], [25]) can be used to obtain some additional properties of the polynomials $\mathcal{P}_n(x)$ and $\mathcal{L}_n(x)$. We shall discuss the existence of recurrence relations for these polynomials. In Theorem 2 we obtain a five-term recurrence relation for a special case of polynomials $\mathbf{L}_n(x)$, with $p = 2$, $q = 3$. The latter provides a five-term recurrence relation for $\mathcal{L}_n$ with $\rho = 2$, as a special case. In this case the polynomials $\mathcal{L}_n(x)$ $(\rho = 2)$ have three important properties:

(1) the Sobolev orthogonality;

(2) these polynomials are (generalized) eigenvalues of a pencil of differential operators;

(3) these polynomials are eigenvalues of a pencil of difference operators.

Of course, each of these features is valuable and $\mathcal{L}_n$ $(\rho = 2)$ possess all of them. These properties make polynomials $\mathcal{L}_n(x)$ close to classical systems of polynomials and their generalizations, see [29],[18]. Observe that properties (2) and (3) are close to the bispectral problems studied for various orthogonal systems of functions, see [6],[11],[28],[13],[8] and references therein.

Finally, some information on the location of zeros for $\mathcal{P}_n(x)$ and $\mathcal{L}_n(x)$ will be given in Proposition 3.

Notations. As usual, we denote by $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+$, the sets of real numbers, complex numbers, positive integers, integers and non-negative integers, respectively; $\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < r\}$, $r > 0$; $\mathbb{D} := \mathbb{D}_1$. By $\mathbb{Z}_{k,l}$ we mean all integers j satisfying the following inequality: $k \leq j \leq l$; $(k, l \in \mathbb{Z})$. By $\mathbb{P}$ we denote the set of all polynomials with complex coefficients. By $\mathbb{P}_r$ we mean the set of all polynomials with real coefficients. By M^T we mean the transpose of a complex matrix M. For a complex number c we denote $(c)_0 = 1$, $(c)_k = c \cdots (c + k - 1)$, $k \in \mathbb{N}$ (*the shifted factorial or Pochhammer's symbol*). As usual, the generalized hypergeometric function is denoted by

$$ {}_mF_n(a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n; x) = {}_mF_n \left[\begin{array}{c} a_1, \dots, a_m; \\ b_1, \dots, b_n; \end{array} x \right] = $$

$$ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_m)_k}{(b_1)_k \dots (b_n)_k} \frac{x^k}{k!}, $$

where a_j, b_j, x are complex numbers and b_js are not allowed to take negative integer values.

2. Properties of some hypergeometric Sobolev orthogonal polynomials

Polynomials $\mathcal{P}_n$ and $\mathcal{L}_n$ admit some recursive integral representations. Let $\alpha, \beta > -1$. Consider the classical Jacobi and Laguerre polynomials:

$$J_n(x) = J_n(x;\alpha,\beta) := {}_2F_1(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; x), \tag{7}$$

$$L_n(x) = L_n(x;\alpha) := {}_1F_1(-n; \alpha+1; x), \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{8}$$

Proposition 1. *Let $\rho \in \mathbb{N}$, and $\alpha, \beta, \delta_1, \ldots, \delta_\rho \in (-1, +\infty)$; $\kappa_1, \ldots, \kappa_\rho \in \mathbb{N}$, be arbitrary parameters. If $\rho \geq 2$, then*

$$\mathcal{P}_n(z;\alpha,\beta,\delta_1,\ldots,\delta_\rho,\kappa_1,\ldots,\kappa_\rho) =$$
$$= \frac{\Gamma(\kappa_\rho+\delta_\rho+1)}{\Gamma(\delta_\rho+1)\Gamma(\kappa_\rho)} \int_0^1 t^{\delta_\rho}(1-t)^{\kappa_\rho-1}\mathcal{P}_n(zt;\alpha,\beta,\delta_1,\ldots,\delta_{\rho-1},\kappa_1,\ldots,\kappa_{\rho-1})dt,$$
$$z \in \mathbb{C}: \ |z| < 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{9}$$

If $\rho = 1$, then

$$\mathcal{P}_n(z;\alpha,\beta,\delta_1,\kappa_1) = \frac{\Gamma(\kappa_1+\delta_1+1)}{\Gamma(\delta_1+1)\Gamma(\kappa_1)} \int_0^1 t^{\delta_1}(1-t)^{\kappa_1-1}J_n(zt;\alpha,\beta)dt,$$
$$z \in \mathbb{C}: \ |z| < 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{10}$$

If $\rho \geq 2$, then

$$\mathcal{L}_n(z;\alpha,\delta_1,\ldots,\delta_\rho,\kappa_1,\ldots,\kappa_\rho) =$$
$$= \frac{\Gamma(\kappa_\rho+\delta_\rho+1)}{\Gamma(\delta_\rho+1)\Gamma(\kappa_\rho)} \int_0^1 t^{\delta_\rho}(1-t)^{\kappa_\rho-1}\mathcal{L}_n(zt;\alpha,\delta_1,\ldots,\delta_{\rho-1},\kappa_1,\ldots,\kappa_{\rho-1})dt,$$
$$z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{11}$$

If $\rho = 1$, then

$$\mathcal{L}_n(z;\alpha,\delta_1,\kappa_1) = \frac{\Gamma(\kappa_1+\delta_1+1)}{\Gamma(\delta_1+1)\Gamma(\kappa_1)} \int_0^1 t^{\delta_1}(1-t)^{\kappa_1-1}L_n(zt;\alpha)dt,$$
$$z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{12}$$

Proof. Use hypergeometric representations of the corresponding polynomials and Theorem 28 in [26, p. 85]. □

Fix an arbitrary $\rho \in \mathbb{N}$, and choose arbitrary parameters $\alpha, \beta, \delta_1, \ldots, \delta_\rho \in (-1, +\infty)$, and $\kappa_1, \ldots, \kappa_\rho \in \mathbb{N}$. Introduce the following linear differential operator $L = L(\delta, k)$ with polynomial coefficients, $\delta > -1$, $k \in \mathbb{N}$:

$$Ly(x) = \frac{1}{(\delta+1)\ldots(\delta+k)} x^{-\delta}\left(x^{k+\delta}y(x)\right)^{(k)}, \qquad y(x) \in \mathbb{P}. \tag{13}$$

Denote

$$\widehat{D} = \widehat{D}(\delta_1,\ldots,\delta_\rho;\kappa_1,\ldots,\kappa_\rho) = L(\delta_1,\kappa_1)L(\delta_2,\kappa_2)\ldots L(\delta_\rho,\kappa_\rho) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\kappa} c_j(x)\frac{d^j}{dx^j}, \qquad c_j(x) = c_j(x;\delta_1,\ldots,\delta_\rho;\kappa_1,\ldots,\kappa_\rho) \in \mathbb{P}, \tag{14}$$

where $c_\kappa(x)$ is not the null polynomial, $\kappa := \kappa_1 + \cdots + \kappa_\rho$.

Now we shall show that the polynomials $\mathcal{P}_n(x)$ and $\mathcal{L}_n(x)$ are Sobolev orthogonal polynomials on the real line.

Theorem 1. *Let $\rho \in \mathbb{N}$, and $\alpha,\beta,\delta_1,\ldots,\delta_\rho \in (-1,+\infty)$; $\kappa_1,\ldots,\kappa_\rho \in \mathbb{N}$ be arbitrary parameters. Let $\widehat{D} = \widehat{D}(\delta_1,\ldots,\delta_\rho;\kappa_1,\ldots,\kappa_\rho)$ be given by (14), and*

$$M(x) := (c_0(x),\ldots,c_\kappa(x))^T(c_0(x),\ldots,c_\kappa(x)), \qquad x\in\mathbb{R}.$$

For polynomials $\mathcal{P}_n(x)$ and $\mathcal{L}_n(x)$, defined as in (1),(2), the following relations hold:

$$\int_0^1 (\mathcal{P}_n(x),\mathcal{P}_n'(x),\ldots,\mathcal{P}_n^{(\kappa)}(x))M(x)\begin{pmatrix}\mathcal{P}_m(x)\\ \mathcal{P}_m'(x)\\ \vdots\\ \mathcal{P}_m^{(\kappa)}(x)\end{pmatrix} x^\alpha(1-x)^\beta dx =$$

$$= A_n\delta_{n,m}, \qquad A_n>0,\ n,m\in\mathbb{Z}_+; \tag{15}$$

$$\int_0^\infty (\mathcal{L}_n(x),\mathcal{L}_n'(x),\ldots,\mathcal{L}_n^{(\kappa)}(x))M(x)\begin{pmatrix}\mathcal{L}_m(x)\\ \mathcal{L}_m'(x)\\ \vdots\\ \mathcal{L}_m^{(\kappa)}(x)\end{pmatrix} x^\alpha e^{-x}dx =$$

$$= B_n\delta_{n,m}, \qquad B_n>0,\ n,m\in\mathbb{Z}_+. \tag{16}$$

Proof. A direct calculation shows that

$$L(\delta_\rho,\kappa_\rho)\mathcal{P}_n(x;\alpha,\beta,\delta_1,\ldots,\delta_\rho,\kappa_1,\ldots,\kappa_\rho) =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} \mathcal{P}_n(x;\alpha,\beta,\delta_1,\ldots,\delta_{\rho-1},\kappa_1,\ldots,\kappa_{\rho-1}), & \text{if } \rho\ge 2\\ {}_2F_1(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;x), & \text{if } \rho=1\end{array}\right. ;$$

and

$$L(\delta_\rho,\kappa_\rho)\mathcal{L}_n(x;\alpha,\delta_1,\ldots,\delta_\rho,\kappa_1,\ldots,\kappa_\rho) =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} \mathcal{L}_n(x;\alpha,\delta_1,\ldots,\delta_{\rho-1},\kappa_1,\ldots,\kappa_{\rho-1}), & \text{if } \rho\ge 2\\ {}_1F_1(-n;\alpha+1;x), & \text{if } \rho=1\end{array}\right. .$$

Therefore

$$\widehat{D}\mathcal{P}_n(x;\alpha,\beta,\delta_1,\ldots,\delta_\rho,\kappa_1,\ldots,\kappa_\rho) = {}_2F_1(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;x) = J_n(x;\alpha,\beta),$$

and

$$\widehat{D}\mathcal{L}_n(x;\alpha,\delta_1,\ldots,\delta_\rho,\kappa_1,\ldots,\kappa_\rho) = {}_1F_1(-n;\alpha+1;x) = L_n(x;\alpha).$$

The latter expressions for Jacobi polynomials J_n and Laguerre polynomials L_n can be inserted into their orthogonality relations to obtain relations (15),(16). This finishes the proof. □

The hypergeometric nature of polynomials $\mathcal{P}_n$ and $\mathcal{L}_n$ provides differential equations for them.

Proposition 2. *Let $\rho \in \mathbb{N}$, and $\alpha,\beta,\delta_1,\ldots,\delta_\rho \in (-1,+\infty)$; $\kappa_1,\ldots,\kappa_\rho \in \mathbb{Z}_+$, be arbitrary parameters. Let $\theta = z\frac{d}{dz}$, and*

$$K := \theta(\theta+\alpha)\prod_{j=1}^{\rho}(\theta+\kappa_j+\delta_j), \quad L := \prod_{k=1}^{\rho}(\theta+\delta_k+1), \tag{17}$$

$$D_0 := K - z\theta(\theta+\alpha+\beta+1)L, \quad D_1 := zL, \quad D_2 := K - z\theta L. \tag{18}$$

Then $\forall n \in \mathbb{Z}_+$,

$$D_0\mathcal{P}_n(z) = -n(n+\alpha+\beta+1)D_1\mathcal{P}_n(z), \quad z \in \mathbb{D}; \tag{19}$$

$$D_2\mathcal{L}_n(z) = -nD_1\mathcal{L}_n(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{20}$$

Proof. Use hypergeometric representations of the corresponding polynomials and the differential equation for ${}_pF_q$. □

We shall use a known generating function for the polynomials $\mathbf{L}_n(x)$ from [10, p. 267], formula (25). We only added the convergence fact.

Lemma 1. *Let $p,q \in \mathbb{Z}_+$: $p \le q+1$, be fixed. Let $\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\beta_1,\ldots,\beta_q \in (0,+\infty)$, be arbitrary parameters. The following relation holds:*

$$e^t {}_pF_q\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\beta_1,\ldots,\beta_q;-xt\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{L}_n(x;\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\beta_1,\ldots,\beta_q)\frac{t^n}{n!}, \tag{21}$$

where $t,x \in \mathbb{D}$. If $p \le q$ then relation (21) holds for all $t,x \in \mathbb{C}$.

Proof. Denote by $g(t) = g_x(t)$ the left-hand side of (21). Set

$$D := \begin{cases} \mathbb{D}, & \text{if } p = q+1, \\ \mathbb{C}, & \text{if } p \le q, \end{cases}.$$

Fix an arbitrary $x \in D$. Then $g(t) = g_x(t)$ is an analytic function of t in the domain D. Let us calculate Taylor's coefficients for its expansion at $t=0$. By the Leibniz rule we may write:

$$g^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left({}_pF_q\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\beta_1,\ldots,\beta_q;-xt\right)\right)_t^{(k)}\Big|_{t=0}\left(e^t\right)^{(n-k)}\Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_j \dots (\alpha_p)_j}{(\beta_1)_j \dots (\beta_q)_j} \frac{(-x)^j}{j!} t^j \right)_t^{(k)} \Bigg|_{t=0} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(\alpha_1)_k \dots (\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k \dots (\beta_q)_k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{n} (-n)_k \frac{(\alpha_1)_k \dots (\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k \dots (\beta_q)_k} \frac{x^k}{k!} =$$

$$= \mathbf{L}_n(x; \alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q).$$

Thus, relation (21) coincides with Taylor's expansion of $g(t)$ at $t = 0$. $\square$

Let $\rho \in \mathbb{N}$, and $\alpha, \delta_1, \dots, \delta_\rho \in (-1, +\infty)$; $\kappa_1, \dots, \kappa_\rho \in \mathbb{Z}_+$, be arbitrary parameters. By Lemma 1, for all $t, x \in \mathbb{C}$ the following relation is valid:

$$e^t {}_\rho F_{\rho+1} \left[\begin{array}{c} \delta_1 + 1, \dots, \delta_\rho + 1; \\ \alpha + 1, \kappa_1 + \delta_1 + 1, \dots, \kappa_\rho + \delta_\rho + 1; \end{array} -xt \right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n(x; \alpha, \delta_1, \dots, \delta_\rho, \kappa_1, \dots, \kappa_\rho) \frac{t^n}{n!}. \tag{22}$$

Let us now turn to the question of the existence of some recurrence relations for polynomials $\mathbf{P}_n$ and $\mathbf{L}_n$. For big values of p and q the expressions for the coefficients of recurrence relations will be complicated and it is not clear that they will be nontrivial. Thus, the non-triviality of the recurrence relations can not be guaranteed.

We are not ready to treat effectively the case of general p and q. It looks reasonable to investigate concrete systems of polynomials $\mathbf{P}_n$ or $\mathbf{L}_n$, having some fixed values of p and q. Even in this case expressions for the coefficients can be huge and probably of few use. We shall study the case $p = 2$, $q = 3$, for the polynomials $\mathbf{L}_n$:

$$\mathbf{L}_n(x) = \mathbf{L}_n(x; \alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2, \beta_3) = {}_3F_3(-n, \alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2, \beta_3; x), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{23}$$

where $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in (0, +\infty)$. By Lemma 1 we may write:

$$e^t {}_2F_3 (\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2, \beta_3; -xt) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{L}_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad t, x \in \mathbb{C}. \tag{24}$$

Fix an arbitrary number $x \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Introduce a new variable z:

$$z = -xt.$$

Relation (24) may be written in the following form:

$${}_2F_3 (\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2, \beta_3; z) = e^{\frac{z}{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{L}_n(x) \frac{(-1)^n}{x^n} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{25}$$

Denote the left-hand side of relation (25) by $w(z)$. It satisfies the differential equation for the hypergeometric function:

$$[\theta(\theta+\beta_1-1)(\theta+\beta_2-1)(\theta+\beta_3-1)-z(\theta+\alpha_1)(\theta+\alpha_2)]\,w(z)=0, \tag{26}$$

where $\theta = z\frac{d}{dz}$. Set

$$b_1 := \beta_1 - 1, \quad b_2 := \beta_2 - 1, \quad b_3 := \beta_3 - 1, \tag{27}$$

$$c := b_1+b_2+b_3+6, \quad \widehat{b} := 7+3(b_1+b_2+b_3)+b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3, \tag{28}$$

$$d := 1+b_1+b_2+b_3+b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3+b_1b_2b_3, \quad \widehat{\alpha} = 1+\alpha_1+\alpha_2. \tag{29}$$

Assume that $z \neq 0$. We can rewrite the differential operator [...] in (26) as a sum of powers of θ, and divide the whole equality by z to obtain:

$$\Big[\frac{d}{dz}(\theta^3+(b_1+b_2+b_3)\theta^2+(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)\theta+b_1b_2b_3)-$$

$$-\theta^2-(\alpha_1+\alpha_2)\theta-\alpha_1\alpha_2\Big]\,w(z)=0, \qquad z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}. \tag{30}$$

In terms of usual derivatives this relation can be rewritten as

$$z^3w^{(4)}+cz^2w'''+(\widehat{b}-z)zw''+(d-\widehat{\alpha}z)w'-\alpha_1\alpha_2w=0, \qquad z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}. \tag{31}$$

Denote the left-hand side of (31) by $l(z)$. Since $w(z)$ is an entire function, then $l(z)$ is entire as well. By continuity we conclude that relation (31) holds for $z=0$. Set

$$\varphi(z)=\varphi(z;x):=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{L}_n(x)\frac{(-1)^n}{x^n}\frac{z^n}{n!}, \quad z\in\mathbb{C}. \tag{32}$$

Then

$$w(z)=e^{\frac{z}{x}}\varphi(z), \quad z\in\mathbb{C}.$$

We can calculate the derivatives of w by the Leibniz rule and substitute the resulting expressions into relation (31). If we cancel the term $e^{\frac{z}{x}}$, we shall get the following relation:

$$z^3\varphi^{(4)}+\frac{4}{x}z^3\varphi'''+\frac{6}{x^2}z^3\varphi''+\frac{4}{x^3}z^3\varphi'+\frac{1}{x^4}z^3\varphi+$$

$$+cz^2\varphi'''+c\frac{3}{x}z^2\varphi''+c\frac{3}{x^2}z^2\varphi'+c\frac{1}{x^3}z^2\varphi+$$

$$+(\widehat{b}-z)z\varphi''+(\widehat{b}-z)\frac{2}{x}z\varphi'+(\widehat{b}-z)\frac{1}{x^2}z\varphi+$$

$$+(d-\widehat{\alpha}z)\varphi'+(d-\widehat{\alpha}z)\frac{1}{x}\varphi-\alpha_1\alpha_2\varphi=0, \qquad z\in\mathbb{C}. \tag{33}$$

Denote the left-hand side of (33) by $\widehat{l}(z)$. Observe that

$$\varphi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{\mathbf{L}_{n+1}(x)}{x^{n+1}} z^n, \quad \varphi''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!} \frac{\mathbf{L}_{n+2}(x)}{x^{n+2}} z^n,$$

$$\varphi'''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{\mathbf{L}_{n+3}(x)}{x^{n+3}} z^n, \quad \varphi^{(4)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!} \frac{\mathbf{L}_{n+4}(x)}{x^{n+4}} z^n.$$

We can substitute the latter expressions into relation (33) to get a series expansion of $\widehat{l}(z)$, which is equal to zero. Thus, every Taylor coefficient $\widehat{l}_k$ is zero, and this provides a recurrence relation for polynomials $\mathbf{L}_n$.

Theorem 2. *Let $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in (0, +\infty)$. Consider polynomials*

$$\mathbf{L}_n(x) = \mathbf{L}_n(x; \alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2, \beta_3) = {}_3F_3(-n, \alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2, \beta_3; x), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

with $\mathbf{L}_{-1}(x) = \mathbf{L}_{-2}(x) = \mathbf{L}_{-3}(x) \equiv 0$. Let $b_1, b_2, b_3, c, \widehat{b}, d, \widehat{\alpha}$ be defined as in (27)-(29). The following five-term recurrence relation holds:

$$\begin{gathered} \left(-k(k-1)(k-2) - k(k-1)c - k\widehat{b} - d\right) \mathbf{L}_{k+1}(x) + \\ + \left(4k(k-1)(k-2) + 3k(k-1)c + 2k\widehat{b} + d\right) \mathbf{L}_k(x) + \\ + \left(-6k(k-1)(k-2) - 3k(k-1)c - k\widehat{b}\right) \mathbf{L}_{k-1}(x) + \\ + \left(4k(k-1)(k-2) + k(k-1)c\right) \mathbf{L}_{k-2}(x) - k(k-1)(k-2)\mathbf{L}_{k-3}(x) = \\ = x\left[(k(k-1) + k\widehat{\alpha} + \alpha_1\alpha_2)\mathbf{L}_k(x) - \right. \\ \left. - (2k(k-1) + k\widehat{\alpha})\mathbf{L}_{k-1}(x) + k(k-1)\mathbf{L}_{k-2}(x) \right], \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \end{gathered} \tag{34}$$

Proof. Calculate the Taylor coefficients $\widehat{l}_k$ of $\widehat{l}(z)$, as it was explained before the statement of the theorem. Then multiply $\widehat{l}_k$ by $(-1)^k k! x^{k+1}$ to get relation (34). □

In conditions of Theorem 2 we additionally assume that

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in [1, +\infty). \tag{35}$$

Then parameters $b_1, b_2, b_3; c, \widehat{b}, d$ are positive. This fact ensures that the coefficient by $\mathbf{L}_{k+1}(x)$ in the recurrence relation (34) is non-zero for $k \geq 3$. Since the coefficient by $\mathbf{L}_{k-3}(x)$ is also non-zero for $k \geq 3$, the recurrence relation (34) is non-trivial in this case.

Notice that by (6) we may write

$$\begin{gathered} \mathcal{L}_n(x; \alpha, \delta_1, \delta_2, \kappa_1, \kappa_2) = \\ = \mathbf{L}_n(x; \delta_1 + 1, \delta_2 + 1; \alpha + 1, \kappa_1 + \delta_1 + 1, \kappa_2 + \delta_2 + 1), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \end{gathered} \tag{36}$$

where $\alpha, \delta_1, \delta_2 \in (-1, +\infty)$, and $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{Z}_+$, are arbitrary parameters. Therefore one can write the above recurrence relation for $\mathcal{L}_n(x; \alpha, \delta_1, \delta_2, \kappa_1, \kappa_2)$.

In general, we can conjecture that polynomials $\mathbf{L}_n(x)$ from (4), with $p = q-1$, satisfy a $(q+2)$-term recurrence relation. This conjecture agrees with the classical case of Laguerre polynomials, with R. Koekoek's result mentioned in the Introduction, and with Theorem 2.

Let us now discuss the case of polynomials $\mathbf{P}_n(x)$ and their recurrence relations. We shall use a known generating function for the polynomials $\mathbf{P}_n(x)$ from [5], formula (26). As in the case of Lemma 1 we only add the convergence fact.

Lemma 2. *Let $p, q \in \mathbb{Z}_+$: $p \leq q-1$, and c: $0 < c < \frac{1}{2}$, be fixed. Let $a; \alpha_1, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \ldots, \beta_q \in (0, +\infty)$, be arbitrary parameters. The following relation holds:*

$$(1-t)^{-a} {}_{p+2}F_q\left(\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}, \alpha_1, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \ldots, \beta_q; -\frac{4xt}{(1-t)^2}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} \mathbf{P}_n(x; a, \alpha_1, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \ldots, \beta_q) t^n, \tag{37}$$

where

$$t, x \in \mathbb{C}: \ |t| < c, \ |x| < \frac{1}{4c} - \frac{1}{2}. \tag{38}$$

Proof. Notice that condition (38) provides that

$$\left| \frac{4xt}{(1-t)^2} \right| < 1. \tag{39}$$

In fact, we may write:

$$\left| \frac{4xt}{(1-t)^2} \right| = \frac{4|x||t|}{|1-t|^2} < \frac{4\left(\frac{1}{4c} - \frac{1}{2}\right)c}{(1-c)^2} = \frac{1-2c}{(1-c)^2} \leq \frac{1-2c+c^2}{(1-c)^2} = 1.$$

Therefore the left-hand side of (37) is well-defined for all t, x satisfying condition (38). Denote by R_1 the right-hand side of (37). At this point we do not know if the series in R_1 converges. Consider the following two iterated series which differ by the order of summation:

$$R_2 := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (a)_n \frac{t^n}{n!} (-n)_k (n+a)_k u_k \frac{x^k}{k!}, \tag{40}$$

$$R_3 := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{t^n}{n!} (-n)_k (n+a)_k u_k \frac{x^k}{k!}, \tag{41}$$

where for brevity we denoted

$$u_j := \frac{(\alpha_1)_j \ldots (\alpha_p)_j}{(\beta_1)_j \ldots (\beta_q)_j}, \qquad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{42}$$

and t, x are satisfying condition (38). We are going to prove that the series R_3 converges absolutely. Denote

$$\widehat{R}_3 := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left| (a)_n \frac{t^n}{n!} (-n)_k (n+a)_k u_k \frac{x^k}{k!} \right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} u_k \frac{|x|^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} (a)_n (n+a)_k |(-n)_k| \frac{|t|^n}{n!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} u_k \frac{|x|^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} (a)_n (n+a)_k \frac{|t|^n}{(n-k)!}, \tag{43}$$

where we have removed the null terms. Denote the inner sum in the last row of (43) by S_k. By the ratio test it converges for all $t \in \mathbb{D}_c$. Changing the summation index $j = n-k$ we get

$$S_k = \sum_{j=0}^{\infty} (a)_{j+k} (j+k+a)_k \frac{|t|^{j+k}}{j!} = (a)_{2k} |t|^k \sum_{j=0}^{\infty} (a+2k)_j \frac{|t|^j}{j!} =$$

$$= (a)_{2k} |t|^k (1-|t|)^{-a-2k}, \qquad t \in \mathbb{D}_c.$$

Then

$$\widehat{R}_3 = (1-|t|)^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} (a)_{2k} \frac{u_k}{k!} \left(\frac{|xt|}{(1-|t|)^2} \right)^k =$$

$$= (1-|t|)^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)_k \left(\frac{a+1}{2}\right)_k \frac{u_k}{k!} \left(\frac{4|xt|}{(1-|t|)^2} \right)^k =$$

$$= (1-|t|)^{-a} {}_{p+2}F_q \left(\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}, \alpha_1, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \ldots, \beta_q; \frac{4|x||t|}{(1-|t|)^2} \right), \tag{44}$$

where we have used the following relation (see Lemma 5 in [26, p. 22]):

$$(a)_{2k} = 4^k \left(\frac{a}{2}\right)_k \left(\frac{a+1}{2}\right)_k .$$

By virtue of (39) with parameters $|x|, |t|$ instead of x, t, we obtain that $\frac{4|x||t|}{(1-|t|)^2} < 1$, and this proves the last line of (44). Thus, the series R_3 converges absolutely. Let

$$R_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n}, \quad a_{k,n} = u_{k,n} + i v_{k,n},\ u_{k,n}, v_{k,n} \in \mathbb{R}.$$

By Theorem 2 in [12, p. 34] we conclude that

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty,$$

where the series is composed of elements $a_{k,j}$, placed in an arbitrary order. Let $a_j = u_j + i v_j$, $u_j, v_j \in \mathbb{R}$. By the comparison test it follows that

$$\sum_{j=0}^{\infty} |u_j| < \infty,\ \sum_{j=0}^{\infty} |v_j| < \infty.$$

By Theorem 1 in [12, p. 32] we obtain that

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{k,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,n} = \sum_{j=0}^{\infty} u_j; \tag{45}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} iv_{k,n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} iv_{k,n} = \sum_{j=0}^{\infty} iv_j. \tag{46}$$

Summing relations (45) and (46) we get

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n}. \tag{47}$$

Therefore $R_3 = R_2$. It remains to check that R_3 coincides with the left-hand side of (37). We may write:

$$R_3 = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \frac{x^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} (a)_n (-n)_k (n+a)_k \frac{t^n}{n!}.$$

Denote

$$T_k := \sum_{n=k}^{\infty} (a)_n (-n)_k (n+a)_k \frac{t^n}{n!}.$$

The series T_k converges absolutely by the ratio test. Proceeding in a similar manner as for S_k, we change the summation index $j = n - k$:

$$T_k = \sum_{j=0}^{\infty} (a)_{j+k} (j+k+a)_k (-1)^k \frac{t^{j+k}}{j!} = (a)_{2k} (-t)^k \sum_{j=0}^{\infty} (a+2k)_j \frac{t^j}{j!} =$$

$$= (a)_{2k} (-t)^k (1-t)^{-a-2k}, \qquad t \in \mathbb{D}_c.$$

Therefore

$$R_3 = (1-t)^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} (a)_{2k} \frac{u_k}{k!} \left(\frac{-xt}{(1-t)^2} \right)^k =$$

$$= (1-t)^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)_k \left(\frac{a+1}{2}\right)_k \frac{u_k}{k!} \left(-\frac{4xt}{(1-t)^2} \right)^k =$$

$$= (1-t)^{-a} {}_{p+2}F_q \left(\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}, \alpha_1, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \ldots, \beta_q; \frac{-4xt}{(1-t)^2} \right), \tag{48}$$

where we have used relation (39). Since $R_3 = R_2 = R_1$, the proof is complete. □

As an immediate consequence of Lemmas 1 and 2 we have the following result.

Corollary 1. *Let $\rho \in \mathbb{N}$, and $\delta_1, \ldots, \delta_\rho \in (-1, +\infty)$, $\kappa_1, \ldots, \kappa_\rho \in \mathbb{Z}_+$, be arbitrary parameters. If $\alpha > -1$ then*

$$\mathcal{L}_n(x; \alpha, \delta_1, \ldots, \delta_\rho, \kappa_1, \ldots, \kappa_\rho) =$$

$$= \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \zeta^{-n-1} e^{\zeta} {}_\rho F_{\rho+1} \left[\begin{matrix} \delta_1 + 1, \ldots, \delta_\rho + 1; \\ \alpha + 1, \kappa_1 + \delta_1 + 1, \ldots, \kappa_\rho + \delta_\rho + 1; \end{matrix} \; -x\zeta \right] d\zeta,$$

$$x \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{49}$$

If $\alpha, \beta \in (-1, +\infty): \ \alpha + \beta > -1$, then

$$\mathcal{P}_n(x; \alpha, \beta, \delta_1, \ldots, \delta_\rho, \kappa_1, \ldots, \kappa_\rho) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{(\alpha+\beta+1)_n} \oint_{|\zeta|=\frac{1}{4}} \zeta^{-n-1} (1-\zeta)^{-\alpha-\beta-1} *$$

$$*{}_{\rho+2}F_{\rho+1}\left[\begin{array}{c} \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{\alpha+\beta+2}{2}, \delta_1+1,\dots,\delta_\rho+1; \\ \alpha+1, \kappa_1+\delta_1+1,\dots,\kappa_\rho+\delta_\rho+1; \end{array} \quad -\frac{4x\zeta}{(1-\zeta)^2}\right] d\zeta,$$

$$x \in \mathbb{C}: \ |x| < \frac{1}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{50}$$

Proof. The proof follows by calculating the corresponding Taylor coefficients in the above Lemmas (with $c = \frac{1}{3}$). $\Box$

In formula (37) on the left we see ${}_{p+2}F_q$ with an argument $-\frac{4xt}{(1-t)^2}$. If we proceed as for the case of $\mathbf{L}_n$ we shall get huge expressions because of this composition of functions. We also have $(1-t)^{-a}$ instead of e^{-x} which also has effect on the complexification.

Observe that ${}_3F_2$ polynomials of type $\mathbf{P}_n$ were already studied in [30]. A recurrence relation for them was obtained by Fasenmyer's method. This recurrence relation was very large and, probably, of restricted use. It should be noticed that Fasenmyer's method seems to be more preferable in the case of polynomials $\mathbf{P}_n$.

Let us turn to the question about the location of zeros of polynomials $\mathbf{P}_n$ and $\mathbf{L}_n$. As usual, it is useful to use the Eneström–Kakeya Theorem ([22, p. 136]).

Proposition 3. *Let $p, q \in \mathbb{Z}_+$: $p \geq q+1$, and*

$$a \in (-1,+\infty); \ \alpha_1,\dots,\alpha_p; \beta_1,\dots,\beta_q \in (0,+\infty),$$

are some parameters. If

$$\alpha_j \geq \beta_j, \ j \in \mathbb{Z}_{1,q}; \quad \alpha_k \geq 1, \ k \in \mathbb{Z}_{q+1,p}, \tag{51}$$

then all zeros of polynomials $\mathbf{P}_n(x) = \mathbf{P}_n(x; a, \alpha_1,\dots,\alpha_p; \beta_1,\dots,\beta_q)$ and all zeros of polynomials $\mathbf{L}_n(x) = \mathbf{L}_n(x; \alpha_1,\dots,\alpha_p; \beta_1,\dots,\beta_q)$ lie in the unit disc $\mathbb{D}$.

Proof. Fix an arbitrary $n \in \mathbb{N}$. Since

$$\mathbf{P}_n(x; a, \alpha_1,\dots,\alpha_p; \beta_1,\dots,\beta_q) = {}_{p+2}F_q(-n, n+a, \alpha_1,\dots,\alpha_p; \beta_1,\dots,\beta_q; x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-n)_k (n+a)_k \frac{(\alpha_1)_k \dots (\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k \dots (\beta_q)_k} \frac{x^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} (n+a)_k \frac{(\alpha_1)_k \dots (\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k \dots (\beta_q)_k} \frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} d_k z^k =: p(z),$$

where

$$d_k := \frac{n!}{(n-k)!} (n+a)_k \frac{(\alpha_1)_k \dots (\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k \dots (\beta_q)_k} \frac{1}{k!} > 0, \quad z := -x.$$

Thus, the polynomial $p(z)$ has degree n and positive coefficients. The reversed polynomial:

$$p^*(z) := z^n p(1/z)$$

has degree n and positive coefficients as well. Observe that

$$d_k/d_{k+1} = \frac{1}{(n-k)} \frac{1}{(n+a+k)} \frac{(\beta_1+k)\dots(\beta_q+k)}{(\alpha_1+k)\dots(\alpha_p+k)} (k+1) \leq 1, \quad k \in \mathbb{Z}_{0,n-1},$$

where we used condition (51). We can apply the Eneström–Kakeya Theorem ([22, p. 136]) for the polynomial $p^*(z)$ to obtain that all its zeros lie in the domain $D_e := \{z \in \mathbb{C}: \ |z| > 1\}$. Therefore the zeros of $\mathbf{P}_n$ lie in $\mathbb{D}$.

We may proceed for polynomials $\mathbf{L}_n$ in a similar way:

$$\mathbf{L}_n(x;\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\beta_1,\ldots,\beta_q) = {}_{p+1}F_q(-n,\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\beta_1,\ldots,\beta_q;x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-n)_k \frac{(\alpha_1)_k\ldots(\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k\ldots(\beta_q)_k}\frac{x^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}\frac{(\alpha_1)_k\ldots(\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k\ldots(\beta_q)_k}\frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \widehat{d}_k z^k =: \widehat{p}(z),$$

where

$$\widehat{d}_k := \frac{n!}{(n-k)!}\frac{(\alpha_1)_k\ldots(\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k\ldots(\beta_q)_k}\frac{1}{k!} > 0, \quad z := -x.$$

Since

$$\widehat{d}_k/\widehat{d}_{k+1} \le 1, \qquad k \in \mathbb{Z}_{0,n-1},$$

by the Eneström–Kakeya Theorem we conclude that the reversed polynomial $\widehat{p}^*$ has its zeros in D_e. Thus, the zeros of $\mathbf{L}_n$ lie in $\mathbb{D}$ as well. $\Box$

Let us make an illustration on the last result. Consider the following three systems of polynomials:

$$f_n(x) = {}_3F_1(-n,\pi,5;3;x), \quad g_n(x) = {}_4F_1(-n,n+1,\pi,5;3;x),$$

and

$$h_n(x) = {}_3F_3(-n,\pi+1,2\pi+1;1,\pi+8,2\pi+201;x), \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

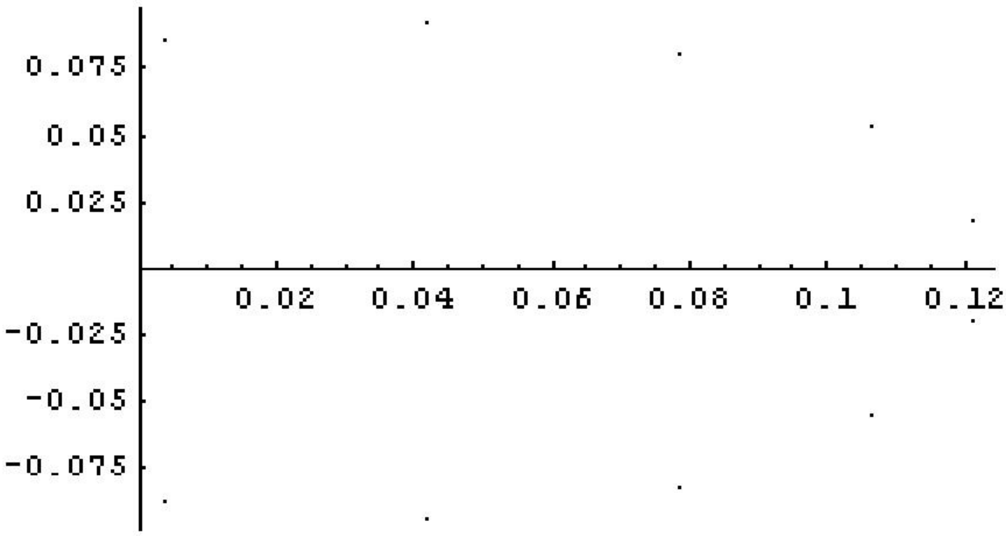

Figure 1. Zeros of $f_{10}(x)$.

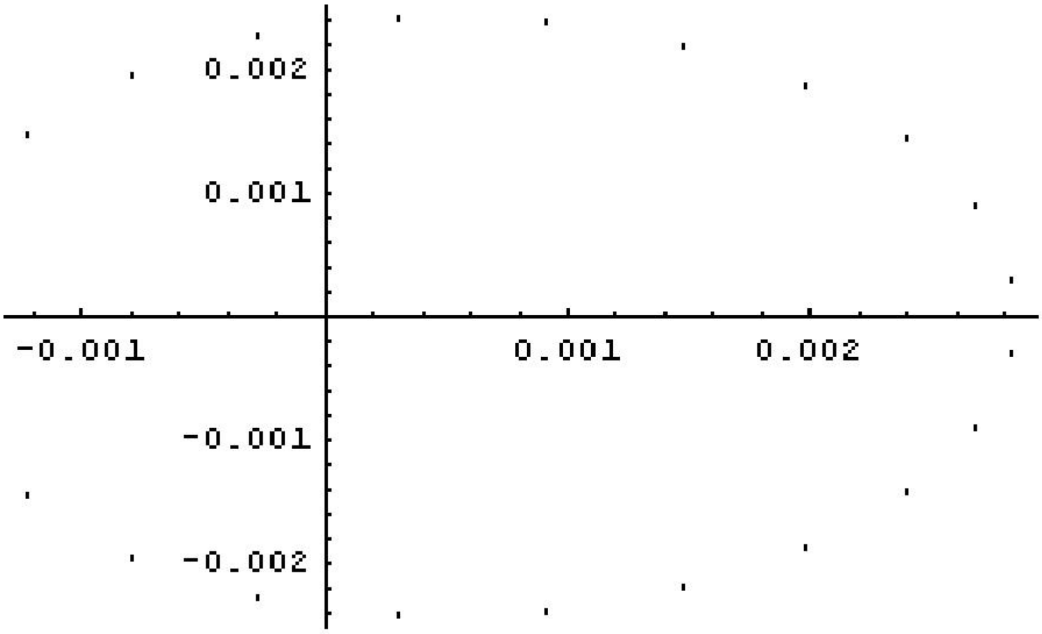

Figure 2. Zeros of $g_{20}(x)$.

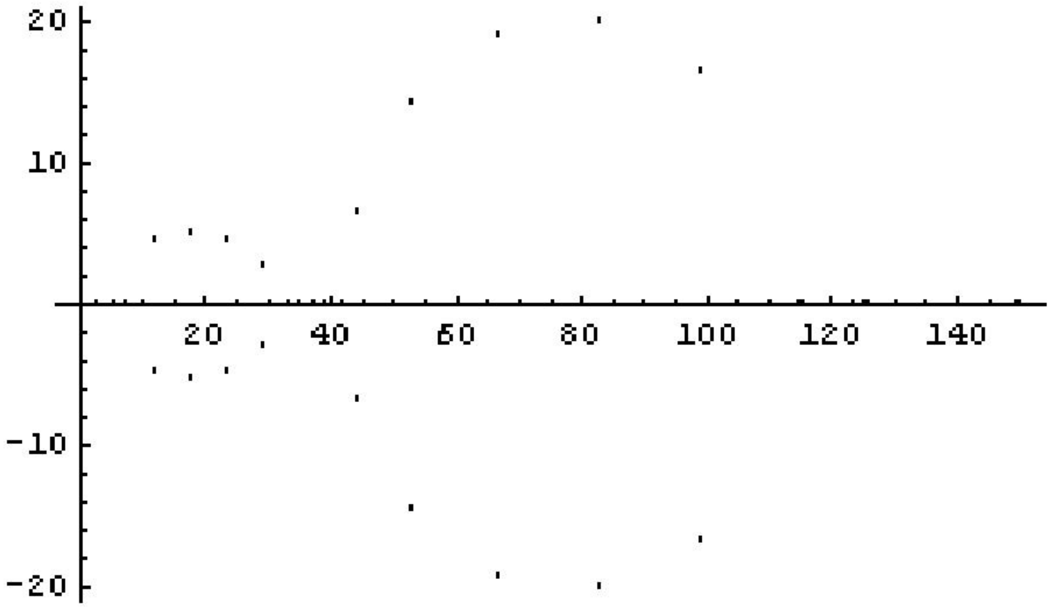

Figure 3. Zeros of $h_{30}(x)$.

Polynomials f_n and g_n fit into the conditions of Proposition 3, while polynomials h_n do not satisfy these conditions. Numerical calculations were performed by using *Mathematica*, while by final formatting we used *Paint*.

In Figures 1 and 2 we see that all zeros of $f_{10}(x)$ and $g_{20}(x)$ are close to the origin and they lie symmetrically (which is not surprising since polynomials have real coefficients). It seems that all zeros are located on certain algebraic curves.

Figure 3 shows that zeros of $g_{20}(x)$ can lie outside the unit disc. They are located on an interesting curve as well. Of course, the nature of the above mentioned curves is not yet clear. However this encourages some further investigations on the location of zeros of hypergeometric polynomials $\mathbf{P}_n$ and $\mathbf{L}_n$.

REFERENCES

1. H. Bavinck. Differential operators having Sobolev-type Gegenbauer polynomials as eigenfunctions. Higher transcendental functions and their applications, J. Comput. Appl. Math. – 2000. – Vol. **118**, No. **1-2**. – P. 23–42. 10.1016/S0377-0427(00)00279-X

2. H. Bavinck. Differential operators having Sobolev-type Laguerre polynomials as eigenfunctions: new developments, Proceedings of the Fifth International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and their Applications (Patras, 1999), J. Comput. Appl. Math. – 2001. – Vol. **133**, No. **1-2**. – P. 183–193. 10.1016/S0377-0427(00)00642-7

3. H. Bavinck, Differential operators having Sobolev-type Jacobi polynomials as eigenfunctions. J. Comput. Appl. Math. – 2003. – Vol. **151**, No. **2**| – P. 271–295. 10.1016/S0377-0427(02)00810-5

4. H. Bavinck, H.G. Meijer. Orthogonal polynomials with respect to a symmetric inner product involving derivatives, Appl. Anal. – 1989. – Vol. **33**, No. **1-2**. – P. 103–117. 10.1080/00036818908839864

5. T.W. Chaundy. An extension of hypergeometric functions. I. Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1943. – Vol. **14**. – P. 55–78. 10.1093/qmath/os-14.1.55

6. J.J. Duistermaat, F.A. Grünbaum. Differential equations in the spectral parameter, Comm. Math. Phys. – 1986. – Vol. **103**, No. **2**. – P. 177–240.

7. A.J. Durán, M.D. de la Iglesia. Differential equations for discrete Laguerre-Sobolev orthogonal polynomials, J. Approx. Theory. – 2015. – Vol. **195**. – P. 70–88. 10.1016/j.jat.2014.01.004

8. A.J. Durán, M.D. de la Iglesia. Differential equations for discrete Jacobi-Sobolev orthogonal polynomials, J. Spectr. Theory. – 2018. – Vol. **8**, No. **1**. – P. 191–234. 10.4171/jst/194

9. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi. Higher transcendental functions. Vols. I, II. Based, in part, on notes left by Harry Bateman. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London. – 1953.

10. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi. Higher transcendental functions. Vol. III. Based, in part, on notes left by Harry Bateman. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London. – 1955.

11. W.N. Everitt, K.H. Kwon, L.L. Littlejohn, R. Wellman. Orthogonal polynomial solutions of linear ordinary differential equations, Proceedings of the Fifth International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and their Applications (Patras, 1999), J. Comput. Appl. Math. – 2001. – Vol. **133**, No. **1-2**. – P. 85–109. 10.1016/S0377-0427(00)00636-1

12. G.M. Fichtenholz. Infinite series: ramifications, Revised English edition. Translated from the Russian and freely adapted by Richard A. Silverman. The Pocket Mathematical Library, Course 4. Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1970.

13. E. Horozov. Vector orthogonal polynomials with Bochner's property, Constr. Approx. – 2018. – Vol. **48**, No. **2**. – P. 201–234. 10.1007/s00365-017-9410-6

14. M.E.H. Ismail. Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable, With two chapters by Walter Van Assche. With a foreword by Richard A. Askey. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 98. Cambridge University Press, Cambridge. – 2005. 10.1017/CBO9781107325982

15. J. Koekoek, R. Koekoek, H. Bavinck. On differential equations for Sobolev-type Laguerre polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. – 1998. – Vol. **350**, No. 1. – P. 347–393. 10.1090/S0002-9947-98-01993-X

16. R. Koekoek ,H.G. Meijer. A generalization of Laguerre polynomials, SIAM J. Math. Anal. – 1993. – Vol. **24**, No. 3. – P. 768–782. 10.1137/0524047

17. R. Koekoek. Generalizations of Laguerre polynomials, J. Math. Anal. Appl. – 1990. – Vol. **153**, No. **2**. – P. 576–590. 10.1016/0022-247X(90)90233-6

18. R. Koekoek, P.A. Lesky, R.F. Swarttouw. Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues. With a foreword by Tom H. Koornwinder. Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin. – 2010. 10.1007/978-3-642-05014-5

19. A.M. Krall. Hilbert space, boundary value problems and orthogonal polynomials. Operator Theory: Advances and Applications, 133, Birkhäuser Verlag, Basel. – 2002. 10.1007/978-3-0348-8155-5

20. H.L. Krall. Certain differential equations for Tchebycheff polynomials, Duke Math. – 1938. – Vol. **J.4** , No.**4**. – 705–718. 10.1215/S0012-7094-38-00462-4

21. F. Marcellán, Yuan Xu. On Sobolev orthogonal polynomials, Expo. Math. – 2015. – Vol. **33**, No. **3**. – 308–352. 10.1016/j.exmath.2014.10.002

22. M. Marden. Geometry of polynomials. Second edition. Mathematical Surveys, No. 3, American Mathematical Society, Providence, R.I.. – 1966.

23. C. Markett, New representations of the Laguerre-Sobolev and Jacobi-Sobolev orthogonal polynomials, From operator theory to orthogonal polynomials, combinatorics, and number theory, a volume in honor of Lance Littlejohn's 70th birthday, Oper. Theory Adv. Appl., 285, Birkhäuser Springer, Cham, 2021. – P. 305–327.

24. C. Markett,The differential equation for Jacobi-Sobolev orthogonal polynomials with two linear perturbutions. Corrected title: The differential equation for Jacobi-Sobolev orthogonal polynomials with two linear perturbations, J. Approx. Theory. – 2022. – Vol. – **280**. – Paper No. 105782, 24 pp. 10.1016/j.jat.2022.105782

25. E.B. McBride. Obtaining generating functions. Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 21, Springer-Verlag, New York-Heidelberg. – 1971.

26. E.D. Rainville. Special functions. Reprint of 1960 first edition. Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y.. – 1971.

27. F.W. Schäfke, G. Wolf. Einfache verallgemeinerte klassische Orthogonalpolynome. (German), J. Reine Angew. Math. – 1973. – Vol. **262-263**. – P. 339–355.

28. V. Spiridonov, A. Zhedanov. Classical biorthogonal rational functions on elliptic grids, C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. – 2000. – Vol. **22**, No. **2**. – P. 70–76.

29. G. Szegö. Orthogonal polynomials. Fourth edition. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII, American Mathematical Society, Providence, R.I.. – 1975.

30. S.M. Zagorodnyuk. On some classical type Sobolev orthogonal polynomials, J. Approx. Theory. – 2020. – Vol. **250**. – 105337, 14 pp. 10.1016/j.jat.2019.105337

31. S.M. Zagorodnyuk. On some Sobolev spaces with matrix weights and classical type Sobolev orthogonal polynomials, J. Difference Equ. Appl. – 2021. – Vol. **27**, No. 2. – P. 261–283. 10.1080/10236198.2021.1887160

32. S.M. Zagorodnyuk. On the multiplication operator by an independent variable in matrix Sobolev spaces, Adv. Oper. Theory. – 2022. – Vol. **7**, No. 4. – Paper No. 54. 10.1007/s43036-022-00221-1

Article history: Received: 21 August 2023; Final form: 29 September 2023
Accepted: 2 October 2023.

How to cite this article:

S. M. Zagorodnyuk, On some hypergeometric Sobolev orthogonal polynomials with several continuous parameters, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 98, 2023, p. 4–24. DOI: 10.26565/2221-5646-2023-98-01

Про деякі гіпергеометричні соболевські ортогональні многочлени з кількома неперервними параметрами

С. М. Загороднюк
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022

В цій статті ми вивчаємо наступні гіпергеометричні многочлени:

$$\mathcal{P}_n(x) = \mathcal{P}_n(x; \alpha, \beta, \delta_1, \dots, \delta_\rho, \kappa_1, \dots, \kappa_\rho) =$$

$$= {}_{\rho+2}F_{\rho+1}(-n, n+\alpha+\beta+1, \delta_1+1, \dots, \delta_\rho+1; \alpha+1, \kappa_1+\delta_1+1, \dots, \kappa_\rho+\delta_\rho+1; x),$$

та

$$\mathcal{L}_n(x) = \mathcal{L}_n(x; \alpha, \delta_1, \dots, \delta_\rho, \kappa_1, \dots, \kappa_\rho) =$$

$$= {}_{\rho+1}F_{\rho+1}(-n, \delta_1+1, \dots, \delta_\rho+1; \alpha+1, \kappa_1+\delta_1+1, \dots, \kappa_\rho+\delta_\rho+1; x), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\alpha, \beta, \delta_1, \dots, \delta_\rho \in (-1, +\infty)$, та $\kappa_1, \dots, \kappa_\rho \in \mathbb{Z}_+$, є деякими параметрами. Натуральне число ρ неперервних параметрів $\delta_1, \dots, \delta_\rho$ може бути обраним довільно великим. Ясно, що спеціальний випадок $\kappa_1 = \dots = \kappa_\rho = 0$ призводить до многочленів Якобі

та Лагерра. Звичайно, подібні та більш загальні поліноми виникали в літературі раніше. Наша мета тут полягає в тому, щоб показати, що поліноми $\mathcal{P}_n(x)$ та $\mathcal{L}_n(x)$ є соболевськими ортогональними многочленами на дійсній осі з деякими явними матричними мірами.

Важливість ортогональності була нашою головною причиною зосередити нашу увагу на поліномах $\mathcal{P}_n(x)$ та $\mathcal{L}_n(x)$. Тут ми використовуємо деякі наші інструменти, отримані раніше. Зокрема, нещодавно було показано, що соболевські ортогональні многочлени пов'язані через диференціальне рівняння з ортогональними системами $\mathcal{A}$ функцій, що діють у прямих сумах звичайних L^2_μ просторів квадратично сумованих (класів еквівалентності) функцій відносно позитивної міри μ. Випадок одного L^2_μ має додаткову цікавість, оскільки він дозволяє використовувати OPRL для отримання явних систем соболевських ортогональних многочленів. Основна проблема тут полягає в *виборі підходящого лінійного диференціального оператора з метою отримання явних представлень соболевських ортогональних многочленів.* Після цього доказ співвідношень ортогональності є перевіркою такого вибору і проводиться в іншому напрямку: ми починаємо з вже відомих многочленів та йдемо до їх властивостей.

Ми також коротко вивчаємо такі властивості вищенаведених поліномів: інтегральні представлення, диференціальні рівняння та розташування нулів. Побудовано систему таких поліномів з біспектральністю певного виду.

Ключові слова: **ортогональні поліноми; соболевська ортогональність; рекурентні співвідношення.**

Історія статті: отримана: 21 серпня 2023; останній варіант: 29 вересня 2023
прийнята: 2 жовтня 2023.

ISSN 2221-5646(Print) 2523-4641(Online)
Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics”
2023, Vol. 98, p. 25–35
DOI: 10.26565/2221-5646-2023-98-02
УДК 517

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
2023, Том 98, с. 25–35

D. Seliutin
PhD math, student
School of Mathematics and Informatics
V.N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine, 61022
seliutin2020pg@student.karazin.ua *http://orcid.org/0000-0002-4591-7272*

On integration with respect to filter

This article is devoted to the study of one generalization of the Riemann integral. Namely, in the paper, it was observed that the classical definition of the Riemann integral over a finite segment as a limit of integral sums, when the diameter of the division of the segment tends to zero, can be replaced by a limit of integral sums over a filter of sets, which can be described in a certain "good way". This idea was continued, and in the work we propose a new concept - the integral of a function over a filter on the set of all tagged partitions of a segment. Using of filters is a very good method in questions related to convergence or some of its analogues in general topological vector spaces. Namely, if the space is non-metrizable, then the concept of convergence is introduced precisely with the help of filters. Also, using filters, you can formulate the concept of completeness and its analogues. The completeness of spaces is one of the central concepts of the theory of topological vector spaces, since Banach spaces are complete. That is, using a generalization of the completeness of spaces constructed using filters, we can explore various generalizations of Banach spaces. We study standard issues related to integration. For example, does the integrability of the filter function imply its boundedness? The answer to this question is affirmative. Namely: the concept of filter boundedness of a function is introduced, and it is shown that if a function is integrable over filter, then its integral sums are bounded over the filter, and this function itself is bounded in the classical sense. Next, we showed that the filter integral satisfies the linearity property, namely, the integral over filter of the sum of two functions is the sum of the filter integrals of these functions. We introduce the concept of an exactly tagged filter, and with the help of such filters we study the filter integrability of unbounded functions on a segment. We give an example of a specific unbounded function and a specific filter under which this function is integrable. Next, we prove a theorem that describes unbounded filter-integrable functions on a segment. The last section of the article is devoted to the integration of functions relative to the filter on a subsegment of this segment.

Keywords: **integral; filter; idea; filter base.**

2010 Mathematics Subject Classification: 76A11; 76B11; 76M11.

1. Introduction

Let us remind main concepts which we use in this paper. Throughout this article Ω stand for a non-empty set. Non-empty family of subsets $\mathfrak{F} \subset 2^{\Omega}$ is called *filter on* Ω, if $\mathfrak{F}$ satisfies the following axioms:

1. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$;
2. if $A,\ B \in \mathfrak{F}$ then $A \cap B \in \mathfrak{F}$;
3. if $A \in \mathfrak{F}$ and $D \supset A$ then $D \in \mathfrak{F}$.

Also very useful for us is a concept of filter base. Non-empty family of subsets $\mathfrak{B} \subset 2^{\Omega}$ is called *filter base on* Ω, if $\emptyset \notin \mathfrak{B}$ and for every $A,\ B \in \mathfrak{B}$ there exists $C \in \mathfrak{B}$ such that $C \subset A \cap B$. We say that filter base *generates filter* $\mathfrak{F}$ if and only if for each $A \in \mathfrak{F}$ there is $B \in \mathfrak{B}$ such that $B \subset A$.

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function. For $t \in \mathbb{R}$ denote $\mathcal{O}(t)$ the family of all neighbourhoods of t. Let $\mathfrak{F}$ be a filter on $\mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Function f is said to be *convergent to* y *over filter* $\mathfrak{F}$ (denote $y = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$), if for each $U \in \mathcal{O}(y)$ there exists $A \in \mathfrak{F}$ such that for each $t \in A$ the following holds true: $f(t) \in U$. We refers, for example, to [1] for more information about filter and related concepts.

The concept of filter is a very powerful tool for studying different properties of general topological vector spaces. For example, in [3] author studies convergence over ideal, generated by the modular function. Ideal is a concept dual to filter. In [2] we study completeness and its generalization using filters.

In this article we refer our attention to classical Riemann integral. Let us remind how we can construct this object. Let $[a, b] \subset \mathbb{R}$, let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Denote $\Pi = \{a \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq ... \leq \xi_n = b\}$ the partition of $[a, b]$, in other words, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} [\xi_{k-1}, \xi_k] = [a, b]$. Consider also the set $T = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ such that for each $k = 1, 2, ..., n$ $t_k \in [\xi_{k-1}, \xi_k]$. Let us call the pair (Π, T) by the *tagged partition on the segment.* Denote $d(\Pi)$ *the diameter of the* Π – maximum length of $[\xi_{k-1}, \xi_k]$, where $k = 1, 2, ..., n$. Let us recall that function f is said to be *Riemann integrable* if there exist the limit $I = \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot |\xi_k - \xi_{k-1}|$, and we call this limit the Riemann integral of the function f, and write $I = \int\limits_a^b f(t)dt$. We know many different properties of this integral, for example linearity, integration on subsegment of $[a, b]$ etc.

If we look at the definition of Riemann integral more attentively, we realize that, in fact we can use one special filter and obtain desirable result. In next section we are going to develop this idea.

2. Integration with respect to filter

Just for simplicity we are going to consider functions, defined on $[0, 1]$. Let $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ be a function. As above, denote $\Pi = \{a \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq ... \leq$

$\xi_n = b\}$ the partition of $[0,1]$, in other words, $\bigcup\limits_{k=1}^{n}[\xi_{k-1},\xi_k] = [0,1]$. Consider also the set $T = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ such that for each $k = 1, 2, ..., n$ $t_k \in [\xi_{k-1}, \xi_k]$. For $k = 1, 2, ..., n$ denote $\Delta_k := |\xi_k - \xi_{k-1}|$. Denote also $\mathrm{TP}[0,1]$ the set of all tagged partition of $[0,1]$. For a tagged partition $(\Pi, T) \in \mathrm{TP}[0,1]$ denote

$$S(f, \Pi, T) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta_k.$$

Now we are going to introduce the central definition of this paper. It seems that the this definition is new. At least, we didn't find it in the literature.

Definition 1. Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be a function, $\mathfrak{F}$ be a filter on $\mathrm{TP}[0,1]$. We say that f is *integrable over filter* $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F}$-integrable for short), if there exists $I \in \mathbb{R}$ such that $I = \lim\limits_{\mathfrak{F}} S(f, \Pi, T)$. The number I is called *the* $\mathfrak{F}$*-integral of the* f (denote $I = \int\limits_0^1 f d\mathfrak{F}$).

Remark 1. The fact that f is $\mathfrak{F}$-integrable we will write as follows:

$$f \in \mathrm{Int}(\mathfrak{F}).$$

Remark 2. Using Definition 1 we can construct the Riemann integral as follows. Let $\delta > 0$ be a real positive number. Denote

$$P_{<\delta} = \{(\Pi, T) \in \mathrm{TP}[0,1] : \ d(\Pi) < \delta\},$$

where $d(\Pi)$ stands for diameter of Π. Consider now

$$\mathfrak{B}_{<\delta} = \{P_{<\delta} : \delta > 0\}.$$

It is easy to check that $\mathfrak{B}_{<\delta}$ is a filter base. Denote $\mathfrak{F}_{<\delta}$ filter generate by $\mathfrak{B}_{<\delta}$. Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be a function. Then f is integrable by Riemann if there exists the limit $\lim\limits_{\mathfrak{F}_{<\delta}} S(f, \Pi, T)$.

Bellow we study different properties of filter integration. Let us introduce one more technical concept.

Definition 2. Let X be a non-empty set, $f : X \to \mathbb{R}$ be a function, and $\mathfrak{F}$ be a filter on X. We say that f is *bounded with respect to* $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F}$-bounded for short), if there is $C > 0$ such that there exists $A \in \mathfrak{F}$ such that for every $t \in A$ $|f(t)| < C$.

The following lemma is very simple, but for readers convenient we present its proof.

Lemma 1. *Let X be a non-empty set, $f : X \to \mathbb{R}$ be a function, and $\mathfrak{F}$ be a filter on X. Suppose that there exists $I \in \mathbb{R}$, $I = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$. Then f is $\mathfrak{F}$-bounded.*

Proof. We know that $I = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$. It means that for every $\varepsilon > 0$ there exists $A \in \mathfrak{F}$ such that for all $t \in A$ $|f(t) - I| < \varepsilon$. Consider

$$|f(t)| - |I| \le |f(t) - I| < \varepsilon.$$

In other words, $|f(t)| \le |I| + \varepsilon$. Then just put $C := |I| + \varepsilon$.

The next theorem generalizes well-know fact about Riemann integral: if function in integrable by Riemann then it's bounded.

Theorem 1. *Let $\mathfrak{F}$ be a filter on $TP[0,1]$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be a function, and $f \in Int(\mathfrak{F})$. Then $S(f, \Pi, T)$ is $\mathfrak{F}$-bounded.*

Proof. Just use Lemma 1.

Let us formulate well-known fact about Riemann integral, using filters.

Theorem 2. *Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, there exists $\lim\limits_{\mathfrak{F}_{<\delta}} S(f, \Pi, T)$. Then f is bounded, in other words, there is $C > 0$ such that for all $t \in [0,1]$ $|f(t)| \le C$.*

The next theorem is natural generalization of the Theorem 2.

Theorem 3. *Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, let $\mathfrak{F}$ be a filter on $TP[0,1]$ such that for every $A \in \mathfrak{F}$ there exists $B \in \mathfrak{F}_{<\delta}$ such that $B \subset A$ and let there exists $I \in \mathbb{R}$ such that $I = \lim\limits_{\mathfrak{F}} S(f, \Pi, T)$. Then $C > 0$ such that for each $t \in [0,1]$ we have $|f(t)| < C$.*

Proof. There exists $I \in \mathbb{R}$ such that $I = \lim\limits_{\mathfrak{F}} S(f, \Pi, T)$ if and only if for all $\varepsilon > 0$ there exists $A \in \mathfrak{F}$ such that for all $(\Pi, T) \in A$ $|S(f, \Pi, T) - I| < \varepsilon$. We know that for $A \in \mathfrak{F}$ there is $B \in \mathfrak{F}_{<\delta}$ such that $B \subset A$, then, particularly, for all $\varepsilon > 0$ there exists $A \in \mathfrak{F}$ there is $B \in \mathfrak{F}_{<\delta}$ such that $B \subset A$ such that for all $(\Pi, T) \in B$ $|S(f, \Pi, T) - I| < \varepsilon \Rightarrow$ for all $\varepsilon > 0$ there exists $B \in \mathfrak{F}_{<\delta}$ such that for all $(\Pi, T) \in B$ $|S(f, \Pi, T) - I| < \varepsilon$. So using Theorem 2, there exists $C > 0$ such that for each $t \in [0,1]$ we have $|f(t)| < C$, in other words, f is bounded.

Now we are going to demonstrate that filter integration has additive property. To demonstrate this we proof next easy two lemmas. The following Lemmas 2 and 3 are well-known, but for readers comprehension we present their proofs.

Lemma 2. *Let X be a non-empty set, $f,\ g : X \to \mathbb{R}$ be a functions, and $\mathfrak{F}$ be a filter on X. Let $x = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$, $y = \lim\limits_{\mathfrak{F}} g$. Then $\lim\limits_{\mathfrak{F}}(f + g) = x + y$.*

Proof. We know that $x = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$, so for each $U \in \mathcal{O}(x)$ there is $A \in \mathfrak{F}$ such that $f(A) \subset U$. Analogically, $y = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$, it means that for each $V \in \mathcal{O}(x)$ there is $B \in \mathfrak{F}$ such that $f(B) \subset V$. We have to demonstrate that for each $W \in \mathcal{O}(x + y)$ there exists $C \in \mathfrak{F}$ such that $(f + g)(C) \subset W$. Let fix $W \in \mathcal{O}(x + y)$. Then there exist $W_1 \in \mathcal{O}(x)$ and $W_2 \in \mathcal{O}(y)$ such that $W \supset W_1 + W_2$. Then there are $C_1,\ C_2 \in \mathfrak{F}$ such that $f(C_1) \subset W_1$ and $f(C_2) \subset W_2$. Denote $C := C_1 \cap C_2$. Clearly that $C \in \mathfrak{F}$. So

$$(f + g)(C) = f(C) + g(C) \subset W_1 + W_2 \subset W.$$

Lemma 3. *Let X be a non-empty set, $f : X \to \mathbb{R}$ be a function, $\mathfrak{F}$ be a filter on X, and $\alpha \in \mathbb{R}$. Let $x = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$. Then $\lim\limits_{\mathfrak{F}} \alpha f = \alpha x$.*

Proof. $x = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$, it means that for each $U \in \mathcal{O}(x)$ there is $A \in \mathfrak{F}$ such that $f(A) \subset U$. We have to demonstrate that for all $V \in \mathcal{O}(\alpha x)$ there is $B \in \mathfrak{F}$ such that $(\alpha f)(B) \subset V$. Suppose that $\alpha \neq 0$. The case $\alpha = 0$ is obvious. Remark that if $W \in \mathcal{O}(x)$ then $\alpha W \in \mathcal{O}(\alpha x)$. So just put $B := A$. Then $(\alpha f)(B) = \alpha f(B) \subset \alpha U \in \mathcal{O}(\alpha x)$.

Theorem 4. *Let $\mathfrak{F}$ be a filter on $TP[0,1]$, $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ be a functions, α, $\beta \in \mathbb{R}$, $f \in Int(\mathfrak{F})$ and $g \in Int(\mathfrak{F})$. Then $(\alpha f + \beta g) \in Int(\mathfrak{F})$*

Proof. Just use Lemmas 2 and 3.

3. Integration with respect to different filters

In the previous section we've studied arithmetic properties of integral over filter and problems deals with boundedness. This section is devoted to integration over different filters and its relations.

Remark 3. Let us note that despite the fact that this section is devoted to the integration with respect to different filters, here we describe some properties of filters deals with integration. Explicit examples of filters different from one, described in Remark 2, appear in the following sections.

For $(\Pi, T) \in \mathrm{TP}[0,1]$ and $t \in T$ we denote $\Delta(t)$ length of the element of partition of Π which covers t.

Let $(\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)$ be partitions of $[0,1]$. Consider

$$\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) =$$
$$\sum_{t \in T_1 \cap T_2} |\Delta_1(t) - \Delta_2(t)| + \sum_{T_1 \setminus T_2} \Delta_1(t) + \sum_{T_2 \setminus T_1} \Delta_2(t).$$

For easy using of concept defined above consider $\mathbb{F} : [0,1] \to l_1[0,1]$, such that $\mathbb{F}(t) = e_t$, where

$$e_t(\tau) = \begin{cases} 1, \text{if } \tau = t; \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is clearly then that

$$\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) = ||S(\mathbb{F}, \Pi_1, T_1) - S(\mathbb{F}, \Pi_2, T_2)||.$$

Now we are going to demonstrate that the mapping ρ, defined above, is a metric, or distance between two tagged partitions.

Proposition 1. *Consider $\rho : TP[0,1] \times TP[0,1] \to \mathbb{R}$, $\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) = ||S(\mathbb{F}, \Pi_1, T_1) - S(\mathbb{F}, \Pi_2, T_2)||$. Then ρ satisfies all metric axioms.*

Proof.

1. let $(\Pi_1, T_1) = (\Pi_2, T_2)$.

   It is clear that in this case $\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) = 0$;

2. let $\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) = 0$.

   Then $\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) = \sum\limits_{t \in T_1 \cap T_2} |\Delta_1(t) - \Delta_2(t)| + \sum\limits_{T_1 \setminus T_2} \Delta_1(t) + \sum\limits_{T_2 \setminus T_1} \Delta_2(t) = 0$. We have a sum of non-negative numbers equals to 0. This means that

- $\forall t \in T_1 \cap T_2 \ |\Delta_1(t) - \Delta_2(t)| = 0 \Rightarrow \forall t \in T_1 \cap T_2 \ \Delta_1(t) = \Delta_2(t)$;
- $\forall t \in T_1 \setminus T_2 \ \Delta_1(t) = 0$;
- $\forall t \in T_2 \setminus T_1 \ \Delta_2(t) = 0$;

$\Rightarrow (\Pi_1, T_1) = (\Pi_2, T_2)$.

3. consider $(\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2), (\Pi_3, T_3)$. Then

$$\begin{aligned}\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) &= \\ ||S(\mathbb{F}, \Pi_1, T_1) - S(\mathbb{F}, \Pi_2, T_2) + S(\mathbb{F}, \Pi_3, T_3) - S(\mathbb{F}, \Pi_3, T_3)|| &\leq \\ ||S(\mathbb{F}, \Pi_1, T_1) - S(\mathbb{F}, \Pi_3, T_3)|| + ||S(\mathbb{F}, \Pi_3, T_3) - S(\mathbb{F}, \Pi_2, T_2)|| &= \\ \rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_3, T_3)) + \rho((\Pi_3, T_3), (\Pi_2, T_2))\end{aligned}$$

Now we introduce very important concept.

Definition 3. Let $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ be filters on $TP[0,1]$. We say that $\mathfrak{F}_2$ *ρ-dominates* filter $\mathfrak{F}_1$ ($\mathfrak{F}_2 \succ_\rho \mathfrak{F}_1$), if for every $\varepsilon < 0$ and for each $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ there exists $A_2 \in \mathfrak{F}_2$ such that for all $(\Pi_2, T_2) \in A_2$ there is $(\Pi_1, T_1) \in A_1$ such that $\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) < \varepsilon$.

Proposition 2. *Let $\mathfrak{F}_2 \supset \mathfrak{F}_1$. Then $\mathfrak{F}_2$ ρ-dominates $\mathfrak{F}_1$.*

Proof. As $\mathfrak{F}_2 \supset \mathfrak{F}_1$ we obtain that if $A \in \mathfrak{F}_1$ then $A \in \mathfrak{F}_2$. Consider an arbitrary $\varepsilon > 0$. Then for every $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ there is $A_2 \in \mathfrak{F}_2$, $A_2 := A_1$ such that for each $(\Pi_2, T_2) \in A_2$ there exists $(\Pi_1, T_1) \in A_1$, $(\Pi_1, T_1) := (\Pi_2, T_2)$ such that $\rho\left((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)\right) = \rho\left((\Pi_2, T_2), (\Pi_2, T_2)\right) = 0 < \varepsilon$.

Previous proposition shows us that ρ-dominance generates some relation of order on TP$[0,1]$ and is more general concept that relation of inclusion.

It is clear that if $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$ and $f \in \mathrm{Int}(\mathfrak{F}_1)$ then $f \in \mathrm{Int}(\mathfrak{F}_2)$ – just use the definition of function limit over filter. So we can formulate next easy proposition.

Proposition 3. *Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be a function, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ be filters on $TP[0,1]$ such that $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$ and $f \in Int(\mathfrak{F}_1)$. Then $f \in Int(\mathfrak{F}_2)$.*

Theorem 5. *Let $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ be filters on $[0,1]$. Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be a bounded function. Let $I = \lim\limits_{\mathfrak{F}_1} S(f, \Pi, T)$ and $\mathfrak{F}_2 \succ_\rho \mathfrak{F}_1$. Then $I = \lim\limits_{\mathfrak{F}_2} S(f, \Pi, T)$.*

Proof. Denote $C := \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t)|$.

We have to proof that for every $\varepsilon > 0$ there exists $B \in \mathfrak{F}_2$ such that for each $(\Pi_B, T_B) \in B$ we have $|S(f, \Pi_B, T_B) - I| < \varepsilon$.

We know that for every $\varepsilon > 0$ there exists $A \in \mathfrak{F}_1$ such that for each $(\Pi_1, T_1) \in A$ we have $|S(f, \Pi_1, T_1) - I| < \varepsilon$.

Now for an arbitrary $\varepsilon > 0$ and $A \in \mathfrak{F}_1$ found above one can find $A_2 \in \mathfrak{F}_2$ such that for all $(\Pi_2, T_2) \in A_2$ there is $(\Pi_1, T_1) \in A_1$ such that $\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) < \varepsilon$.

Then put $B := A_2$. Then for all $(\Pi_B, T_B) \in B$ we have $(\Pi_1, T_1) \in A_1$ such that

$$
\begin{aligned}
&|S(f, \Pi_B, T_B) - I| = \\
&|S(f, \Pi_B, T_B) - S(f, \Pi_1, T_1) + S(f, \Pi_1, T_1) - I| \le \\
&|S(f, \Pi_B, T_B) - S(f, \Pi_1, T_1)| + |S(f, \Pi_1, T_1) - I| = \\
&\sum_{t \in T_B \cap T_1} |f(t)| \cdot |\Delta_B(t) - \Delta_1(t)| + \sum_{t \in T_B \setminus T_1} |f(t)| \cdot \Delta_B(t) + \\
&\sum_{t \in T_1 \setminus T_B} |f(t)| \cdot \Delta_1(t) + \varepsilon \le C \cdot \rho((\Pi_B, T_B), (\Pi_1, T)) + \varepsilon \le \\
&C\varepsilon + \varepsilon \le \varepsilon(1 + C).
\end{aligned}
$$

4. Exactly tagged filters

In this part of our paper we consider problems deals filter integration of unbounded functions.

Definition 4. Let $\mathfrak{B}$ be a filter base on $TP[0,1]$. We say that $\mathfrak{B}$ is *exactly tagged* if there exist $A \subset [0,1]$ – a strictly decreasing sequence of numbers such that for each $B \in \mathfrak{B}$ and for every $(\Pi, T) \in B$ we have that $T \cap A = \emptyset$.

Definition 5. We say that filter $\mathfrak{F}$ on $TP[0,1]$ is *exactly tagged* if there exists exactly tagged base $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{F}$.

Theorem 6. *If filter $\mathfrak{F}$ on $TP[0,1]$ is exactly tagged then there exists unbounded function $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ such that $f \in Int(\mathfrak{F})$.*

Proof. Denote $\mathbb{N}^{-1} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ and consider next filter base $\mathfrak{B} = (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on $TP[0,1]$:

$B_1 = \big\{(\Pi, T) : T \cap \mathbb{N}^{-1} = \emptyset \text{ and } d(\Pi) < 1\big\}$;

$B_2 = \left\{(\Pi, T) : T \cap \mathbb{N}^{-1} = \emptyset \text{ and } d(\Pi) < \dfrac{1}{2}\right\}$;

$B_3 = \left\{(\Pi, T) : T \cap \mathbb{N}^{-1} = \emptyset \text{ and } d(\Pi) < \dfrac{1}{3}\right\}$;

...

$B_m = \left\{(\Pi, T) : T \cap \mathbb{N}^{-1} = \emptyset \text{ and } d(\Pi) < \dfrac{1}{m}\right\}$.

Consider now

$$
f(t) = \begin{cases} n, \text{ if } t = \dfrac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N} \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases} .
$$

Then for each $n \in \mathbb{N}$ and for every $(\Pi, T) \in B_n$ we have that $S(f, \Pi, T) = 0$, so $\lim\limits_{\mathfrak{B}} S(f, \Pi, T) = 0$.

For a tagged partition (Π, T) of $[0,1]$ and $\tau \in [0,1]$ denote $\ell(\Pi, T, \tau)$ the number which is equal to the length of the segment $\Delta \in \Pi$, for which $\tau \in \Delta$, if

$\tau \in T$. If $\tau \notin T$, we put $\ell(\Pi, T, \tau) = 0$. In this notation

$$S(f, \Pi, T) = \sum_{t \in [0,1]} f(t)\ell(\Pi, T, t).$$

Theorem 7. *For a filter $\mathfrak{F}$ on $TP[0,1]$ the following assertions are equivalent:*

1. *There exists an unbounded function $f : [0,1] \to [0, +\infty)$ such that $S(f, \Pi, T)$ is $\mathfrak{F}$-bounded;*
2. *There exists a countable subset $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0,1]$ such that there is $A \in \mathfrak{F}$ such that for every $(\Pi, T) \in A$*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n \cdot \ell(\Pi, T, t_n) < 1.$$

Proof. **(1)⇒(2)**: Let f be a non-negative, unbounded function on $[0,1]$ such that there is $C > 0$ and $B \in \mathfrak{F}$ such that for each $(\Pi, T) \in B$ we have $\sum\limits_{t \in [0,1]} f(t) \cdot \ell(\Pi, T, t) < C$. As f is unbounded, there exists $(\alpha_n) \subset [0,1]$ such that for every $n \in \mathbb{N}$ $f(\alpha_n) \geq Cn$. Then there exists $(\alpha_n) \subset [0,1]$, $C > 0$, there is $A \in \mathfrak{F}$, $A := B$ such that for all $(\Pi, T) \in A$ we obtain:

$$\sum_{t \in [0,1]} n \cdot \ell(\Pi, T, \alpha_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f(\alpha_n)}{C} \cdot \ell(\Pi, T, \alpha_n) \leq$$
$$\frac{1}{C} \sum_{t \in [0,1]} f(t) \cdot \ell(\Pi, T, t) < \frac{1}{C} \cdot C = 1.$$

(2)⇒(1): Let there exists a countable subset $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0,1]$ and $C > 0$ such that there is $A \in \mathfrak{F}$ such that for every $(\Pi, T) \in A$ $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} n \cdot \ell(\Pi, T, t_n) < C$. Consider function

$$f(t) = \begin{cases} n, \text{ if } t = \alpha_n, \ n \in \mathbb{N} \\ 0, \text{ if } t \neq \alpha_n \end{cases}.$$

Obviously, $f(t)$ is unbounded. Then there is $C > 0$ and there is $B \in \mathfrak{F}$, $B := A$ such that for every $(\Pi, T) \in A$

$$\sum_{t \in [0,1]} f(t) \cdot \ell(\Pi, T, t) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} f(\alpha_n) \cdot \ell(\Pi, T, \alpha_n) \leq$$
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n \cdot \ell(\Pi, T, \alpha_n) < C$$

.

5. Integration over filter on a subsegment

Our next goal is as follows: if function f is integrable on $[0, 1]$ over filter $\mathfrak{F}$ on TP$[0, 1]$ then for an arbitrary $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ function f is is integrable on $[\alpha, \beta]$ over filter $\mathfrak{F}$.

To achieve this purpose we need to construct some restriction of filter $\mathfrak{F}$ on subsegment $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$. Now we present how we can construct such restriction.

Consider an arbitrary $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$. We consider only T such that $T \cap (\alpha, \beta) \neq \emptyset$. Consider an arbitrary $(\Pi, T) \in TP[0, 1]$.

We have four cases:

1. $\min\{T \cap (\alpha, \beta)\} > \min\{\Pi \cap (\alpha, \beta)\}$
   $\max\{T \cap (\alpha, \beta)\} < \max\{\Pi \cap (\alpha, \beta)\}$;
2. $\min\{T \cap (\alpha, \beta)\} > \max\{\Pi \cap (0, \alpha)\}$
   $\max\{T \cap (\alpha, \beta)\} < \max\{\Pi \cap (\alpha, \beta)\}$;
3. $\min\{T \cap (\alpha, \beta)\} > \min\{\Pi \cap (\alpha, \beta)\}$
   $\max\{T \cap (\alpha, \beta)\} < \min\{\Pi \cap (\beta, 1)\}$;
4. $\min\{T \cap (\alpha, \beta)\} > \max\{\Pi \cap (0, \alpha)$
   $\max\{T \cap (\alpha, \beta)\} < \min\{\Pi \cap (\beta, 1)\}$.

We have to construct a restriction of (Π, T) on $[\alpha, \beta]$. In each of four described cases we have such $(\Pi_k, T_k) \in TP[\alpha, \beta]$, $k = 1, 2, 3, 4$:

1. $\Pi_1 = \Big(\Pi \setminus \big((\Pi \cap [0, \alpha)) \cup (\Pi \cap (\beta, 1)) \cup \min\{\Pi \cap (\alpha, \beta)\} \cup \max\{\Pi \cap (\alpha, \beta)\}\big)\Big) \cup \{\alpha, \beta\}$
   $T_1 = T \setminus \big((T \cap [0, \alpha)) \cup (T \cap (\beta, 1])\big)$;
2. $\Pi_2 = \Big(\Pi \setminus \big((\Pi \cap [0, \alpha)) \cup \max\{\Pi \cap (\alpha, \beta)\} \cup (\Pi \cap (\beta, 1))\big)\Big) \cup \{\alpha, \beta\}$
   $T_2 = T_1$;
3. $\Pi_3 = \Big(\Pi \setminus \big((\Pi \cap [0, \alpha)) \cup \min\{\Pi \cap (\alpha)\} \cup (\Pi \cap [\beta, 1))\big)\Big) \cup \{\alpha, \beta\}$
   $T_3 = T_1$;
4. $\Pi_4 = \Big(\Pi \setminus \big((\Pi \cap [0, \alpha)) \cup (\Pi \cap [\beta, 1))\big)\Big) \cup \{\alpha, \beta\}$
   $T_4 = T_1$.

Now if we have an arbitrary filter $\mathfrak{F}$ on $TP[0, 1]$ we can construct filter $\mathfrak{F}_{[\alpha,\beta]}$ on $TP[\alpha, \beta]$, induced with $\mathfrak{F}$ in such way: consider an arbitrary $A \in \mathfrak{F}$ and for each $(\Pi, T) \in A$ we have to execute an algorithm, described above. For each $A \in \mathfrak{F}$ denote A_α^β the restriction of A on $[\alpha, \beta]$, described above.

Definition 6. Let $\mathfrak{F}$ be a filter on $TP[0,1]$, $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$. We call the filter $\mathfrak{F}$ *$[\alpha, \beta]$-complemented* if for each $A \in \mathfrak{F}$, for every (Π_1, T_1), $(\Pi_2, T_2) \in A_\alpha^\beta$ there exists $(\Pi^*, T^*) \in TP[0, \alpha]$ and $(\Pi^{**}, T^{**}) \in TP[\beta, 1]$ such that

$$(\Pi^*, T^*) \cup (\Pi_1, T_1) \cup (\Pi^{**}, T^{**}) \in A,$$

$$(\Pi^*, T^*) \cup (\Pi_2, T_2) \cup (\Pi^{**}, T^{**}) \in A.$$

Here we present promised result about filter integration on subsegment.

Theorem 8. *Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}$ be a filter on $TP[0,1]$ such that for each $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$ $\mathfrak{F}$ is $[\alpha, \beta]$-complemented. Let f be integrable of $[0,1]$ with respect to $\mathfrak{F}$. Then for every $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$ f is integrable on $[\alpha, \beta]$ with respect to $\mathfrak{F}$*

Proof. We know that for an arbitrary $\varepsilon > 0$ there exists $A \in \mathfrak{F}$ such that for all $(\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2) \in A$ we have: $|S(f, \Pi_1, T_1) - S(f, \Pi_2, T_2)| < \varepsilon$.

Let fix $\varepsilon > 0$ and consider an arbitrary $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$. For $A \in \mathfrak{F}$ consider an arbitrary $(\Pi^1, T^1), (\Pi^2, T^2) \in A_\alpha^\beta$. As $\mathfrak{F}$ is $[\alpha, \beta]$-complemented we can find $(\Pi^*, T^*) \in A_0^\alpha$ and $(\Pi^{**}, T^{**}) \in A_\beta^1$ such that $(\Pi_{11}, T_{11}) := (\Pi^*, T^*) \cup (\Pi^1, T^1) \cup (\Pi^{**}, T^{**}) \in A$ and $(\Pi_{22}, T_{22}) := (\Pi^*, T^*) \cup (\Pi^2, T^2) \cup (\Pi^{**}, T^{**}) \in A$. Then $\varepsilon > |S(f, \Pi_{11}, T_{11}) - S(f, \Pi_{22}, T_{22})| = |S(f, \Pi^1, T^1) - S(f, \Pi^2, T^2)|$.

Acknowledgment

This paper is partially supported by a grant from Akhiezer Foundation (Kharkiv). The author is thankful to his parents for their support and his scientific adviser, professor Vladimir Kadets for his constant help with this project. Also author thanks the Defence Forces of Ukraine for the defence and fight against Russian aggressors. The author is indebted to the referee for advices that improved the quality of the text.

REFERENCES

1. V. Kadets. A course in Functional Analysis and Measure Theory. – 2018. 10.1007/978-3-319-92004-7

2. V. Kadets, D. Seliutin. Completeness in topological vector spaces and filters on $\mathbb{N}$, Bulletin of the Belgian Mathematical Society, Simon. – 2021. – No **28**. – P. 531–545. 10.36045/j.bbms.210512

3. Listán-García, M.C. f-statistical convergence, completeness and f-cluster points, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. – 2016 – No **23**. – P. 235–245. 10.36045/bbms/1464710116

Article history: Received: 20 July 2023; Final form: 24 November 2023
Accepted: 25 November 2023.

How to cite this article:

D. D. Seliutin, On integration with respect to filter, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 98, 2023, p. 25–35. DOI: 10.26565/2221-5646-2023-98-02

Про інтегрування відносно фільтра

Д.Д. Селютін

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи 4, 61022, Харків, Україна

Дану статтю присвячено дослідженню одного узагальнення інтеграла Рімана. А саме, в роботі помічено, що класичне означення інтеграла Рімана по скінченному відрізку як границі інтегральних сум, коли діаметр розбиття відрізка прямує до нуля, може бути замінено на границю інтегральних сум по фільтру множин, які можна описати певним "хорошим чином". Цю ідею продовжено, і в роботі запропоновано нове поняття – інтеграла функції по фільтру на множині всіх відмічених розбиттів відрізка. Використання фільтрів є дуже хорошим методом в питаннях, пов'язаних зі збіжністю або деякими її аналогами в загальних топологічних векторних просторах. А саме, якщо простір не є метризовним, то поняття збіжності вводиться саме за допомогою фільтрів. Також, використовуючи фільтри, можна формулювати поняття повноти та її аналогів. Повнота просторів є одним із центральних понять теорії топологічних векторних просторів, оскільки банахові простори є повними. Тобто, використовуючи узагальнення повноти просторів, побудованих з використанням фільтрів, ми можемо досліджувати різні узагальнення банахових просторів. Далі в статті досліджуються стандартні питання, пов'язані з інтегруванням. Наприклад, чи витікає з інтегровності функції по фільтру її обмеженість? На це питання дано ствердну відповідь. Докладніше: введено поняття обмеженості функції за фільтром, і показано, що якщо функція є інтегровною за фільтром, то її інтегральні суми є обмеженими за фільтром, а сама ця функція є обмеженою в класичному розумінні. Далі ми показали, що інтеграл за фільтром задовольняє властивість лінійності, а саме інтеграл за фільтром від суми двох функцій є сумою інтегралів за фільтром цих доданків. Ми вводимо поняття точно відміченого фільтра, і за допомогою таких фільтрів вивчаємо інтегровність за фільтром необмежених на відрізку функцій. Ми наводимо приклад конкретної необмеженої функції та конкретного фільтра, за яким дана функція є інтегровною Далі ми доводимо теорему, яка описує необмежені, інтегровні за фільтром, функції на відрізку. Останній розділ статті присвячено інтегрегрування функцій відносно фільтра по підвідрізку даного відрізка.

Ключові слова: **інтеграл; фільтр; ідеал; база фільтра.**

Історія статті: отримана: 20 липня 2023; останній варіант: 24 листопада 2023
прийнята: 25 листопада 2023.

ISSN 2221-5646(Print) 2523-4641(Online)
Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics"
2023, Vol. 98, p. 36–49
DOI: 10.26565/2221-5646-2023-98-03
УДК 517.977

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
2023, Том 98, с. 36–49

M. O. Bebiya
PhD math
Assoc. Prof. Dep. of Applied Mathematics,
School of Mathematics and Computer Sciences
V. N. Karazin Kharkiv National University
Svobody Sq., 4, Kharkiv, Ukraine, 61022
m.bebiya@karazin.ua *http://orcid.org/0000-0003-3241-5879*

V. A. Maistruk
MS in applied mathematics
V. N. Karazin Kharkiv National University
Svobody Sq., 4, Kharkiv, Ukraine, 61022
vladamaystruk@gmail.com *http://orcid.org/0009-0002-2211-2858*

On linear stabilization of a class of nonlinear systems in a critical case

In this paper, we address the stabilization problem for nonlinear systems in a critical case. Namely, we study the class of canonical nonlinear systems. Canonical nonlinear systems or chain of power integrators is an important subject of research. Studying such systems is complicated by the fact that they cannot be mapped onto linear systems. Moreover, they have the uncontrollable first approximation. Previous results on smooth stabilization of such systems were obtained under the assumption that the powers in the right-hand side are strictly decreasing. In this work, we consider a case of non-increasing powers in the right-hand side for a three-dimensional system. A popular approach for studying such systems is the backstepping method, which is a method of step-wise stabilization. This method requires a sequential investigation of lower-dimensional subsystems. Backstepping enables the study of a wide range of nonlinear triangular systems but requires technically complex and cumbersome computations. Therefore, a natural question arises about constructing stabilizing controls of a simple form. Polynomial controls can serve as an example of such controls. In the paper, we demonstrate that linear controls can be considered as stabilizing controls. We derive sufficient conditions for the coefficients of the linear control that ensure the asymptotic stability of the zero equilibrium point of the corresponding closed-loop system. The asymptotic stability is proven using the Lyapunov function method, which is found as the sum of squares. The negative definiteness of the Lyapunov function derivative in a neighborhood of the origin guarantees asymptotic stability. In contrast to the case of strictly decreasing powers, additional conditions on the control coefficients, apart from their negativity, emerge. The obtained result extends to a broader class of nonlinear systems through stabilization by nonlinear approximation. This allows the consideration of systems with higher-order terms in the right-hand side. The effectiveness of the applied approach is illustrated by several model examples. The method used in this work to investigate the case of non-increasing powers can be applied to systems of higher dimensions.

Keywords: **stabilization; nonlinear systems; Lyapunov function method; critical case; linear stabilization; linear control.**

2010 Mathematics Subject Classification: 93D15; 93D30; 93C10; 34H05.

1. Introduction

The stabilization problem for nonlinear systems in a critical case is an important problem of nonlinear control theory [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Significant attention has been drawn by high-order nonlinear systems that cannot be mapped to linear systems [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. These systems exemplify a critical case. Since we are dealing with critical case, we cannot use the first (linear) approximation to find stabilizing controls for the original nonlinear system. It is natural to attempt to construct simple classes of stabilizing controls, such as linear controls. The problem of finding such stabilizing controls is called the linear stabilization problem.

In recent decades, a wide range of interest has been sparked by the systems of the following form

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}^{p_i} + f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u^{p_n}, \end{cases} \tag{1}$$

where $p_i \geq 1$ are ratios of positive odd integers, $f_i(x_1, \dots, x_n)$ are continuous real-valued functions with $f_i(0, \dots, 0) = 0$ $(i = 1, \dots, n-1)$.

The stabilization problem for system (1) was studied in many works, see, for instance, [1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9]. Works [5, 7, 8, 9] rely on the backstepping approach, which is based on recursive Lyapunov function design and leads to stabilizing controls of rather complicated structure. In [1] simple stabilizing controls of the form

$$u = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_{n+1} x_2^{p_1} + \dots + a_{2n-1} x_n^{p_{n-1}},$$

were constructed using a quadratic Lyapunov function (for $p_n = 1$). Work [3] shows that it is possible to linearly stabilize system (1).

The above-mentioned results from [3] were achieved under assumption that the powers p_i are strictly decreasing, that is, $p_1 > p_2 > \dots p_n \geq 1$. In this work we weaken the condition of powers p_i being strictly decreasing and prove that it is possible to consider non-increasing values of p_i and still be able to achieve linear stabilization.

Namely, we study the stabilizability of the system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^{p_1}, \\ \dot{x}_2 = x_3^{p_2}, \\ \dot{x}_3 = u^{p_3} \end{cases} \tag{2}$$

with $p_1 > 1$, $p_2 = p_3 = 1$. We find conditions on the coefficients under which a linear control stabilizes system (2). These results are generalized using nonlinear approximation.

2. Problem formulation and linear control construction

Consider the nonlinear system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^{p_1}, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = u, \end{cases} \tag{3}$$

where $u \in \mathbb{R}$ is a control, $p_1 > 1$ is a ratio of two positive odd integers.

The stabilization problem for system (3) is to find a continuous control $u(x)$ such that the equilibrium point $x = 0$ of system (3) with $u = u(x)$ is locally asymptotically stable.

Consider the linear control

$$u(x) = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3, \tag{4}$$

where $k_i \in \mathbb{R}$ are positive numbers.

Now we find conditions on the coefficients k_1, k_2, k_3 for the local asymptotic stability of the zero solution of system (3). To this end, we consider the following Lyapunov function

$$V(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{k_2^{p_1}}{k_1}(k_1x_1)^2 + \frac{k_3^{p_2}}{k_2}(k_1x_1 + k_2x_2)^2 + \frac{1}{k_3}(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3)^2\right)$$

It is obvious that $V(x)$ is positive definite for $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_3 > 0$.

Applying the linear change of variables

$$e_1 = k_1x_1, \quad e_2 = k_1x_1 + k_2x_2, \quad e_3 = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3,$$

we get

$$V(e) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} l_i e_i^2, \tag{5}$$

where $l_i = k_{i+1}^{p_i} k_i^{-1}$, $i = 1, 2$, $l_3 = k_3^{-1}$. The inverse change of variables is

$$x_1 = k_1^{-1}e_1, \quad x_2 = k_2^{-1}(e_2 - e_1), \quad x_3 = k_3^{-1}(e_3 - e_2).$$

Using (3), we compute $\dot e_1$, $\dot e_2$, $\dot e_3$ as follows:

$$\dot e_1 = k_1\dot x_1 = k_1 x_2^{p_1} = \frac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1},$$

$$\dot e_2 = k_1\dot x_1 + k_2\dot x_2 = k_1 x_2^{p_1} + k_2 x_3 = \frac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3}(e_3-e_2),$$

$$\dot e_3 = k_1\dot x_1 + k_2\dot x_2 + k_3\dot x_3 = \frac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3}(e_3-e_2)$$
$$+ k_3(-k_1x_1-k_2x_2-k_3x_3) = \frac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3}(e_3-e_2) + k_3 u$$

Thus, applying the feedback $u = -(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3) = -e_3$, system (3) takes the form

$$\begin{cases} \dot e_1 = \frac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1}, \\ \dot e_2 = \frac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3}(e_3-e_2), \\ \dot e_3 = -k_3e_3 + \frac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3}(e_3-e_2). \end{cases} \tag{6}$$

Now we calculate the derivative of $V(e)$, given by (5), along the trajectories of the closed-loop system (6)

$$\dot V(e) = \frac{\partial V}{\partial e_1}\frac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1} + \frac{\partial V}{\partial e_2}\left(\frac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3}(e_3-e_2)\right)$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial e_3}\left(-k_3e_3 + \frac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3}(e_3-e_2)\right).$$

Let us calculate each term separately

$$\frac{\partial V}{\partial e_1}\frac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1} = \frac{k_2^{p_1}}{2k_1}2e_1\frac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1} = e_1(e_2-e_1)^{p_1},$$

$$\frac{\partial V}{\partial e_2}\left(\frac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3}(e_3-e_2)\right) = \frac{k_3}{2k_2}2e_2\left(\frac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1}\right.$$
$$\left.+\frac{k_2}{k_3}(e_3-e_2)\right) = e_2\left(\frac{k_1k_3}{k_2^{p_1+1}}(e_2-e_1)^{p_1} + (e_3-e_2)\right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial e_3}\left(-k_3e_3 + \frac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3}(e_3-e_2)\right) = \frac{1}{2k_3}2e_3\Big(-k_3e_3$$
$$+\frac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3}(e_3-e_2)\Big) = e_3\Big(-e_3 + \frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1}$$
$$+\frac{k_2}{k_3^2}(e_3-e_2)\Big).$$

Then we have

$$\dot V(e) = e_1(e_2-e_1)^{p_1} + \frac{k_1k_3}{k_2^{p_1+1}}e_2(e_2-e_1)^{p_1} + e_2(e_3-e_2) - e_3^2$$
$$+ \frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}e_3(e_2-e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3^2}e_3(e_3-e_2).$$

Rewrite $\dot{V}(e)$ in the form

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) &= -e_1(e_1-e_2)^{p_1} - e_2(e_2-e_3) - e_3^2 + \frac{k_1k_3}{k_2^{p_1+1}}e_2(e_2-e_1)^{p_1} \\ &+ \frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}e_3(e_2-e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3^2}e_3(e_3-e_2).\end{aligned} \tag{7}$$

To estimate the derivative $\dot{V}(e)$ we use the following lemmas.

Lemma 1. *[10] For any $p \geq 1$ and any numbers $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$, the following inequality holds*

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n|^p \leq n^{p-1}(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p).$$

Lemma 2. *[10] Suppose that $p \geq 1$ is a ratio of positive odd integers. Then the following inequality holds*

$$x(x+a)^p \geq 2^{1-p}x^{p+1} + xa^p, \forall x, a \in \mathbb{R}.$$

Lemma 3. *[6] Suppose that $m > 0$, $n > 0$ are constants. Then, given any number $\gamma > 0$, the following inequality holds*

$$|x|^m|y|^n \leq \frac{m}{m+n}\gamma|x|^{m+n} + \frac{n}{m+n}\gamma^{-\frac{m}{n}}|y|^{m+n}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

First, using Lemma 1 and Lemma 2, we obtain the following inequalities:

$$\begin{aligned}-e_1(e_1-e_2)^{p_1} &\leq -2^{1-p_1}e_1^{p_1+1} + |e_2^{p_1}||e_1|, \\ -e_2(e_2-e_3) &\leq -e_2^2 + |e_2||e_3|, \\ \frac{k_1k_3}{k_2^{p_1+1}}e_2(e_2-e_1)^{p_1} &\leq \frac{k_1k_3}{k_2^{p_1+1}}2^{p_1-1}e_2^{p_1+1} + \frac{k_1k_3}{k_2^{p_1+1}}2^{p_1-1}|e_1^{p_1}||e_2|, \\ \frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}e_3(e_2-e_1)^{p_1} &\leq \frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}2^{p_1-1}|e_2^{p_1}||e_3| + \frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}2^{p_1-1}|e_1^{p_1}||e_3|, \\ \frac{k_2}{k_3^2}e_3(e_3-e_2) &\leq \frac{k_2}{k_3^2}e_3^2 + \frac{k_2}{k_3^2}|e_3||e_2|\end{aligned} \tag{8}$$

Now, by applying Lemma 3, we deduce

$$\begin{aligned}|e_2^{p_1}||e_1| &= \left|\frac{1}{C_1}e_2\right|^{p_1}|C_1^{p_1}e_1| \leq \frac{p_1}{(p_1+1)C_1^{p_1+1}}e_2^{p_1+1} + \frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}e_1^{p_1+1}, \\ |e_1^{p_1}||e_2| &= |C_2^{p_1}e_1|^{p_1}\left|\frac{1}{C_2^{p_1^2}}e_2\right| \leq \frac{p_1C_2^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}e_1^{p_1+1} + \frac{1}{(p_1+1)C_2^{p_1^2(p_1+1)}}e_2^{p_1+1}, \\ |e_2^{p_1}||e_3| &= \left|\frac{1}{C_3}e_2\right|^{p_1}|C_3^{p_1}e_3| \leq \frac{p_1}{(p_1+1)C_3^{p_1+1}}e_2^{p_1+1} + \frac{C_3^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}e_3^{p_1+1}, \\ |e_1^{p_1}||e_3| &= |C_4^{p_1}e_1|^{p_1}\left|\frac{1}{C_4^{p_1^2}}e_3\right| \leq \frac{p_1C_4^{p_1(p_1+1)}}{(p_1+1)}e_1^{p_1+1} + \frac{1}{(p_1+1)C_4^{p_1^2(p_1+1)}}e_3^{p_1+1}, \\ |e_2||e_3| &= \left|\frac{1}{C_5}e_2\right||C_5e_3| \leq \frac{1}{2C_5^2}e_2^2 + \frac{C_5^2}{2}e_3^2,\end{aligned} \tag{9}$$

where C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 are sufficiently small positive numbers.

Note that (9) is true for any positive C_i, $i = 1, \dots, 5$. In order to prove asymptotic stability, we will find additional conditions on C_i to guaranty that $\dot{V}(e)$ is negative in some small deleted neighborhood of the origin.

Using estimates (8) and (9) sequentially, we have

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(e) \le & -2^{1-p_1} e_1^{p_1+1} + \frac{p_1}{(p_1+1)C_1^{p_1+1}} e_2^{p_1+1} + \frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} e_1^{p_1+1} - e_2^2 \\
& + \frac{1}{2C_5^2} e_2^2 + \frac{C_5^2}{2} e_3^2 - e_3^2 + \frac{k_1 k_3}{k_2^{p_1+1}} 2^{p_1-1} e_2^{p_1+1} \\
& + \frac{k_1 k_3}{k_2^{p_1+1}} 2^{p_1-1} \frac{p_1 C_2^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} e_1^{p_1+1} + \frac{k_1 k_3}{k_2^{p_1+1}} 2^{p_1-1} \frac{1}{(p_1+1) C_2^{p_1^2(p_1+1)}} e_2^{p_1+1} \\
& + \frac{k_1}{k_3 k_2^{p_1}} 2^{p_1-1} \frac{p_1}{p_1+1} \frac{1}{C_3^{p_1+1}} e_2^{p_1+1} + \frac{k_1}{k_3 k_2^{p_1}} 2^{p_1-1} \frac{C_3^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} e_3^{p_1+1} \\
& + \frac{k_1}{k_3 k_2^{p_1}} 2^{p_1-1} \frac{p_1 C_4^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} e_1^{p_1+1} + \frac{k_1}{k_3 k_2^{p_1}} 2^{p_1-1} \frac{1}{(p_1+1) C_4^{p_1^2(p_1+1)}} e_3^{p_1+1} \\
& + \frac{k_2}{k_3^2} e_3^2 + \frac{k_2}{2k_3^2 C_5^2} e_2^2 + \frac{k_2 C_5^2}{2k_3^2} e_3^2.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Rearranging the terms from the right-hand side of (10) we obtain the estimate for $\dot{V}(e)$ in the form

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(e) \le & e_1^{p_1+1} \left(-2^{1-p_1} + \frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} + \frac{k_1 k_3}{k_2^{p_1+1}} 2^{p_1-1} \frac{p_1 C_2^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} \right. \\
& \left. + \frac{k_1}{k_3 k_2^{p_1}} 2^{p_1-1} \frac{p_1 C_4^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} \right) + e_2^2 \left(-1 + \frac{1}{2C_5^2} + \frac{k_2}{2k_3^2 C_5^2} \right) \\
& + e_3^2 \left(-1 + \frac{C_5^2}{2} + \frac{k_2}{k_3^2} + \frac{k_2 C_5^2}{2k_3^2} \right) + g(x),
\end{aligned}
\tag{11}
$$

where the function $g(x)$ is composed of higher order terms. The function $g(x)$ is given by

$$
\begin{aligned}
g(x) = & \frac{p_1}{(p_1+1)C_1^{p_1+1}} e_2^{p_1+1} + \frac{k_1 k_3}{k_2^{p_1+1}} 2^{p_1-1} e_2^{p_1+1} \\
& + \frac{k_1 k_3}{k_2^{p_1+1}} 2^{p_1-1} \frac{1}{(p_1+1) C_2^{p_1^2(p_1+1)}} e_2^{p_1+1} + \frac{k_1}{k_3 k_2^{p_1}} 2^{p_1-1} \frac{p_1}{p_1+1} \frac{1}{C_3^{p_1+1}} e_2^{p_1+1} \\
& + \frac{k_1}{k_3 k_2^{p_1}} 2^{p_1-1} \frac{C_3^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} e_3^{p_1+1} + \frac{k_1}{k_3 k_2^{p_1}} 2^{p_1-1} \frac{1}{(p_1+1) C_4^{p_1^2(p_1+1)}} e_3^{p_1+1}.
\end{aligned}
$$

According to the Lyapunov function method, it is sufficient for $\dot{V}(e)$ to be negative definite to guarantee asymptotic stability. Therefore we find conditions for coefficients of $e_1^{p_1+1}$, e_2^2, e_3^2 to be negative.

We start with the coefficient of e_2^2:

$$-1+\frac{1}{2C_5^2}+\frac{k_2}{2k_3^2C_5^2}<0,$$

$$\frac{k_2}{2k_3^2C_5^2}<1-\frac{1}{2C_5^2},$$

$$\frac{k_2}{2k_3^2C_5^2}<\frac{2C_5^2-1}{2C_5^2},$$

$$\frac{k_2}{k_3^2}<2C_5^2-1,$$

$$k_2<k_3^2\big(2C_5^2-1\big). \tag{12}$$

Let us move on to the coefficient of e_3^2:

$$-1+\frac{C_5^2}{2}+\frac{k_2}{k_3^2}+\frac{k_2C_5^2}{2k_3^2}<0,$$

$$\frac{k_2}{k_3^2}+\frac{k_2C_5^2}{2k_3^2}<1-\frac{C_5^2}{2},$$

$$\frac{k_2(2+C_5^2)}{2k_3^2}<1-\frac{C_5^2}{2},$$

$$k_2(2+C_5^2)<2k_3^2\big(1-\frac{C_5^2}{2}\big),$$

$$k_2<\frac{2k_3^2-k_3^2C_5^2}{(2+C_5^2)}. \tag{13}$$

Finally, consider the coefficient of $e_1^{p_1+1}$:

$$-2^{1-p_1}+\frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}+\frac{k_1k_3}{k_2^{p_1+1}}2^{p_1-1}\frac{p_1C_2^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}+\frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}2^{p_1-1}\frac{p_1C_4^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}<0. \tag{14}$$

It is clear that for any k_1, k_2, k_3, there exist sufficiently small C_1, C_2, C_4 such that the coefficient of $e_1^{p_1+1}$ will be negative. Indeed, we define the function $r(C_1,C_2,C_4)$ as follows:

$$r(C_1,C_2,C_4)=\frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}+\frac{k_1k_3}{k_2^{p_1+1}}2^{p_1-1}\frac{p_1C_2^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}+\frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}2^{p_1-1}\frac{p_1C_4^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}$$

It is obvious that $r(C_1,C_2,C_4)$ is a continuous function and $r(0)=0$. Therefore, by choosing sufficiently small C_1,C_2,C_4 it is possible to make

$|r(C_1, C_2, C_4)|$ smaller than any given number $\varepsilon : \varepsilon \in (0, 2^{1-p_1})$. Then, for such $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that

$$|r(C_1, C_2, C_4)| \leq \varepsilon \quad \text{for all} \quad \|\hat{C}\| \leq \delta,$$

where $\hat{C} = (C_1, C_2, C_4)$. Thus,

$$2^{1-p_1} - r(C_1, C_2, C_4) > 0$$

when $\|\hat{C}\| \leq \delta$, and the inequality (14) holds. Assume that C_1, C_2, and C_4 are positive and chosen small enough to satisfy the inequality (14).

So, from the conditions on the coefficients k_1, k_2 and k_3, given by (12) and (13), we obtain the following constraints:

$$\begin{cases} k_2 < k_3^2(2C_5^2 - 1), \\ k_2 < \frac{2k_3^2 - k_3^2 C_5^2}{(2 + C_5^2)}, \\ k_1, k_2, k_3 > 0. \end{cases} \tag{15}$$

Using inequality (12), we deduce

$$C_5^2 > \frac{k_3^2 + k_2}{2k_3^2}.$$

From (13) we obtain

$$C_5^2 < \frac{2k_3^2 - 2k_2}{k_2 + k_3^2}.$$

Combining the last two equations, we derive the constraint for C_5^2:

$$\frac{k_3^2 + k_2}{2k_3^2} < C_5^2 < \frac{2k_3^2 - 2k_2}{k_2 + k_3^2}. \tag{16}$$

To ensure the existence of $C_5 > 0$, it is necessary for the following inequality to hold

$$\frac{k_3^2 + k_2}{2k_3^2} < \frac{2k_3^2 - 2k_2}{k_2 + k_3^2} \tag{17}$$

from which follows:

$$\frac{k_3^2 + k_2}{2k_3^2} - \frac{2k_3^2 - 2k_2}{k_2 + k_3^2} < 0,$$

$$\frac{-3k_3^4 + 6k_3^2 k_2 + k_2^2}{2k_3^2(k_2 + k_3^2)} < 0.$$

It is clear that $k_3^2(k_2 + k_3^2) > 0$, which yields

$$-3k_3^4 + 6k_3^2 k_2 + k_2^2 < 0.$$

First we find the roots of the equations

$$-3k_3^4 + 6k_3^2 k_2 + k_2^2 = 0.$$

We put $z = k_3^2$, then

$$-3z^2 + 6zk_2 + k_2^2 = 0,$$

and

$$z = \frac{k_2(3 \pm 2\sqrt{3})}{3}.$$

Recall that $z = k_3^2$ is positive number, then $z = \frac{k_2(3+2\sqrt{3})}{3}$. Therefore, we conclude that inequality (17) holds for

$$k_3^2 > \frac{k_2(3 + 2\sqrt{3})}{3}. \tag{18}$$

Thus, condition (16) is non-contradictory and determines C_5 so that system (15) is consistent.

Now suppose that C_5 is chosen to satisfy condition (16), C_3 is any positive number. Recall that C_1, C_2, C_4 satisfy (14). This implies that by choosing k_1, k_2, and k_3 satisfying condition (18), we render $\dot{V}(e)$ negative definite in a neighborhood of the origin. Indeed, the function $g(x)$ is composed of higher order terms, since $p_1 > 1$. So, if the coefficients of e_1, e_2, and e_3 are negative, then in some sufficiently small neighborhood of the origin $U(0) \in \mathbb{R}^n$ we have

$$\dot{V}(e) < 0 \quad \text{for all} \quad e \in U(0) \setminus \{0\}\,.$$

This, by the Lyapunov function method, means that the zero equilibrium point $e = 0$ of the system (6) is asymptotically stable. Therefore, since the change of variables $x_1 = k_1^{-1} e_1$, $x_2 = k_2^{-1}(e_2 - e_1)$, $x_3 = k_3^{-1}(e_3 - e_2)$ is continuous, $x = 0$ is a locally asymptotically stable equilibrium point of system (3) with $u = u(x)$ given by (4). So, we have proved the following theorem.

Theorem 1. *Let $k_1 > 0$. Suppose that $k_2 > 0$ and k_3 satisfy the inequality*

$$k_3^2 > \frac{k_2(3 + 2\sqrt{3})}{3} = (2.154700538\ldots)k_2. \tag{19}$$

Then the linear control $u = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3$ solves the stabilization problem for system (3).

Condition (19) distinguishes our case from the case of strictly decreasing powers, in which there is no additional requirements for k_2 and k_3 except that they should be positive.

Example 1. Consider the stabilization problem for the nonlinear system:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^5, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \tag{20}$$

In this case $p_1 = 5$, $p_2 = p_3 = 1$.

Let us choose arbitrary $k_1 > 0$. Choose k_2, k_3 by the condition (19). For example, we put $k_1 = 5$, $k_2 = 2$, $k_3 = 10$. Then, by Theorem 1, the linear stabilizing control (4) has the form $u = u(x)$, where

$$u(x) = -5x_1 - 2x_2 - 10x_3.$$

Let us substitute the control $u(x)$ into system (20). By Theorem 1 the closed-loop system has asymptotically stable equilibrium point. We will illustrate the behavior of the closed-loop system trajectory, for example, for initial conditions

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \quad x_3(0) = 1.$$

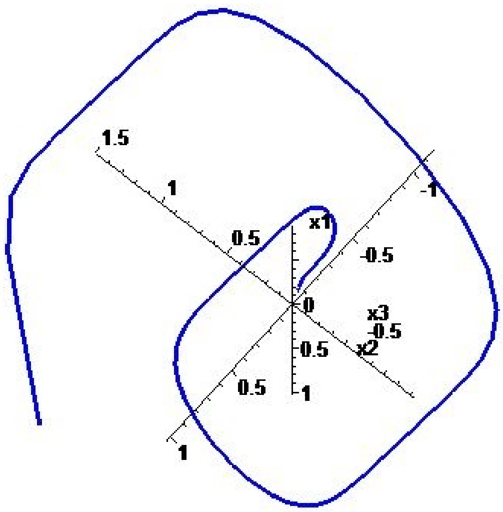

Fig. 1. The trajectory of system (20) with $u = u(x)$.

3. Stabilization by nonlinear approximation

The results obtained in Section 2 can be generalized by considering the following nonlinear system:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^{p_1} + \varphi_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 = x_3 + \varphi_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 = u, \end{cases} \tag{21}$$

where $\varphi_i(x_1, x_2, x_3)$ are continuous functions, $i = 1, 2, 3$.

To stabilize system (21), we use the same control $u = u(x)$ as in the case of system (3):

$$u(x) = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3.$$

So, suppose k_i satisfy Theorem 1, therefore; $u(x)$ stabilizes system (3). Assume that the functions $\varphi_i(x_1, x_2, x_3)$ satisfy the following inequalities:

$$|\varphi_1(x_1, x_2, x_3)| \leq \rho_1(x_1, x_2, x_3)\big(|x_2|^{p_1+\delta_1} + |x_3|^{p_1+\delta_1}\big),$$

$$|\varphi_2(x_1, x_2, x_3)| \leq \rho_2(x_1, x_2, x_3)\big(|x_3|^{1+\delta_2}\big)$$

in a neighborhood of the origin, where $\rho_i(x_1, x_2, x_3) \geq 0$ are some continuous functions $(i = 1, 2)$, $\delta_1 > 0$ and $\delta_2 > 0$ are some real numbers.

The control $u = u(x)$ stabilizes system (21), since the functions $\varphi_i(x_1, x_2, x_3)$ has higher order then $x_{i+1}^{p_i}$, $i = 1, 2$ $(p_1 > 1,\ p_2 = 1)$. Indeed, we can use the same change of variables and Lyapunov function as for system (3). Note that higher-order terms generated by the functions $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ should be attributed to the function $g(x)$. These terms will not affect the sign of the derivative of the Lyapunov function $\dot{V}$ in a sufficiently small neighborhood of zero. Therefore, the control $u(x)$ stabilizes not only system (3) but also system (21). Thus, such an approach is similar to the stabilization by first-order approximation. It should be noted that system (3) is used as a nonlinear approximation of system (21).

We will illustrate this approach with the following example.

Example 2. We find a stabilizing control for the following nonlinear system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^5 + x_2^6 \sin(x_1 + x_2), \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_3^2 \cos(x_1), \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \tag{22}$$

We use system (20) as a nonlinear approximation of system (22). Therefore, system (22) can be stabilized by the same control as system (20).

So, consider the control $u = u(x)$ of the form

$$u(x) = -5x_1 - 2x_2 - 10x_3.$$

We recall that $k_1 = 5, k_2 = 2, k_3 = 10, p_1 = 5$, then condition (19) is satisfied. Put $\rho_1(x_1, x_2, x_3) = 1, \rho_2(x_1, x_2, x_3) = 1, \delta_1 = 1, \delta_2 = 1$. Then, it is clear that for the functions $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_2^6 \sin(x_1 + x_2)$ and $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 \cos(x_1)$ the following estimates hold:

$$|\varphi_1(x_1, x_2, x_3)| \leq \rho_1(x_1, x_2, x_3)\left(|x_2|^{p_1+\delta_1} + |x_3|^{p_1+\delta_1}\right) = x_2^6 + x_3^6,$$

$$|\varphi_2(x_1, x_2, x_3)| \leq \rho_2(x_1, x_2, x_3)|x_3|^{1+\delta_2} = x_3^2$$

in the entire space $\mathbb{R}^3$.

Based on the results of the work, it can be concluded that the zero equilibrium point of system (22) under the linear control law $u = u(x)$ is asymptotically stable. Specifically, as shown above, since the control $u = u(x)$ stabilizes the system of the nonlinear approximation (20), it also stabilizes the original nonlinear system (22) with higher-order terms in the right-hand side.

To demonstrate the behavior of solutions of the closed-loop system (22) under the chosen linear control $u(x)$, we construct the trajectory, for example, using the following initial conditions:

$$x_1(0) = 0.8, x_2(0) = 0.7, x_3(0) = 1.$$

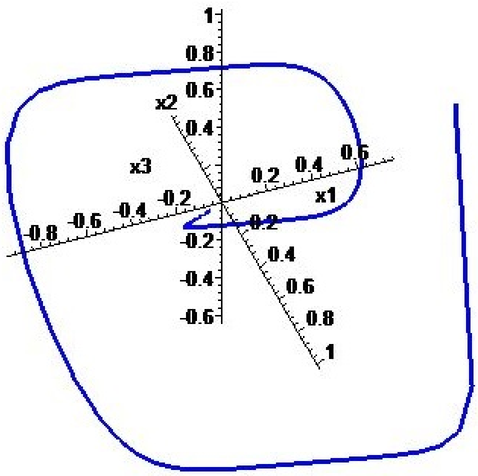

Fig. 2. The trajectory of system (22) with $u = u(x)$.

Conclusion

This work presents a constructive method for stabilizing a class of high-order nonlinear systems in a critical case. Namely, the class of three-dimensional canonical nonlinear systems is considered. Compared to previous results, the condition of decreasing powers was relaxed to a condition of non-increasing powers. It has been shown that for such systems, a linear control can be chosen to ensure that the equilibrium point $x = 0$ is locally asymptotically stable.

Furthermore, an additional condition on the coefficients k_1, k_2, and k_3 was found, compared to the case of strictly decreasing powers, to achieve local asymptotic stability of the zero equilibrium point. Moreover, the class of systems was extended by using stabilization through nonlinear approximation.

REFERENCES

1. M.O. Bebiya, V.I. Korobov, On Stabilization Problem for Nonlinear Systems with Power Principal Part, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2016. – Vol. **12**, No. 2. – P. 113-133. DOI: 10.15407/mag12.02.113

2. V.I. Korobov, M.O. Bebiya, Stabilization of one class of nonlinear systems, Automation and Remote Control. – 2017. – Vol. **78**, No. 1. – P. 1-15. DOI: 10.1134/S0005117917010015

3. J. Zhu, C. Qian, A necessary and sufficient condition for local asymptotic stability of a class of nonlinear systems in the critical case, Automatica. – 2018. – Vol. **96**. – P. 234-239. DOI: 10.1016/j.automatica.2018.06.052

4. M.O. Bebiya, Stabilization of Systems with Power Nonlinearity, Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2014. – Vol. **69**, No. 1120. – P. 75-84.

5. W. Lin, C. Qian, Adding one power integrator: A tool for global stabilization of high order lower-triangular systems, Systems and Control Letters. – 2000. – Vol. **39**, No. 5. – P. 339-351. DOI: 10.1016/S0167-6911(99)00115-2

6. W. Lin, C. Qian, Robust regulation of a chain of power integrators perturbed by a lower-triangular vector field, Int. J. Robust Nonlinear Control. – 2000. – Vol. **10**, No. 5. – P. 397-421. DOI: 10.1002/(SICI)1099-1239(20000430)10:5<397::AID-RNC477>3.0.CO;2-N

7. X. Wang, Z. Xiang, Global finite-time stabilisation of high-order nonlinear systems: a dynamic gain-based approach, International Journal of Systems Science. – 2019. – Vol. **50**, No. 8. – P. 1677-1687. DOI: 00207721.2019.1622814

8. M. Li, J. Guo, Z. Xiang, Global adaptive finite-time stabilization for a class of p-normal nonlinear systems via an event-triggered strategy, Int J Robust Nonlinear Control. – 2020. – Vol. **30**, No. 10. – P. 4059-4074. DOI: 10.1002/rnc.4983

9. X. Wang, Z. Xiang, Global finite-time stabilisation for a class of nonlinear systems in the p-normal form via output feedback, International Journal of Systems Science. – 2020. – Vol. **51**, No. 9. – P. 1604-1621. DOI: 10.1080/00207721.2020.1772398

10. N. Wang, C. Qian, Z.-Y. Sun, Global asymptotic output tracking of nonlinear second-order systems with power integrators, Automatica. – 2017. – Vol. **80**. – P. 156-161. DOI: 10.1016/j.automatica.2017.02.026

Article history: Received: 23 October 2023; Final form: 23 November 2023
Accepted: 25 November 2023.

How to cite this article:

M. O. Bebiya, V. A. Maistruk, On linear stabilization of a class of nonlinear systems in a critical case, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 98, 2023, p. 36–49. DOI: 10.26565/2221-5646-2023-98-03

Про лiнiйну стабiлiзацiю одного класу нелiнiйних систем у критичному випадку

М. О. Бебiя, В. А. Майструк
Харкiвський нацiональний унiверситет iменi В. Н. Каразiна
майдан Свободи 4, 61022, Харкiв, Україна

В статтi розглядається задача стабiлiзацiї нелiнiйних систем у критичному випадку. А саме, вивчається клас канонiчних нелiнiйних систем. Клас канонiчних нелiнiйних систем або ланцюг степеневих iнтеграторiв є важливим об'єктом дослiдження. Вивчення таких систем ускладнюється тим фактом, що їх не можна вiдобразити на лiнiйнi системи. Крiм того, вони є некерованими за першим наближенням. Вiдомi результати щодо гладкої стабiлiзацiї таких систем було отримано при умовi строгого спадання степенiв правої частини. У цiй роботi розглянуто один з випадкiв нестрогого спадання степенiв у правiй частинi для тривимiрної системи. Популярним пiдходом до дослiдження таких систем є метод покрокової побудови стабiлiзуючих керувань - backstepping. Вiн потребує послiдовного дослiдження пiдсистем меншої розмiрностi. Цей метод дає можливiсть дослiджувати широкi класи нелiнiйних трикутних систем, але потребує технiчно складних, громiздких обчислень. Тому виникає природне питання про побудову стабiлiзуючих керувань простого вигляду. Прикладом таких керувань можуть служити полiномiальнi керування. У статтi показано, що можна розглядати лiнiйнi керування в якостi стабiлiзуючих. Отримано умови на коефiцiєнти лiнiйного керування, якi є достатнiми для асимптотичної стiйкостi нульової точки спокою вiдповiдної замкнутої системи. Для доведення асимптотичної стiйкостi використано метод функцiї Ляпунова, яку вдається знайти як суму квадратiв. Вiд'ємна визначенiсть похiдної функцiї Ляпунова в околi нуля гарантує асимптотичну стiйкiсть. На вiдмiну вiд випадку строгого спадання степенiв, виникають додатковi умови на коефiцiєнти керування окрiм їх вiд'ємностi. Отриманий результат розширюється на бiльш широкий клас нелiнiйних систем за рахунок стабiлiзацiї по нелiнiйному наближенню. Це дає змогу розглядати системи з доданками бiльш високого порядку у правiй частинi. Ефективнiсть застосованого пiдходу проiлюстровано на кiлькох модельних прикладах. Використаний в роботi метод дослiдження випадку нестрогого спадання степенiв може бути застосовано для систем бiльш високої розмiрностi.

Ключовi слова: **стабiлiзацiя; нелiнiйнi системи; метод функцiї Ляпунова; критичний випадок; лiнiйна стабiлiзацiя; лiнiйнi керування.**

Iсторiя статтi: отримана: 23 жовтня 2023; останнiй варiант: 23 листопада 2023
прийнята: 25 листопада 2023.

ISSN 2221-5646(Print) 2523-4641(Online)
Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics"
2023, Vol. 98, p. 50–67
DOI: 10.26565/2221-5646-2023-98-04
УДК 514.764

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
2023, Том 98, с. 50–67

І. О. Гавриленко
аспірант кафедри фундаментальної математики
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
igorgavrilenko0898@gmail.com *http://orcid.org/0009-0003-4226-8603*

Є. В. Петров
кандидат фізико-математичних наук
старший викладач кафедри фундаментальної математики
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
petrov@karazin.ua *http://orcid.org/0000-0003-2340-5038*

Стійкість мінімальних поверхонь у субрімановому многовиді $\widetilde{E(2)}$

У роботі досліджуються гладкі орієнтовані поверхні в універсальному накритті групи власних рухів евклідової площини, що має лівоінваріантну структуру тривимірного субріманового многовида. Ця структура будується як обмеження евклідової метрики групи на деякий цілком неінтегровний лівоінваріантний розподіл. Субріманова площа поверхні визначається як інтеграл довжини ортогональної проєкції одиничного нормального поля поверхні на цей розподіл. Обчислено формулу першої варіації субріманової площі поверхні, з якої виведено критерій мінімальності. Тут ми розуміємо під мінімальними поверхні, що є критичними точками функціонала субріманової площі під дією нормальних варіацій з компактними носіями. Встановлено, що така мінімальність у даному випадку не є еквівалентною до рівності нулю субріманової середньої кривини поверхні. Показано, що евклідова площина є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона паралельна або ортогональна до осі z (де координата z відповідає куту обертання власного руху). Отримано умову мінімальності для явно заданої поверхні та наведені приклади таких поверхонь. Розглянуті приклади демонструють, зокрема, що з мінімальності поверхні у рімановому (у даному випадку евклідовому) сенсі не випливає її субріманова мінімальність та навпаки.

Далі розглядається питання про стійкість мінімальних поверхонь. Для цього виведено формулу другої варіації субріманової площі. За її допомогою встановлено, що мінімальні евклідові площини є стійкими. Введено клас поверхонь, для яких дотичні площини перпендикулярні до площин розподілу субріманової структури, і які ми звемо вертикальними.

Зокрема, для таких поверхонь формула другої варіації суттєво спрощується. Показано, що повні зв'язні вертикальні мінімальні поверхні вичерпуються евклідовими площинами та гелікоїдами, причому гелікоїди нестійкі. Звідси випливає результат типу Бернштейна: повна зв'язна вертикальна мінімальна поверхня є стійкою тоді й тільки тоді, коли це евклідова площина, що ортогональна до осі z.

Keywords: **субрімановий многовид; лівоінваріантна метрика; мінімальна поверхня; стійкість.**

2010 Mathematics Subject Classification: 53C40; 53C17; 53C42.

1. Вступ

Відомо, що у тривимірному евклідовому просторі повна зв'язна мінімальна поверхня є стійкою тоді й тільки тоді, коли є площиною. Цей результат був отриманий незалежно О. В. Погорєловим, М. до Кармо і К. К. Пенгом та Д. Фішер-Колбрі і Р. Шоеном (див., наприклад, [3]). Він узагальнює класичну теорему С. Н. Бернштейна, згідно з якою будь-яка повна явно задана мінімальна поверхня є площиною. У [4] було введене поняття мінімальної поверхні в субрімановому многовиді. У подальшому такі поверхні та їхня стійкість вивчалися у різних субріманових геометріях, зокрема, у субрімановій тривимірній групі Гейзенберга (див. короткий огляд у [8]). Зокрема, у [2] та [7] (див. також [1]) були отримані результати типу Бернштейна, тобто опис стійких мінімальних поверхонь, у цій групі. Також мінімальні поверхні досліджувалися у т. зв. тривимірній субрімановій сфері ([6]) і групі власних рухів евклідової площини та її універсальному накритті ([5], де обговорювалося також застосування таких поверхонь до задач математичного моделювання у нейробіології, і [9]), але питання стійкості не розглядалися. Саме останню зі згаданих геометрій ми будемо досліджувати в даній роботі.

2. Основні поняття та приклади

Субрімановим многовидом зветься гладкий многовид M разом з цілком неінтегровним гладким векторним розподілом $\mathcal{H}$ на M (він зветься *горизонтальним розподілом*) і гладким полем евклідових скалярних добутків $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ на $\mathcal{H}$ (*субрімановою метрикою*). Зокрема, якщо M рімановий, то субріманову метрику можна побудувати як обмеження на $\mathcal{H}$ рімановоі метрики M. Саме таку конструкцію ми й будемо розглядати в подальшому.

Активно досліджуваним прикладом субріманового многовида є тривимірна група Гейзенберга $\mathbb{H}^1$. Це простір $\mathbb{R}^3$ з координатами (x,y,z), на якому структура групи Лі задається множенням $(x,y,z)(x',y',z') = \big(x+x', y+y', z+z'+\frac{1}{2}(xy'-yx')\big)$ і визначає наступний базис лівоінваріантних векторних полів:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Розглянемо на $\mathbb{H}^1$ ріманову метрику $\langle\cdot,\cdot\rangle$ таку, що $\{X_1, X_2, X_3\}$ є ортонормованим базисом у кожній точці. У якості горизонтального розподілу $\mathcal{H}$ візьмемо розподіл, що породжений базисом $\{X_1, X_2\}$, а у якості субріманової метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ – обмеження $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathcal{H}$.

Нехай Σ – гладка орієнтована поверхня у тривимірному субрімановому многовиді M, субріманова метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ якого будується як обмеження на $\mathcal{H}$ деякої ріманової метрики M. *Сингулярна множина* Σ_0 цієї поверхні складається з тих її точок p, для яких дотична площина $T_p\Sigma$ збігається з $\mathcal{H}_p$ (*сингулярних*). Відомо, що Σ_0 має нульову ріманову площу в силу повної неінтегровності розподілу $\mathcal{H}$. Якщо N – одиничне нормальне поле Σ у рімановому сенсі, то можна описати сингулярну множину як

$$\Sigma_0 = \{p \in \Sigma \mid N_h(p) = 0\},$$

де N_h – ортогональна проекція поля N на $\mathcal{H}$. Решту точок поверхні будемо називати *регулярними*. *Субріманова площа* області $D \subset \Sigma$ визначається як

$$A(D) = \int_D |N_h|\, d\Sigma,$$

де $d\Sigma$ – ріманова форма площі Σ. *Нормальною варіацією* поверхні Σ, що задана гладкою функцією u, будемо називати відображення $\varphi\colon \Sigma \times I \to M$, що визначене умовою

$$\varphi_s(p) = \exp_p(s\, u(p)\, N(p)).$$

Тут I – деякий окіл нуля в $\mathbb{R}$, а $\exp_p$ – ріманове експоненційне відображення. Іншими словами, ми будуємо варіацію традиційним для ріманової геометрії чином, випускаючи геодезичні з точки p у напрямку $u(p)N(p)$. Позначимо через $A(s) = A(\Sigma_s)$ субріманову площу поверхні варіації $\Sigma_s = \varphi_s(\Sigma)$, що відповідає параметру s (для обчислення першої та другої варіацій достатньо знайти площу образу носія u, замикання якого вважатимемо компактним). Тоді $A'(0)$ зветься *першою (нормальною) варіацією площі*, що відповідає φ, а $A''(0)$ – *другою*. Поверхня Σ називається *мінімальною*, якщо $A'(0) = 0$ для будь-яких нормальних варіацій з компактним носієм у $\Sigma \setminus \Sigma_0$. Зауважимо, що тут ми також слідуємо рімановій традиції, називаючи мінімальними поверхнями стаціонарні точки субріманового функціонала площі. Мінімальна поверхня Σ зветься *стійкою*, якщо $A''(0) \geqslant 0$ для будь-яких нормальних варіацій з компактним носієм у $\Sigma \setminus \Sigma_0$. У [2] та [7] було, зокрема, встановлено, що у субрімановій тривимірній групі Гейзенберга повна зв'язна мінімальна поверхня з порожньою сингулярною множиною є стійкою тоді й тільки тоді, коли ця поверхня є вертикальною (тобто паралельною осі z) евклідовою площиною, що є прикладом результату типу Бернштейна.

У даній роботі ми розглядатимемо многовид $\widetilde{E(2)}$, що визначається як універсальне накриття групи власних рухів площини. Це простір $\mathbb{R}^3$ з координатами (x, y, z) (де (x, y) відповідає паралельному перенесенню, а z –

куту обертання), на якому структура групи Лі задається множенням рухів $(x,y,z)(x',y',z') = (x + x'\cos z - y'\sin z, y + x'\sin z + y'\cos z, z + z')$ і визначає такий базис лівоінваріантних векторних полів:

$$X_1 = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial z},\ X_3 = \sin z \frac{\partial}{\partial x} - \cos z \frac{\partial}{\partial y}. \tag{1}$$

Ненульовими попарними дужками Лі цих полів є

$$[X_1, X_2] = -[X_2, X_1] = X_3,\ [X_2, X_3] = -[X_3, X_2] = X_1. \tag{2}$$

Розглянемо на $\widetilde{E(2)}$ ріманову метрику $\langle\cdot,\cdot\rangle$, для якої $\{X_1, X_2, X_3\}$ є ортонормованим базисом у кожній точці. Зауважимо, що вона виявляється евклідовою. У якості горизонтального розподілу $\mathcal{H}$ розглянемо розподіл, що натягнутий на базис $\{X_1, X_2\}$, а у якості $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ – обмеження евклідової метрики на $\mathcal{H}$. Нехай ∇ – зв'язність Леві-Чівіта метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$. З формули Кошуля та (2) (або просто з (1) і того, що ∇ пласка) тоді отримуємо

$$\begin{gathered}\nabla_{X_1}X_1 = \nabla_{X_1}X_2 = \nabla_{X_1}X_3 = \nabla_{X_2}X_2 = \nabla_{X_3}X_1 = \\ = \nabla_{X_3}X_2 = \nabla_{X_3}X_3 = 0,\ \nabla_{X_2}X_1 = -X_3,\ \nabla_{X_2}X_3 = X_1.\end{gathered} \tag{3}$$

Оператор кривини $\langle\cdot,\cdot\rangle$ нульовий, оскільки ця метрика евклідова.

3. Формули першої та другої варіації

Нехай тепер Σ – гладка орієнтована поверхня у $\widetilde{E(2)}$. Введемо деякі додаткові позначення. На регулярній частині $\Sigma \setminus \Sigma_0$ поверхні визначимо *горизонтальне гаусове відображення* $\nu_h = \frac{N_h}{|N_h|}$ та *характеристичне векторне поле* Z, яке у кожній регулярній точці p поверхні Σ утворюється з $\nu_h(p)$ обертанням на прямий кут у площині $\mathcal{H}_p$ (в орієнтації, що визначена вектором нормалі $X_3(p)$ цієї площини). Це поле є дотичним до Σ за побудовою. Позначимо через $S = \langle N, X_3\rangle\nu_h - |N_h|X_3$ векторне поле, що доповнює Z у кожній регулярній точці поверхні до ортонормованого базису її дотичної площини. Через B позначатимемо (рімановий) оператор Вейнгартена поверхні Σ відносно N, що визначається для будь-якого дотичного до Σ векторного поля W умовою $B(W) = -\nabla_W N$.

Теорема 1 (Формула першої варіації)**.** *Нехай Σ – поверхня у $\widetilde{E(2)}$. Тоді перша нормальна варіація її площі, що задана функцією u, має наступний вигляд:*

$$A'(0) = \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_0} |N_h|^{-1}\left(-\langle B(Z), Z\rangle + \langle N, X_3\rangle\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle\right) u\, d\Sigma. \tag{4}$$

Доведення. Застосуємо тут техніку, аналогічну до використаної у роботі [7]. Позначимо через N ріманове одиничне нормальне поле поверхонь нормальної варіації $\varphi\colon \Sigma\times I \to M$, а через $N_h = N - \langle N, X_3\rangle X_3$ – його ортогональну проекцію на $\mathcal{H}$ (субріманове нормальне поле). Побудуємо на підмножинах регулярних точок поверхонь варіації поля ν_h, Z та S як вказано вище. За означенням субріманової площі маємо

$$A(s) = A(\Sigma_s) = \int\limits_{\Sigma_s} |N_h|\, d\Sigma_s = \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_0} |N_h \circ \varphi_s|\, |\mathrm{J}\,\varphi_s|\, d\Sigma,$$

де $d\Sigma_s$ – ріманова форма площі поверхні Σ_s, $\varphi_s\colon \Sigma \to \Sigma_s$ – дифеоморфізм варіації, що відповідає параметру $s \in I$, а $\mathrm{J}\,\varphi_s$ – його якобіан. Остання рівність аналогічна формулі ріманової площі поверхні варіації (див., наприклад, [10, с. 49]). Як згадувалося вище, тут достатньо інтегрувати по носію u. Далі позначатимемо $|N_h|(s) = |N_h \circ \varphi_s|$. Тоді

$$A'(s) = \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_0} \left(|N_h|'(s) |\mathrm{J}\,\varphi_s| + |N_h|(s) |\mathrm{J}\,\varphi_s|'(s)\right)\, d\Sigma \tag{5}$$

і, оскільки $|\mathrm{J}\,\varphi_0| = 1$,

$$A'(0) = \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_0} \left(|N_h|'(0) + |N_h|(0) |\mathrm{J}\,\varphi_s|'(0)\right)\, d\Sigma. \tag{6}$$

Проведемо деякі допоміжні обчислення. Диференціюючи рівність $N_h = N - \langle N, X_3\rangle X_3$ у напрямку довільного вектора v, отримуємо

$$\begin{aligned}\nabla_v N_h &= \nabla_v N - \langle \nabla_v N, X_3\rangle X_3 - \langle N, \nabla_v X_3\rangle X_3 - \langle N, X_3\rangle \nabla_v X_3 = \\ &= (\nabla_v N)_h - \langle N, \nabla_v X_3\rangle X_3 - \langle N, X_3\rangle \nabla_v X_3.\end{aligned} \tag{7}$$

У регулярних точках поверхонь варіації значення полів ν_h, Z та X_3 утворюють ортонормовані базиси і $\langle \nabla_v \nu_h, \nu_h\rangle = 0$, тому

$$\nabla_v \nu_h = \langle \nabla_v \nu_h, Z\rangle Z + \langle \nabla_v \nu_h, X_3\rangle X_3,$$

де, оскільки $\nu_h = |N_h|^{-1} N_h$, а Z і N_h ортогональні,

$$\langle \nabla_v \nu_h, Z\rangle = |N_h|^{-1} \langle \nabla_v N_h, Z\rangle = |N_h|^{-1} \left(\langle \nabla_v N, Z\rangle - \langle N, X_3\rangle \langle \nabla_v X_3, Z\rangle\right)$$

в силу (7), отже

$$\nabla_v \nu_h = |N_h|^{-1} \left(\langle \nabla_v N, Z\rangle - \langle N, X_3\rangle \langle \nabla_v X_3, Z\rangle\right) Z - \langle \nu_h, \nabla_v X_3\rangle X_3. \tag{8}$$

Також у регулярних точках $|N_h| = \langle N_h, \nu_h\rangle$, тому похідна цієї функції у напрямку v дорівнює

$$v(|N_h|) = \langle \nabla_v N_h, \nu_h\rangle + \langle N_h, \nabla_v \nu_h\rangle = \langle \nabla_v N_h, \nu_h\rangle,$$

бо $\langle \nu_h, \nabla_v \nu_h\rangle = 0$. Звідси і з (7) тоді випливає

$$v(|N_h|) = \langle \nabla_v N, \nu_h\rangle - \langle N, X_3\rangle \langle \nabla_v X_3, \nu_h\rangle. \tag{9}$$

За побудовою нормальної варіації φ у евклідовому просторі поле $d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$ дорівнює $U = uN(0)$, де $N(0)$ – паралельно перенесене уздовж нормалей до поверхні Σ її одиничне нормальне поле. Звідси і з (9) випливає, що

$$|N_h|'(s) = U(|N_h|) = \langle \nabla_U N, \nu_h \rangle - \langle N, X_3 \rangle \langle \nabla_U X_3, \nu_h \rangle. \tag{10}$$

Оскільки у регулярних точках значення полів Z, S та N утворюють ортонормовані базиси і $\langle \nabla_U N, N \rangle = 0$,

$$\begin{gathered} \nabla_U N = \langle \nabla_U N, Z \rangle Z + \langle \nabla_U N, S \rangle S = \\ = -\langle N, \nabla_U Z \rangle Z - \langle N, \nabla_U S \rangle S = -\langle N, \nabla_Z U \rangle Z - \langle N, \nabla_S U \rangle S, \end{gathered}$$

де остання рівність випливає з того, що дужки Лі $[U, Z]$ та $[U, S]$ поля U і дотичних полів до поверхонь варіації нульові. Починаючи з цього місця, позначатимемо через N, N_h, ν_h, Z та S відповідні поля на поверхні Σ (останні три з яких визначені лише в її регулярних точках). Отже, при $s = 0$

$$\nabla_U N = -\langle N, \nabla_Z (uN) \rangle Z - \langle N, \nabla_S (uN) \rangle S = -Z(u) Z - S(u) S,$$

бо N одиничне, тому (10) приймає вигляд

$$\begin{gathered} |N_h|'(0) = \langle -Z(u)Z - S(u)S, \nu_h \rangle - \langle N, X_3 \rangle \langle \nabla_N X_3, \nu_h \rangle u = \\ = -\langle N, X_3 \rangle S(u) - |N_h| \langle N, X_3 \rangle \langle \nabla_{\nu_h} X_3, \nu_h \rangle u \end{gathered} \tag{11}$$

в силу рівностей $S = \langle N, X_3 \rangle \nu_h - |N_h| X_3$, $N = |N_h| \nu_h + \langle N, X_3 \rangle X_3$ і (3). Як показано, наприклад, у [10, с. 50-51], перша похідна модуля якобіана φ_s в нулі дорівнює дивергенції поля варіації $U = uN$:

$$\begin{gathered} |\mathrm{J}\,\varphi_s|'(0) = \mathrm{div}_\Sigma (uN) = \langle \nabla_Z (uN), Z \rangle + \langle \nabla_S (uN), S \rangle = \\ = \left(\langle \nabla_Z N, Z \rangle + \langle \nabla_S N, S \rangle \right) u = -\left(\langle B(Z), Z \rangle + \langle B(S), S \rangle \right) u. \end{gathered} \tag{12}$$

Таким чином, вираз під інтегралом у (6) має вигляд

$$\begin{gathered} |N_h|'(0) + |N_h| |\mathrm{J}\,\varphi_s|'(0) = -\langle N, X_3 \rangle S(u) - |N_h| \langle N, X_3 \rangle \langle \nabla_{\nu_h} X_3, \nu_h \rangle u - \\ - |N_h| \left(\langle B(Z), Z \rangle + \langle B(S), S \rangle \right) u. \end{gathered} \tag{13}$$

Зробимо ще кілька допоміжних обчислень. Оскільки $\nu_h = \langle \nu_h, X_1 \rangle X_1 + \langle \nu_h, X_2 \rangle X_2$, з (3) випливає $\nabla_{\nu_h} X_3 = \langle \nu_h, X_2 \rangle X_1$, отже маємо $\langle \nabla_{\nu_h} X_3, \nu_h \rangle = \langle \nu_h, X_1 \rangle \langle \nu_h, X_2 \rangle$. За побудовою тоді $Z = -\langle \nu_h, X_2 \rangle X_1 + \langle \nu_h, X_1 \rangle X_2$, тому $\nabla_Z X_3 = \langle \nu_h, X_1 \rangle X_1$ в силу (3), і таким чином

$$\langle \nabla_{\nu_h} X_3, \nu_h \rangle = \langle \nu_h, X_1 \rangle \langle \nu_h, X_2 \rangle = -\langle \nabla_Z X_3, Z \rangle. \tag{14}$$

Звідси ж маємо

$$\langle \nabla_{\nu_h} X_3, Z \rangle = -\langle \nu_h, X_2 \rangle^2, \ \langle \nabla_Z X_3, \nu_h \rangle = \langle \nu_h, X_1 \rangle^2. \tag{15}$$

Зокрема, оскільки ν_h одиничний, $\langle \nabla_Z X_3, \nu_h \rangle - \langle \nabla_{\nu_h} X_3, Z \rangle = 1$.

Зауважимо тепер, що, оскільки Z і $S = \langle N, X_3\rangle\nu_h - |N_h|X_3$ одиничні, а ν_h, Z та X_3 утворюють ортонормовані базиси в регулярних точках,

$$\begin{gathered}\mathrm{div}_\Sigma S = \langle\nabla_Z S, Z\rangle + \langle\nabla_S S, S\rangle = -\langle S, \nabla_Z Z\rangle = \\ = -\langle S, \nu_h\rangle\langle\nabla_Z Z, \nu_h\rangle - \langle S, X_3\rangle\langle\nabla_Z Z, X_3\rangle = \langle N, X_3\rangle\langle Z, \nabla_Z \nu_h\rangle - |N_h|\langle Z, \nabla_Z X_3\rangle.\end{gathered}$$

Оскільки

$$\nabla_Z \nu_h = |N_h|^{-1}\left(\langle\nabla_Z N, Z\rangle - \langle N, X_3\rangle\langle\nabla_Z X_3, Z\rangle\right) Z - \langle\nabla_Z X_3, \nu_h\rangle X_3$$

в силу (8) і тому, враховуючи (14), (15) та означення оператора Вейнгартена B, маємо

$$\begin{gathered}\nabla_Z \nu_h = -|N_h|^{-1}\left(\langle B(Z), Z\rangle - \langle N, X_3\rangle\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle\right) Z - \\ -\langle\nu_h, X_1\rangle^2 X_3,\end{gathered} \tag{16}$$

звідси випливає з урахуванням (14)

$$\begin{gathered}\mathrm{div}_\Sigma S = -\langle N, X_3\rangle|N_h|^{-1}\left(\langle B(Z), Z\rangle - \langle N, X_3\rangle\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle\right) + \\ +|N_h|\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle.\end{gathered}$$

Оскільки поле N одиничне, $|N_h|^2 + \langle N, X_3\rangle^2 = 1$, тому остаточно маємо

$$\mathrm{div}_\Sigma S = -|N_h|^{-1}\left(\langle N, X_3\rangle\langle B(Z), Z\rangle - \langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle\right). \tag{17}$$

За властивостями дивергенції тоді

$$\begin{gathered}\mathrm{div}_\Sigma(\langle N, X_3\rangle uS) = S(\langle N, X_3\rangle u) + \langle N, X_3\rangle u\, \mathrm{div}_\Sigma S = \\ = \langle\nabla_S N, X_3\rangle u + \langle N, \nabla_S X_3\rangle u + \langle N, X_3\rangle S(u) - \\ -\langle N, X_3\rangle|N_h|^{-1}\left(\langle N, X_3\rangle\langle B(Z), Z\rangle - \langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle\right) u = \\ = -\langle B(S), X_3\rangle u + \langle N, X_3\rangle\langle\nabla_{\nu_h} X_3, N\rangle u + \langle N, X_3\rangle S(u) - \\ -|N_h|^{-1}\langle B(Z), Z\rangle u + |N_h|\langle B(Z), Z\rangle u + |N_h|^{-1}\langle N, X_3\rangle\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle u,\end{gathered}$$

де у останній рівності знову використали $|N_h|^2 + \langle N, X_3\rangle^2 = 1$. Оскільки поле $B(S)$ є дотичним до поверхні Σ,

$$\langle B(S), X_3\rangle = \langle B(S), S\rangle\langle S, X_3\rangle + \langle B(S), Z\rangle\langle Z, X_3\rangle = -|N_h|\langle B(S), S\rangle.$$

Враховуючи також, що $\nabla_{\nu_h} X_3$ ортогональне до X_3, отримуємо

$$\begin{gathered}\mathrm{div}_\Sigma(\langle N, X_3\rangle uS) = |N_h|\left(\langle B(Z), Z\rangle + \langle B(S), S\rangle\right) u + |N_h|\langle N, X_3\rangle\langle\nabla_{\nu_h} X_3, \nu_h\rangle u + \\ +\langle N, X_3\rangle S(u) + |N_h|^{-1}\left(-\langle B(Z), Z\rangle + \langle N, X_3\rangle\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle\right) u.\end{gathered}$$

Таким чином, рівність (13) набуває вигляду

$$\begin{gathered}|N_h|'(0) + |N_h||\mathrm{J}\,\varphi_s|'(0) = -\mathrm{div}_\Sigma(\langle N, X_3\rangle uS) + \\ +|N_h|^{-1}\left(-\langle B(Z), Z\rangle + \langle N, X_3\rangle\langle\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle\right) u.\end{gathered}$$

Підставляючи це у (6) і враховуючи, що $\int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_0} \mathrm{div}_\Sigma(\langle N, X_3\rangle uS)\, d\Sigma = 0$, отримуємо потрібну формулу першої варіації (4).

Висновок 1 (Критерій мінімальності). *Поверхня* Σ *у* $\widetilde{E(2)}$ *мінімальна тоді й тільки тоді, коли у всіх її регулярних точках*

$$\langle B(Z), Z\rangle = \langle N, X_3\rangle\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle. \tag{18}$$

У [7] розглядалася *субріманова середня кривина* $H = -\frac{1}{2}\mathrm{div}_\Sigma \nu_h$ поверхні Σ і було показано, що мінімальність Σ у групі Гейзенберга еквівалентна умові $H = 0$. Обчислимо цю функцію для нашого випадку. З (8) випливає, що

$$\begin{gathered}\nabla_S \nu_h = |N_h|^{-1}\left(\langle \nabla_S N, Z\rangle - \langle N, X_3\rangle\langle \nabla_S X_3, Z\rangle\right) Z - \langle \nabla_S X_3, \nu_h\rangle X_3 = \\ = |N_h|^{-1}\left(-\langle B(S), Z\rangle - \langle N, X_3\rangle^2\langle \nabla_{\nu_h} X_3, Z\rangle\right) Z - \langle N, X_3\rangle\langle \nabla_{\nu_h} X_3, \nu_h\rangle X_3.\end{gathered}$$

Враховуючи (14), (15) і самоспряженість оператора Вейнгартена, отримуємо

$$\begin{gathered}\nabla_S \nu_h = -|N_h|^{-1}\left(\langle B(Z), S\rangle - \langle N, X_3\rangle^2\langle \nu_h, X_2\rangle^2\right) Z - \\ -\langle N, X_3\rangle\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle X_3.\end{gathered} \tag{19}$$

Звідси і з (16) маємо

$$\begin{gathered}-2H = \mathrm{div}_\Sigma \nu_h = \langle \nabla_Z \nu_h, Z\rangle + \langle \nabla_S \nu_h, S\rangle = \\ = |N_h|^{-1}\left(-\langle B(Z), Z\rangle + \langle N, X_3\rangle(1 + |N_h|^2)\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle\right).\end{gathered}$$

Порівнюючи цей вираз з (18), бачимо, що для поверхонь у $\widetilde{E(2)}$ мінімальність, взагалі кажучи, не рівносильна рівності субріманової середньої кривини нулю. Застосуємо тепер отриманий критерій мінімальності до найпростішого класу поверхонь – евклідових площин. Ми не вживатимемо слова "горизонтальна" і "вертикальна" для опису розташування площини відносно осі z, щоб уникнути плутанини з іншими значеннями цих слів у даній роботі.

Твердження 1. *Евклідова площина у* $\widetilde{E(2)}$ *є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона паралельна або ортогональна до осі* z.

Доведення. Оскільки для площини $B = 0$, (18) набуває вигляду

$$\langle N, X_3\rangle\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle = 0,$$

тобто

$$\langle N, X_1\rangle\langle N, X_2\rangle\langle N, X_3\rangle = 0.$$

Одиничний нормальний вектор $N = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}$ тут постійний, і з урахуванням (1) умовою мінімальності таким чином є

$$(a\cos z + b\sin z)\, c\,(a\sin z - b\cos z) = 0.$$

Зокрема, регулярними є точки, для яких $(a\cos z + b\sin z)^2 + c^2 > 0$. Якщо площина паралельна осі z, то $c = 0$, а якщо перпендикулярна до неї, то $a = b = 0$, тому такі площини мінімальні. Нехай тепер площина похила, тобто $c \neq 0$ і $a^2 + b^2 > 0$. Припустимо, що вона мінімальна. З попереднього рівняння маємо

$$\tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\sin 2z - ab\cos 2z = 0.$$

Оскільки для похилої площини z приймає усі дійсні значення, тоді $a^2 - b^2 = ab = 0$, тобто $a = b = 0$, протиріччя.

Для кращого розуміння класу мінімальних поверхонь даної геометрії запишемо також рівняння мінімальності для одного з типів явно заданих поверхонь.

Твердження 2 (Критерій мінімальності для явно заданих поверхонь)**.** *Нехай поверхня у* $\widetilde{E(2)}$ *задана рівнянням* $y = f(x, z)$. *Вона буде мінімальною тоді й тільки тоді, коли*

$$\begin{gathered} -\cos^2 z\, f_z^2 f_{xx} + (2\cos^2 z\, f_x f_z - \sin 2z f_z) f_{xz} + \\ +(-\cos^2 z\, f_x^2 + \sin 2z\, f_x - \sin^2 z) f_{zz} - \\ -\tfrac{1}{2}\sin 2z\, f_x^2 f_z - \cos 2z\, f_x f_z + \tfrac{1}{2}\sin 2z\, f_z = 0 \end{gathered} \tag{20}$$

для усіх (x, z) *таких, що* $(f_x \cos z - \sin z)^2 + f_z^2 > 0$.

Доведення. Для даної поверхні

$$\begin{gathered} N = \tfrac{1}{\delta}\left(f_x \tfrac{\partial}{\partial x} - \tfrac{\partial}{\partial y} + f_z \tfrac{\partial}{\partial z}\right) = \\ = \tfrac{1}{\delta}\left((f_x \cos z - \sin z) X_1 + f_z X_2 + (f_x \sin z + \cos z) X_3\right) \end{gathered}$$

в силу (1), де позначили $\delta = \sqrt{1 + f_x^2 + f_z^2}$. Тому

$$N_h = \tfrac{1}{\delta}\left((f_x \cos z - \sin z) X_1 + f_z X_2\right), \ \langle N, X_3 \rangle = \tfrac{1}{\delta}\left(f_x \sin z + \cos z\right).$$

Якщо позначити $\Delta = \sqrt{(f_x \cos z - \sin z)^2 + f_z^2}$, то $|N_h| = \frac{\Delta}{\delta}$, умовою регулярності буде $\Delta \neq 0$, і в регулярних точках

$$\nu_h = \tfrac{1}{\Delta}\left((f_x \cos z - \sin z) X_1 + f_z X_2\right),$$

тому за побудовою

$$\begin{gathered} Z = \tfrac{1}{\Delta}\left(-f_z X_1 + (f_x \cos z - \sin z) X_2\right) = \\ = -\tfrac{1}{\Delta} f_z \cos z \left(\tfrac{\partial}{\partial x} + f_x \tfrac{\partial}{\partial y}\right) + \tfrac{1}{\Delta}(f_x \cos z - \sin z)\left(\tfrac{\partial}{\partial z} + f_z \tfrac{\partial}{\partial y}\right). \end{gathered}$$

Позначимо через Z^1 і Z^2 коефіцієнти біля базисних векторних полів поверхні $\frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial y}$ і $\frac{\partial}{\partial z} + f_z \frac{\partial}{\partial y}$ відповідно у попередньому виразі. Оскільки в координатах (x, z) коефіцієнти другої фундаментальної форми явно заданої поверхні мають вигляд

$$b_{11} = -\tfrac{f_{xx}}{\delta},\ b_{12} = -\tfrac{f_{xz}}{\delta},\ b_{22} = -\tfrac{f_{zz}}{\delta},$$

маємо після розкриття дужок

$$\begin{gathered} \langle B(Z), Z \rangle = b_{ij} Z^i Z^j = \tfrac{1}{\delta \Delta^2}\left(-\cos^2 z\, f_z^2 f_{xx} + (2\cos^2 z\, f_x f_z - \sin 2z f_z) f_{xz} + \right. \\ \left. +(-\cos^2 z\, f_x^2 + \sin 2z\, f_x - \sin^2 z) f_{zz}\right). \end{gathered}$$

Тоді в силу (18), прирівнюючи цей вираз до

$$\langle N, X_3\rangle\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle = \tfrac{1}{\delta\Delta^2}(f_x\sin z + \cos z)(f_x\cos z - \sin z)f_z,$$

отримаємо умову мінімальності, що має вигляд (20).

Крім ортогональних до осі z площин $y = a\,x + b$, прикладами розв'язків рівняння (20) є знайдені у [9] поверхні $y = a\cos z + b$ та $y = x + a(\sin z + \cos z) + b$, де a і b постійні. Аналогічні рівняння можна виписати для поверхонь вигляду $x = f(y, z)$ і $z = f(x, y)$. Наведені приклади демонструють, зокрема, що з мінімальності поверхні у евклідовому сенсі не випливає її субріманова мінімальність та навпаки. Тепер перейдемо до питання про стійкість таких поверхонь, обчисливши другу варіацію субріманової площі.

Теорема 2 (Формула другої варіації)**.** *Нехай Σ – мінімальна поверхня у $\widetilde{E(2)}$. Тоді друга нормальна варіація її площі, що задана функцією u, має наступний вигляд:*

$$\begin{aligned}
A''(0) = \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_0} \Big(&|N_h|^{-1}\left(Z(u) - \langle N, X_3\rangle|N_h|\langle\nu_h, X_2\rangle^2 u\right)^2 - \\
&-2|N_h|\langle B(Z), S\rangle^2 u^2 - 2\langle N, X_3\rangle\langle B(Z), S\rangle Z(u)u + \\
&+4\langle N, X_3\rangle|N_h|\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle\langle B(S), S\rangle u^2 + \\
&+2\left(1 - 2|N_h|^2\right)\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle S(u)u + \\
&+|N_h|\left(2 - 3|N_h|^2\right)\langle\nu_h, X_1\rangle^2\langle\nu_h, X_2\rangle^2 u^2\Big)\, d\Sigma.
\end{aligned} \tag{21}$$

Доведення. Продовжимо міркування з доведення теореми 1. Спочатку знову вважатимемо поля N, N_h, ν_h, Z та S заданими на поверхнях варіації. З (5) та рівності $|\mathrm{J}\,\varphi_0| = 1$ випливає

$$A''(0) = \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_0} \left(|N_h|''(0) + 2|N_h|'(0)|\mathrm{J}\,\varphi_s|'(0) + |N_h|(0)|\mathrm{J}\,\varphi_s|''(0)\right) d\Sigma. \tag{22}$$

Перш за все, перепишемо формулу (10) у більш зручному для подальшого диференціювання вигляді. В силу (3),

$$\begin{aligned}
\nabla_U X_3 &= \langle U, X_2\rangle X_1 = u\langle N(0), X_2\rangle X_1,\\
\nabla_U X_1 &= -\langle U, X_2\rangle X_3 = -u\langle N(0), X_2\rangle X_3,
\end{aligned} \tag{23}$$

отже (10) приймає вигляд

$$|N_h|'(s) = \langle\nabla_U N, \nu_h\rangle - \langle N, X_3\rangle u\langle N(0), X_2\rangle\langle\nu_h, X_1\rangle.$$

Тут u та $\langle N(0), X_2\rangle$ не залежать від s, тому, диференціюючи, отримуємо

$$\begin{aligned}
|N_h|''(s) = U(|N_h|') = &\langle\nabla_U\nabla_U N, \nu_h\rangle + \langle\nabla_U N, \nabla_U\nu_h\rangle - \\
&-\left(\langle\nabla_U N, X_3\rangle + \langle N, \nabla_U X_3\rangle\right)\langle N(0), X_2\rangle\langle\nu_h, X_1\rangle u - \\
&-\langle N, X_3\rangle\langle N(0), X_2\rangle\left(\langle\nabla_U\nu_h, X_1\rangle + \langle\nu_h, \nabla_U X_1\rangle\right)u.
\end{aligned} \tag{24}$$

Також з (8), (23) та рівності $\langle Z, X_1\rangle = -\langle \nu_h, X_2\rangle$ випливає, що

$$\begin{gathered}\nabla_U \nu_h = |N_h|^{-1}\left(\langle \nabla_U N, Z\rangle - \langle N, X_3\rangle\langle \nabla_U X_3, Z\rangle\right) Z - \langle \nabla_U X_3, \nu_h\rangle X_3 = \\ = |N_h|^{-1}\left(\langle \nabla_U N, Z\rangle + \langle N, X_3\rangle\langle N(0), X_2\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle u\right) Z - \\ -\langle N(0), X_2\rangle\langle \nu_h, X_1\rangle u X_3.\end{gathered} \tag{25}$$

Підрахуємо значення доданків виразу (24) при $s = 0$. Оскільки поля Z, S та N утворюють ортонормовані базиси у регулярних точках поверхонь варіації, а ν_h ортогональне до Z,

$$\begin{gathered}\langle \nabla_U \nabla_U N, \nu_h\rangle = \langle \nabla_U \nabla_U N, S\rangle\langle S, \nu_h\rangle + \langle \nabla_U \nabla_U N, N\rangle\langle N, \nu_h\rangle = \\ = -\langle N, X_3\rangle\left(2\langle \nabla_U N, \nabla_U S\rangle + \langle N, \nabla_U \nabla_U S\rangle\right) - |N_h|\langle \nabla_U N, \nabla_U N\rangle = \\ = -\langle N, X_3\rangle\left(2\langle \nabla_U N, \nabla_S U\rangle + \langle N, \nabla_U \nabla_S U\rangle\right) - |N_h|\langle \nabla_U N, \nabla_U N\rangle,\end{gathered}$$

де друга рівність випливає з того, що другі похідні виразів $\langle N, S\rangle = 0$ та $\langle N, N\rangle = 1$ у напрямку U рівні нулю, а третя – з $[S, U] = 0$. Тут $\nabla_U \nabla_S U$ дорівнює оператору кривини евклідової метрики $R(U, S)U = 0$, бо $\nabla_U U = [U, S] = 0$. При $s = 0$, як було встановлено у доведенні теореми 1 перед рівняннями (11), $\nabla_U N = -Z(u)Z - S(u)S$, тому

$$\begin{gathered}\langle \nabla_U N, \nabla_S U\rangle(0) = -\langle Z(u)Z + S(u)S, \nabla_S N\rangle u = \\ = \left(\langle B(S), Z\rangle Z(u) + \langle B(S), S\rangle S(u)\right) u = B(S)(u)u\end{gathered}$$

за означенням оператора Вейнгартена і оскільки Z та S у регулярних точках утворюють ортонормовані базиси дотичних площин. Тут у правій частині й далі тепер позначаємо через N, N_h, ν_h, Z та S відповідні поля на поверхні Σ. Таким чином,

$$\langle \nabla_U \nabla_U N, \nu_h\rangle(0) = -2\langle N, X_3\rangle B(S)(u)u - |N_h|(Z(u)^2 + S(u)^2). \tag{26}$$

При $s = 0$ рівняння (25) приймає вигляд

$$\begin{gathered}\nabla_U \nu_h(0) = |N_h|^{-1}\left(-Z(u) + \langle N, X_3\rangle\langle N, X_2\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle u\right) Z - \\ -\langle N, X_2\rangle\langle \nu_h, X_1\rangle u X_3 = |N_h|^{-1}\left(-Z(u) + \langle N, X_3\rangle |N_h|\langle \nu_h, X_2\rangle^2 u\right) Z - \\ -|N_h|\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle u X_3.\end{gathered} \tag{27}$$

Звідси маємо з урахуванням формули $S = \langle N, X_3\rangle \nu_h - |N_h| X_3$

$$\begin{gathered}\langle \nabla_U N, \nabla_U \nu_h\rangle(0) = |N_h|^{-1} Z(u)^2 - \langle N, X_3\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle^2 Z(u)u - \\ -|N_h|^2\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle S(u)u, \\ \langle \nabla_U N, X_3\rangle(0) = |N_h| S(u).\end{gathered} \tag{28}$$

З (23) випливає, що

$$\langle N, \nabla_U X_3\rangle(0) = \langle N, X_2\rangle\langle N, X_1\rangle u = |N_h|^2\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle u. \tag{29}$$

З (27) та рівності $\langle Z, X_1\rangle = -\langle \nu_h, X_2\rangle$ отримуємо

$$\langle \nabla_U \nu_h, X_1\rangle(0) = |N_h|^{-1}\langle \nu_h, X_2\rangle Z(u) - \langle N, X_3\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle^3 u. \tag{30}$$

Нарешті, з (23) також маємо

$$\langle \nu_h, \nabla_U X_1 \rangle(0) = 0, \tag{31}$$

бо ν_h ортогональне до X_3. Підставимо (26) і (28)-(31) у (24), приведемо подібні та спростимо:

$$\begin{gathered} |N_h|''(0) = -2\langle N, X_3\rangle B(S)(u)u - |N_h|(Z(u)^2 + S(u)^2) + \\ +|N_h|^{-1}\left(Z(u) - \langle N, X_3\rangle |N_h| \langle \nu_h, X_2\rangle^2 u\right)^2 - \\ -2|N_h|^2\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle S(u)u - |N_h|^3\langle \nu_h, X_1\rangle^2\langle \nu_h, X_2\rangle^2 u^2. \end{gathered} \tag{32}$$

Як показано, наприклад, у [10, с. 50-51], для евклідової метрики

$$\begin{gathered} |\mathrm{J}\,\varphi_s|''(0) = (\mathrm{div}_\Sigma U)^2 + \langle \nabla_Z U, N\rangle^2 + \langle \nabla_S U, N\rangle^2 - \\ -\langle \nabla_Z U, Z\rangle^2 - 2\langle \nabla_Z U, S\rangle\langle \nabla_S U, Z\rangle - \langle \nabla_S U, S\rangle^2 = \\ = \langle \nabla_Z U, N\rangle^2 + \langle \nabla_S U, N\rangle^2 + 2\left(\langle \nabla_Z U, Z\rangle\langle \nabla_S U, S\rangle - \langle \nabla_Z U, S\rangle\langle \nabla_S U, Z\rangle\right). \end{gathered}$$

Перепишемо цю рівність у термінах оператора Вейнгартена з урахуванням його самоспряженості:

$$|\mathrm{J}\,\varphi_s|''(0) = Z(u)^2 + S(u)^2 + 2\left(\langle B(Z), Z\rangle\langle B(S), S\rangle - \langle B(Z), S\rangle^2\right) u^2. \tag{33}$$

Залишилося підставити (11) (врахувавши (14)), (12), (32) і (33) у вираз під інтегралом формули (22):

$$\begin{gathered} |N_h|''(0) + 2|N_h|'(0)|\mathrm{J}\,\varphi_s|'(0) + |N_h||\mathrm{J}\,\varphi_s|''(0) = -2\langle N, X_3\rangle\langle B(S), Z\rangle Z(u)u - \\ -2\langle N, X_3\rangle\langle B(S), S\rangle S(u)u + |N_h|^{-1}\left(Z(u) - \langle N, X_3\rangle|N_h|\langle \nu_h, X_2\rangle^2 u\right)^2 - \\ -2|N_h|^2\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle S(u)u - |N_h|^3\langle \nu_h, X_1\rangle^2\langle \nu_h, X_2\rangle^2 u^2 + \\ +2\langle N, X_3\rangle\left(S(u) + |N_h|\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle u\right)\left(\langle B(Z), Z\rangle + \langle B(S), S\rangle\right) u + \\ +2|N_h|\left(\langle B(Z), Z\rangle\langle B(S), S\rangle - \langle B(Z), S\rangle^2\right) u^2. \end{gathered}$$

Після підстановки умови мінімальності поверхні (18) та деяких спрощень звідси отримуємо потрібну формулу (21).

Твердження 3. *Усі мінімальні евклідові площини у $\widetilde{E(2)}$ є стійкими.*

Доведення. В силу твердження 1, мінімальна площина або паралельна осі z, і тоді $\langle \nu_h, X_2\rangle = 0$, або ортогональна до неї, і тоді $\langle N, X_3\rangle = \langle \nu_h, X_1\rangle = 0$. Оскільки крім того $B = 0$, формула (21) набуває вигляду

$$A''(0) = \int_{\Sigma\setminus\Sigma_0} |N_h|^{-1} Z(u)^2\, d\Sigma \geqslant 0,$$

що й означає стійкість.

4. Вертикальні поверхні

Розглянемо ще один (крім евклідових площин) клас поверхонь, для яких формула другої варіації (21) суттєво спрощується. Будемо називати поверхню Σ у тривимірному субрімановому многовиді *вертикальною*, якщо її дотична площина $T_p\Sigma$ перпендикулярна до горизонтальної площини субрімановової структури $\mathcal{H}_p$ у кожній точці p поверхні, тобто їхні вектори нормалі ортогональні. Зокрема, такі поверхні не містять сингулярних точок. У наших позначеннях вертикальні поверхні у $\widetilde{E(2)}$ характеризуються еквівалентними умовами $\langle N, X_3\rangle = 0$, $|N_h| = 1$ або $N = N_h = \nu_h$. Умова (18) мінімальності для них приймає вигляд $\langle B(Z), Z\rangle = 0$. Зауважимо, що вертикальні евклідові площини у тривимірній групі Гейзенберга, якими згідно з результатами робіт [2] та [7] вичерпуються повні зв'язні стійкі мінімальні поверхні з порожніми сингулярними множинами, є вертикальними у цьому сенсі. Як побачимо далі у доведенні теореми 3, формула другої варіації для таких поверхонь суттєво спрощується (на що можна сподіватися і у випадку загального тривимірного субріманового многовида).

Евклідова площина у $\widetilde{E(2)}$ є вертикальною тоді й тільки тоді, коли вона перпендикулярна до осі z, бо умова ортогональності її постійного вектора нормалі N та X_3 в усіх точках площини еквівалентна $N = \pm\frac{\partial}{\partial z}$. Такі площини є мінімальними в силу твердження 1. Іншим прикладом вертикальної мінімальної поверхні у $\widetilde{E(2)}$ є стандартний гелікоїд $x\cos z + y\sin z = 0$. Дійсно, його одиничне нормальне поле N пропорційне до градієнта $\cos z\frac{\partial}{\partial x} + \sin z\frac{\partial}{\partial y} + (-x\sin z + y\cos z)\frac{\partial}{\partial z}$, а отже ортогональне до X_3. Мінімальність цієї поверхні можна встановити за допомогою рівняння (20), виразивши $y = -x\operatorname{ctg} z$ у точках, де $\sin z \neq 0$, або безпосередньо перевіривши умову $\langle B(Z), Z\rangle = 0$, що буде зроблено у доведенні наступної теореми. Також властивості вертикальності та мінімальності не порушаться, якщо паралельно перенести такий гелікоїд уздовж площини (x, y). Виявляється, що цей список прикладів вичерпний. Далі під повнотою ми будемо розуміти повноту індукованої ріманової метрики поверхні.

Теорема 3. *Будь-яка повна зв'язна вертикальна мінімальна поверхня у $\widetilde{E(2)}$ – це ортогональна до осі z евклідова площина або паралельно перенесений уздовж площини (x, y) стандартний гелікоїд $x\cos z + y\sin z = 0$. При цьому гелікоїди є нестійкими.*

Доведення. Оскільки для вертикальної поверхні $\langle N, X_3\rangle = 0$ і $|N_h| = 1$, в усіх її точках $S = -X_3$, тобто в силу повноти поверхня складається з інтегральних траєкторій поля X_3 – геодезичних, що є горизонтальними евклідовими прямими з напрямними векторами $(\sin z, -\cos z, 0)$. Отже, поверхня є лінійчатою. Представимо її як

$$r(\rho, \varphi) = (x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi)) + \rho(\sin z(\varphi), -\cos z(\varphi), 0), \qquad (34)$$

де (x, y, z) – натурально параметризована (у евклідовому сенсі, тобто $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1$) інтегральна траєкторія поля Z, тому виконується умова

$$x' \sin z - y' \cos z = 0 \tag{35}$$

ортогональності Z і S. Зокрема, для площин можна покласти $x = \varphi \cos z$ і $y = \varphi \sin z$ при постійній z, а для гелікоїдів – взяти постійні x та y і $z = \varphi$. Для такої поверхні базис дотичних площин утворюють поля

$$r_\rho = \sin z \frac{\partial}{\partial x} - \cos z \frac{\partial}{\partial y} = -S,\ r_\varphi = (x' + \rho z' \cos z)\frac{\partial}{\partial x} + (y' + \rho z' \sin z)\frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z},$$

тому $N = \frac{1}{\delta}\left(z' \cos z \frac{\partial}{\partial x} + z' \sin z \frac{\partial}{\partial y} - \sigma \frac{\partial}{\partial z}\right)$, де позначаємо $\sigma = x' \cos z + y' \sin z + z'\rho$ і $\delta = \sqrt{(z')^2 + \sigma^2}$. Таким чином, $N = N_h = \nu_h = \frac{z'}{\delta} X_1 - \frac{\sigma}{\delta} X_2$, тому

$$Z = \frac{\sigma}{\delta} X_1 + \frac{z'}{\delta} X_2 = \frac{1}{\delta}(-x' \sin z + y' \cos z) r_\rho + \frac{1}{\delta} r_\varphi = \frac{1}{\delta} r_\varphi \tag{36}$$

в силу (35). Обчислюючи коефіцієнти другої фундаментальної форми поверхні (34) у координатах (ρ, φ), отримуємо

$$b_{11} = 0,\ b_{12} = \frac{(z')^2}{\delta},\ b_{22} = \frac{1}{\delta}\left((x''z' - x'z'')\cos z + (y''z' - y'z'')\sin z\right). \tag{37}$$

Зауважимо, що усі ці міркування вірні й для довільних вертикальних поверхонь. В силу (36), умова мінімальності $\langle B(Z), Z\rangle = 0$ тут еквівалентна $b_{22} = 0$, тобто

$$(x''z' - x'z'')\cos z + (y''z' - y'z'')\sin z = 0.$$

З умови (35) випливає, що $(x', y') = \lambda(\cos z, \sin z)$ для деякої функції λ, тому попереднє рівняння набуває вигляду

$$\lambda' z' - z'' \lambda = 0, \tag{38}$$

а умова натуральності параметра φ дає $\lambda^2 + (z')^2 = 1$. Тому на проміжках, де $\lambda = 0$, маємо $z' = \pm 1$, $x' = y' = 0$, тобто поверхня (34) є стандартним гелікоїдом, що паралельно перенесений уздовж площини (x, y). На проміжках, де $\lambda \neq 0$, умова (38) означає, що $\left(\frac{z'}{\lambda}\right)' = 0$, тобто $z' = \lambda c$ для деякого постійного c. З умови натуральності параметра тоді отримуємо, що $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$ і $z' = a = \pm\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ постійні, отже $z = a\varphi + b$ і $(x', y') = \lambda(\cos(a\varphi + b), \sin(a\varphi + b))$. Тоді при $a = 0$ рівняння (34) задає ортогональну до осі z площину, а при $a \neq 0$ – знову паралельно перенесений стандартний гелікоїд.

Залишилося дослідити гелікоїди на стійкість. Для цього спочатку спростимо формулу другої варіації (21). Для вертикальної мінімальної поверхні вираз під інтегралом у цій формулі набуває вигляду

$$\begin{gathered} Z(u)^2 - 2\langle B(Z), S\rangle^2 u^2 - 2\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle S(u) u - \\ -\langle \nu_h, X_1\rangle^2 \langle \nu_h, X_2\rangle^2 u^2. \end{gathered} \tag{39}$$

Як і в доведенні теореми 1, зробимо перетворення, обчисливши дивергенцію допоміжного поля. Підставляючи умову мінімальності $\langle B(Z),Z\rangle = 0$ та умови вертикальності поверхні у (17) та (19), отримаємо

$$\mathrm{div}_\Sigma S = \langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle,\ \nabla_S \nu_h = -\langle B(Z),S\rangle Z.$$

Тому, враховуючи, що $\nabla_S X_1$ пропорційне до X_3 (аналогічно до (23)), а $\nabla_S X_2 = 0$ в силу (3), маємо

$$\begin{gathered}
\mathrm{div}_\Sigma \left(\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle u^2 S\right) = \left(\langle \nabla_S\nu_h, X_1\rangle + \langle \nu_h, \nabla_S X_1\rangle\right)\langle \nu_h, X_2\rangle u^2 + \\
+\langle \nu_h, X_1\rangle\left(\langle \nabla_S\nu_h, X_2\rangle + \langle \nu_h, \nabla_S X_2\rangle\right)u^2 + 2\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle S(u)u + \\
+\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle u^2 \mathrm{div}_\Sigma S = -\langle B(Z),S\rangle\langle Z, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle u^2 - \\
-\langle \nu_h, X_1\rangle\langle B(Z),S\rangle\langle Z, X_2\rangle u^2 + 2\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle S(u)u + \\
+\langle \nu_h, X_1\rangle^2\langle \nu_h, X_2\rangle^2 u^2 = 2\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle S(u)u + \\
+\left(\langle B(Z),S\rangle\left(\langle \nu_h, X_2\rangle^2 - \langle \nu_h, X_1\rangle^2\right) + \langle \nu_h, X_1\rangle^2\langle \nu_h, X_2\rangle^2\right)u^2.
\end{gathered}$$

Таким чином, (39) дорівнює

$$\begin{gathered}
Z(u)^2 - 2\langle B(Z),S\rangle^2 u^2 - \mathrm{div}_\Sigma\left(\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle u^2 S\right) + \\
+\langle B(Z),S\rangle\left(1 - 2\langle \nu_h, X_1\rangle^2\right)u^2.
\end{gathered}$$

Знову ж враховуючи, що інтеграл від дивергенції дорівнює нулю, отримуємо звідси спрощену формулу другої варіації:

$$A''(0) = \int_\Sigma \left(Z(u)^2 + (-2\langle B(Z),S\rangle^2 + \langle B(Z),S\rangle(1 - 2\langle \nu_h, X_1\rangle^2))u^2\right)\, d\Sigma. \tag{40}$$

Покладемо у (34) функції x та y постійними і $z = \varphi$. Тоді у введених вище позначеннях маємо $\langle \nu_h, X_1\rangle = \frac{z'}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}$, $Z = \frac{1}{\delta} r_\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} r_\varphi$, $S = -r_\rho$ і таким чином $\langle B(Z),S\rangle = -\frac{b_{12}}{\sqrt{1+\rho^2}} = -\frac{1}{1+\rho^2}$ в силу (36) і (37). Враховуючи також, що $d\Sigma = \delta\, d\rho d\varphi = \sqrt{1+\rho^2}\, d\rho d\varphi$, бачимо, що (40) набуває вигляду

$$A''(0) = \int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}(u_\varphi^2 - u^2)\, d\rho d\varphi.$$

Нехай $u(\rho,\varphi) = u_1(\rho)u_2(\varphi)$, де u_1 – гладка невід'ємна функція з компактним носієм, а $u_2(\varphi) = \left(\varphi^2 - 4\right)^2$ на відрізку $[-2,2]$ і дорівнює нулю за його межами. Для відповідної гладкої нормальної варіації з компактним носієм тоді маємо $A''(0) < 0$ за попередньою формулою. Таким чином, гелікоїди дійсно нестійкі.

З цієї теореми та твердження 3 отримуємо наступний частковий результат типу Бернштейна.

Висновок 2. *У $\widetilde{E(2)}$ повна зв'язна вертикальна мінімальна поверхня є стійкою тоді й тільки тоді, коли ця поверхня є ортогональною до осі z евклідовою площиною.*

5. Прикінцеві зауваження

Автори хотіли б подякувати анонімному рецензенту за корисні пропозиції щодо змісту і викладення роботи, зокрема, за запропоновану нову функцію, що використана для доведення нестійкості гелікоїдів у доведенні теореми 3.

Історія статті: отримана: 9 жовтня 2023; останній варіант: 22 листопада 2023
прийнята: 25 листопада 2023.

REFERENCES

1. D. Danielli, N. Garofalo, D. M. Nhieu, S. D. Pauls. Instability of graphical strips and a positive answer to the Bernstein problem in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$, J. Differential Geom. – 2009. – Vol. **81**, No **2**. – P. 251–295. 10.4310/jdg/1231856262

2. D. Danielli, N. Garofalo, D. M. Nhieu, S. D. Pauls. The Bernstein problem for embedded surfaces in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$, Indiana Univ. Math. J. – 2010. – Vol. **59**, No **2**. – P. 563–594. 10.1512/iumj.2010.59.4291

3. D. Fischer-Colbrie, R. Schoen. The structure of complete stable minimal surface in 3-manifolds of non-negative scalar curvature, Comm. Pure Appl. Math. – 1980. – Vol. **33**, No **2**. – P. 199–211. 10.1002/cpa.3160330206

4. N. Garofalo, D.-M. Nhieu. Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces, Comm. Pure Appl. Math. – 1996. – Vol. **42**, No **3**. – P. 1081–1144. 10.1002/(SICI)1097-0312(199610)49:10<1081::AID-CPA3>3.0.CO;2-A

5. R. K. Hladky, S. D. Pauls. Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model, J. Math. Imaging Vis. – 2010. – Vol. **36**, No **1**. – P. 1–27. 10.1007/s10851-009-0167-9

6. A. Hurtado, C. Rosales. Area-stationary surfaces inside the sub-Riemannian three-sphere, Math. Ann. – 2008. – Vol. **340**, No **3**. – P. 675–708. 10.1007/s00208-007-0165-4

7. A. Hurtado, M. Ritoré, C. Rosales. The classification of complete stable area-stationary surfaces in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$, Adv. in Math. – 2010. – Vol. **224**, No **2**. – P. 561–600. 10.1016/j.aim.2009.12.002

8. M. Ritoré, C. Rosales. Area-stationary and stable surfaces in the sub-Riemannian Heisenberg group $\mathbb{H}^1$, Matemática Contemporânea. – 2008. – Vol. **35**. – P. 185–203. 10.21711/231766362008/rmc3512

9. N. Shcherbakova. Minimal surfaces in sub-Riemannian manifolds and structure of their singular sets in the (2,3) case, ESAIM Control Optim. Calc. Var. – 2009. – Vol. **15**, No **4**. – P. 839–862. 10.1051/cocv:2008051

10. L. Simon. Lectures on geometric measure theory, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University. – 1983. – Vol. **3**. – vii+272 p. ISBN:0-86784-429-9

Article history: Received: 9 October 2023; Final form: 22 November 2023
Accepted: 25 November 2023.

How to cite this article:

I. O. Havrylenko, E. V. Petrov, Stability of minimal surfaces in the sub-Riemannian manifold $\widetilde{E(2)}$, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 98, 2023, p. 50–67, (in Ukr.). DOI: 10.26565/2221-5646-2023-98-04

Stability of minimal surfaces in the sub-Riemannian manifold $\widetilde{E(2)}$

I. O. Havrylenko, E. V. Petrov
V. N. Karazin Kharkiv National University
Svobody square, 4, Kharkiv, Ukraine, 61022

In the paper we study smooth oriented surfaces in the universal covering space of the group of orientation-preserving Euclidean plane isometries, which has a three-dimensional sub-Riemannian manifold structure. This structure is constructed as a restriction of the Euclidean metric on the group to some completely non-integrable left invariant distribution. The sub-Riemannian area of a surface is then defined as the integral of the length of its unit normal field projected orthogonally onto this distribution. We calculate the first variation formula of the sub-Riemannian surface area and derive the minimality criterion from it. Here we call a surface minimal if it is a critical point of the sub-Riemannian area functional under normal variations with compact support. We show that the minimality in this case is not equivalent to the vanishing of the sub-Riemannian mean curvature. We then prove that a Euclidean plane is minimal if and only if it is parallel or orthogonal to the z-axis (where the z-coordinate corresponds to the rotation angle of an isometry). Also we obtain the minimality condition for a graph and give examples of minimal graphs. The examples considered in the paper demonstrate, in particular, that the minimality of a surface in the Riemannian (in this case Euclidean) sense does not imply its sub-Riemannian minimality, and vice versa.

Next, we consider the stability of minimal surfaces. For this purpose, we derive the second variation formula of the sub-Riemannian area and show with it that minimal Euclidean planes are stable. We introduce a class of surfaces for which the tangent planes are perpendicular to the planes of the sub-Riemannian structure, and call them vertical surfaces. In particular, for such surfaces the second variation formula is simplified significantly. Then we prove that complete connected vertical minimal surfaces are either Euclidean planes or helicoids and that helicoids are unstable. This implies a following Bernstein type result: a complete connected vertical minimal surface is stable if and only if it is a Euclidean plane orthogonal to the z-axis.

Keywords: **sub-Riemannian manifold; left invariant metric; minimal surface; stability.**

Правила для авторів
«Вісника Харківського національного університету
імені В. Н. Каразіна»,
Серія «Математика, прикладная математика і механіка»

Редакція просить авторів при направленні статей керуватися наступними правилами.

1. В журналі публікуються статті, що мають результати математичних досліджень (англійською або українською мовами).

2. Поданням статті вважається отримання редакцією файлів статті оформлених у редакторі LATEX (версія 2e), анотацій, відомостей про авторів та архіва, що включає LATEX файли статті та файли малюнків. Файл-зразок оформлення статті можна знайти в редакції журналу та на веб-сторінці (http://vestnik-math.univer.kharkov.ua).

3. Стаття повинна починатися з розширеної анотації (обсягом **не менш ніж 1800 знаків**), в якій повинні бути чітко сформульовані мета та результати роботи. Анотація повинна бути тією мовою (англійською або українською), якою є основний текст статті. Закордонні автори можуть звернутися до редакції за допомогою з перекладом анотацій на українську мову. Повинні бути наведені прізвища, ініціали авторів, назва роботи, ключові слова та номер за міжнародною математичною класифікацією (Mathematics Subject Classification 2010). Анотація не повинна мати посилань на літературу чи малюнки. На першій сторінці вказується номер УДК класифікації. В кінці статті треба додати переклад анотації (обсягом **не менш ніж 1800 знаків**) на другу мову (англійську чи українську).

4. Список літератури повинен бути оформлений латинським шрифтом. Приклади оформлення списка літератури:

1. A.M. Lyapunov. A new case of integrability of differential equations of motion of a solid body in liquid, Rep. Kharkov Math. Soc., – 1893. – 2. V.**4**. – P. 81-85.
2. A.M. Lyapunov. The general problem of the stability of motion. Kharkov Mathematical Society, Kharkov. - 1892. - 251 p.

5. Кожний малюнок повинен бути пронумерований та представлений окремим файлом в одному з форматів: EPS, BMP, JPG. В файлі статті малюнок повинен бути вставлений автором. Під малюнком повинен бути підпис. Назви файлів малюнків повинні починатись з прізвища першого автора.

6. Відомості про авторів повинні містити: прізвища, імена, по батькові, службові адреси та номери телефонів, науковий ступінь, посаду, адреси електронних скриньок та інформацію про наукові профайли авторів (orcid.org, www.researcherid.com, www.scopus.com) з відповідними посиланями. Прохання також повідомити прізвище автора, з яким треба вести листування.

7. Рекомендуємо використовувати в якості зразка оформлення останні випуски журналу (http://periodicals.karazin.ua/mech_math).

8. У випадку порушення правил оформлення редакція не буде розглядати статтю.

Електронна скринька: vestnik-khnu@ukr.net
Електронна адреса в Інтернеті: **http://vestnik-math.univer.kharkov.ua**
http://periodicals.karazin.ua/mech_math

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна,
Серія “Математика, прикладна математика і механіка”, Том 98, 2023 р.

Збірник наукових праць

Англійською та українською мовами

Підписано до друку 29. 11. 2023 р.
Формат $70 \times 108/16$. Папір офсетний. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. 4,35
Обл.– вид. арк. 5,44
Наклад 100 пр. Зам. № 18/23
Безкоштовно.

Видавець і виготовлювач Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

Видавництво Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
тел. 705-24-32