ISSN 2221-5646 (Print),
ISSN 2523-4641 (Online)

KARAZIN UNIVERSITY
CLASSICS AHEAD OF TIME

VISNYK OF V.N.KARAZIN KHARKIV NATIONAL UNIVERSITY

Ser. MATHEMATICS, APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Том 95 ' 2022

Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна серія

МАТЕМАТИКА, ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА І МЕХАНІКА

Volume 95, 2022

ISSN 2221–5646 (Print)
ISSN 2523–4641 (Online)

Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна

Серія

«Математика, прикладна математика і механіка»

Серія започаткована 1965 р.

Том 95

Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”
Vol. 95

Харків
2022

До Віснику включено статті з математичного аналізу, математичної фізики, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних наук, категорія «Б» за спеціальностями 111 - Математика та 113 - Прикладна математика (Наказ МОН України №1643 від 28.12.2019 р.).

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол №10 від 27 червня 2022 р.).

Адреса редакційної колегії: 61022, Харків, майдан Свободи, 4, ХНУ імені В.Н. Каразіна, ф-т математики і інформатики, к. 7-27, т. 7075240, 7075135, **e-mail:** vestnik-khnu@ukr.net
Інтернет: http://vestnik-math.univer.kharkov.ua; http://periodicals.karazin.ua/mech _math

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21568-11468 Р від 21.08.2015

ЗМІСТ

CONTENTS

ISSN 2221-5646(Print) 2523-4641(Online)
Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics”
2022, Vol. 95, p. 4–22
DOI: 10.26565/2221-5646-2022-95-01
УДК 532.59

Вісник Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
2022, Том 95, с. 4–22

A. E. Choque-Rivero
PhD math, Prof.
Prof. Dep. of math.
Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Edificio C-3, C.U., CP 58060, Morelia, Michoacan, México
abdon.choque@umich.mx *http://orcid.org/0000-0003-0226-9612*

B. E. Medina-Hernandez
BS in Math
MS math student
Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacan, México
Col. Ex Hacienda de San Jose de la Huerta, C.P. 58089, Morelia, Michoacan, Mexico
1130390c@umich.mx *http://orcid.org/0000-0002-5072-706X*

On two resolvent matrices of the truncated Hausdorff matrix moment problem

We consider the truncated Hausdorff matrix moment problem (THMM) in case of a finite number of even moments to be called non degenerate if two block Hankel matrices constructed via the moments are both positive definite matrices. The set of solutions of the THMM problem in case of a finite number of even moments is given with the help of the block matrices of the so-called resolvent matrix. The resolvent matrix of the THMM problem in the non degenerate case for matrix moments of dimension $q \times q$, is a $2q \times 2q$ matrix polynomial constructed via the given moments.

In 2001, in [Yu.M. Dyukarev, A.E. Choque Rivero, Power moment problem on compact intervals, Mat. Sb.-2001. -69(1-2). -P.175-187], the resolvent matrix $V^{(2n+1)}$ for the mentioned THMM problem was proposed for the first time. In 2006, in [A. E. Choque Rivero, Y. M. Dyukarev, B. Fritzsche and B. Kirstein, A truncated matricial moment problem on a finite interval, Interpolation, Schur Functions and Moment Problems. Oper. Theory: Adv. Appl. -2006. - 165. - P. 121-173], another resolvent matrix $U^{(2n+1)}$ for the same problem was given. In this paper, we prove that there is an explicit relation between these two resolvent matrices of the form $V^{(2n+1)} = AU^{(2n+1)}B$, where A and B are constant matrices. We also focus on the following difference: For the definition of the resolvent matrix $V^{(2n+1)}$, one requires an additional condition when compared with the resolvent matrix $U^{(2n+1)}$ which only requires that two block Hankel matrices be positive definite.

In 2015, in [A. E. Choque Rivero, From the Potapov to the Krein-Nudel'man representation of the resolvent matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem, Bol. Soc. Mat. Mexicana. – 2015. – 21(2). – P. 233–259], a representation of the resolvent matrix of 2006 via matrix orthogonal polynomials was given. In this work, we do not relate the resolvent matrix $V^{(2n+1)}$ with the results of [A. E. Choque Rivero, From the Potapov to the Krein-Nudel'man representation of the resolvent matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem, Bol. Soc. Mat. Mexicana. – 2015. – 21(2). – P. 233–259]. The importance of the relation between $U^{(2n+1)}$ and $V^{(2n+1)}$ is explained by the fact that new relations among orthogonal matrix polynomials, Blaschke-Potapov factors, Dyukarev-Stieltjes parameters, and matrix continued fraction can be found. Although in the present work algebraic identities are used, to prove the relation between $U^{(2n+1)}$ and $V^{(2n+1)}$, the analytic justification of both resolvent matrices relies on the V.P. Potapov method. This approach was successfully developed in a number of works concerning interpolation matrix problems in the Nevanlinna class of functions and matrix moment problems.

Keywords: **Hausdorff matrix moment problem; resolvent matrix.**

2010 Mathematics Subject Classification: 30E05; 47A56.

1. Introduction

We will use $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, and $\mathbb{N}_0$ to denote the set of complex numbers, real numbers, and nonnegative integers, respectively. We will employ $\mathbb{C}^{p\times q}$, $0_{p\times q}$, 0_q, I_q to denote the $p \times q$ complex-valued matrices, the $p \times q$ zero matrix, the $q \times q$ zero matrix, and the $q \times q$ identity matrix, respectively.

We consider the truncated Hausdorff matrix moment (THMM) problem for an even number of moments, which is stated as follows: Let a and b be real numbers with $a < b$, let $n \in \mathbb{N}_0$, and let $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ be a sequence of complex $q \times q$ matrices. Find the set $\mathcal{M}^q_{\geq}[[a, b], \mathfrak{B} \cap [a, b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ of all nonnegative Hermitian $q \times q$ measures σ defined on the σ-algebra of all Borel subsets of the interval $[a, b]$ such that

$$s_j = \int\limits_{[a,b]} t^j \sigma(dt)$$

holds true for each integer j with $0 \leq j \leq 2n + 1$.

We construct the following Hankel matrices:

$$H_{1,n} := \{s_{l+k}\}_{l,k=0}^{n}, \quad \widetilde{H}_{1,n} := \{s_{l+k+1}\}_{l,k=0}^{n}, \tag{1}$$

$$H_{3,n} := bH_{1,n} - \widetilde{H}_{1,n}, \quad H_{4,n} := -aH_{1,n} + \widetilde{H}_{1,n}. \tag{2}$$

Definition 1. *Let the Hankel matrices $H_{3,n}$ and $H_{4,n}$ be as in (2). The sequence $(s_k)_{k=0}^{2n+1}$ is called Hausdorff positive definite (resp. nonnegative) on $[a, b]$ if the block Hankel matrices $H_{3,n}$ and $H_{4,n}$ are both positive (resp. nonnegative) definite.*

In [1], it is proved that the THMM problem for the even number of moments has a solution if $\{s_j\}_{j=0}^{2n+1}$ is a nonnegative definite sequence.

Once we have verified the existence of solutions for the THMM problem for the even number of moments, instead of determining the set of measures σ, we look for matrix-valued holomorphic functions $s(z)$ defined as

$$s(z) := \int\limits_{[a,b]} \frac{1}{z-t}\sigma(dt), \ z \in \mathbb{C} \setminus [a,b], \quad \sigma \in \mathcal{M}^q_{\geq}[[a,b], \mathfrak{B} \cap [a,b]; \{s_j\}_{j=0}^{2n+1}]. \quad (3)$$

In (3), for each constructed measure σ, we have a unique $s(z)$. We use $\mathfrak{S}^q_{\geq}[\mathfrak{B} \cap [a,b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ to denote the set of all such $s(z)$. In the case when the sequence $\{s_j\}_{j=0}^{2n+1}$ is a positive definite sequence, called non-degenerate case, there are an infinite number of associated solutions. Each such solution can be written as

$$s(z) = \left(\alpha^{(2n+1)}(z)\,\mathbf{p}(z) + \beta^{(2n+1)}(z)\,\mathbf{q}(z)\right)\left(\gamma^{(2n+1)}(z)\,\mathbf{p}(z) + \delta^{(2n+1)}(z)\,\mathbf{q}(z)\right)^{-1}$$

where $\alpha^{(2n+1)}$, $\beta^{(2n+1)}$, $\gamma^{(2n+1)}$ and $\delta^{(2n+1)}$ are matrix–valued polynomials on the variable z and are determined by the moments $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$. The quantities $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$ denote $q \times q$ matrix-valued functions of z, which do not depend on the moments $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$. The set of column pairs column$(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ is described in 2006 in [1, Definition 5.2]. The $2q \times 2q$ matrix-valued function

$$U^{(2n+1)} := \begin{bmatrix} \alpha^{(2n+1)} & \beta^{(2n+1)} \\ \gamma^{(2n+1)} & \delta^{(2n+1)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

is called the resolvent matrix (RM) of the THMM problem for an even number of moments.

In 2001, in [19], another resolvent matrix for solving the same THMM problem was proposed, which we denote by

$$V^{(2n+1)} := \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}^{(2n+1)} & \widehat{\beta}^{(2n+1)} \\ \widehat{\gamma}^{(2n+1)} & \widehat{\delta}^{(2n+1)} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

The matrices $\widehat{\alpha}^{(2n+1)}$, $\widehat{\beta}^{(2n+1)}$, $\widehat{\gamma}^{(2n+1)}$ and $\widehat{\delta}^{(2n+1)}$ are constructed by using the sequence of moments $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$. With the help of the entries of the matrix polynomial (5) and a family of columns pairs column$(\widetilde{\mathbf{p}}, \widetilde{\mathbf{q}})$ [19, Equalities (18)-(20)], an associated solution to the THMM problem is given in [19, Theorem 6].

The goal of this paper is to determine an explicit relation between the resolvent matrices $U^{(2n+1)}$ and $V^{(2n+1)}$ of the form

$$V^{(2n+1)}(z) = AU^{(2n+1)}(z)B \quad (6)$$

for $z \in \mathbb{C}$. Here A and B are constant matrices. The resolvent matrices $U^{(2n+1)}$ and $V^{(2n+1)}$ are both matrix polynomials on the variable z. They differ as described below:

- For the definition of matrix $U^{(2n+1)}$, the positive definiteness of matrices $H_{3,n}$ and $H_{4,n}$ are required. For the definition of matrix $V^{(2n+1)}$, however, the invertibility of matrix $\widetilde{H}_{1,n}$ is additionally required.

The relation between the resolvent matrix $V^{(2n+1)}$ and resolvent matrix for the truncated Hausdorff matrix moment in case of an even number of moments proposed in [8] and the help of orthogonal matrix polynomials will be considered in forthcoming work.

The importance of the relation between $U^{(2n+1)}$ and $V^{(2n+1)}$ is explained by the fact that well-known objects such as orthogonal polynomials [25], [8], Blaschke-Potapov factors [5], [6], Dyukarev-Stieltjes parameters [9],[12], continued fractions [11] and the three-term recurrence relation coefficients [13] related to the THMM problem in the case of an even number of moments can be obtained with new expressions. Additionally, the mentioned relation can be used in the control problem in a similar way as in [4, 3, 10]. In the frame of the V.P. Potapov schema, interpolation problems in the Nevanlinna or Stieltjes class of functions and matrix moment problems are studied in [2], [7], [15], [16], [17], [18], [20], [21] and [23]. The THMM problem was recently studied in [22] via an Schur–Nevanlinna type algorithm. In [26] and [14], the operator approach was applied to solve the THMM problem.

2. Notations and preliminaries

In this section, we reproduce matrices, which allow us to define the entries of the resolvent matrix (5) and (4). Let $R_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{(n+1)q\times(n+1)q}$ be given by

$$R_n(z) := (I_{(n+1)q} - zT_n)^{-1}, \quad n \geq 0, \tag{7}$$

with

$$T_0 := 0_q, \quad T_n := \begin{bmatrix} 0_{q\times nq} & 0_q \\ I_{nq} & 0_{nq\times q} \end{bmatrix}, \quad n \geq 1. \tag{8}$$

Let

$$v_0 := I_q, \quad v_n := \begin{bmatrix} I_q \\ 0_{nq\times q} \end{bmatrix}, \quad n \geq 1. \tag{9}$$

Furthermore,

$$u_n := \text{column}\,(-s_0, -s_1, \ldots, -s_n)\,, \tag{10}$$

$$u_{3,0} := s_0, \qquad u_{3,n} := -R_n^{-1}(b)u_n, \tag{11}$$

$$u_{4,0} := -s_0, \qquad u_{4,n} := R_n^{-1}(a)u_n. \tag{12}$$

If A is complex matrix, then A^* denotes the conjugate transpose of A.

Lemma 1. *Let $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ be a Hausdorff positive definite sequence on $[a, b]$. Furthermore, let $H_{1,n}$, $\widetilde{H}_{1,n}$, $H_{4,n}$, $H_{3,n}$, T_n, u_n, $u_{3,n}$ and $u_{4,n}$ be as in (1), (2),* *(8), (10), (11) and (12), respectively. Thus, the following identities hold:*

$$H_{1,n} = \frac{1}{b-a}(H_{3,n} + H_{4,n}), \tag{13}$$

$$\widetilde{H}_{1,n} = \frac{1}{b-a}(bH_{4,n} + aH_{3,n}), \tag{14}$$

$$u_n v_n^* = \widetilde{H}_{1,n} T_n^* - H_{1,n}, \tag{15}$$

$$H_{r,n} T_n^* - T_n H_{r,n} = u_{r,n} v_n^* - v_n u_{r,n}^*, \quad r = 3, 4. \tag{16}$$

Proof. *Equality (13) (resp. Equality (14)) can be readily verified from (1) and (2). Equality (13) is considered in [1, Equation (2.1)]. Equality (15) is proved in [9, Equation (6.17)]. Equality (16) is considered in [19, Page 178] and [1, Equation (2.2)].*

Proposition 1. *For $a < b$, let $H_{1,n}$, $\widetilde{H}_{1,n}$, $H_{3,n}$ and $H_{4,n}$ be as in (1) and (2). Moreover, let $H_{3,n}$ and $H_{4,n}$ be positive definite matrices.*
a) Thus, the matrix $H_{1,n}$ is a positive definite matrix.
b) Let $0 < a < b$ (resp. $a < b < 0$), then matrix $\widetilde{H}_{1,n}$ is a positive definite matrix (negative definite matrix).
c) If $a < 0 < b$, the determinant of the matrix $\widetilde{H}_{1,n}$ can be equal to 0.

Proof. *For the proof of part a) and part b) with the condition $0 < a < b$, we use (13), (14) and the fact that the sum of positive definite matrices is a positive definite matrix. To verify the part b) with $a < b < 0$, it is sufficient to multiply equality (14) by -1 and apply part a). Part c) we prove by giving an example. Let $a = -3$, $b = 3(2 - \sqrt{3})$, $s_0 = -54(-2 + \sqrt{3})$, $s_1 = 81(5 - 3\sqrt{3})$ and $s_2 = -486(-7 + 4\sqrt{3})$. Furthermore, let s_3 be such that*

$$-243\left(47\sqrt{3} - 81\right) < s_3 < 243\left(147 - 85\sqrt{3}\right).$$

An approximation of this interval is given by $-98.7522 < s_3 < -54.5094$. Clearly, the matrices $H_{3,1}$ $H_{4,1}$ are positive definite, while the the determinant of the matrix $\widetilde{H}_{1,1}$ on $s_3 = 1458\left(19 - 11\sqrt{3}\right)$ is equal to 0. An approximation of the latter value is $s_3 = -76.6309$.

In the following definition, we use the invertibility of the matrix $\widetilde{H}_{1,n} = \frac{bH_{4,n}+aH_{3,n}}{b-a}$.

Definition 2. *[19, Theorem 4] Let $(s_k)_{k=0}^{2n+1}$ be a Hausdorff positive definite sequence on $[a, b]$. Let $H_{r,n}$, $u_{r,n}$ for $r = 3, 4$, R_n and v_n be defined as in (2), (11), (12), (7) and (9), respectively. Furthermore, let $\widetilde{H}_{1,n}$ as in (14) be an invertible matrix.*

The entries of the $2q \times 2q$ matrix polynomial $V^{(2n+1)}(z)$ as in (5) are defined *by*

$$\widehat{\alpha}^{(2n+1)}(z) := I_q + zv_n^* R_n^*(\bar{z}) \left(\frac{bH_{4,n} + aH_{3,n}}{b-a} \right)^{-1} u_n, \tag{17}$$

$$\widehat{\gamma}^{(2n+1)}(z) := u_n^* R_n^*(\bar{z}) \left(\frac{bH_{4,n} + aH_{3,n}}{b-a} \right)^{-1} u_n, \tag{18}$$

$$\widehat{\beta}^{(2n+1)}(z) := (z-b)(z-a) v_n^* R_n^*(\bar{z}) \frac{aH_{4,n}^{-1} + bH_{3,n}^{-1}}{b-a} v_n, \tag{19}$$

$$\widehat{\delta}^{(2n+1)}(z) := I_q + u_n^* R_n^*(\bar{z}) \frac{a(z-b) R_n^{*^{-1}}(a) H_{4,n}^{-1} + b(z-a) R_n^{*^{-1}}(b) H_{3,n}^{-1}}{b-a} v_n. \tag{20}$$

The matrix (5) is called the first resolvent matrix of the THMM problem in the case of an even number of moments.

Matrix $V^{(2n+1)}(z)$ has important properties concerning the matrix

$$J_q := \begin{bmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & 0_q \end{bmatrix}. \tag{21}$$

In particular, the inverse matrix of $V^{(2n+1)}(z)$ can be explicitly calculated via two $2q \times 2q$ matrices defined below.

Definition 3. *Let $(s_k)_{k=0}^{2n+1}$ be a Hausdorff positive definite sequence on $[a,b]$. Let $H_{r,n}$, $u_{r,n}$ for $r = 3,4$, R_n, v_n and J_q be defined as in (2), (11), (12), (7), (9) and (21), respectively. For $r = 3,4$, let*

$$\widetilde{V}_r^{(2n+1)}(z) := I_{2q} - iz \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} R_n^*(\bar{z}) H_{r,n}^{-1} [v_n \ u_{r,n}] J_q. \tag{22}$$

The matrix (22) is called the first Kovalishina resolvent matrix of the THMM problem in the case of an even number of moments.
Furthermore, let $\widetilde{H}_{1,n}$ as in (14) be an invertible matrix. Let

$$M_{4,n} := -au_n^* \widetilde{H}_{1,n}^{-1} u_n, \qquad M_{3,n} := bu_n^* \widetilde{H}_{1,n}^{-1} u_n,$$
$$N_{4,n} := -bv_n^* H_{4,n}^{-1} \widetilde{H}_{1,n} H_{3,n}^{-1} v_n, \qquad N_{3,n} := av_n^* H_{4,n}^{-1} \widetilde{H}_{1,n} H_{3,n}^{-1} v_n.$$

For $r = 3,4$, let

$$C_r^{(2n+1)} := \left[\begin{array}{c|c} I_q & 0_q \\ \hline M_{r,n} & I_q \end{array} \right], \qquad D_r^{(2n+1)} := \left[\begin{array}{c|c} I_q & N_{r,n} \\ \hline 0_q & I_q \end{array} \right],$$

and

$$V_r^{(2n+1)}(z) := \widetilde{V}_r^{(2n+1)}(z) C_r^{(2n+1)} D_r^{(2n+1)}. \tag{23}$$

The matrix (23) is called the first auxiliary resolvent matrix of the THMM problem in the case of an even number of moments.

Equality (22) (resp. (23)) appears in [19, Theorem3] (resp. [19, Equality (7)]). Note that the name Kovalishina resolvent matrix for the matrix $\widetilde{V}_r^{(2n+1)}(z)$ was suggested by Yury Dyukarev as the paper [19] was being prepared. Prof. Irina Kovalishina studied matrix interpolation and moment problems in the frame of the V.P. Potapov method. See [23].

Observe that the matrix $\widetilde{V}_r^{(2n+1)}$ can be expressed in the following form

$$\widetilde{V}_r^{(2n+1)}(z) = \begin{bmatrix} \widetilde{\alpha}_r^{(n)}(z) & \widetilde{\beta}_r^{(n)}(z) \\ \widetilde{\gamma}_r^{(n)}(z) & \widetilde{\delta}_r^{(n)}(z), \end{bmatrix},$$

where

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}_r^{(n)}(z) :=& I_q + zv_n^* R_n^*(\bar{z}) H_{r,n}^{-1} u_{r,n}, \\
\widetilde{\beta}_r^{(n)}(z) :=& -zv_n^* R_n^*(\bar{z}) H_{r,n}^{-1} v_n, \\
\widetilde{\gamma}_r^{(n)}(z) :=& zu_{4,n}^* R_n^*(\bar{z}) H_{r,n}^{-1} u_{r,n}, \\
\widetilde{\delta}_r^{(n)}(z) :=& I_q - zu_{r,n}^* R_n^*(\bar{z}) H_{r,n}^{-1} v_n.
\end{aligned}$$

In a similar manner, from (23) we write the matrix $V_r^{(2n+1)}$ as follows:

$$V_r^{(2n+1)}(z) = \begin{bmatrix} \breve{\alpha}_r^{(n)}(z) & \breve{\beta}_r^{(n)}(z) \\ \breve{\gamma}_r^{(n)}(z) & \breve{\delta}_r^{(n)}(z) \end{bmatrix}$$

where

$$\begin{aligned}
\breve{\alpha}_r^{(n)}(z) :=& \widetilde{\alpha}_r^{(n)}(z) + \widetilde{\beta}_r^{(n)}(z) M_{r,n}, \\
\breve{\beta}_r^{(n)}(z) :=& \widetilde{\alpha}_r^{(n)}(z) N_{r,n} + \widetilde{\beta}_r^{(n)}(z)(I_q + M_{r,n} N_{r,n}), \\
\breve{\gamma}_r^{(n)}(z) :=& \widetilde{\gamma}_r^{(n)}(z) + \widetilde{\delta}_r^{(n)}(z) M_{r,n}, \\
\breve{\delta}_r^{(n)}(z) :=& \widetilde{\gamma}_r^{(n)}(z) N_{r,n} + \widetilde{\delta}_r^{(n)}(z)(I_q + M_{r,n} N_{r,n}).
\end{aligned}$$

In the next lemma, the explicit representation of the inverse of the matrix $V^{(2n+1)}$ is given.

Lemma 2. *Let $(s_k)_{k=0}^{2n+1}$ be a Hausdorff positive definite sequence on $[a, b]$. Let $H_{r,n}$, $u_{r,n}$, for $r = 3, 4$, R_n, v_n, J_q and $V_r^{(2n+1)}(z)$ be defined as in (2), (11), (12), (7), (9), (21) and Definition 2, respectively. Furthermore, let $\widetilde{H}_{1,n}$ be as in (1). Assume that $\widetilde{H}_{1,n}$ is an invertible matrix. Thus, the following equality holds:*

$$V_r^{(2n+1)^{-1}}(z) = J_q V_r^{(2n+1)^*}(\bar{z}) J_q, \quad r = 3, 4. \tag{24}$$

Moreover,

$$V^{(2n+1)^{-1}}(z) = \begin{bmatrix} \widehat{\delta}^{(2n+1)^*}(\bar{z}) & -\widehat{\beta}^{(2n+1)*}(\bar{z}) \\ -\widehat{\gamma}^{(2n+1)^*}(\bar{z}) & \widehat{\alpha}^{(2n+1)^*}(\bar{z}) \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Proof. The proof of (24) readily follows from the equality

$$J_q - V_r^{(2n+1)}(x) J_q V_r^{(2n+1)^*}(x) = 0$$

for real x, [19, Equality (8)] and the identity theorem of analytic functions [24, Theorem III.3.2]. Equality (24) appears in [19, Equality (16)]. To prove (25), one uses Equality (24) for $r = 4$ and the equality [19, Equation (10)]

$$V^{(2n+1)}(z) = \begin{bmatrix} I_q & 0_q \\ 0_q & (z-a)^{-1} I_q \end{bmatrix} V_4^{(2n+1)}(z) \begin{bmatrix} I_q & 0_q \\ 0_q & (z-a) I_q \end{bmatrix}, \tag{26}$$

which is valid for $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$. Finally, because point $z = a$ is a removable discontinuity for the inverse matrix of the right-hand side of (26), we obtain (25).

Definition 4. *[1, Proposition 6.10] Let $(s_k)_{k=0}^{2n+1}$ be a Hausdorff positive definite sequence on $[a, b]$. Let $H_{r,n}$, $u_{r,n}$, for $r = 3, 4$, R_n and v_n be defined as in (2), (11), (12), (7) and (9), respectively.*

The entries of the $2q \times 2q$ matrix polynomial $U^{(2n+1)}(z)$ as in (4) are defined by

$$\alpha^{(2n+1)}(z) := I_q - (z-a) u_{3,n}^* R_n^*(\bar{z}) H_{3,n}^{-1} R_n(a) v_n, \tag{27}$$

$$\beta^{(2n+1)}(z) := u_{4,n}^* R_n^*(\bar{z}) H_{4,n}^{-1} R_n(a) u_{4,n}, \tag{28}$$

$$\gamma^{(2n+1)}(z) := -(b-z)(z-a) v_n^* R_n^*(\bar{z}) H_{3,n}^{-1} R_n(a) v_n, \tag{29}$$

$$\delta^{(2n+1)}(z) := I_q + (z-a) v_n^* R_n^*(\bar{z}) H_{4,n}^{-1} R_n(a) u_{4,n}. \tag{30}$$

The matrix (4) is called the second resolvent matrix of the THMM problem in the case of an even number of moments.

3. Explicit relation between two resolvent matrices

In this section, we prove the explicit relation (6) between the resolvent matrix $V^{(2n+1)}$ presented in [19] and the resolvent matrix $U^{(2n+1)}$ given in [1].

The next Remark can be proved by using (25).

Remark 1. *Let the matrices $\widehat{\alpha}^{(2n+1)}$, $\widehat{\beta}^{(2n+1)}$, $\widehat{\gamma}^{(2n+1)}$ and $\widehat{\delta}^{(2n+1)}$ be as in (17)–(20) Furthermore, let*

$$\mathfrak{J}_q := \begin{bmatrix} 0_q & I_q \\ I_q & 0_q \end{bmatrix}, \tag{31}$$

and the matrix $V^{(2n+1)}$ be as in (5). Thus, the following equality is valid:

$$\mathfrak{J}_q V^{(2n+1)^{-1}}(z) \mathfrak{J}_q = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}^{(2n+1)^*}(\bar{z}) & -\widehat{\gamma}^{(2n+1)^*}(\bar{z}) \\ -\widehat{\beta}^{(2n+1)^*}(\bar{z}) & \widehat{\delta}^{(2n+1)^*}(\bar{z}) \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Now we state and prove the main result of this work.

Theorem 1. *Let $(s_k)_{k=0}^{2n+1}$ be a Hausdorff positive definite sequence on $[a,b]$. Let $\widetilde{H}_{1,n}$, $H_{r,n}$, $u_{r,n}$, for $r=3,4$, R_n, v_n, and $\mathfrak{J}_q$ be defined as in (1), (2), (11), (12), (7), (9) and (31), respectively. Furthermore, let $\widetilde{H}_{1,n}$ be an invertible matrix. Moreover, let $U^{(2n+1)}$ and $V^{(2n+1)}$ be the resolvent matrices as in (4) and (5), respectively. In addition, let*

$$\mathfrak{D}^{(2n+1)} := \begin{bmatrix} I_q + au_n^* \widetilde{H}_{1,n}^{-1} R_n(a) v_n & 0_q \\ 0_q & I_q - av_n^* H_{4,n}^{-1} R_n(a) u_{4,n} \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Thus, the following equality holds

$$U^{(2n+1)}(z) = \mathfrak{J}_q V^{(2n+1)}(z) \mathfrak{J}_q \mathfrak{D}^{(2n+1)}. \tag{34}$$

The proof of this theorem is provided in the Appendix section.

In the following lemma, to obtain a relation of the form

$$V^{(2n+1)}(z) = AU^{(2n+1)}(z)B, \tag{35}$$

we calculate the inverse of the matrix $\mathfrak{D}^{(2n+1)}$ as in (33).

Lemma 3. *Let $\widetilde{H}_{1,n}$, $H_{4,n}$, T_n, R_n, v_n, u_n and $u_{4,n}$ be as in (1), (2), (8), (7), (10) and (12), respectively. Moreover, let $\widetilde{H}_{1,n}$ be an invertible matrix. Furthermore, let $\mathfrak{D}^{(2n+1)}$ be as in (33). Thus, the following equality holds:*

$$\mathfrak{D}^{(2n+1)^{-1}} = \begin{pmatrix} I_q - au_{4,n}^* R_n^*(a) H_{4,n}^{-1} v_n & 0_q \\ 0_q & I_q + av_n^* R_n^*(a) \widetilde{H}_{1,n}^{-1} u_n \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Proof. *Let $\eta_n := I_q + au_n^* \widetilde{H}_{1,n}^{-1} R_n(a) v_n$, $\kappa_n := I_q - av_n^* H_{4,n}^{-1} R_n(a) u_{4,n}$, $\nu_n := I_q - au_{4,n}^* R_n^*(a) H_{4,n}^{-1} v_n$ and $\tau_n := I_q + av_n^* R_n^*(a) \widetilde{H}_{1,n}^{-1} u_n$. Thus, Equality (36) is equivalent to the following two equalities:*

$$\eta_n \nu_n = I_q, \tag{37}$$

$$\kappa_n \tau_n = I_q. \tag{38}$$

We prove (37). Using (12), we have

$$\begin{aligned} \eta_n \nu_n &= (I_q + au_n^* \widetilde{H}_{1,n}^{-1} R_n(a) v_n)(I_q - au_{4,n}^* R_n^*(a) H_{4,n}^{-1} v_n) \\ &= I_q + au_n^* \widetilde{H}_{1,n}^{-1} R_n(a)[-(I_q - aT_n)\widetilde{H}_{1,n} + H_{4,n} - av_n u_n^*] H_{4,n}^{-1} v_n \\ &= I_q + au_n^* \widetilde{H}_{1,n}^{-1} R_n(a)[-\widetilde{H}_{1,n} + H_{4,n} + aH_{1,n}] H_{4,n}^{-1} v_n \\ &= I_q. \end{aligned}$$

In the third equality, we used (15). The last equality follows from the second equality of (2). In a similar manner, Equality (38) can be proved using the Equalities (12), (15) and (2). Thus, Equality (36) is valid.

In the next corollary of Theorem 1, the relation (35) is proven.

Corollary 1. *Let $\widetilde{H}_{1,n}$, $H_{4,n}$, T_n, R_n, v_n, u_n and $u_{4,n}$ be as in (1), (2), (8), (7), (10) and (12), respectively. Furthermore, let $\mathfrak{D}^{(2n+1)}$ be as in (33), and let $\widetilde{H}_{1,n}$ be an invertible matrix. Moreover, let $V^{(2n+1)}$ and $U^{(2n+1)}$ be as in (5) and (4). Thus, the following equality is valid:*

$$V^{(2n+1)}(z) = \mathfrak{J}_q U^{(2n+1)}(z) {\mathfrak{D}^{(2n+1)}}^{-1} \mathfrak{J}_q. \tag{39}$$

Proof. *The proof of Equality (39) readily follows from (34), equality $\mathfrak{J}_q^{-1} = \mathfrak{J}_q$ and (36).*

4. Auxiliary identities

In this section, we consider auxiliary identities that we will use in the main theorem of this work.

Lemma 4. *Let T_n, R_n, v_n, $H_{1,n}$, $\widetilde{H}_{1,n}$, $H_{3,n}$, $H_{4,n}$, u_n, $u_{3,n}$ and $u_{4,n}$ be as in (8), (7), (9), (1), (2) (10), (11) and (12), respectively. Moreover, let $z \in \mathbb{C}$. Thus, the following equalities are valid.*

$$(b-a)I_{(n+1)q} = b{R_n^*}^{-1}(a) - a{R_n^*}^{-1}(b), \tag{40}$$

$$-R_n^{-1}(a)H_{3,n}{R_n^*}^{-1}(\bar{z}) + R_n^{-1}(z)H_{3,n}{R_n^*}^{-1}(a) = (z-a)(H_{3,n}T_n^* - T_nH_{3,n}), \tag{41}$$

$$R_n^{-1}(z)\widetilde{H}_{1,n}{R_n^*}^{-1}(a) + zv_nu_{4,n}^* - H_{4,n}{R_n^*}^{-1}(\bar{z}) - (z-a)u_nv_n^* = 0_q, \tag{42}$$

$$(z-a)(v_nu_{3,n}^* - u_{3,n}v_n^*) - R_n^{-1}(a)H_{3,n}{R_n^*}^{-1}(\bar{z}) + R_n^{-1}(z)H_{3,n}{R_n^*}^{-1}(a) = 0_q, \tag{43}$$

$$(z-a)v_nu_{3,n}^* + (z-b)u_{4,n}v_n^* - R_n^{-1}(a)H_{3,n}{R_n^*}^{-1}(\bar{z}) - R_n^{-1}(z)H_{4,n}{R_n^*}^{-1}(b) = 0_q. \tag{44}$$

Proof. *The proof of the identities (40) and (41) readily follows from (7), (8) and (2). To verify Equality (42), we use (7), (12), (15) and (2) to obtain:*

$$\begin{aligned}
&R_n^{-1}(z)\widetilde{H}_{1,n}{R_n^*}^{-1}(a) + zv_nu_{4,n}^* - H_{4,n}{R_n^*}^{-1}(\bar{z}) - (z-a)u_nv_n^* \\
&= (I_{(n+1)q} - zT_n)\widetilde{H}_{1,n}(I_{(n+1)q} - aT_n^*) + z(T_n\widetilde{H}_{1,n} - H_{1,n})(I_{(n+1)q} - aT_n^*) \\
&\quad - (-aH_{1,n} + \widetilde{H}_{1,n})(I_{(n+1)q} - zT_n^*) - (z-a)(\widetilde{H}_{1,n}T_n^* - H_{1,n}) \\
&= \widetilde{H}_{1,n} - a\widetilde{H}_{1,n}T_n^* - zT_n\widetilde{H}_{1,n} + azT_n\widetilde{H}_{1,n}T_n^* + zT_n\widetilde{H}_{1,n} - zH_{1,n} \\
&\quad - azT_n\widetilde{H}_{1,n}T_n^* + azH_{1,n}T_n^* + aH_{1,n} - \widetilde{H}_{1,n} - azH_{1,n}T_n^* + z\widetilde{H}_{1,n}T_n^* \\
&\quad - z\widetilde{H}_{1,n}T_n^* + zH_{1,n} + a\widetilde{H}_{1,n}T_n^* - aH_{1,n} \\
&= 0_q.
\end{aligned}$$

Equality (43) follows from (16) for $r = 3$ and (41).

We now we prove (44). We use (7), the identities (40) and (15):

$$
\begin{aligned}
&- R_n^{-1}(a)H_{3,n}R_n^{*^{-1}}(\bar{z}) - R_n^{-1}(z)H_{4,n}R_n^{*^{-1}}(b)\\
&= -(I_{(n+1)q} - aT_n)H_{3,n}(I_{(n+1)q} - zT_n^*) - (I_{(n+1)q} - zT_n)H_{4,n}(I_{(n+1)q} - bT_n^*)\\
&= -bH_{1,n} + bzH_{1,n}T_n^* + \widetilde{H}_{1,n} - z\widetilde{H}_{1,n}T_n^* + abT_nH_{1,n} - abzT_nH_{1,n}T_n^*\\
&\quad - aT_n\widetilde{H}_{1,n} + azT_n\widetilde{H}_{1,n}T_n^* + aH_{1,n} - abH_{1,n}T_n^* - \widetilde{H}_{1,n} + b\widetilde{H}_{1,n}T_n^*\\
&\quad - azT_nH_{1,n} + abzT_nH_{1,n}T_n^* + zT_n\widetilde{H}_{1,n} - bzT_n\widetilde{H}_{1,n}T_n^*\\
&= -a(T_n\widetilde{H}_{1,n} - H_{1,n}) - bz(T_n\widetilde{H}_{1,n} - H_{1,n})T_n^* + z(T_n\widetilde{H}_{1,n} - H_{1,n})\\
&\quad + ab(T_n\widetilde{H}_{1,n} - H_{1,n})T_n^* + b(\widetilde{H}_{1,n}T_n^* - H_{1,n}) - abT_n(\widetilde{H}_{1,n}T_n^* - H_{1,n})\\
&\quad + azT_n(\widetilde{H}_{1,n}T_n^* - H_{1,n}) - z(\widetilde{H}_{1,n}T_n^* - H_{1,n})\\
&= -av_nu_n^* - bzv_nu_n^*T_n^* + zv_nu_n^* + abv_nu_n^*T_n^*\\
&\quad + bu_nv_n^* - abT_nu_nv_n^* + azT_nu_nv_n^* - zu_nv_n^*\\
&= -(z-a)v_nu_n^*(-I_{(n+1)q} + bT_n^*) - (z-b)(I_{(n+1)q} - aT_n)u_nv_n^*\\
&= -(z-a)v_nu_{3,n}^* - (z-b)u_{4,n}v_n^*.
\end{aligned}
$$

In the last equality, we used (7), (11) and (12).

Lemma 5. *Let the conditions of Lemma 4 be satisfied. Thus, the following identities are satisfied:*

$$
\begin{aligned}
&zR_n^{-1}(a)H_{3,n}R_n^{*^{-1}}(\bar{z}) - z(z-a)v_nu_{3,n}^* + (b-z)(z-a)u_nv_n^*\\
&= R_n^{-1}(z)((az + bz - ab)\widetilde{H}_{1,n}T_n^* - z\widetilde{H}_{1,n} + abH_{1,n}R_n^{*^{-1}}(\bar{z}),
\end{aligned}
\tag{45}
$$

$$
\begin{aligned}
&(z-a)(z-b)H_{4,n}T_n^* - (z-a)(z-b)T_nH_{4,n}\\
&\quad + (z-b)R_n^{-1}(a)H_{4,n}R_n^{*^{-1}}(\bar{z}) - (z-a)R_n^{-1}(z)H_{4,n}R_n^{*^{-1}}(b)\\
&= -(b-a)R_n^{-1}(z)H_{4,n}R_n^*(\bar{z}),
\end{aligned}
\tag{46}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_n^{*^{-1}}(\bar{z}) + \frac{(z-b)}{(b-a)}R_n^{*^{-1}}(a) + b\frac{(z-a)}{(b-a)}R_n^{*^{-1}}(b)H_{3,n}^{-1}v_nu_n^*\\
&= -\frac{(z-a)}{(b-a)}R_n^{*^{-1}}(b)H_{3,n}^{-1}R_n^{-1}(b)\widetilde{H}_{1,n}.
\end{aligned}
\tag{47}
$$

P r o o f. To prove (45), we use (2), (7) and (15):

$$
\begin{aligned}
& zR_n^{-1}(a)H_{3,n}R_n^{*^{-1}}(\bar{z}) - z(z-a)v_n u_{3,n}^* + (b-z)(z-a)u_n v_n^* \\
&= z(I_{(n+1)q} - aT_n)H_{3,n}(I_{(n+1)q} - zT_n^*) - z(z-a)v_n u_{3,n}^* + (b-z)(z-a)u_n v_n^* \\
&= zH_{3,n} - z^2 H_{3,n}T_n^* - azT_nH_{3,n} + az^2T_nH_{3,n}T_n^* - azT_n\widetilde{H}_{1,n} + azH_{1,n} \\
&\quad + abzT_n\widetilde{H}_{1,n}T_n^* - abzH_{1,n}T_n^* + z^2T_n\widetilde{H}_{1,n} - z^2H_{1,n} - z^2bT_n\widetilde{H}_{1,n}T_n^* \\
&\quad + bz^2H_{1,n}T_n^* + bz\widetilde{H}_{1,n}T_n^* - bzH_{1,n} - ab\widetilde{H}_{1,n}T_n^* + abH_{1,n} - z^2\widetilde{H}_{1,n}T_n^* \\
&\quad + z^2H_{1,n} + az\widetilde{H}_{1,n}T_n^* - azH_{1,n} \\
&= zbH_{1,n} - z\widetilde{H}_{1,n} - bz^2H_{1,n}T_n^* + z^2\widetilde{H}_{1,n}T_n^* - azbT_nH_{1,n} + azT_n\widetilde{H}_{1,n} \\
&\quad + abz^2T_nH_{1,n}T_n^* - az^2T_n\widetilde{H}_{1,n}T_n^* - azT_n\widetilde{H}_{1,n} - ab(I_{(n+1)q} - zT_n)\widetilde{H}_{1,n}T_n^* \\
&\quad - abzH_{1,n}T_n^* + z^2T_n\widetilde{H}_{1,n} + bz^2H_{1,n}T_n^* + bz(I_{(n+1)q} - zT_n)\widetilde{H}_{1,n}T_n^* - bzH_{1,n} \\
&\quad + abH_{1,n} - z^2\widetilde{H}_{1,n}T_n^* + az\widetilde{H}_{1,n}T_n^* \\
&= ab(I_{(n+1)q} - zT_n)H_{1,n} - abz(I_{(n+1)q} - zT_n)H_{1,n}T_n^* - ab(I_{(n+1)q} - zT_n)\widetilde{H}_{1,n}T_n^* \\
&\quad + bz(I_{(n+1)q} - zT_n)\widetilde{H}_{1,n}T_n^* - z(I_{(n+1)q} - zT_n)\widetilde{H}_{1,n} + az(I_{(n+1)q} - zT_n)\widetilde{H}_{1,n}T_n^* \\
&= (I_{(n+1)q} - zT_n)((az + bz - ab)\widetilde{H}_{1,n}T_n^* - z\widetilde{H}_{1,n} + abH_{1,n}(I_{(n+1)q} - zT_n^*)) \\
&= R_n^{-1}(z)((az + bz - ab)\widetilde{H}_{1,n}T_n^* - z\widetilde{H}_{1,n} + abH_{1,n}R_n^{*^{-1}}(\bar{z}).
\end{aligned}
$$

In the second equality, we used the first equality of (2). The last equality follows from (7).

Now we prove Equality (46). We use (7) and obtain

$$
\begin{aligned}
& (z-a)(z-b)H_{4,n}T_n^* - (z-a)(z-b)T_nH_{4,n} + (z-b)R_n^{-1}(a)H_{4,n}R_n^{*^{-1}}(\bar{z}) \\
&\quad - (z-a)R_n^{-1}(z)H_{4,n}R_n^{*^{-1}}(b) \\
&= z^2H_{4,n}T_n^* - bzH_{4,n}T_n^* - azH_{4,n}T_n^* + abH_{4,n}T_n^* - z^2T_nH_{4,n} + bzT_nH_{4,n} \\
&\quad + azT_nH_{4,n} - abT_nH_{4,n} + zH_{4,n} - z^2H_{4,n}T_n^* - azT_nH_{4,n} + az^2T_nH_{4,n}T_n^* \\
&\quad - bH_{4,n} + bzH_{4,n}T_n^* + abT_nH_{4,n} - azbT_nH_{4,n}T_n^* - zH_{4,n} + bzH_{4,n}T_n^* \\
&\quad + z^2T_nH_{4,n} - bz^2T_nH_{4,n}T_n^* + aH_{4,n} - abH_{4,n}T_n^* - azT_nH_{4,n} + abzT_nH_{4,n}T_n^* \\
&= (b-a)zT_nH_{4,n} + (b-a)zH_{4,n}T_n^* - (b-a)z^2T_nH_{4,n}T_n^* - (b-a)H_{4,n} \\
&= (b-a)(-(I_{(n+1)q} - zT_n)H_{4,n} + z(I_{(n+1)q} - zT_n)H_{4,n}T_n^*) \\
&= -(b-a)(I_{(n+1)q} - zT_n)H_{4,n}(I_{(n+1)q} - zT_n^*) \\
&= -(b-a)R_n^{-1}(z)H_{4,n}R_n^*(\bar{z}).
\end{aligned}
$$

In the last equality, we used (7).

Finally, we prove the identity of (47). We perform the left–hand side of (47).

We use the Equalities (7) and (15) and obtain

$$\begin{aligned}
&R_n^{*^{-1}}(\bar{z}) + \frac{(z-b)}{(b-a)}R_n^{*^{-1}}(a) + b\frac{(z-a)}{(b-a)}R_n^{*^{-1}}(b)H_{3,n}^{-1}v_n u_n^*\\
&= \frac{(z-a)}{(b-a)}[I_{(n+1)q} - bT_n^* + (I_{(n+1)q} - bT_n^*)bH_{3,n}^{-1}v_n u_n^*]\\
&= \frac{(z-a)}{(b-a)}R_n^{*^{-1}}(b)H_{3,n}^{-1}[H_{3,n} + bv_n u_n^*]\\
&= \frac{(z-a)}{(b-a)}R_n^{*^{-1}}(b)H_{3,n}^{-1}[H_{3,n} + b(T_n\widetilde{H}_{1,n} - H_{1,n})]\\
&= -\frac{(z-a)}{(b-a)}R_n^{*^{-1}}(b)H_{3,n}^{-1}R_n^{-1}(b)\widetilde{H}_{1,n}.
\end{aligned}$$

We now give the proof of Theorem 1.

Proof of Theorem 1

Proof. *Since $\mathfrak{J}_q^{-1} = \mathfrak{J}_q$ and the inverse of the matrix $V^{(2n+1)}(z)$ is well defined, we prove the equality*

$$(\mathfrak{J}_q V^{(2n+1)}(z)\mathfrak{J}_q)^{-1}U^{(2n+1)}(z) = \mathfrak{D}^{(2n+1)}, \tag{48}$$

which is equivalent to (34). Using the equality $\mathfrak{J}_q^{-1} = \mathfrak{J}_q$, Equality (32) and the representation (4), we denote the left-hand side of (48) as follows:

$$\begin{pmatrix} W_{11;n} & W_{12;n}\\ W_{21;n} & W_{22;n}\end{pmatrix} := (\mathfrak{J}_q V^{(2n+1)}(z)\mathfrak{J}_q)^{-1}U^{(2n+1)}(z), \tag{49}$$

where

$$W_{11;n} := \widehat{\alpha}^{(2n+1)^*}(\bar{z})\alpha^{(2n+1)}(z) - \widehat{\gamma}^{(2n+1)^*}(\bar{z})\gamma^{(2n+1)}(z), \tag{50}$$
$$W_{12;n} := \widehat{\alpha}^{(2n+1)^*}(\bar{z})\beta^{(2n+1)}(z) - \widehat{\gamma}^{(2n+1)^*}(\bar{z})\delta^{(2n+1)}(z), \tag{51}$$
$$W_{21;n} := -\widehat{\beta}^{(2n+1)^*}(\bar{z})\alpha^{(2n+1)}(z) + \widehat{\delta}^{(2n+1)^*}(\bar{z})\gamma^{(2n+1)}(z), \tag{52}$$
$$W_{22;n} := -\widehat{\beta}^{(2n+1)^*}(\bar{z})\beta^{(2n+1)}(z) + \widehat{\delta}^{(2n+1)^*}(\bar{z})\delta^{(2n+1)}(z). \tag{53}$$

We now perform the expression (50)–(53). For the expression (50), by using (17), *(27), (18) and (29), we have*

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\alpha}^{(2n+1)^*}(\bar{z})\alpha^{(2n+1)}(z) - \widehat{\gamma}^{(2n+1)^*}(\bar{z})\gamma^{(2n+1)}(z)\\
&= I_q - (z-a)u_{3,n}^* R_n^*(\bar{z}) H_{3,n}^{-1} R_n(a) v_n + z u_n^* \widetilde{H}_{1,n}^{-1} R_n(z) v_n\\
&\quad - z(z-a) u_n^* \widetilde{H}_{1,n}^{-1} R_n(z) v_n u_{3,n}^* R_n^*(\bar{z}) H_{3,n}^{-1} R_n(a) v_n\\
&\quad + (b-z)(z-a) u_n^* \widetilde{H}_{1,n}^{-1} R_n(z) u_n v_n^* R_n^*(\bar{z}) H_{3,n}^{-1} R_n(a) v_n\\
&= I_q + z u_n^* R_n^*(\bar{z}) H_{3,n}^{-1} R_n(a) v_n - bz u_n^* T_n^* R_n^*(\bar{z}) H_{3,n}^{-1} R_n(a) v_n\\
&\quad - a u_n^* R_n^*(\bar{z}) H_{3,n}^{-1} R_n(a) v_n + ab u_n^* T_n^* R_n^*(\bar{z}) H_{3,n}^{-1} R_n(a) v_n\\
&\quad + az u_n^* T_n^* R_n^*(\bar{z}) H_{3,n}^{-1} R_n(a) v_n + bz u_n^* T_n^* R_n^*(\bar{z}) H_{3,n}^{-1} R_n(a) v_n\\
&\quad - ab u_n^* T_n^* R_n^*(\bar{z}) H_{3,n}^{-1} R_n(a) v_n - z u_n^* R_n^*(\bar{z}) H_{3,n}^{-1} R_n(a) v_n\\
&\quad + ab u_n^* \widetilde{H}_{1,n}^{-1} H_{1,n} H_{3,n}^{-1} R_n(a) v_n\\
&= I_q - a u_n^* (I_{(n+1)q} - z T_n^*) R_n^*(\bar{z}) H_{3,n}^{-1} R_n(a) v_n + ab u_n^* \widetilde{H}_{1,n}^{-1} H_{1,n} H_{3,n}^{-1} R_n(a) v_n\\
&= I_q + a u_n^* \widetilde{H}_{1,n}^{-1} [-\widetilde{H}_{1,n} + b H_{1,n}] H_{3,n}^{-1} R_n(a) v_n\\
&= I_q + a u_n^* \widetilde{H}_{1,n}^{-1} R_n(a) v_n.
\end{aligned}
$$

In the second equality, we used (11) and (15). In the fourth equality, we used the first equality of (2). Thus, Equality (48) is proved for the (1,1) block matrix.

Let us now prove Equality (48) for the (1,2) block matrix. Using (51), (17), (18), (28), (30) and the identity (14), we have

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\alpha}^{(2n+1)^*}(\bar{z})\beta^{(2n+1)}(z) - \widehat{\gamma}^{(2n+1)^*}(\bar{z})\delta^{(2n+1)}(z)\\
&= u_{4,n}^* R_n^*(\bar{z}) H_{4,n}^{-1} R_n(a) u_{4,n} + z u_n^* \widetilde{H}_{1,n}^{-1} R_n(z) v_n u_{4,n}^* R_n^*(\bar{z}) H_{4,n}^{-1} R_n(a) u_{4,n}\\
&\quad - u_n^* \widetilde{H}_{1,n}^{-1} R_n(z) u_n - (z-a) u_n^* \widetilde{H}_{1,n}^{-1} R_n(z) u_n v_n^* R_n^*(\bar{z}) H_{4,n}^{-1} R_n(a) u_{4,n}\\
&= u_n^* \widetilde{H}_{1,n}^{-1} R_n(z) [R_n^{-1}(z) \widetilde{H}_{1,n} R_n^{*^{-1}}(a) + z v_n u_{4,n}^* - H_{4,n} R_n^{*^{-1}}(\bar{z})\\
&\quad - (z-a) u_n v_n^*] R_n^*(\bar{z}) H_{4,n}^{-1} u_n\\
&= 0_q.
\end{aligned}
$$

In the last equality, we used (42). Thus, Equality (48) for the (1,2) block matrix is proved.

We now prove the Equality (48) for the (2,1) block matrix. Using (52), (19), *(20), (27) and (29), we obtain*

$$
\begin{aligned}
&-\widehat{\beta}^{(2n+1)^*}(\bar z)\alpha^{(2n+1)}(z)+\widehat{\delta}^{(2n+1)^*}(\bar z)\gamma^{(2n+1)}(z)\\
&=(z-b)\frac{(z-a)}{(b-a)}v_n^*[-(aH_{4,n}^{-1}+bH_{3,n}^{-1})R_n(z)R_n^{-1}(a)H_{3,n}R_n^{*^{-1}}(\bar z)\\
&\quad+(z-a)(aH_{4,n}^{-1}+bH_{3,n}^{-1})R_n(z)v_nu_{3,n}^*+(b-a)I_q+(a(z-b)H_{4,n}^{-1}R_n^{-1}(a)\\
&\quad+b(z-a)H_{3,n}^{-1}R_n^{-1}(b))R_n(z)u_nv_n^*]R_n^*(\bar z)H_{3,n}^{-1}R_n(a)v_n\\
&=(z-b)\frac{(z-a)}{(b-a)}v_n^*\{aH_{4,n}^{-1}R_n(z)[-R_n^{-1}(a)H_{3,n}R_n^{*^{-1}}(\bar z)+(z-a)v_nu_{3,n}^*\\
&\quad+(z-a)v_nu_{3,n}^*+(z-b)R_n^{-1}(a)u_nv_n^*-R_n^{-1}(z)H_{4,n}R_n^{*^{-1}}(b)]+bH_{3,n}^{-1}R_n(z)\\
&\quad\cdot[-R_n^{-1}(a)H_{3,n}R_n^{*^{-1}}(\bar z)+(z-a)R_n^{-1}(b)u_nv_n^*+R_n^{-1}(z)H_{3,n}R_n^{*^{-1}}(a)]\}\\
&\quad\cdot R_n^*(\bar z)H_{3,n}^{-1}R_n(a)v_n\\
&=0_q.
\end{aligned}
$$

In the last equality, we employed Equality (44). Thus, Equality (48) for the (2,1) matrix–block is proved.

We now prove the Equality (48) for the (2,2) block matrix. Using (19), (20), (28) and (30), we have

$$
\begin{aligned}
&-\widehat{\beta}^{(2n+1)^*}(\bar z)\beta^{(2n+1)}(z)+\widehat{\delta}^{(2n+1)^*}(\bar z)\delta^{(2n+1)}(z)\\
&=I_q+\frac{(z-a)}{(b-a)}v_n^*[-(z-b)(aH_{4,n}^{-1}+bH_{3,n}^{-1})R_n(z)v_nu_{4,n}^*+(b-a)I_q\\
&\quad+(a\frac{(z-b)}{(z-a)}H_{4,n}^{-1}R_n^{-1}(a)+bH_{3,n}^{-1}R_n^{-1}(b))R_n(z)H_{4,n}R_n^{*^{-1}}(\bar z)\\
&\quad+(a(z-b)H_{4,n}^{-1}R_n^{-1}(a)+b(z-a)H_{3,n}^{-1}R_n^{-1}(b))R_n(z)u_nv_n^*]R_n^*(\bar z)H_{4,n}^{-1}\\
&\quad\cdot R_n(a)u_{4,n}\\
&=I_q+\frac{(z-a)}{(b-a)}v_n^*\{a(z-b)H_{4,n}^{-1}R_n(z)[H_{4,n}T_n^*-T_nH_{4,n}\\
&\quad+\frac{1}{(z-a)}R_n^{-1}(a)H_{4,n}R_n^{*^{-1}}(\bar z)-\frac{1}{(z-b)}R_n^{-1}(z)H_{4,n}R_n^{*^{-1}}(b)]\\
&\quad+bH_{3,n}^{-1}R_n(z)[-(z-b)v_nu_{4,n}^*+R_n^{-1}(b)H_{4,n}R_n^{*^{-1}}(\bar z)-(z-a)u_{3,n}v_n^*\\
&\quad+R_n^{-1}(z)H_{3,n}R_n^{*^{-1}}(a)]\}R_n^*(\bar z)H_{4,n}^{-1}R_n(a)u_{4,n}\\
&=I_q+\frac{a}{(b-a)}v_n^*H_{4,n}^{-1}R_n(z)[-(b-a)(I_{(n+1)q}-zT_n)H_{4,n}(I_{(n+1)q}-zT_n^*)]R_n^*(\bar z)\\
&\quad\cdot H_{4,n}^{-1}R_n(a)u_{4,n}\\
&=I_q-av_n^*H_{4,n}^{-1}R_n(a)u_{4,n}.
\end{aligned}
$$

In the second equality, we used (11), (12), (16) for $r=3$, (40), and (42). In the third equality, we use Equality (47).

Thus, Equality (48) for the block matrix (2,2) is proved. Consequently, having proven Equality (48), we have proved Equality (34).

REFERENCES

1. A. E. Choque Rivero, Y. M. Dyukarev, B. Fritzsche and B. Kirstein, A truncated matricial moment problem on a finite interval, Interpolation, Schur Functions and Moment Problems. Oper. Theory: Adv. Appl. – 2006. – 165. – P. 121–173. DOI: 10.1007/3-7643-7547-7_4.

2. A. E. Choque Rivero, Y. M. Dyukarev, B. Fritzsche and B. Kirstein, A truncated matricial moment problem on a finite interval. The case of an odd number of prescribed moments, Interpolation, Schur Functions and Moment Problems. Oper. Theory: Adv. Appl. – 2007. – 176. – P. 99–174. DOI: 10.1007/978-3-7643-8137-0_2.

3. A. E. Choque Rivero, V. I. Korobov and G. M. Sklyar, The admissible control problem from the moment problem point of view, Appl. Math. Lett. – 2010. – 23(1). – P. 58–63. DOI: 10.1016/j.aml.2009.06.030.

4. A. E. Choque Rivero and Yu. Karlovich, The time optimal control as an interpolation problem, Commun. Math. Anal. – 2011. – 3. – P. 1–11.

5. A. E. Choque Rivero, Multiplicative structure of the resolvent matrix for the truncated Hausdorff matrix moment problem, Operator Theory: Advances and Applications. – 2012. – 226. – P. 193–210. DOI: 10.1007/978-3-0348-0428-8_4.

6. A. E. Choque Rivero, Decompositions of the Blaschke-Potapov factors of the truncated Hausdorff matrix moment problem. The case of even number of moments, Commun. Math. Anal. – 2014. – 17(2). – P. 82–97.

7. A. E. Choque Rivero, On Dyukarev's resolvent matrix for a truncated Stieltjes matrix moment problem under the view of orthogonal matrix polynomials, Linear Algebra Appl. – 2015. – 474. – P. 44–109. DOI: 10.1016/j.laa.2015.01.027.

8. A. E. Choque Rivero, From the Potapov to the Krein-Nudel'man representation of the resolvent matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem, Bol. Soc. Mat. Mexicana. – 2015. – 21(2). – P. 233–259. DOI: 10.1007/s40590-015-0060-z.

9. A. E. Choque Rivero, Dyukarev-Stieljtes parameters of the truncated Hausdorff matrix moment problem, Boletin Soc. Mat. Mexicana. – 2017. – 23(2). – P. 891–918. DOI: 10.1007/s40590-015-0083-5.

10. A. E. Choque Rivero, On the solution set of the admissible bounded control problem via orthogonal polynomials, IEEE Trans. Autom. Control. – 2017. – 62(10). – P. 5213–5219. DOI: 10.1109/TAC.2016.2633820.

11. A. E. Choque Rivero, Relations between the orthogonal matrix polynomials on $[a,b]$, Dyukarev-Stieltjes parameters, and Schur complements, Spec. Matrices. – 2017. – 5. – P. 303–318. DOI: 10.1515/spma-2017-0023.

12. A. E. Choque Rivero, A multiplicative representation of the resolvent matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem via new Dyukarev-Stieltjes parameters, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics – 2017. – 85. – P. 16–42. DOI: 10.26565/2221-5646-2017-85-02.

13. A. E. Choque Rivero, Three-term recurrence relation coefficients and continued fractions related to orthogonal matrix polynomials on the finite interval $[a,b]$, Linear and Multilinear Algebra, 2020. – P. 1–20. DOI: 10.1080/03081087.2020.1747967.

14. A. E. Choque Rivero, S. M. Zagorodnyuk, An algorithm for the truncated matrix Hausdorff moment problem, Commun. Math. Anal. – 2014. – 17(2). – P. 108–130.

15. A. Dubovoj, B. Fritzsche and B. Kirstein, Matricial Version of the Classical Schur Problem, Teubner-Texte Math. (Teubner Texts in Mathematics), vol. 129, Teubner Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart, 1992.

16. Yu. M. Dyukarev, Indeterminacy criteria for the Stieltjes matrix moment problem, Math. Notes. – 2004. – 75(1-2). – P. 66–82. DOI: 10.1023/B:MATN.0000015022.02925.bd.

17. Yu. M. Dyukarev, Indeterminacy of interpolation problems in the Stieltjes class, Mat. Sb. – 2005. – 196(3). – P. 61–88. DOI: 10.1070/SM2005v196n03ABEH000884.

18. Yu. M. Dyukarev, A Generalized Stieltjes Criterion for the Complete Indeterminacy of Interpolation Problems, Math. Notes. – 2008. – 84(1). – P. 23–39. DOI: 10.1134/S000143460807002X.

19. Yu. M. Dyukarev and A. E. Choque Rivero, Power moment problem on compact intervals, Mat. Notes – 2001. – 69(1-2). – P. 175–187. DOI: 10.1023/A:1002868117970.

20. Yu. M. Dyukarev and A. E. Choque Rivero, A matrix version of one Hamburger theorem, Mat. Sb. – 2012. – 91(4). – P. 522–529. DOI: 10.1134/S0001434612030236.

21. B. Fritzsche, B. Kirstein and C. Mädler, On Hankel nonegative definite sequences, the canonical Hankel parametrization, and orthogonal matrix polynomials, Compl. Anal. Oper. Theory. – 2011. – 5(2). – P. 447–511. DOI: 10.1007/s11785-010-0054-9.

22. B. Fritzsche, B. Kirstein and C. Mädler, A Schur–Nevanlinna type algorithm for the truncated matricial Hausdorff moment problem, Compl. Anal. Oper. Theory. – 2021. – 15(25). – P. 1–129. DOI: 10.1007/s11785-020-01051-w.

23. I. V. Kovalishina, Analytic theory of a class of interpolation problems, Izv. Math. – 1983. – 47(3). – P. 455–497. DOI: 10.1070/IM1984v022n03ABEH001452.

24. E. Freitag and R. Busam. Complex analysis. 2005. Springer–Verlag.

25. H. Thiele. Beiträge zu matriziellen Potenzmomentenproblemen, PhD Thesis. Leipzig University, 2006. In German.

26. S. M. Zagorodnyuk, The truncated matrix Hausdorff moment problem, Methods Appl. Anal. – 2012. – 19(1). – P. 021–042. DOI: 10.4310/MAA.2012.v19.n1.a2.

Article history: Received: 27 January 2022; Final form: 5 July 2022
Accepted: 7 July 2022.

How to cite this article:

A. E. Choque-Rivero, B. E. Medina-Hernandez, On two resolvent matrices of the truncated Hausdorff matrix moment problem, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 95, 2022, p. 4–22. DOI: 10.26565/2221-5646-2022-95-01

Про дві матриці розв'язання задачі усіченого матричного моменту Хаусдорфа.

А. Е. Чоке Ріверо[1], Б. Е. Медіна Ернандес[2]
[1] *Університет Мічоакана де Сан Ніколас де Ідальго*
[2] *Об'єднана аспірантура з математичних наук, Національний автономний університет Мексики – Університет Мічоакана де Сан Ніколас де Ідальго*

Ми розглядаємо усічену матричну проблему моментів Хаусдорфа у випадку скінченної парної кількості моментів, яка називається невиродженою, якщо дві блочні Ганкелеві матриці, побудовані за допомогою моментів, є додатно визначеними. Множина розв'язків усіченої проблеми моментів Хаусдорфа у випадку скінченної парної кількості моментів задається за допомогою так званої резольвентної матриці. Резольвентна матриця усіченої проблеми моментів Хаусдорфа у невиродженому випадку для матричних моментів вимірности $q \times q$ є $2q \times 2q$ матричним поліномом, який будується за допомогою заданих моментів.

У 2001 р., в роботі [Yu.M. Dyukarev, A.E. Choque Rivero, Power moment problem on compact intervals, Mat. Sb.-2001.-69(1-2).-P.175-187], для згаданої вище усіченої проблеми моментів Хаусдорфа вперше була запропонована резольвентна матриця $V^{(2n+1)}$. У 2006 р., в роботі [A. E. Choque Rivero, Y. M. Dyukarev, B. Fritzsche and B. Kirstein, A truncated matricial moment problem on a finite interval, Interpolation, Schur Functions and Moment Problems. Oper. Theory: Adv. Appl. -2006. - 165. - P. 121-173], була дана інша резольвентна матриця $U^{(2n+1)}$ для тієї самої проблеми. В даній роботі ми доводимо, що існує явне співвідношення між цими двома резольвентними матрицями вигляду $V^{(2n+1)} = AU^{(2n+1)}B$, де A і B – сталі матриці. Ми також фокусуємось на наступній відмінності: для визначення резольвентної матриці $V^{(2n+1)}$ має виконуватися додаткова умова, у порівнянні з визначенням резольвентної матриці $U^{(2n+1)}$, для якої вимагається лише щоб дві блочні Ганкелеві матриці були додатно визначені.

У 2015 р., в роботі [A. E. Choque Rivero, From the Potapov to the Krein-Nudel'man representation of the resolvent matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem, Bol. Soc. Mat. Mexicana. – 2015. – 21(2). – P. 233–259], було дане зображення резольвентної матриці, отриманої в 2006 р., через матричні ортогональні поліноми. В даній роботі ми не пов'язуємо резольвентну матрицю $V^{(2n+1)}$ з результатами [A.E. Choque Rivero, From the Potapov to the Krein-Nudel'man representation of the resolvent matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem, Bol. Soc. Mat. Mexicana. – 2015. – 21(2). – P. 233–259]. Важливість співвідношення між $U^{(2n+1)}$ і $V^{(2n+1)}$ пояснюється тим, що можуть бути знайдені нові співвідношення між ортогональними матричними поліномами, множниками Бляшке-Потапова, параметрами Дюкарева-Стілтьєса і матричними неперервними дробами. Хоча в даній роботі використовуються алгебраїчні тотожності для доведення співвідношення між $U^{(2n+1)}$ і $V^{(2n+1)}$, аналітичне обґрунтування обох резольвентних матриць спирається на метод В.П. Потапова. Цей підхід був успішно розвинений в багатьох роботах, пов'язаних з матричними проблемами інтерполяції в класі функцій Неванлінни і матричною проблемою моментів.

Ключові слова: **Задача матричного моменту Хаусдорфа, матриця розв'язання.**

Історія статті: отримана: 27 січня 2022; останній варіант: 5 липня 2022
прийнята: 7 липня 2022.

ISSN 2221-5646(Print) 2523-4641(Online)
Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
2022, Vol. 95, p. 23–30
DOI: 10.26565/2221-5646-2022-95-02
УДК 532.59

Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
2022, Том 95, с. 23–30

D. Seliutin
PhD math. student
School of Mathematics and Informatics
V. N. Karazin Kharkiv National University
4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine, 61022
selyutind1996@gmail.com *http://orcid.org/0000-0002-4591-7272*

On relation between statistical ideal and ideal generated by a modulus function

Ideal on an arbitrary non-empty set Ω it's a non-empty family of subset $\mathfrak{I}$ of the set Ω which satisfies the following axioms: $\Omega \notin \mathfrak{I}$, if $A, B \in \mathfrak{I}$, then $A \cup B \in \mathfrak{I}$, if $A \in \mathfrak{I}$ and $D \subset A$, then $D \in \mathfrak{I}$. The ideal theory is a very popular branch of modern mathematical research. In our paper we study some classes of ideals on the set of all positive integers $\mathbb{N}$, namely the ideal of statistical convergence $\mathfrak{I}_s$ and the ideal $\mathfrak{I}_f$ generated by a modular function f. Statistical ideal it's a family of subsets of $\mathbb{N}$ whose natural density is equal to 0, i.e. $A \in \mathfrak{I}_s$ if and only if $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\#\{k \le n : k \in A\}}{n} = 0$. A function $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ is called a modular function, if $f(x) = 0$ only if $x = 0$, $f(x+y) \le f(x) + f(y)$ for all $x, y \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \le f(y)$ whenever $x \le y$, f is continuous from the right 0, and finally $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$. Ideal, generated by the modular function f it's a family of subsets of $\mathbb{N}$ with zero f-density, in other words, $A \in \mathfrak{I}_f$ if and only if $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\#\{k \le n : k \in A\})}{f(n)} = 0$. It is known that for an arbitrary modular function f the following is true: $\mathfrak{I}_f \subset \mathfrak{I}_s$. In our research we give the complete description of those modular functions f for which $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$. Then we analyse obtained result, give some partial cases of it and prove one simple sufficient condition for the equality $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$. The last section of this article is devoted to examples of some modulus functions f, g for which $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$ and $\mathfrak{I}_g \ne \mathfrak{I}_s$. Namely, if $f(x) = x^p$ where $p \in (0, 1]$ we have $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$; for $g(x) = \log(1 + x)$, we obtain $\mathfrak{I}_g \ne \mathfrak{I}_s$. Then we consider more complicated function f which is given recursively to demonstrate that the conditions of the main theorem of our paper can't be reduced to the sufficient condition mentioned above.

Keywords: **ideal, statistical ideal, modulus function.**

2010 Mathematics Subject Classification: 76A11; 76B11; 76M11.

1. Introduction

Let Ω be a non-empty set. Let us remind that a non-empty family $\mathfrak{I} \subset 2^{\Omega}$ is called *an ideal* on Ω if $\mathfrak{I}$ satisfies:

1. $\Omega \notin \mathfrak{I}$;

2. if $A, B \in \mathfrak{I}$ then $A \cup B \in \mathfrak{I}$;

3. if $A \in \mathfrak{I}$ and $D \subset A$ then $D \in \mathfrak{I}$.

In our article we consider those ideals $\mathfrak{I}$ which contain the family of finite sets $\mathfrak{Fin}$.

For a subset $A \subset \mathbb{N}$ denote $\alpha_A(n) := |A \cap [1, n]|$, where $|M|$ stands for a number of elements in the set $M \subset \mathbb{N}$. Let $A \subset \mathbb{N}$. *The natural density* of A is $d(A) := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_A(n)}{n}$.

The ideal of sets $A \subset \mathbb{N}$ having $d(A) = 0$ is called *the statistical ideal.* We denote this ideal $\mathfrak{I}_s$.

The statistical ideal is related to the statistical convergence and is a very popular branch of research.

In [1] authors introduced a generalization of the natural density of subset in $\mathbb{N}$. They called it *f-density*, where f is a modulus function.

Recall that a function $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ is called *an unbounded modulus function* (modulus function for short) if:

1. $f(x) = 0$ if and only if $x = 0$;

2. $f(x + y) \le f(x) + f(y)$ for all $x, y \in \mathbb{R}^+$;

3. $f(x) \le f(y)$ if $x \le y$;

4. f is continuous from the right at 0;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$.

Let f be a modulus function. The quantity $d_f(A) := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(\alpha_A(n))}{f(n)}$ is called *the f-density* of $A \subset \mathbb{N}$. The ideal $\mathfrak{I}_f := \{A \subset \mathbb{N} : \ d_f(A) = 0\}$ is called *the f-ideal.* $\mathfrak{I}_f$ appears implicitly in [1] where the convergence of sequences with respect to $\mathfrak{I}_f$ was studied, and appears explicitly in [3].

In [1, p. 527] it is noted that for an arbitrary modulus function f and $A \subset \mathbb{N}$ if $d_f(A) = 0$ then $d(A) = 0$. In other words, $\mathfrak{I}_f \subset \mathfrak{I}_s$. The ideals $\mathfrak{I}_f$ and $\mathfrak{I}_s$ and the corresponding ideal convergences have some similarities and some differences. The aim of the paper is to present a complete description of those modulus functions f for which $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$. We do this in Theorem 1. After that in Theorem 2 we give a handy sufficient condition for the equality $\mathfrak{I}_s = \mathfrak{I}_f$, and finally we present some illustrative examples.

2. Main results

Let f be a modulus function, $t \in [1, +\infty)$, $k \in \mathbb{N}$. Denote

$$h_f(t) := \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(tn)}, \quad g_f(k) := h_f(2^k) = \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(2^k n)}.$$

The following Theorem is the promised main result of our paper.

Theorem 1. *Let f be a modulus. The following statements are equivalent:*

1. $\mathfrak{I}_s = \mathfrak{I}_f$;
2. $\lim\limits_{k\to\infty} g_f(k) = 0$.
3. $\lim\limits_{t\to\infty} h_f(t) = 0$.

Proof. Remark that the equivalence of conditions (2) and (3) follows evidently from the monotonicity of $h_f(t)$ in the variable t. We include both of the conditions because of some conveniences in the proof and for the future applications. So, it is sufficient to demonstrate implications (3) $\Rightarrow$ (1) and (1) $\Rightarrow$ (2).

(**3**) $\Rightarrow$ (**1**). As we remarked in the Introduction, the inclusion $\mathfrak{I}_s \supset \mathfrak{I}_f$ is known, so we need to show that $\mathfrak{I}_s \subset \mathfrak{I}_f$. Denote $\delta_t^f := h_f(t) + \dfrac{1}{t}$. The quantity δ_t^f is decreasing in t and $\lim\limits_{t\to\infty} \delta_t^f = 0$. We know that $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{f(tn)} < \delta_t^f$ for all $t \in [1, +\infty)$, in particular we have that for every $k \in \mathbb{N}$ there exists $N_1(k) \in \mathbb{N}$ such that for all $n \geq N_1(k)$ the following holds true: $f\left(\dfrac{n}{k}\right) < \delta_k^f f(n)$.

Let $A \in \mathfrak{I}_s$. By the definition of $\mathfrak{I}_s$ his means that $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_A(n)}{n} = 0$. In other words, for each $k \in \mathbb{N}$ there exists $N_2(k) \in \mathbb{N}$ such that $\alpha_A(n) < \dfrac{n}{k}$ for each $n > N_2(k)$. Denote $N_k := \max\{N_1(k), N_2(k)\}$. Then for each $n > N_k$

$$f(\alpha_A(n)) < f\left(\frac{n}{k}\right) < \delta_k^f f(n).$$

From the previous inequality we have:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f(\alpha_A(n))}{f(n)} \leq \delta_k^f \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

which completes the proof of the implication (3) $\Rightarrow$ (1).

(**1**) $\Rightarrow$ (**2**). Assume that $\lim\limits_{k\to 0} g_f(k) \neq 0$. By monotonicity, this implies the existence of $\xi > 0$ such that $g_f(k) > \xi$ for every $k \in \mathbb{N}$. Consequently, $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{f(2^k n)} > \xi$ for each $k \in \mathbb{N}$. Then for every $k \in \mathbb{N}$ there exists an infinite subset $N_k \subset \mathbb{N}$ such that for each $n \in N_k$

$$f(n) > \xi f(2^k n). \tag{1}$$

Choose $0 = n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ such that $n_j \in N_j$ for each $j \in \mathbb{N}$. So for each $k \in \mathbb{N}$

$$f(n_k) > \xi f(2^k n_k).$$

Denote $m_k := 2^k n_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Let us consider the following set A:

$$A = \{m_1 - n_1 + 1, m_1 - n_1 + 2, ..., m_1 - 1,$$
$$m_2 - n_2 + n_1, m_2 - n_2 + n_1 + 1, m_2 - n_2 + n_1 + 2, ..., m_2 - 1, ...\},$$

that is from each block of naturals in $(m_{k-1}, m_k]$ we chose the $n_k - n_{k-1}$ biggest ones. For the correctness of the definition of A we have to check that $m_k - m_{k-1} > n_k - n_{k-1}$ for every $k \in \mathbb{N}$. Indeed, for all $k \in \mathbb{N}$ we have:

$$m_k - n_k + n_{k-1} - m_{k-1} = 2^k n_k - n_k + n_{k-1} - 2^{k-1} n_{k-1} =$$
$$= n_k(2^k - 1) - n_{k-1}(2^{k-1} - 1) > 0,$$

because $n_k > n_{k-1}$ and $2^k - 1 > 2^{k-1} - 1$.

Denote $\alpha_n := \alpha_A(n)$. Let us show that $A \notin \mathfrak{I}_f$. By our construction, $\alpha_{m_k} = n_k$ for all $k \in \mathbb{N}$. Using the inequality (1) we obtain that $\dfrac{f(\alpha_{m_k})}{f(m_k)} > \xi > 0$, so $\dfrac{f(\alpha_n)}{f(n)} \not\to 0$ as $n \to \infty$, that's why $A \notin \mathfrak{I}_f$.

Let us finally show that $A \in \mathfrak{I}_s$. For every $k \in \mathbb{N}$ we can split the block of naturals $[m_k + 1, m_{k+1}] \cap \mathbb{N}$ as follows:

$$[m_k + 1, m_{k+1}] \cap \mathbb{N} = [m_k + 1, m_{k+1} - n_{k+1} + n_k - 1] \cap \mathbb{N}$$
$$\cup [m_{k+1} - n_{k+1} + n_k, m_{k+1} - 1] \cap \mathbb{N} \cup \{m_{k+1}\}.$$

On the initial part of this set for $j \in [m_k + 1, m_{k+1} - n_{k+1} + n_k - 1]$ we have: $\alpha_j = n_k$ and $\dfrac{\alpha_j}{j} = \dfrac{n_k}{j} \le \dfrac{n_k}{m_k + 1} \le \dfrac{n_k}{m_k} = \dfrac{1}{2^k}$. On the next part, for $j \in [m_{k+1} - n_{k+1} + n_k, m_{k+1} - 1] = [n_{k+1}(2^{k+1} - 1) + n_k, 2^{k+1} n_{k+1}]$ we have $\alpha_j = n_k + x_j$, where $1 \le x_j \le n_{k+1} - n_k$. Using this, we obtain that $\dfrac{1}{j} \le \dfrac{x_j}{j} \le \dfrac{n_{k+1} - n_k}{j}$, and so

$$\frac{\alpha_j}{j} = \frac{n_k + x_j}{j} \le \frac{n_{k+1}}{n_{k+1}(2^{k+1} - 1) + n_k} \le \frac{n_{k+1}}{n_{k+1}(2^{k+1} - 1)} = \frac{1}{2^{k+1} - 1} < \frac{1}{2^k}.$$

At the last point $j = m_{k+1}$ we have: $\alpha_j = n_{k+1}$ and

$$\frac{\alpha_j}{j} = \frac{n_{k+1}}{m_{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k}.$$

So for an arbitrary $k \in \mathbb{N}$ and for $j \in [m_k + 1, m_{k+1}]$ we have $\dfrac{\alpha_j}{j} < \dfrac{1}{2^k}$, in other words $A \in \mathfrak{I}_s$.

Now let us discuss a particular case of Theorem 1 in which the condition for $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$ can be substantially simplified. First, a simple technical lemma.

Lemma 1. *Let f be a modulus function. Let there exists* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{f(2n)}=a$. *Then* $g_f(k)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{f(2^kn)}=a^k$ *for all* $k\in\mathbb{N}$.

Proof. Let us use method of mathematical induction.

The base of induction: $k=2$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{f(4n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)\cdot f(2n)}{f(2n)\cdot f(4n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{f(2n)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{f(2n)}{f(4n)}=a^2.$$

The inductive transition: $k\to k+1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{f(2^{k+1}n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{f(2^kn)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^kn)}{f(2^{k+1}n)}=a^k\cdot a=a^{k+1}.$$

Theorem 2. *Let f be a modulus. Suppose that there exists* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{f(2n)}$. *Then the following statements are equivalent:*

1. $\mathfrak{I}_s=\mathfrak{I}_f$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{f(2n)}<1$.

Proof. Under the assumption of existence of $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{f(2n)}$, Lemma 1 gives the equivalence of our condition (2) and the condition (2) of Theorem 1.

3. Examples

At first, let us show that among the very elementary modulus functions f the both possibilities $\mathfrak{I}_f=\mathfrak{I}_s$ and $\mathfrak{I}_f\neq\mathfrak{I}_s$ may happen.

Example 1. $f(x)=x^p$, $p\in(0,1]$. For this kind of functions $\mathfrak{I}_f=\mathfrak{I}_s$. Indeed, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{f(2n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^p}{(2n)^p}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^p<1$.

Example 2. $f(x)=\log(1+x)$. In this case $\mathfrak{I}_f\neq\mathfrak{I}_s$, because $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{f(2n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log(1+n)}{\log(1+2n)}=1$.

Our next goal is to show that Theorem 1 does not reduce to its particular case given in Theorem 2, i.e. that there is a modulus functions f for which the limit of $\dfrac{f(n)}{f(2n)}$ does not exist.

Example 3. Put $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=2$. The values of f in the remaining natural numbers we define recurrently: if for some $n\in\mathbb{N}$ the values $f(k)$ are already defined for $k\in[1,2^n]$, we define $f(k)$ for $k=2^n+\alpha\in[2^n+1,2^{n+1}]$, $\alpha\in[1,2^n]$, by means of the formula

$$f(2^n+\alpha)=\begin{cases}f(2^n),\text{if } n\in\{1,3,5,..\}\\ f(2^n)+f(\alpha),\text{if } n\in\{2,4,6,...\}.\end{cases}\tag{2}$$

This defines $f(n)$ for each $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. In the intermediate points let us define f by means of linear interpolation. Such f is defined for each $x \in \mathbb{R}^+$, is monotonic, continuous, and $f(2^k) := 2^{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$ for $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Let us verify that f is a modulus function. For every $w, z \in \mathbb{N}$ (without lost of generality we consider $w > z$) we have to demonstrate that

$$f(w + z) \leq f(w) + f(z). \tag{3}$$

This can be done by induction in n, where n is the smallest natural for which $w + z \leq 2^n$.

The base $n = 1$ is straightforward. Suppose now that we already proved (3) for $0 \leq w + z \leq 2^n$ and let us prove it for $2^n < w + z \leq 2^{n+1}$. Denote $w + z = 2^n + \alpha$, where $\alpha \in [1, 2^n]$.

1. Let n be an odd number. It is clear that there are numbers $\tilde{w}, \tilde{z} \in \mathbb{N}$, $\tilde{w} < w$, $\tilde{z} < z$ such that $\tilde{w} + \tilde{z} = 2^n$. Then $f(w + z) = f(2^n) = f(\tilde{w} + \tilde{z}) \leq f(\tilde{w}) + f(\tilde{z}) \leq f(w) + f(z)$.

2. Let n be an even number. Then $f(w + z) = f(2^n + \alpha) = f(2^n) + f(\alpha)$.

   (a) Let $w \geq 2^n$, then $z \leq \alpha$. Represent w in the form of $w = 2^n + \beta$. In this case $f(w + z) = f(2^n) + f(\alpha)$ and $f(w) = f(2^n) + f(\beta)$. Then the inequality (3) rewrites as $f(\alpha) \leq f(z) + f(\beta)$ which is true by the inductive assumption.

   (б) Let $w < 2^n$, which means that $2^{n-1} < w < 2^n$ and $z > \alpha$. Then $f(w) = f(2^{n-1}) = f(2^n)$, because $n - 1$ is odd. Again, in this case the inequality (3) is equivalent to a simpler one: $f(\alpha) \leq f(w)$ which is true since $z > \alpha$.

So, we proved that the function, defined by (2) is a modulus function. Consider now the sequence $\dfrac{f(2^n)}{f(2^{n+1})}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. When n is odd we have $\dfrac{f(2^n)}{f(2^{n+1})} = 1$ and if n is even we have $\dfrac{f(2^n)}{f(2^{n+1})} = \dfrac{1}{2}$. This means that the sequence $\dfrac{f(n)}{f(2n)}$ has no limit.

By the way, in this example $g_f(k) = \limsup\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(n)}{f(2^k n)} = \dfrac{1}{2^{k-1}}$, so $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$.

Acknowledgment

The author is thankful to his parents for their support and his scientific adviser, professor Vladimir Kadets for his constant help with this project.

The research was supported by the National Research Foundation of Ukraine funded by Ukrainian state budget in frames of project 2020.02/0096 “Operators in infinite-dimensional spaces: the interplay between geometry, algebra and topology”.

Conclusion

In our paper we studied the ideal of statistical convergence $\mathfrak{I}_s$ and the ideal $\mathfrak{I}_f$ generated by a modular function f. In our research we gave the complete description of those modular functions f for which $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$. Then we analysed obtained result, gave some partial cases of it and proved one simple sufficient condition for the equality $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$. At the end of this article we gave some examples of some modulus functions f, g for which $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$ and $\mathfrak{I}_g \neq \mathfrak{I}_s$.

REFERENCES

1. A. Aizpuru, M. C. Listán-García, F. Rambla-Barreno. Density by moduli and statistical convergence. Quaestiones Mathematicae. – 2014. – Vol. **37**, No **4**. – P. 525–530. DOI: 10.15587/000048282.
2. M. C. Listán-García. f-statistical convergence, completeness and f-cluster points. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. – 2016. – Vol. **23**, No **2**. – P. 235–245. DOI: 10.36045/bbms/1464710116.
3. V. M. Kadets, D. D. Seliutin. Completeness in topological vector spaces and filters on $\mathbb{N}$. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. – 2022. – Vol. **28**, No **4**. – P. 531 - 545. DOI: 10.36045/j.bbms.210512.

Article history: Received: 18 October 2021; Final form: 24 December 2021
Accepted: 19 January 2022.

How to cite this article:

D. Seliutin, On relation between statistical ideal and ideal generated by a modulus function, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 95, 2022, p. 23–30. DOI: 10.26565/2221-5646-2022-95-02

Про зв'язок між статистичним ідеалом та ідеалом, породженим модульною функцією

Д. Д. Селютін
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи 4, Харків, 61022, Україна

Ідеал на довільній непорожній множині Ω – це непорожня сім'я підмножин $\mathfrak{I}$ множини Ω, яка задовольняє наступним умовам: $\Omega \notin \mathfrak{I}$, якщо $A, B \in \mathfrak{I}$, то $A \cup B \in \mathfrak{I}$, якщо $A \in \mathfrak{I}$ і $D \subset A$, то $D \in \mathfrak{I}$. Теорія ідеалів є дуже популярною областю сучасних математичних досліджень. В даній роботі досліджено деякі спеціальні класи ідеалів на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$, а саме ідеал статистичної збіжності $\mathfrak{I}_s$, або статистичний ідеал, та ідеал $\mathfrak{I}_f$, який задано модульною функцією $\mathfrak{I}_f$. Статистичний ідеал – це сім'я підмножин множини $\mathbb{N}$, які мають нульову натуральну щільність, тобто $A \in \mathfrak{I}_s$ тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\#\{k \le n : k \in A\}}{n} = 0$. Функцію $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ називають модульною функцією, якщо $f(x) = 0$ тільки при $x = 0$, $f(x+y) \le f(x) + f(y)$ для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \le f(y)$ якщо $x \le y$, f неперервна справа в 0, і $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$. Ідеал, який задано модульною функцією – це сім'я підмножин множини $\mathbb{N}$, які мають нульову f-щільність, тобто $A \in \mathfrak{I}_f$ тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(\#\{k \le n : k \in A\})}{f(n)} = 0$. Відомо, що для довільної модульної функції f ми маємо наступне включення: $\mathfrak{I}_f \subset \mathfrak{I}_s$. В нашій статті ми даємо повний опис таких модульних функцій f, що $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$. Далі ми досліджуємо отриманий результат, наводимо деякі часткові випадки основного результату та доводимо просту достатню умову для рівності $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$. Останній розділ нашої роботи присвячено розгляду прикладів конкретних модульних функцій f, для котрих $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$ і $\mathfrak{I}_f \ne \mathfrak{I}_s$. А саме, у випадку $f(x) = x^p$, при $p \in (0, 1]$ маємо $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$; якщо $f(x) = \log(1 + x)$, маємо $\mathfrak{I}_f \ne \mathfrak{I}_s$. Далі в якості прикладу ми розглядаємо більш складну функцію f, яка має рекурентну побудову, і яка показує, що умови основного результату даної роботи не можна послабити до одного часткового випадку.

Ключові слова: **ідеал, статистичний ідеал, модульні функції.**

Історія статті: отримана: 18 жовтня 2021; останній варіант: 24 грудня 2021
прийнята: 19 січня 2022.

ISSN 2221-5646(Print) 2523-4641(Online)
Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics”
2022, Vol. 95, p. 31–38
DOI: 10.26565/2221-5646-2022-95-03
УДК 517.954

Вісник Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
2022, Том 95, с. 31–38

О. А. Макаров
доцент, кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри прикладної математики
Харківький національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
makarovifamily07@gmail.com *http://orcid.org/0000-0002-9050-4987*

І. Г. Ніколенко
кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри штучного інтелекту та програмного забезпечення
майдан Свободи, 6, Харків, Україна, 61022
makarovifamily07@gmail.com *http://orcid.org/0000-0002-2904-6761*

Двоточкова крайова задача для систем псевдодиференціальних рівнянь з крайовими умовами, що містять псевдодиференціальні оператори

У роботі розглядається двоточкова крайова задача для псевдодиференціальних рівнянь та систем псевдодиференціальних рівнянь другого порядку з крайовими умовами, що містять псевдодиференціальні оператори. Необхідність розгляду псевдодиференціальних операторів обумовлена тим, що, по-перше, у прикладних задачах все частіше виникають рівняння з такими операторами, а по-друге, розглядаючи такі рівняння, вдається досягти коректності крайової задачі в просторі Л. Шварца S і в двоїстому до нього просторі.

Спочатку розглядається скалярне псевдодиференціальне рівняння з символом з простору $C^{\infty}_{-\infty}$, що складається з нескінченно диференційовних функцій, якх зростають степеневим чином. Для такого рівняння зазначається конкретний вид крайової умови, за якою крайова задача коректна у просторі S. Крім того, наведено приклад диференціально-різніцевого рівняння та конкретні крайові умови з псевдодиференціальним оператором типу згортки, за яких дана крайова задача, є коректною у просторі S.

Потім розглядається система двох псевдодифференціальних рівнянь із символами з простору $C^{\infty}_{-\infty}$ і для цієї системи доводиться існування коректної краєвої задачі в просторі S. При доведенні використовується перетворення Фур'є і зведення системи до трикутного виду. Для цього випадку також наведено приклад такої системи та вказаний конкретний вид крайової умови, при якої ця крайова задача є коректною у просторі S.

Таким чином, у роботі доведено, що для будь-якого псевдодиференціального рівняння, а також для системи двох псевдодиференціальних рівнянь завжди існує коректна крайова задача у просторі S, при цьому крайові умови містять псевдодиференціальні оператори. Також вказано алгоритм побудови коректних крайових умов, які є псевдодиференціальними операторами, символи якіх залежать від смволів псевдодиференціальних рівнянь.

Ключові слова: **крайова задача; псевдодиференціальні рівняння; перетворення Фур'є; триангуляція.**

2010 Mathematics Subject Classification: 35S15.

Псевдодиференціальні рівняння все частіше виникають у застосунках тому, що, зокрема, містять диференціально-різніцеві рівняння та рівняння у згортках [1, 2, 3, 4] .

Проте коректної двоточкової крайової задачі зі сталими коефіцієнтами може не існувати для деяких рівнянь [5]. Тому виникає необхідність розгляду крайових умов, що містять псевдодиференціальні оператори. Покажемо, що в класі таких задач завжди існують коректні крайові задачі у просторі Л. Шварца S та у просторах скінченно-гладких функцій, які зростають або спадають степеневим чином.

Розглянемо псевдодиференціальне рівняння

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,T]. \tag{1}$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,0) + C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,T) = \varphi(x), \tag{2}$$

де $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — псевдодиференціальні оператори з символами $\widetilde{A}(s), \widetilde{B}(s), \widetilde{C}(s)$ з простору $C^{\infty}_{-\infty}$, що складається з нескінченно диференційовних функцій степеневого зростання [6].

Покажемо, що для будь-якого $\widetilde{A}(s) \in C^{\infty}_{-\infty}$ знайдуться такі $\widetilde{B}(s) \in C^{\infty}_{-\infty}$ та $\widetilde{C}(s) \in C^{\infty}_{-\infty}$, що крайова задача (1)–(2) буде коректною у просторі S.

Виконаємо перетворення Фур'є за просторовими змінними

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \widetilde{u}(s,t)}{\partial t} = \widetilde{A}(s)\widetilde{u}(s,t), \\ &\widetilde{B}(s)\widetilde{u}(s,0) + \widetilde{C}(s)\widetilde{u}(s,T) = \widetilde{\varphi}(s). \end{aligned}$$

Розв'язок такої задачі має вигляд

$$\begin{aligned} &\widetilde{u}(s,t) = e^{t\widetilde{A}(s)} \left(\widetilde{B}(s) + \widetilde{C}(s) \exp T\widetilde{A}(s)\right)^{-1} \widetilde{\varphi}(s), \\ &\left(\widetilde{B}(s) + \widetilde{C}(s) \exp T\widetilde{A}(s)\right) \neq 0, \qquad s \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Візьмемо $\widetilde{B}(s) \equiv 1, \quad \widetilde{C}(s) = \exp\left(-iTIm\widetilde{A}(s)\right) \in C^{\infty}_{-\infty}$.
Покажемо, що $Q(s,t) = e^{t\widetilde{A}(s)}\left(1 + \exp TRe\widetilde{A}(s)\right)^{-1} \in C^{\infty}_{-\infty}$.
Це нескінченно диференційовна функція та

$$|Q(s,t)| = e^{tRe\widetilde{A}(s)}\left(1 + \exp TRe\widetilde{A}(s)\right)^{-1}$$

Якщо $Re\widetilde{A}(s) \geq 0$, то

$$|Q(s,t)| \leq e^{(t-T)Re\widetilde{A}(s)}\left(e^{-TRe\widetilde{A}(s)} + 1\right)^{-1} \leq 1.$$

Якщо $Re\widetilde{A}(s) < 0$, то

$$|Q(s,t)| \leq 1.$$

Оцінимо похідні

$$\left|\frac{\partial}{\partial s_j}Q(s,t)\right| \leq \left|e^{t\widetilde{A}(s)}\left(1+e^{T\widetilde{A}(s)}\right)^{-1} t\frac{\partial \widetilde{A}(s)}{\partial s_j}\right| + \left|e^{t\widetilde{A}(s)}\left(1+e^{T\widetilde{A}(s)}\right)^{-2} e^{T\widetilde{A}(s)}T\frac{\partial \widetilde{A}(s)}{\partial s_j}\right|,$$

тобто обидва доданки задовольняють степеневу оцінку.

Аналогічно оцінюємо похідні вищого порядку $\dfrac{\partial^k}{\partial s_j^k}Q(s,t)$.

Коректність доведено.

Доведемо коректність крайової задачі для неоднорідного рівняння.
Для цього розглянемо крайову задачу для неоднорідного рівняння.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) + f(x,t), \tag{3}$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,0) + C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,T) = 0. \tag{4}$$

Після перетворення Фур'є ця задача перейде в наступну:

$$\frac{\partial \widetilde{u}(s,t)}{\partial t} = \widetilde{A}(s)\widetilde{u}(s,t) + \widetilde{f}(s,t), \tag{5}$$

$$\widetilde{B}(s)\widetilde{u}(s,0) + \widetilde{C}(s)\widetilde{u}(s,T) = 0. \tag{6}$$

Функція Гріна для цієї задачі має вигляд

$$G(s,t,\tau) = \begin{cases} Q(s,t)e^{-\tau\widetilde{A}(s)} \cdot \widetilde{B}(s) & t > \tau, \\ -Q(s,t)e^{(T-\tau)\widetilde{A}(s)} \cdot \widetilde{C}(s) & t < \tau. \end{cases}$$

Покажемо, що $G(s,t,\tau) \in C^{\infty}_{-\infty}$ при обраних $\widetilde{B}(s)$ та $\widetilde{C}(s)$.

При $t > \tau \quad |G(s,t,\tau)| \le e^{(t-T-\tau)Re\widetilde{A}(s)} \le 1$ за умови $Re\widetilde{A}(s) \ge 0$.
Якщо $Re\widetilde{A}(s) < 0$, то $|G(s,t,\tau)| \le e^{(T-\tau)Re\widetilde{A}(s)} \le 1$.

При $t < \tau \quad |G(s,t,\tau)| \le e^{(t-T+T-\tau)Re\widetilde{A}(s)} \le 1$ за умови $Re\widetilde{A}(s) \ge 0$.
Якщо $Re\widetilde{A}(s) < 0$, то $|G(s,t,\tau)| \le e^{(t+T-\tau)Re\widetilde{A}(s)} \le 1$.
Таким чином, $|G(s,t,\tau)| \le 1$.

Аналогічно оцінці похідних $Q(s,t)$ доводиться, що

$$\left| \frac{\partial^k G(s,t,\tau)}{\partial s_j} \right| \le C_k(1+|s|)^{p_k}$$

Тому $G(s,t,\tau) \in C^{\infty}_{-\infty}$. Отже, крайова задача (3)–(4) є коректною у просторі S.

Розглянемо наступний приклад.

Приклад 1.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + bu(x+h,t), \quad x \in \mathbb{R}, \;\; t \in [0,T], \;\; a,b,h \in \mathbb{R}.$$

Тут $\widetilde{A}(s) = -as^2 + be^{ihs} \in C^{\infty}_{-\infty}, \;\; Im\widetilde{A}(s) = b\sin hs$.
Тому, якщо взяти $\widetilde{B}(s) = 1, \;\; \widetilde{C}(s) = e^{iTb\sin hs}$, то крайова задача з умовою

$$u(x,0) + C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,T) = \varphi(s)$$

буде коректною у просторі S.
Вона також буде коректною у двоїстому просторі S' та коректно розв'язуваною у просторах Соболева-Слободецького H^s_l (див. [6]).

Більш того, оскільки фундаментальна функція

$$Q(s,t) = e^{t(-as^2+be^{ihs})}\left(1 + e^{T(-as^2+b\cos hs)}\right)^{-1}$$

задовольняє оцінку

$$|Q(s,t)| \le \begin{cases} C_1 e^{-ats^2} & \text{при} \quad a > 0, \\ C_2 e^{a(T-t)s^2} & \text{при} \quad a < 0, \end{cases}$$

то розв'язки такої крайової задачі будуть нескінченно диференційовними за x при $t \in (0,T)$ (див.[7]).

Розглянемо систему псевдодиференціальних рівнянь

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) \tag{7}$$

з крайовими умовами

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,0) + C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,T) = \varphi(x), \tag{8}$$

де матриці $\widetilde{A}(s), \widetilde{B}(s)$ та $\widetilde{C}(s)$ розмірами 2×2 належать простору $C^{\infty}_{-\infty}$.

Нехай $\lambda_1(s)$ та $\lambda_2(s)$ — власні значення матриці

$$\widetilde{A}(s) = \begin{pmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) \end{pmatrix}.$$

Легко показати, що $\lambda_1(s)$ та $\lambda_2(s)$ належать простору $C^{\infty}_{-\infty}$.
Унітарна матриця

$$T(s) = \frac{1}{\sqrt{|a_{12}(s)|^2 + |\lambda_1(s) - a_{11}(s)|^2}} \begin{pmatrix} a_{12}(s) & \overline{a_{11}(s)} - \overline{\lambda_1(s)} \\ \lambda_1(s) - a_{11}(s) & \overline{a_{12}(s)} \end{pmatrix}$$

зводить матрицю $\widetilde{A}(s)$ до трикутного вигляду (див. [8])

$$T^*(s)\widetilde{A}(s)T(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & q(s) \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix},$$

де функція $q(s)$ виражається через $a_{ij}(s)$ і також належить простору $C^{\infty}_{-\infty}$.
Тому заміна $v(s,t) = T^*(s)\widetilde{u}(s,t)$ приведе до системи

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1(s,t)}{dt} = \lambda_1(s)v_1(s,t) + q(s)v_2(s,t), \\ \dfrac{dv_2(s,t)}{dt} = \lambda_2(s)v_2(s,t). \end{cases} \tag{9}$$

Якщо взяти крайові умови

$$\begin{cases} v_1(s,0) + e^{-iT\, Im\lambda_1(s)}v_1(s,T) = \psi_1(s), \\ v_2(s,0) + e^{-iT\, Im\lambda_2(s)}v_2(s,T) = \psi_2(s), \end{cases} \tag{10}$$

то, згідно попередньому, $v_1(s,t)$ та $v_2(s,t)$ будуть належати простору S, а отже, і $\widetilde{u}(s,t) \in S$.
Таким чином, доведено теорему.

Теорема 1. *Для будь-якої матриці $\widetilde{A}(s) \in C^{\infty}_{-\infty}$ розміру 2×2 існують такі матриці $\widetilde{B}(s)$ та $\widetilde{C}(s)$, які належать простору $C^{\infty}_{-\infty}$, що крайова задача (7) – (8) є коректною у просторі S.*

Приклад 2. Розглянемо систему

$$\frac{\partial u_1(x_1,x_2,t)}{\partial t} = u_2(x_1,x_2,t)$$
$$\frac{\partial u_2(x_1,x_2,t)}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u_2(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2 u_2(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^4 u_1(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^4} +$$
$$+ 2\frac{\partial^4 u_1(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - \frac{\partial^4 u_1(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^2 u_1(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2}.$$

Запишемо матрицю цієї системи

$$\widetilde{A}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(s_1^2 - s_2^2)^2 - s_1^2 & 2(s_1^2 - s_2^2) \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння цієї матриці має вигляд

$$\lambda^2 - 2(s_1^2 - s_2^2)\lambda + (s_1^2 - s_2^2)^2 + s_1^2 = 0,$$

а власні значення $\lambda_{1,2}(s) = s_1^2 - s_2^2 \pm is_1$.

Отже, унітарна матриця переходу $T(s)$ дорівнює

$$T(s) = \frac{1}{\sqrt{\left(s_2^2 - s_1^2\right)^2 + s_1^2 + 1}} \begin{pmatrix} 1 & s_2^2 - s_1^2 + is_1 \\ -s_2^2 + s_1^2 + is_1 & 1 \end{pmatrix},$$

а після заміни $v(s,t) = T^*(s)\widetilde{u}(s,t)$ перейдемо до трикутної системи

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1(s,t)}{dt} = \left(s_1^2 - s_2^2 + is_1\right) v_1(s,t) + q(s)v_2(s,t), \\ \dfrac{dv_2(s,t)}{dt} = \left(s_1^2 - s_2^2 - is_1\right) v_2(s,t) \end{cases}$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} v_1(s,0) + e^{-iTs_1}v_1(s,T) = \psi_1(s), \\ v_2(s,0) + e^{+iTs_1}v_2(s,T) = \psi_2(s), \end{cases}$$

де $\psi(s) = T^*(s)\widetilde{\varphi}(s)$. Ця крайова задача буде коректною у просторі S на підставі доведеної вище теореми.

Якщо від перетворення Фур'є повернутися до вихідних функцій, то крайові умови будуть такими

$$\begin{array}{l} u_1(x_1,x_2,0) + u_1(x_1+T,x_2,T) = w_1(x_1,x_2) \\ u_2(x_1,x_2,0) + u_2(x_1-T,x_2,T) = w_2(x_1,x_2), \end{array}$$

де $w(x) = T^*\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)$.

Висновок

У роботі доведено, що для будь-якого псевдодиференціального рівняння, а також для системи двох псевдодиференціальних рівнянь завжди існує коректна крайова задача у просторі S, при цьому крайові умови містять псевдодиференціальні оператори. Крім того, вказано алгоритм побудови коректних крайових умов.

REFERENCES

1. B. J. Ptashnik., V. S. Ilkiv, I. I. Kmit, V. M. Polishchuk, Nonlocal boundary value problems for partial differential equations. 2002. Kyiv: Naukova Dumka, 415 p. (in Ukrainian). ISBN 966-00-0095-2.
2. A. M. Kuz, B. Yo. Ptashnyk, Problem for hyperbolic system of equations having constant coefficients with integral conditions with respect to the time variable, Carpathian Math. Publ., — 2014. **6**, N. **2**. — P. 282–299. DOI: 10.15330/cmp.6.2.282-299.
3. A. Bouziani, N. Merazga,. Solution to a pseudoparabolic problem with conditions, EJDE. — 2006. — No. **115**. — P. 1–18. SSN: 1072-6691. URL: http://ejde.math.txstate.edu or http://math.unt.edu ftp ejde.math.txstate.edu (login: ftp).
4. A. A. Makarov, D. A. Levkin. Boundary-value problems in a layer for evolutionary pseudo-differential equations with integral conditions. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics". – 2018. – **87**. – P. 61–67. DOI: 10.26565/2221-5646-2018-87-05.
5. A. A. Makarov. The existence of a correct two-point boundary value problem in a layer for systems of pseudo-differential equations, Differential Equations. 1994. – Vol. **30**, No. **1**. – P.144–150.
6. L. R. Volevich, S. G. Gindikin. Generalized functions and equations in convolutions. M.: Fizmatlit. – 1994. – 336 p. – ISBN 5-02-014601-3.
7. A. A. Makarov. Parabolic boundary value problems for systems of pseudodifferential equations in an infinite layer, Differential Equations. 1996. – Vol. **32**, No. **5**. – P.636–642.
8. Roger A. Horn, Charles R. Johnson. Matrix Analysis./ Cambridge University Press. – 2013. – 643 p. – ISBN 0521839408, 9780521839402.

Історія статті: отримана: 17 квітня 2022; останній варіант: 15 червня 2022
прийнята: 18 червня 2022.

How to cite this article:

O. Makarov, I. Nikolenko., Two-point boundary value problem for systems of pseudo-differential equations under boundary conditions containing pseudo-differential operators., Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 95, 2022, p. 31–38. DOI: 10.26565/2221-5646-2022-95-03

Two-point boundary value problem for systems of pseudo-differential equations under boundary conditions containing pseudodifferential operators.

O. Makarov[1], I. Nikolenko[2]
[1]*Department of Applied Mathematics*
V. N. Karazin Kharkiv National University
Svobody square, 4, Kharkiv, Ukraine, 61022
[2]*Department of Artificial Intelligence and Software*
V. N. Karazin Kharkiv National University
Svobody square, 4, Kharkiv, Ukraine, 61022

This paper deals with a two-point boundary value problem for pseudodifferential equations and for systems of second order pseudodifferential equations under boundary conditions containing pseudodifferential operators. The need to consider pseudodifferential operators is caused by two reasons, first, such equations appear more and more often in applied problems, and second, by considering such equations, it is possible to achieve the well-posedness of the boundary value problem in the Schwartz space S and in its dual space.

First, we consider a scalar pseudodifferential equation with a symbol belonging to the space $C^{\infty}_{-\infty}$, consists of infinitely differentiable functions of polinomial growth. For this equation it is found of the boundary condition under which a specific type the boundary value problem is well-posed in the space S. In addition, an example of a differential-difference equation and a specific boundary condition with a convolution-type pseudo-differential operator under which this boundary value problem is well-posed in the space S are given.

Then we consider a system of two pseudodifferential equations with symbols from the space $C^{\infty}_{-\infty}$. For this system, we prove the existence of a well posed boundary value problem in the space S. The Fourier transform and the reduction of the system to a triangular form are used in the proof. In this case, we also give an example of a system and a specific boundary condition under which this boundary value problem is correct in the space S.

Thus, the work proves that for any pseudo-differential equation, as well as for a system of two pseudo-differential equations, there is always a correct boundary value problem in the S space, while the boundary conditions contain pseudo-differential operators. The algorithm for constructing correct boundary conditions is also indicated. They are pseudo-differential operators whose symbols depend on the symbols of pseudo-differential equations.

Keywords: **boundary-value problem; pseudodifferential equations; Fourier transform; triangulation.**

Article history: Received: 17 April 2022; Final form: 15 June 2022
Accepted: 18 June 2022.

ISSN 2221-5646(Print) 2523-4641(Online)
Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics"
2022, Vol. 95, p. 39–48
DOI: 10.26565/2221-5646-2022-95-04
УДК 517.922

Вісник Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
2022, Том 95, с. 39–48

A. Goncharuk
PhD math. student.
V. N. Karazin Kharkiv National university
Svobody sqr., 4, Kharkiv, Ukraine, 61022
angoncharuk@ukr.net *http://orcid.org/0000-0002-3562-795X*

Cramer's rule for implicit linear differential equations over a non-Archimedean ring

We consider a linear nonhomogeneous m-th order differential equation in a ring of formal power series with coefficients from some field of characteristic zero. This equation has infinite many solutions in this ring – one for each initial condition of the corresponding Cauchy problem. These solutions can be found using classical methods of differential equation theory.

Let us suppose the coefficients of the equation and the coefficients of nonhomogeneity belong to some integral domain K. We are looking for a solution in the form of a formal power series with coefficients from this integral domain. The methods of classical theory do not allow us to find out whether there exists an initial condition that corresponds to the solution of the coefficients from K and do not allow find this initial condition.

To solve this problem, we use the method proposed by U. Broggi. This method allows to find a formal solution of the linear nonhomogeneous differential equation in the form of some special series.

In previous articles, sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution were found for a certain class of rings K with a non-Archimedean valuation. If these conditions hold, the formal power series obtained using the Broggi's method is considered. Its coefficients are the sums of series that converge in the non-Archimedean topology considered. It is shown that this series is the solution from $K[[x]]$ of our equation.

Note that this equation over a ring of formal power series can be considered as an infinite linear system of equations with respect to the coefficients of unknown formal power series. In this article it is proved that this system can be solved by some analogue of Cramer's method, in which the determinants of infinite matrices are found as limits of some finite determinants in the non-Archimedean topology.

Keywords: **differential equation; formal power series; Cramer's rule.**

2010 Mathematics Subject Classification: 34A30; 13F25; 12J25; 65F05.

1. Introduction

Let us consider m-th order linear differential equation with constant coefficients

$$a_m w^{(m)}(x) + a_{m-1} w^{(m-1)}(x) + \ldots + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = f(x), \;\; a_m \neq 0. \qquad (1)$$

Let a_i belong to an integral domain K, $f(x) \in K[[x]]$ be a formal power series. The equation (1) is called implicit if the element a_m is not invertible in K. We are looking for the solution of the equation (1) from $K[[x]]$. In [1] it is proved that for some conditions on K and on coefficients a_i this equation has a unique solution from $K[[x]]$.

Let F denote the quotient field of K. Using the classical differential equations theory methods we are able to solve the Cauchy problem finding the infinitely many solution from $F[[x]]$ – one solution for each initial condition. However, the form of these solutions does not allow us to find the unique solution from $K[[x]]$ [2, Ch.VII].

For this purpose we use the construction proposed by U. Broggi (see [3, §5, 22.1]). He looked for the solution of (1) as a series

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(x), \qquad (2)$$

where coefficients c_k satisfies the equality

$$(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0)^{-1} = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \ldots. \qquad (3)$$

In [1] we use the non-Archimedean topology construction in some special ring K to formulate conditions for the existence and uniqueness of a solution of equation (1) in $K[[x]]$. We also write the coefficients of formal power series solution in the form of series converged with respect to the non-Archimedean topology. The results from [1] are formulated in the Section 2 of this article.

Differential equation (1) can be regarded as an infinite linear system of equations with respect to the coefficients of the unknown series. In the present article it is shown that the unique solution of the equation (1) from $K[[x]]$ can be found using an analogue to the Cramer's rule. For $m = 1$ and $K = \mathbb{Z}_p$ it was proved in [4]. The proof of the main result of this article is based on using the methods and constructions of [5].

2. Preliminaries

Suppose $(F, |\cdot|)$ is a field of characteristic zero with a non-Archimedean valuation $|\cdot|$ and $K = \{s \in F : |s| \leq 1\}$ is its valuation ring ([6, Ch.XII, §4]). Let us consider the differential equation (1) where $a_0, a_1, \ldots, a_m \in K$ and $f(x) \in K[[x]]$. We are looking for the solutions of this equation from $K[[x]]$.

In [1, Section 4, Theorems 4 and 5] sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution in $K[[x]]$ are found. Noticing that an element $a \in K$ is invertible if and only if $|a| = 1$, we can formulate these conditions in the following way:

Theorem 1. *Let in equation* (1) a_0 *be invertible and* a_i *be non-invertible in* K *for any* $1 \leq i \leq m$. *Then this equation has no more than one solution in* $K[[x]]$.

If, in addition, F *is complete with respect to* $|\cdot|$, *then series* (2) *converges by the topology of coefficientwise convergence (see [7, Chapter 1, Section 3]) in* $K[[x]]$ *and the sum of this series solves* (1).

Let w_k denote the coefficient of x^k of the unknown series $w(x)$. The following statement shows, that we can find the formulas for these coefficients to write the solution in the form $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$.

Remark 1. *Suppose* (2) *converges by coefficientwise topology. Let* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$. *Then* $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} f_{k+n} x^n$. *Thus,*

$$w_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(n+k)!}{n!} f_{k+n}, \tag{4}$$

where these series converge with respect to $|\cdot|$.

The following theorem shows that the invertibility of a_0 is an important condition for the existence of a solution of (1).

Theorem 2. *Suppose* a_i *is non-invertible in* K *for all* $1 \leq i \leq m$. *If equation* (1) *has a solution in* $K[[x]]$ *for every* $f(x) \in K[[x]]$, *then* a_0 *is invertible.*

Proof. Since (1) has a solution for any $f(x)$, then for $f(x) = 1$ also. Writing the degree zero coefficient, we get $\sum_{j=1}^{m} j! a_j w_j + a_0 w_0 = 1$. Since $|a_j| < 1, |w_j| \leq 1$ for any $1 \leq j \leq m$, then $\sum_{j=1}^{m} j! a_j w_j$ is non-invertible element of K. Since valuation is non-Archimedean, then the sum of two non-invertible elements of K is non-invertible, that is K is local. Therefore $1 - \sum_{j=1}^{m} j! a_j w_j = a_0 w_0$ is invertible. Since K is commutative, then a_0 is invertible.

The proof is complete.

Note that in some cases the equation (1) has a unique solution in $K[[x]]$ even if a_0 is not invertible.

Example. Let $K = \mathbb{Z}$ and $m = 1$. For any non-zero coefficients $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$ if $f(x) = a_1 + a_0 x$, then the equation $a_1 w'(x) + a_0 w(x) = f(x)$ has a solution $w(x) = x$. Moreover, this solution is unique, that is the homogeneous equation $a_1 w'(x) + a_0 w(x) = 0$ has only trivial solution. Indeed, if $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$ is a solution of this equation, then $a_1 n w_n = -a_0 w_{n-1}$. Hence for any $n \geq 1$ we get $n! a_1^n w_n = (-1)^n a_0^n w_0$. Let p denote some prime, that is not divisor of a_0. Then for any j there exists n such that $n!$ is divisible by p^j. Thus w_0 is divisible by p^j for any j. It is impossible for any integer $w_0 \neq 0$.

3. Main result

Now suppose a_0 is invertible. Without loss of generality we can assume $a_0 = 1$. Then the sequence $\{c_k\}$ that is found by equality (3) satisfies the following system:

$$\begin{cases} c_0 & = & 1 \\ c_0 + \sum_{i=0}^{j-1} a_i c_{j-i} & = & 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m \\ \sum_{i=0}^{m} a_i c_{j-i} & = & 0, \quad j = m+1, m+2, \dots \end{cases} . \tag{5}$$

Let us rewrite (1) as an infinite linear system of equations. For any $k = 0, 1, 2, \dots$, extracting coefficients of x^k, we get

$$a_0 w_k + a_1 \frac{(k+1)!}{k!} w_{k+1} + \dots + a_j \frac{(k+j)!}{k!} w_{k+j} + \dots + a_m \frac{(k+m)!}{k!} w_{k+m} = f_k, \tag{6}$$

where $w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_n x^n$.

By definition, put $a_i = 0$ for any $i > m$. Then in the matrix form this system of equations can be written as $Aw = f$, where

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 2a_2 & 3!a_3 & 4!a_4 & 5!a_5 & \cdots \\ 0 & 1 & 2a_1 & 3!a_2 & 4!a_3 & 5!a_4 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3!}{2}a_1 & \frac{4!}{2}a_2 & \frac{5!}{2}a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4!}{3!}a_1 & \frac{5!}{3!}a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5!}{4!}a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \text{ and } f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{7}$$

That is $\mathcal{A}$ ia an upper triangular matrix that has the terms $\alpha_{ij} = \frac{(j-1)!}{(i-1)!} a_{j-i}$ for any $0 \le i \le j$ and $\alpha_{ij} = 0$ for any $0 < j < i$.

Similarly as in [5] for any $n \ge 0$ let $\mathcal{A}_n$ be obtained from the matrix $\mathcal{A}_n$ by replacing the $(n+1)$-th column with the vector f. For any $j \ge 0$ by $\tilde{\Delta}_j$ (respectively, $\tilde{\Delta}_{n,j}$) denote the principal corner minor of the $(j+1)$-th order of the matrix $\mathcal{A}$ (respectively, $\mathcal{A}_n$).

Theorem 3. *Suppose F is a complete field of characteristic zero with a non-Archimedean valuation $|\cdot|$, K is the valuation ring of F, $a_0 = 1$ and $|a_i| < 1$ for any $1 \le i \le m$. Then equation* (1) *has a unique solution*

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$$

from $K[[x]]$. The coefficients of this solution can be found using Cramer's rule:

$$w_n = \frac{\det \mathcal{A}_n}{\det \mathcal{A}} = \det \mathcal{A}_n, n = 0, 1, 2, \dots, \tag{8}$$

where the determinants are defined as following limits in K with respect to the valuation $|\cdot|$:

$$\det \mathcal{A} = \lim_{r \to \infty} \tilde{\Delta}_r$$

$$\det \mathcal{A}_n = \lim_{r \to \infty} \tilde{\Delta}_{n,r}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Proof. Note that $\tilde{\Delta}_r = 1$ for any r, so $\det \mathcal{A} = 1$. By Theorem 1 equation (1) has a unique solution over K in the form (2). Let us show that $\det \mathcal{A}_n = w_n$.

Let $\tilde{B}_r$ denote the determinant

$$\tilde{B}_r = \begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3!a_3 & 4!a_4 & 5!a_5 & \cdots & r!a_r \\ 1 & 2a_1 & 3!a_2 & 4!a_3 & 5!a_4 & \cdots & r!a_{r-1} \\ 0 & 1 & \frac{3!}{2}a_1 & \frac{4!}{2}a_2 & \frac{5!}{2}a_3 & \cdots & \frac{r!}{2}a_{r-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4!}{3!}a_1 & \frac{5!}{3!}a_2 & \cdots & \frac{r!}{3!}a_{r-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5!}{4!}a_1 & \cdots & \frac{r!}{4!}a_{r-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{r!}{(r-1)!}a_1 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Let us consider

$$\tilde{\Delta}_{0,r} = \begin{vmatrix} f_0 & a_1 & 2a_2 & 3!a_3 & 4!a_4 & 5!a_5 & \cdots & r!a_r \\ f_1 & 1 & 2a_1 & 3!a_2 & 4!a_3 & 5!a_4 & \cdots & r!a_{r-1} \\ f_2 & 0 & 1 & \frac{3!}{2}a_1 & \frac{4!}{2}a_2 & \frac{5!}{2}a_3 & \cdots & \frac{r!}{2}a_{r-2} \\ f_3 & 0 & 0 & 1 & \frac{4!}{3!}a_1 & \frac{5!}{3!}a_2 & \cdots & \frac{r!}{3!}a_{r-3} \\ f_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5!}{4!}a_1 & \cdots & \frac{r!}{4!}a_{r-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{r-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{r!}{(r-1)!}a_1 \\ f_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Decomposing it relative to the first column, we get

$$\tilde{\Delta}_{0,r} = f_0 - f_1 a_1 + f_2 \begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 \\ 1 & 2a_1 \end{vmatrix} - f_3 \begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3!a_3 \\ 1 & 2a_1 & 3!a_2 \\ 0 & 1 & \frac{3!}{2}a_1 \end{vmatrix} + f_4 \begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3!a_3 & 4!a_4 \\ 1 & 2a_1 & 3!a_2 & 4!a_3 \\ 0 & 1 & \frac{3!}{2}a_1 & \frac{4!}{2}a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4!}{3!}a_1 \end{vmatrix} + \ldots =$$

$$= f_0 - f_1 a_1 + f_2 \tilde{B}_2 - f_3 \tilde{B}_3 + f_4 \tilde{B}_4 - \ldots = f_0 - \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} f_i \tilde{B}_i. \tag{10}$$

In [5] the determinants

$$B_r = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_r \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{r-1} \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-2} \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{r-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 \end{vmatrix} \tag{11}$$

are consedered and there is proved that $B_r = (-1)^r c_r$, where the secuence $\{c_r\}$ is a solution of (5).

Note that

$$\tilde{B}_r = \begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3!a_3 & 4!a_4 & \cdots & k!a_r \\ 1 & 2a_1 & 3!a_2 & 4!a_3 & \cdots & r!a_{r-1} \\ 0 & 1 & \frac{3!}{2}a_1 & \frac{4!}{2}a_2 & \cdots & \frac{r!}{2}a_{r-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4!}{3!}a_1 & \cdots & \frac{r!}{3!}a_{r-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r!}{(r-1)!}a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 3! \cdot \ldots \cdot r! \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_r \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{r-1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}a_1 & \frac{1}{2}a_2 & \cdots & \frac{1}{2}a_{r-2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3!} & \frac{1}{3!}a_1 & \cdots & \frac{1}{3!}a_{r-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(r-1)!}a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2 \cdot 3! \cdot \ldots \cdot r!}{2 \cdot 3! \cdot \ldots \cdot (r-1)!} B_r = r! B_r. \quad (12)$$

Then $\tilde{B}_r = r!(-1)^r c_r$. Hence

$$\tilde{\Delta}_{1,r} = f_0 - \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} f_i \tilde{B}_i = f_0 + \sum_{i=1}^{r} f_i i! c_i = \sum_{i=0}^{r} f_i i! c_i. \quad (13)$$

Thus

$$\frac{\det \mathcal{A}_0}{\det \mathcal{A}} = \frac{\lim_{r\to\infty} \tilde{\Delta}_{0,r}}{\lim_{r\to\infty} \tilde{\Delta}_r} = \lim_{r\to\infty} \sum_{i=0}^{r} i! f_i c_i = \sum_{i=0}^{\infty} i! f_i c_i. \quad (14)$$

It coincides to the w_0 found in Remark 1.

Let us now consider $\mathcal{A}_n$ for any $n \geq 1$ and its minor of i-th order $\tilde{\Delta}_{n,i-1}$. We are interested in the limit by i, so it is enough to consider i such that $i > n$ and $i > m$. Then the principal corner minor $\tilde{\Delta}_{n,i-1}$ is equal to

$$\left|\begin{array}{c|ccccccc}
 & f_0 & (n+1)!a_{n+1} & \cdots & m!a_m & 0 & \cdots & * \\
 & f_1 & (n+1)!a_n & \cdots & m!a_{m-1} & (m+1)!a_m & \cdots & * \\
 & f_2 & \frac{(n+1)!}{2}a_{n-1} & \cdots & \frac{m!}{2}a_{m-2} & \frac{(m+1)!}{2}a_{m-1} & \cdots & * \\
{}^n\overline{\mathcal{A}} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & f_{n-2} & \frac{(n+1)!}{(n-2)!}a_3 & \cdots & \frac{m!}{(n-2)!}a_{m-n+2} & \frac{(m+1)!}{(n-2)!}a_{m-n+3} & \cdots & * \\
 & f_{n-1} & \frac{(n+1)!}{(n-1)!}a_2 & \cdots & \frac{m!}{(n-1)!}a_{m-n+1} & \frac{(m+1)!}{(n-1)!}a_{m-n+2} & \cdots & * \\
\hline
 & f_n & (n+1)a_1 & \cdots & \frac{m!}{n!}a_{m-n} & \frac{(m+1)!}{n!}a_{m-n+1} & \cdots & * \\
\ddots \quad \iddots & f_{n+1} & 1 & \cdots & \frac{m!}{(n+1)!}a_{m-n-1} & \frac{(m+1)!}{(n+1)!}a_{m-n} & \cdots & * \\
0 & f_{n+2} & 0 & \cdots & \frac{m!}{(n+2)!}a_{m-n-2} & \frac{(m+1)!}{(n+2)!}a_{m-n-1} & \cdots & * \\
\iddots \quad \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & f_{i-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right|,$$

where the last i-th column is $(0,\ \cdots,\ 0,\ \frac{(i-1)!}{(i-m-1)!}a_m,\ \cdots,\ \frac{(i-1)!}{(i-3)!}a_2,\ \frac{(i-1)!}{(i-2)!}a_1,\ 1)^\top$ and ${}^n\overline{\mathcal{A}}$ is the square submatrix of $\mathcal{A}$ formed by deleting all rows an columns except the first $n-1$ ones.

We see that its determinant $\tilde{\Delta}_{n,i-1}$ equals

$$\begin{vmatrix}
f_n & (n+1)a_1 & \frac{(n+2)!}{n!}a_2 & \cdots & \frac{m!}{n!}a_{m-n} & \cdots & \frac{(i-1)!}{n!}a_{i-n-1} \\
f_{n+1} & 1 & (n+2)a_1 & \cdots & \frac{m!}{(n+1)!}a_{m-n-1} & \cdots & \frac{(i-1)!}{(n+1)!}a_{i-n-2} \\
f_{n+2} & 0 & 1 & \cdots & \frac{m!}{(n+2)!}a_{m-n-2} & \cdots & \frac{(i-1)!}{(n+2)!}a_{i-n-3} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
f_{i-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Set $\check{B}_0 = 1$ and

$$\check{B}_r = \begin{vmatrix}
(n+1)a_1 & \frac{(n+2)!}{n!}a_2 & \frac{(n+3)!}{n!}a_3 & \frac{(n+4)!}{n!}a_4 & \cdots & \frac{(n+r)!}{n!}a_r \\
1 & (n+2)a_1 & \frac{(n+3)!}{(n+1)!}a_2 & \frac{(n+4)!}{(n+1)!}a_3 & \cdots & \frac{(n+r)!}{(n+1)!}a_{r-1} \\
0 & 1 & (n+3)a_1 & \frac{(n+4)!}{(n+2)!}a_2 & \cdots & \frac{(n+r)!}{(n+2)!}a_{r-2} \\
0 & 0 & 1 & (n+4)a_1 & \cdots & \frac{(n+r)!}{(n+3)!}a_{r-3} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n+r)a_1
\end{vmatrix}. \qquad (16)$$

Then, decomposing $\tilde{\Delta}_{n,i-1}$ relative to the first column, we obtain

$$\tilde{\Delta}_{n,i-1} = \sum_{s=1}^{i-n} (-1)^{s-1} f_{n+s-1} \breve{B}_{s-1}. \tag{17}$$

Note that $\breve{B}_r = \frac{(n+1)!\cdot(n+2)!\cdot\ldots\cdot(n+r)!}{n!\cdot(n+1)!\cdot\ldots\cdot(n+r-1)!} B_r = \frac{(n+r)!}{n!} B_r$. Therefore

$$\tilde{\Delta}_{n,i-1} = \sum_{s=1}^{i-n} (-1)^{s-1} f_{n+s-1} \frac{(n+s-1)!}{n!} B_{s-1} = \sum_{s=0}^{i-n-1} f_{n+s} \frac{(n+s)!}{n!} c_s.$$

Then

$$\lim_{i\to\infty} \tilde{\Delta}_{n,i} = \sum_{s=0}^{\infty} f_{n+s} \frac{(n+s)!}{n!} c_s = w_n.$$

The proof is complete.

Remark 2. *Equality* (12) *shows the connection between the determinants considered and the determinants constructed in the similar situation for the m-th order implicit linear difference equation considered in [5].*

Remark 3. *By [1, Corollary 3] under the conditions of Theorem 3 for the second order equation $a_2 w''(x) + a_1 w'(x) + w(x) = f(x)$ the solution can be found by the following explicit formula:*

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+n)!}{n!} f_{n+j} \sum_{i=0}^{[\frac{j}{2}]} (-1)^{j-i} \binom{j-i}{i} a_1^{j-2i} a_2^i \right) x^n.$$

By Theorem 3 the solution of this equation can be found using the Cramer's rule

$$w_n = \det \mathcal{A}_n = \lim_{r\to\infty} \tilde{\Delta}_{n,r}, n = 0, 1, 2, \ldots$$

It means that for

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 2a_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 2a_1 & 6a_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 3a_1 & 12a_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4a_1 & 20a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{18}$$

the determinant of the matrix formed by replacing the $(n+1)$-th column of $\mathcal{A}$ by the column vector f we can find in the following form:

$$\det \mathcal{A}_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+n)!}{n!} f_{n+j} \sum_{i=0}^{[\frac{j}{2}]} (-1)^{j-i} \binom{j-i}{j} a_1^{j-2i} a_2^i.$$

Acknowledgement. The research was supported by the National Research Foundation of Ukraine funded by Ukrainian State budget in frames of project 2020.02/0096 "Operators in infinite-dimensional spaces: the interplay between geometry, algebra and topology".

REFERENCES

1. S. Gefter, A. Goncharuk, Linear Differential Equation with Formal Power Series Non-Homogeneity Over a Ring with a Non-Archimedean Valuation, ArXiv. – 2021. – DOI: 10.48550/ARXIV.2112.02528.

2. H. Cartan. Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables, Dover Books on Mathematics. – 2013. Courier Corporation, 228 p.

3. E. Kamke. Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. – 2013. (in German) DOI: 10.1007/978-3-663-05925-7.

4. S. Gefter, A. Goncharuk. Generalized backward shift operators on the ring Z[[x]], Cramer's rule for infinite linear systems, and p-adic integers. In: A. Böttcher, D. Potts, P. Stollmann, D. Wenzel (eds) The Diversity and Beauty of Applied Operator Theory. Operator Theory: Advances and Applications, Vol. **268**, Birkhäuser, Cham. – 2018. – P. 247-259. DOI: 10.1007/978-3-319-75996-8_13.

5. A. B. Goncharuk, Implicit linear difference equations over a non-Archimedean ring, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2021. – Vol. **93**. – P. 18–33. DOI: 10.26565/2221-5646-2021-93-03.

6. S. Lang. Algebra. – 2002. DOI: 10.1007/978-1-4613-0041-0.

7. H. Grauert, R. Remmert. Analytische Stellenalgebren (in German), Ser. "Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften". – 1971. DOI: 10.1007/978-3-642-65033-8.

Article history: Received: 15 June 2022; Final form: 22 June 2022
Accepted: 26 June 2022.

How to cite this article:

A. Goncharuk, Cramer's rule for implicit linear differential equations over a non-Archimedean ring, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 95, 2022, p. 39–48. DOI: 10.26565/2221-5646-2022-95-04

Правило Крамера для неявного лінійного диференціального рівняння над неархімедовим кільцем

А. Б. Гончарук
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи 4, Харків, 61022, Україна

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння m-го порядку у кільці формальних степеневих рядів з коефіцієнтами з деякого поля нульової характеристики. Таке рівняння має нескінченно багато розв' язків у цьому кільці – єдиний розв' язок для кожної початкової умови відповідної задачі Коші. Ці розв' язки можуть бути знайдені за допомогою класичних методів теорії диференціальних рівнянь.

Розглянемо таке рівняння у випадку, коли коефіцієнти рівняння і коефіцієнти неоднорідності належать до деякої області цілісності K і будемо шукати розв' язок у вигляді формального степеневого ряду з коефіцієнтами з цієї області цілісності. Методи класичної теорії не дають нам змоги з'ясувати, чи існуватиме початкова умова, що відповідає розв' язку з коефіцієнтами із K і яка саме.

Для роз' вязання цієї задачи ми користуємося методом, що був запропонований у роботі У. Бродджі, який знаходить формальний розв' язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння у вигляді деякого спеціального ряду.

У попередніх роботах знайдено достатні умови існування та єдиності такого розв'язку для деякого класу кілець K з неархімедевим нормуванням. У випадку виконання цих умов розглянуто формальний степеневий ряд, отриманий за допомогою методу Бродджі. Коефіцієнтами цього ряду є суми рядів, які збігаються у розглянутій неархімедовій топології до елементів із кільця K. Показано, що цей ряд є розв' язком нашого рівняння у кільці $K[[x]]$.

Варто відмітити, що таке рівняння у кільці формальних степеневих рядів можна розглядати як нескінченну лінійну систему рівнянь відносно коефіцієнтів невідомого формального степеневого ряду. В цій статті доведено, що цю систему можна розв'язувати за допомогою деякого аналогу методу Крамера, в якому визначники нескінченних матриць знаходяться як границі скінченних визначників у неархімедовій топології.

Ключові слова: **диференціальне рівняння; формальні степеневі ряди; правило Крамера.**

Історія статті: отримана: 15 червня 2022; останній варіант: 22 червня 2022
прийнята: 26 червня 2022.

Правила для авторів
«Вісника Харківського національного університету
імені В. Н. Каразіна»,
Серія «Математика, прикладная математика і механіка»

Редакція просить авторів при направленні статей керуватися наступними правилами.

1. В журналі публікуються статті, що мають результати математичних досліджень (англійською або українською мовами).

2. Поданням статті вважається отримання редакцією файлів статті оформлених у редакторі LATEX (версія 2е), анотацій, відомостей про авторів та архіва, що включає LATEX файли статті та файли малюнків. Файл-зразок оформлення статті можна знайти в редакції журналу та на веб-сторінці (http://vestnik-math.univer.kharkov.ua).

3. Стаття повинна починатися з розширеної анотації (обсягом **не менш ніж 1800 знаків**), в якій повинні бути чітко сформульовані мета та результати роботи. Анотація повинна бути тією мовою (англійською або українською), якою є основний текст статті. Закордонні автори можуть звернутися до редакції за допомогою з перекладом анотацій на українську мову. Повинні бути наведені прізвища, ініціали авторів, назва роботи, ключові слова та номер за міжнародною математичною класифікацією (Mathematics Subject Classification 2010). Анотація не повинна мати посилань на літературу чи малюнки. На першій сторінці вказується номер УДК класифікації. В кінці статті треба додати переклад анотації (обсягом **не менш ніж 1800 знаків**) на другу мову (англійську чи українську).

4. Список літератури повинен бути оформлений латинським шрифтом. Приклади оформлення списка літератури:

1. A.M. Lyapunov. A new case of integrability of differential equations of motion of a solid body in liquid, Rep. Kharkov Math. Soc., – 1893. – 2. V.**4**. – P. 81-85.
2. A.M. Lyapunov. The general problem of the stability of motion. 1892. Kharkov Mathematical Society, Kharkov, 251 p.

5. Кожний малюнок повинен бути пронумерований та представлений окремим файлом в одному з форматів: EPS, BMP, JPG. В файлі статті малюнок повинен бути вставлений автором. Під малюнком повинен бути підпис. Назви файлів малюнків повинні починатись з призища першого автора.

6. Відомості про авторів повинні містити: прізвища, імена, по батькові, службові адреси та номери телефонів, науковий ступінь, посаду, адреси електронних скриньок та інформацію про наукові профайли авторів (orcid.org, www.researcherid.com, www.scopus.com) з відповідними посиланями. Прохання також повідомити прізвище автора, з яким треба вести листування.

7. Рекомендуємо використовувати в якості зразка оформлення останні випуски журналу (vestnik-math.univer.kharkov.ua/currentv.htm).

8. У випадку порушення правил оформлення редакція не буде розглядати статтю.

Електронна скринька: vestnik-khnu@ukr.net
Електронна адреса в Інтернеті: **http://vestnik-math.univer.kharkov.ua**

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна,
Серія "Математика, прикладна математика і механіка", Том 95, 2022 р.

Збірник наукових праць

Англійською та українською мовами

Підписано до друку 30. 06. 2022 р.
Формат $70 \times 108/16$. Папір офсетний. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. 3,2
Обл.– вид. арк. 3,8
Наклад 100 пр. Зам. № 3/2022
Безкоштовно.

Видавець і виготовлювач Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

Видавництво Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
тел. 705-24-32