

ISSN 2221-5646 (Print)
ISSN 2523-4641 (Online)

Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна

Серія

«Математика, прикладна математика і механіка»

Серія започаткована 1965 р.

Том 94



Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"

Vol. 94

Харків
2021

До Вісника включено статті з математичного аналізу, математичної фізики, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних наук, категорія «Б» за спеціальностями 111 - Математика та 113 - Прикладна математика (Наказ МОН України №1643 від 28.12.2019 р.).

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 12 від 29 листопада 2021 р.).

Головний редактор—Коробов В.І.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ ім. В.Н. Каразіна, Україна

Члени редакційної колегії:

Кадець В.М.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Пацегон М.Ф.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Фаворов С.Ю.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Єгорова І.Є.—д-р ф.-м. наук, проф., ФТІНТ НАН України

Пастур Л.А.—д-р ф.-м. наук, проф., акад. НАН України, ФТІНТ НАН України

Хруслов Є.Я.—д-р ф.-м. наук, проф., акад. НАН України, ФТІНТ НАН України

Шепельський Д.Г.—д-р ф.-м. наук, проф., ФТІНТ НАН України та

ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Когут П.І.—д-р ф.-м. наук, проф., Дніпровський національний університет

імені Олеса Гончара, м.Дніпро, Україна

Чуйко С.М.—д-р ф.-м. наук, проф., Інститут прикладної математики і

механіки НАН України, м.Слов'янськ, Україна

Домбровський А.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Щецина, Польща

Карлович Ю.І.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Морелос, Мехіко, Мексика

Корбич Йозеф—д-р ф.-м. наук, проф., чл.-кор. ПАН, Університет Зелона Гора, Польща

Нгуєн Хоа Шон—д-р ф.-м. наук, проф., Академія наук та технології В'єтнама,

Інститут математики, Ханой, В'єтнам

Поляков А.І.—д-р ф.-м. наук, проф., ІНРІА Національний дослідницький інститут

інформатики та автоматики, Ле-Шене, Франція

Скляр Г.М.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Щецина, Польща

Солдатов О.П.—д-р ф.-м. наук, проф., Белгородський університет, Росія

Відповідальний секретар – Резуєнко О.В., д-р ф.-м. наук

ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Editor-in-Chief – V.I. Korobov—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Associate Editors:

S.Yu. Favorov—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

V.M. Kadets—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

N.F. Patsegon—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

I.E. Egorova—Dr. Sci., Prof., B.Verkin Institute for Low Temperature Physics

and Engineering, Ukraine

E.Ya. Khruslov—Dr. Sci., Prof., academician of NASU,

B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine

L.A. Pastur—Dr. Sci., Prof., academician of NASU,

B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine

D.G. Shepelsky—Dr. Sci., Prof., B.Verkin Institute for Low Temperature Physics

and Engineering, Ukraine

S.M. Chujko—Dr. Sci., Prof., Donbas State Pedagogical University, Ukraine

P.I. Kogut—Dr. Sci., Prof., Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine

Andrzej Dabrowski—Dr. Sci., Prof., University of Szczecin, Poland

Yu. Karlovich—Dr. Sci., Prof., Morelos University, Mexico

Jozef Korbicz—Dr. Sci., Prof., corresponding member of PAS, University of Zielona Gora, Poland

Nguyen Khoa Son—Dr. Sci., Prof., Vietnamese Academy of Science and Technology,

Institute of Mathematics, Hanoi, Vietnam

A.E. Polyakov—Dr. Sci., Prof., INRIA Institut National de Recherche

en Informatique et en Automatique, Le Chesnay, France

G.M. Sklyar—Dr. Sci., Prof., University of Szczecin, Poland

O.P. Soldatov—Dr. Sci., Prof., Belgorod University, Russia

Responsible Editor—A.V. Rezouencko, Dr. Sci., Associate Prof.,

V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Адреса редакційної колегії: 61022, Харків, майдан Свободи, 4, ХНУ імені В.Н. Каразіна,

ф-т математики і інформатики, к. 7-27, т. 7075240, 7075135, **e-mail:** vestnik-khnu@ukr.net

Інтернет: <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>; http://periodicals.karazin.ua/mech_math

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21568-11468 Р від 21.08.2015

©Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, оформлення, 2021

ЗМІСТ

Рабах Рабах. Про точну керованість та повну стабілізацію для лінійних систем	4
Поляков А. Про однорідні функції керованості	24
Павличков С. С. Теорема про мале посилення для стійкості вхід-стан за скінченний час нескінченних мережевих систем і її застосування	40
Чуйко С. М., Чуйко О. В., Шевцова К. С. Лінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача з виродженим імпульсним впливом	60
Харченко Д. С. Форма хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі	77
До 80-річчя Коробова В. І.	91

CONTENTS

Rabah Rabah. On exact controllability and complete stabilizability for linear systems	4
A. Polyakov. On homogeneous controllability functions	24
S. S. Pavlichkov. A small gain theorem for finite-time input-to-state stability of infinite networks and its applications	40
S. M. Chuiko, E. V. Chuiko, K. S. Shevtsova. Linear differential-algebraic boundary value problem with singular pulse influence	60
D. S. Kharchenko. The shape of wave-packets in a three-layer hydrodynamic system	77
V. I. Korobov. To the 80th anniversary	91

СОДЕРЖАНИЕ

Рабах Рабах. О точной управляемости и полной стабилизируемости линейных систем	4
Поляков А. Об однородных функциях управляемости	24
Павличков С. С. Теорема о малом усилении для устойчивости вход-состояние за конечное время бесконечных сетевых систем и ее применения	40
Чуйко С. М., Чуйко Е. В., Шевцова Е. С. Линейная дифференциально-алгебраическая краевая задача с вырожденным импульсным воздействием	60
Харченко Д. С. Форма волновых пакетов в трехслойной гидродинамической системе	77
К 80-летию Коробова В. И.	91

On exact controllability and complete stabilizability for linear systems

Rabah Rabah

*IRCCyN, École des mines de Nantes
1 Rue de la Noë, 44300 Nantes, France
rabah3.14159@gmail.com*

This paper concerns the relation between exact controllability and stabilizability with arbitrary decay rate in infinite dimensional spaces. It appears that in several cases the notions are equivalent, but there are a lot of situations when additional conditions are needed, for example in Banach spaces. This is a short and non exhaustive review of some research on control theory for infinite dimensional spaces initiated by V. I. Korobov during the 70th of the past century in Kharkov State University.

Keywords: Exact controllability; complete stabilizability; infinite dimensional systems; neutral type.

Рабах Рабах. **Про точну керованість та повну стабілізацію для лінійних систем.** У цій статті йдеться про зв'язок між точною керованістю та стабілізацією з довільною швидкістю спаду в нескінченномірних просторах. У кількох випадках поняття є еквівалентними, але є багато ситуацій, коли потрібні додаткові умови, наприклад у просторах Банаха. Це короткий і невичерпний огляд деяких досліджень теорії керування для нескінченновимірних просторів, ініційованих В. І. Коробовим в 70-х роках минулого сторіччя у Харківському державному університеті.

Ключові слова: Точна керованість; повна стабілізація; нескінченновимірні системи; нейтральний тип.

Рабах Рабах. **О точной управляемости и полной стабилизируемости линейных систем.** В статье рассматривается связь между точной управляемостью и стабилизируемостью с произвольной скоростью убывания в бесконечномерных пространствах. В некоторых случаях понятия эквивалентны, но существует множество ситуаций, когда требуются дополнительные условия, например, в банаховых пространствах. Это краткий и неполный обзор некоторых исследований по теории управления для бесконечномерных пространств, начатых В. И. Коробовым в 70-е годы прошлого века в Харьковском государственном университете.

Ключевые слова: Точная управляемость; полная стабилизируемость; бесконечномерные системы; нейтральный тип.

2010 Mathematics Subject Classification: 93B05, 93D15, 93C23, 93C43.

1. Introduction

We consider linear systems in the general form

$$\dot{x} = \mathcal{A}x + \mathcal{B}u, \quad (1)$$

where the state $x(t)$ and the control $u(t)$ take values in Banach spaces X and U . The linear operator \mathcal{A} is the infinitesimal generator of a C_0 -semigroup $S(t) = e^{At}$ and \mathcal{B} is a linear bounded operator. We consider also the cases of Hilbert spaces and some situation when \mathcal{B} is an unbounded but admissible operator. The function $u(t)$ is supposed, at least, Bochner integrable.

By exact (null) controllability we mean controllability from any state to any state (or zero state). By complete stabilizability we mean exponential stabilizability with arbitrary decay rate by linear state feedback $u = \mathcal{F}x$. Sometimes the problem is called pole or spectrum assignment.

The well known relation between complete controllability and pole assignment in finite dimensional spaces X and U may be formulated in the following form.

Theorem 1. *Let A and B be (real or complex) matrices of dimension $n \times n$ and $n \times m$ respectively, x and u vector functions of suitable dimension. The system*

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2)$$

is completely controllable, i.e. $\text{rank}[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = n$, if and only if the system is completely stabilizable, i.e. for all $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, there exists a feedback $u = Fx$ such that the spectrum of the closed loop system verifies:

$$\sigma(A + BF) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\},$$

i.e. the problem of pole assignment by linear feedback is solvable.

A nice proof in the general case can be found in [33]. If the system is assumed to be real (matrices are all real), the spectrum is formed by real or complex conjugate numbers.

Another formulation of the same statement is that all the poles are controllable (Hautus criteria):

$$\forall \lambda \in \sigma(A), \quad \text{rank}[\lambda I - A \ B] = n.$$

Our purpose is to discuss some important results on the same problems in infinite dimensional Hilbert or Banach spaces. Since the spectrum is more complicated and the behavior of infinite dimensional systems is not completely determined by the spectrum, solutions of such problems, when they exist, are not so simple.

We recall some classical results concerning the relation between exact controllability and complete stabilizability.

The first important result in this context was given by Slemrod: if e^{At} is a group, then exact controllability implies complete stabilizability. The converse, for a group, was proved by Zabczyk (see for example [34]). The result was generalized and precised by several authors for the case of a bounded operator \mathcal{A} in Banach spaces, for the case of a semigroup e^{At} and for some classes of systems, governed by partial differential equations or functional-differential equations.

We discuss more precisely the relations between exact (null) controllability and complete stabilizability. In general, for linear systems in Hilbert spaces, exact null controllability implies complete stabilizability, but the converse is not true. We give more recent results on functional-differential systems of neutral type.

2. Preliminaries

In this section we give some definitions and well known basic results on exact controllability and stabilizability for System (1). The mild solution (strong for $x_0 \in D(\mathcal{A})$ and some restrictions on the class of controls u) is given by

$$x(t) = x(t, u(\cdot), x_0) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathcal{B}u(\tau)d\tau. \quad (3)$$

Definition 1. *System (1) is exactly controllable if for all $x_0, x_1 \in X$, there exists a time T and a control $u \in L_p(0, T; U)$, $p \geq 1$ (shortly L_p) such that $x(T, u(\cdot), x_0) = x_1$. If the same holds for $x_1 = 0$, we talk about exact null controllability. If e^{At} is a group, or if it is formed by surjective operators, then both notions are equivalent. If necessary, the class of controls L_p will be specified.*

The notion of stabilizability is based on one concept of asymptotic stability. In infinite dimensional spaces there are several ones. In this paper we consider only exponential stability.

Definition 2. *The semigroup e^{At} , or the uncontrollable system, is said to be exponentially stable if for some real $M \geq 1$, $\omega > 0$, and for all $t \geq 0$, we have $\|e^{At}\| \leq Me^{-\omega t}$.*

In finite dimensional space exponential stability is characterized by the fact that the spectrum of matrix A is in the left half complex plane. The situation in infinite dimensional spaces is much more complicated, see for example [32] and references therein.

Definition 3. *System (1) is said exponentially stabilizable if there exists a linear feedback control $u(t) = \mathcal{F}x(t)$ such that the closed loop system becomes exponentially stable, i.e. for some $\omega > 0$*

$$\|e^{(A+\mathcal{B}\mathcal{F})t}\| \leq M_\omega e^{-\omega t}, \quad M_\omega \geq 1.$$

The system is said to be completely stabilizable if it is exponentially stabilizable for all $\omega > 0$.

In some cases the feedback F is allowed to be not bounded but admissible in some sense.

Complete stabilizability replaces the notion of spectrum assignment which is difficult to be expressed in infinite dimensional spaces. The first reason is that the structure of the spectrum may be complicated and the second one is that, what is noted before, the behavior of the solutions of the systems is not determined by the spectrum only. However, in some cases it is possible to consider this concept also, as we will see later.

Let us now give some general characterizations of the given concepts. We denote by \mathcal{R}_T the "reachability" operator

$$\mathcal{R}_T u(\cdot) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} \mathcal{B}u(\tau) d\tau.$$

It is easy to see that this is a linear bounded operator from L_p to X . System (1) is exactly controllable if and only if $\text{Im } \mathcal{R}_T = X$, it is exactly null controllable if and only if $\text{Im } \mathcal{R}_T \subset \text{Im } e^{AT}$, for some $T > 0$.

The surjectivity of the operator \mathcal{R}_T in Banach spaces can be characterized by the following property of the adjoint operator \mathcal{R}_T^* (see, for instance, [27])

$$\exists \delta > 0 : \quad \forall x^* \in X^*, \quad \|\mathcal{R}_T^* x^*\| \geq \delta \|x^*\|, \tag{4}$$

where norms are operator or vector norms in the adjoint space. To obtain a more or less explicit condition of exact controllability we need the expression of adjoint operator and the norm $\|\mathcal{R}_T^* x^*\|$. We have the following expressions [19]:

$$\begin{cases} \|\mathcal{R}_T^* x^*\| = \left(\int_0^T \|\mathcal{B}^* S^*(t) x^*\|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{if } u \in L_p, \quad p > 1, \\ \|\mathcal{R}_T^* x^*\| = \text{ess sup} \{ \|\mathcal{B}^* S^*(t) x^*\|, \quad t \in [0, T] \}, & \text{if } u \in L_1, \end{cases} \tag{5}$$

where ess sup denotes the essential supremum of a set. In fact, it is possible to show that the conditions of exact controllability in the class of controls L_p for $p > 1$ are equivalent and exact controllability in the class L_1 is essentially different. This can be summarized by the following formulation.

Theorem 2 ([19]). *System (1) is exactly controllable in the class L_p if and only if*

1. For $p = 1$, if $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}^* S^*(t) x_n^* = 0$ **uniformly** almost everywhere on $[0, T]$ implies $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^* = 0$.
2. For $p > 1$, if $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}^* S^*(t) x_n^* = 0$ almost everywhere on $[0, T]$ implies $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^* = 0$.

This implies a necessary condition of exact controllability in the class L_p for $p > 1$: operators $S(t) = e^{At}$ are surjective for all $t \geq 0$.

This gives, in particular, the lack of exact controllability in the class L_p for $p > 1$ for compact or analytic semigroups (see [30, 31, 11]). The following example shows that there exist systems which are exactly controllable in the class L_1 , but not exactly controllable in classes L_p , $p > 1$.

Example 1 ([19]). Let $X = U = \ell_2$, $\{e_i, i = 1, 2, \dots\}$ be the canonical basis in ℓ_2 . Let \mathcal{B} be defined as the identity operator $\mathcal{B} = \mathcal{I}$, and

$$\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^{\infty} -i\langle x, e_i \rangle e_i, \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} i^2 |\langle x, e_i \rangle|^2 < \infty.$$

It is easy to see that \mathcal{A} is the infinitesimal generator of a C_0 -semigroup

$$S(t)x = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-it} \langle x, e_i \rangle e_i, \quad t \geq 0$$

of compact operators for $t > 0$. The system is exactly controllable in the class L_1 , because $\|R_T^* x^*\|_{L^\infty} = \|x^*\|$, but not in the class L_p , $p > 1$, the operators $S(t)$ being not surjective for $t > 0$. \square

Let us now consider the problem of null exact controllability. The characterization of this concept is not so clear in general Banach spaces. It is more simple when X and U are Hilbert spaces. This is due to the following classical result.

Theorem 3 (Douglas (1966), [4]). *Let C and D be linear bounded operators in Hilbert spaces: $C \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $D \in \mathcal{L}(H_3, H_2)$. The following conditions are equivalent:*

1. $\text{Im } C \subset \text{Im } D$.
2. There is a linear bounded operator E such that $C = DE$.
3. $\exists \mu \geq 0 : \forall x \in H_2$ we have $\|C^*x\|^2 \leq \mu^2 \|D^*x\|^2$.

This means that in Hilbert spaces the condition of exact null controllability $\text{Im } \mathcal{R}_T \subset e^{AT}$ may be characterized as follows.

Theorem 4. *Let us suppose that X and U are Hilbert spaces. Then the system (1) is exactly null controllable in the class L_2 if and only if*

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in X, \int_0^T \|\mathcal{B}^* S^*(t)x\|^2 dt \geq \delta^2 \|S^*(T)x\|^2.$$

As it was pointed out by several authors (including Douglas, see for example [6]), Theorem 3 is not true in this form in general Banach spaces. Some other formulations are possible (see, for instance, [6, 1]). We cannot develop this question here, but we will return to the application of Douglas theorem in Section 4.1.

3. Exact controllability implies complete stabilizability

In the section we will see how exact controllability can imply complete stabilizability. The main framework here is the Hilbert spaces setting.

Consider System (1) in the case of Hilbert spaces X and U . Under the condition that the operator \mathcal{A} is the infinitesimal generator of a group e^{At} , $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(U, X)$, Slemrod [29] obtained the first result in this way:

The condition

$$\exists \delta > 0, \forall x \in X : \int_0^T \|\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* \tau} x\|^2 d\tau \geq \delta \|x\|^2 \tag{6}$$

implies complete stabilizability

$$\forall \omega > 0, \exists \mathcal{F} \in \mathcal{L}(X, U), \quad \|e^{(A+\mathcal{B}\mathcal{F})t}\| \leq M_\omega e^{-\omega t}, \quad M_\omega \geq 1,$$

with a linear bounded feedback \mathcal{F} given by $\mathcal{F} = -\mathcal{B}^* K_\omega^{-1}(T)$, where

$$K_\omega(T) = \int_0^T e^{-2\omega t} e^{-A\tau} \mathcal{B} \mathcal{B}^* e^{-A^* \tau} d\tau.$$

This operator $K_\omega(T)$ is, in fact, the Gramian of the system

$$\dot{x} = Ax + \omega x + \mathcal{B}u,$$

and the group $S_\omega(t) = e^{\omega t} e^{At}$ has the infinitesimal generator $(A + \omega I)$.

The inequality in (6) is the condition of exact controllability at time T in the case of a group, and in Hilbert spaces. It corresponds to the Kalman integral criterion:

$$K_0(T) = \int_0^T e^{-A\tau} \mathcal{B} \mathcal{B}^* e^{-A^* \tau} d\tau$$

is bounded invertible. The fact that this is a necessary and sufficient condition of exact controllability in Hilbert spaces was published first (to the best of our knowledge) in [14] for the case of a bounded operator \mathcal{A} , but the proof, based on Theorem 3 (see [4]), can easily be rewritten in the case of a group e^{At} with unbounded operator \mathcal{A} , or directly from (4).

We can formulate this result as follows.

Theorem 5. For System (1), where \mathcal{A} is the infinitesimal generator of a group, U and X being Hilbert spaces, exact controllability implies complete stabilizability.

Доказательство. This is a short proof, see [29] for more details. Let $\omega > 0$ be given. Let us take the feedback control

$$u(t) = \mathcal{F}x(t) = -\mathcal{B}^* K_\omega^{-1}(T)x(t).$$

We obtain then the closed loop system

$$\dot{x}(t) = (\mathcal{A} + \omega\mathcal{I} - \mathcal{B}\mathcal{B}^* K_\omega^{-1}(T))x(t),$$

where \mathcal{I} is the identity operator, and the solution is given by the group $S_{\omega\mathcal{F}}^*(t)$ generated by the operator

$$\mathcal{A} + \omega\mathcal{I} - \mathcal{B}\mathcal{B}^* K_\omega^{-1}(T).$$

Let $x_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$, then a simple calculation gives (see Appendix in [29]):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle S_{\omega\mathcal{F}}^*(t)x_0, K_\omega(T)^{-1} S_{\omega\mathcal{F}}^*(t)x_0 \rangle = \\ -\|e^{-\omega T} \mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* T} S_{\omega\mathcal{F}}^*(t)x_0\|^2 - \|\mathcal{B}^* S_{\omega\mathcal{F}}^*(t)x_0\|^2. \end{aligned}$$

By density of $D(\mathcal{A}^*)$, this implies the uniform boundedness of $S_{\omega\mathcal{F}}(t)$

$$\exists M \geq 1, \quad \|S_{\omega\mathcal{F}}(t)\| \leq M, \quad t \geq 0.$$

This means that for all $\omega > 0$, there exists a feedback law \mathcal{F} , such that

$$\|S_{\mathcal{F}}(t)\| = \|e^{(\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{F})t}\| \leq M e^{-\omega t}, \quad t \geq 0.$$

This means that the system is completely stabilizable. \square

Following Slemrod and using some results by Lions, Komornik [9] proved an analogous result for the case when \mathcal{B} is unbounded. This was applied to systems governed by PDE with boundary control.

Shortly, with some conditions on the operator \mathcal{B} , complete stabilizability is obtained from exact controllability and the feedback is

$$\mathcal{F} = -J\mathcal{B}^* K_\omega^{-1}, \quad K_\omega = \int_0^T e^{-2\omega t} e^{-\mathcal{A}t} \mathcal{B} J \mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} dt,$$

where J is the canonical Riesz isomorphism.

Example 2. This allows to obtain the complete stabilization of systems like

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{w}(t, \xi) - \nabla w(t, \xi) = 0, \quad (t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ w(0, \xi) = f(\xi), \quad \xi \in \Omega \\ \dot{w}(0, \xi) = g(\xi), \quad \xi \in \Omega \\ w(t, \xi) = u(t, \xi) \quad \xi \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

The boundary control is given by the formula

$$u(t, \xi) = \mathcal{F}w(t, \xi) = -JB^*K_\omega^{-1}(w(t, \xi), \dot{w}(t, \xi))$$

defined in the space $H_{-1}(\Omega) \times L_2(\Omega)$:

$$u(t, \xi) = \partial_\nu(Pw(t, \xi) + Q\dot{w}(t, \xi)),$$

where P and Q are linear and bounded. □

In the general case of a semigroup, we have the following implication:

Theorem 6. *For System (1) in Hilbert spaces, with bounded operator \mathcal{B} , exact controllability to zero implies complete stabilizability by bounded feedback \mathcal{F} .*

This is a consequence of the following result implicitly contained in the paper by Datko [3] (see also [34, Ch. III. 4]).

Theorem 7. *Exactly null controllable systems are exponentially stabilizable.*

The latter and the following remark give Theorem 6.

Remark 1. *Controllability of System (1) is equivalent to controllability of the shifted system:*

$$\dot{x} = Ax + \omega x + \mathcal{B}u.$$

This result may be extended to the case of an unbounded control operator.

We consider the same system (1) in Hilbert spaces, with possible unbounded \mathcal{B} and \mathcal{F} , they are supposed to be admissible in a certain sense:

\mathcal{B} bounded from U to the space X_{-1} which is the completion of X with the norm $\|(\lambda I - A)^{-1}x\|$.

Theorem 8 ([24]). *If system (1), in Hilbert spaces, with admissible operator \mathcal{B} is exactly null controllable in X_{-1} , then it is completely stabilizable by an admissible feedback and then, finally, by a bounded feedback \mathcal{F} .*

The converse is not true, and there are different situations [24].

Example 3. In the space $L_2(0, +\infty)$, consider the semigroup

$$S(t)f(\xi) = e^{-\frac{t^2}{2} - \xi t} f(\xi + t), \quad t \geq 0, \quad \xi \geq 0.$$

It is not difficult to see that for this semigroup:

$$\forall \omega > 0, \quad \exists M_\omega \geq 1, \quad \|S(t)\| \leq M_\omega e^{-\omega t}.$$

We have $\sigma(S(t)) = \{0\}$ and then $\sigma(\mathcal{A}) = \emptyset$.

It is easy to see that, for some $f \neq 0$ we have $S(t)f \neq 0$ for any $t \geq 0$. The system is completely stabilizable ($\mathcal{B} = 0$) but not controllable. \square

Example 4. In the space $L_2(0, 1)$, consider the semigroup

$$S(t)f(\xi) = \begin{cases} f(\xi + t) & 0 \leq t + \xi \leq 1, \\ 0 & t + \xi > 1. \end{cases}$$

It is not difficult to see that for this semigroup

$$\forall \omega > 0, \quad \exists M_\omega \geq 1, \quad \|S(t)\| \leq M_\omega e^{-\omega t}.$$

We have $\sigma(S(t)) = \{0\}$ and then $\sigma(\mathcal{A}) = \emptyset$.

For any initial function $f \in L_2(0, 1)$, we have $S(t)f(x) = 0$ for $t > 2$. This means that $S(t) = 0$, for all $t > 2$. Then, for any control operator \mathcal{B} , the system is exactly null controllable at time $T > 2$ with the trivial control $u = 0$. \square

4. Complete stabilizability implies exact controllability

In this Section we consider how complete stabilizability may imply exact (null) controllability, and is there an equivalence in some situation as in finite dimensional spaces.

4.1. Banach space, bounded case

Consider System (1) where operators \mathcal{A} and \mathcal{B} are linear, bounded: $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X)$ and $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(U, X)$. This means that it is not the case of partial differential or functional-differential equations (with delay). Anyway, it is of historical and theoretical interest.

An important result on complete stabilizability was obtained in [28]. First we formulate result about exact controllability.

Theorem 9 (Korobov-Rabah (1979), [10]). *System (1) is exactly controllable if and only if there exists $k \in \mathbb{N}$ such that*

$$\text{Im} [\mathcal{B} \ \mathcal{A}\mathcal{B} \ \cdots \ \mathcal{A}^k \mathcal{B}] = X, \tag{7}$$

where $[\mathcal{B} \ \mathcal{A}\mathcal{B} \ \cdots \ \mathcal{A}^k \mathcal{B}]$ is acting from $U \times \cdots \times U$ to X and the condition is independent on the class of controls.

In fact the exact controllability holds in the class of piece-wise controls, when the condition of the theorem is verified.

Theorem 10 (Sklyar (1982), [28]). *System (1) with bounded operators is completely stabilizable if and only if the block operator $[\mathcal{B} \ \mathcal{A}\mathcal{B} \ \dots \ \mathcal{A}^k\mathcal{B}]$ is right invertible for some k :*

$$\exists \mathcal{P}_i \in \mathcal{L}(X, U), \ i = 0, 1, \dots, k : \quad \mathcal{B}\mathcal{P}_0 + \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{A}^k\mathcal{B}\mathcal{P}_k = I. \quad (8)$$

There is a spectral formulation, which is a consequence of the following result.

Theorem 11 (Kaashoek and al. (1983), [7]). *The operator $[\mathcal{B} \ \mathcal{A}\mathcal{B} \ \dots \ \mathcal{A}^k\mathcal{B}]$ is right invertible for some k if and only if operators $[\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A} \ \mathcal{B}]$, from $X \times U$ to X are right invertible for all $\lambda \in \mathbb{C}$, i.e.*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \exists \mathcal{Q}_\lambda \in \mathcal{L}(X), \exists \mathcal{P}_\lambda \in \mathcal{L}(X, U) : \quad (\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})\mathcal{Q}_\lambda + \mathcal{B}\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{I}. \quad (9)$$

This gives a spectral formulation of the characterization of complete stabilization.

Theorem 12. *System (1) is completely stabilizable if and only if operators $[\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A} \ \mathcal{B}]$ are right invertible for all $\lambda \in \mathbb{C}$.*

If U, X are Banach spaces, not isomorphic to Hilbert spaces, the condition (8) (or the spectral formulation (9)) is more than exact controllability, it is equivalent to the following two conditions:

1. $\text{Im} [\mathcal{B} \ \mathcal{A}\mathcal{B} \ \dots \ \mathcal{A}^k\mathcal{B}] = X$, i.e. exact controllability by Theorem 9.
2. $\text{Ker} [\mathcal{B} \ \mathcal{A}\mathcal{B} \ \dots \ \mathcal{A}^k\mathcal{B}]$ is complemented.

This means that in Banach spaces (not isomorphic to Hilbert spaces) there are exactly controllable systems, generated by a group, which are not completely stabilizable.

Example 5 (Sklyar (1982)). Consider the Banach space U which has at least a subspace L which cannot be complemented in U . Let X be the factor space U/L and \mathcal{B} be the canonical projection of U onto $X = U/L$. The operator \mathcal{B} is then onto (surjective). This means that the system

$$\dot{x} = x + \mathcal{B}u,$$

is exactly controllable because $\text{Im} \mathcal{B} = X$ (here $\mathcal{A} = \mathcal{I}$). If we suppose that it is completely stabilizable, then, according to Theorem 8, there exists $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(X, U)$ such that $\mathcal{F}\mathcal{P} = \mathcal{I}$, and $\text{Ker} \mathcal{P} = L$ can be complemented. This is in contradiction with the construction of L . \square

The result of Theorem 10 was proved in [13] without citing the original result [28].

The situation is different in Hilbert spaces: every closed subspace can be complemented and the equivalence between range condition (7) and right invertibility (8) can be given by Douglas theorem.

Remark 2. *When this paper was under review, appeared a conference paper [12] on exact controllability and complete stabilizability (in fact arbitrary assignability of the Bohl exponent) of a class of linear non-stationary discrete systems in Banach spaces. The main result concerns a case when the state operator is constant, the control operator is periodic, the space X is a reflexive Banach space and U is a separable Hilbert space: it is claimed that exact controllability implies arbitrary assignability of Bohl exponents. No proofs are given in this paper.*

4.2. Hilbert spaces, bounded case, spectrum assignment

In Hilbert spaces, exact controllability is equivalent to complete stabilizability, but more precisely we have a pole assignment result which may be interesting, at least in operator theory.

Theorem 13 (Eckstein (1981) [5]). *The system (1) is exactly controllable if and only if for every nonempty compact set $\Lambda \subset \mathbb{C}$, there is a bounded linear feedback \mathcal{F} , such that*

$$\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{F}) = \Lambda,$$

i.e. the problem of spectrum assignment is solvable.

The proof uses explicitly the Hilbert space structure, in particular the fact that the subspace $\text{Ker}[\mathcal{B} \ \mathcal{A}\mathcal{B} \ \cdots \ \mathcal{A}^k\mathcal{B}]$ can always be complemented. There is also a dual formulation of this result in [7] and a constructive approach of the dual operator corresponding to \mathcal{F} : let \mathcal{C} be an operator from X to the Hilbert space Y , find \mathcal{K} such that $\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{K}\mathcal{C}) = \Lambda$. This appears in the problem of detectability and construction of asymptotic observers.

To summarize the characterization in Hilbert spaces, when the operators are bounded, we can formulate as follows.

Theorem 14. *Let U and X be Hilbert spaces, \mathcal{A} and \mathcal{B} be linear bounded operators. The following statements are equivalent*

1. *The system (1) is exactly controllable in the class L_2 .*
2. *For every nonempty compact set $\Lambda \subset \mathbb{C}$, there is a bounded linear feedback \mathcal{F} , such that*

$$\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{F}) = \Lambda,$$

i.e. the problem of spectrum assignment is solvable.

3. *$\text{Im}[\mathcal{B} \ \mathcal{A}\mathcal{B} \ \cdots \ \mathcal{A}^k\mathcal{B}] = X$ for some $k \in \mathbb{N}$,*

4. $\text{Im} [\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A} \ \mathcal{B}] = X$ for all $\lambda \in \mathbb{C}$.

This is a complete analog of Theorem 1.

4.3. Unbounded case in Hilbert spaces

We return to the system (1) with unbounded \mathcal{A} and bounded \mathcal{B} .

Theorem 15 (Megan (1975), Zabczyk (1976), see [34]). *If e^{-At} is a group and the system (1) in Hilbert spaces is completely stabilizable, then it is exactly controllable.*

This result was extended to the case of surjective operators e^{-At} , $t \geq 0$ by Rabah & Karrakchou (1997) and Zeng & Xie & Guo (2013), see [23, 35].

We can summarize as:

Theorem 16. *The system (1) in Hilbert spaces, with a bounded operator \mathcal{B} , is exactly controllable in the class L_2 if and only if*

1. Operators e^{At} are surjective for $t \geq 0$.
2. The system is completely stabilizable.

Exact controllability is equivalent to exact null controllability when e^{At} are surjective for $t \geq 0$.

But what about exact controllability in the class L_1 in this context? Surjectivity of operators e^{At} is not needed. Let us return to Example 1.

Example 6 (Example 1 continued). As we saw, the system is exactly controllable in the class L_1 but not in the class L_p for $p > 1$. Let us show that it is completely stabilizable by a bounded feedback. Let us take arbitrary $\omega > 0$ and $n \in \mathbb{N}$ such that $n > \omega$. Define operator \mathcal{F} from $X = \ell_2$ to $U = \ell_2$ by

$$\mathcal{F}x = \sum_{i=1}^{n-1} (i - n) \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Then

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{F})x = \sum_{i=1}^{n-1} -n \langle x, e_i \rangle e_i + \sum_{i=n}^{\infty} -i \langle x, e_i \rangle e_i,$$

which gives for the semigroup $S_{\mathcal{F}}(t) = e^{(\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{F})t}$

$$\|e^{(\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{F})t}x\|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} e^{-2nt} |\langle x, e_i \rangle|^2 + \sum_{i=n}^{\infty} e^{-2it} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq e^{-2nt} \|x\|^2.$$

And this means that

$$\|e^{(\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{F})t}\| \leq e^{-nt} \leq e^{-\omega t},$$

i.e. the system is completely stabilizable. □

5. The case of neutral type systems

We consider some large class of neutral type systems

$$\dot{z}(t) = A_{-1}\dot{z}(t-1) + \mathcal{L}z_t(\cdot) + Bu(t), \quad (10)$$

where

$$\mathcal{L}z_t(\cdot) = \int_{-1}^0 [A_2(\theta)\dot{z}(t+\theta) + A_3(\theta)z(t+\theta)] d\theta,$$

with $z(t)$ taking values in \mathbb{R}^n and $u(t)$ in \mathbb{R}^p . The system can be written as

$$\dot{x} = \mathcal{A}x + \mathcal{B}u, \quad (11)$$

where \mathcal{A} is the infinitesimal generator of a C_0 -semigroup $e^{\mathcal{A}t}$ given in the product space $M_2(-1, 0; \mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n \times L_2(-1, 0; \mathbb{R}^n)$, noted shortly M_2 , and \mathcal{A}, \mathcal{B} are defined by

$$\mathcal{A}x(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}z_t(\cdot) \\ \frac{dz_t(\theta)}{d\theta} \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} z(t) \\ z_t(\cdot) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}u(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

with the domain $D(\mathcal{A})$ given by

$$D(\mathcal{A}) = \{(v, \varphi) \in M_2 : \varphi(\cdot) \in H^1, v = \varphi(0) - A_{-1}\varphi(-1)\}.$$

The characteristic matrix is noted by

$$\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda I - A_{-1}e^{-\lambda} - \lambda \int_{-1}^0 A_2(\theta)e^{s\theta} d\theta - \int_{-1}^0 A_3(\theta)e^{s\theta} d\theta.$$

The behavior of the dynamical system is described by the spectrum:

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda : \det \Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0\}.$$

The set $\sigma(\mathcal{A})$ is formed by eigenvalues of finite multiplicity, see for example [21] and references therein.

5.1. Complete stabilizability

It is characterized by two conditions: one on the spectrum $\sigma(\mathcal{A})$, the second on the neutral term (here A_{-1}).

Theorem 17 ([20]). *The system (10), in abstract form (11), is completely stabilizable if and only if*

1. For all $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{rank} \begin{bmatrix} \Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) & B \end{bmatrix} = n$.
2. For all $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$, $\text{rank} \begin{bmatrix} \mu I - A_{-1} & B \end{bmatrix} = n$.

The condition 2 may be formulated as $\text{Im } A_{-1} \subset \text{Im} [B A_{-1} B \cdots A_{-1}^{n-1} B]$.

Proof. It is important to check the meaning of the second condition. A large part of the spectrum of \mathcal{A} may be obtained from the non zero spectrum of the matrix A_{-1} :

$$\lambda = \log |\mu| + i(\arg \mu + 2k\pi) + o(1/|k|), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

The eigenvalues are in some circles centered at $\log \mu$ with decreasing radii, when $|k|$ is growing [21]. The pole assignment is possible in the interior of the circles under Condition 1, which means the controllability of poles.

The spectrum of the operator \mathcal{A} is close to some vertical axes defined by the spectrum of the neutral term, the matrix A_{-1} . We need to move these axes by the feedback in order to obtain complete stabilizability, and then the corresponding values μ must be controllable. The necessity of both conditions is then clear enough.

Let us shortly consider the sufficient part. The condition 2 allows to move arbitrary all the non zeros eigenvalues of A_{-1} , and to make it simple. The condition 1 allows to control an eigenvalue in the interior of circles (for k large). It remains then to move a finite number of eigenvalues, it is possible as shown in [22, 26].

It is of interest to show the form of the feedback needed for exponential and then for complete stabilizability:

$$u(t) = \mathcal{F}x(t) = F_{-1}\dot{z}(t-1) + \int_0^T [F_2(\theta)\dot{z}(t+\theta) + F_3(\theta)z(t+\theta)] d\theta.$$

This means that \mathcal{F} is not bounded and domains of $\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{F}$ and \mathcal{A} are not the same. However this form is necessary in order to move the spectrum [16, 18].

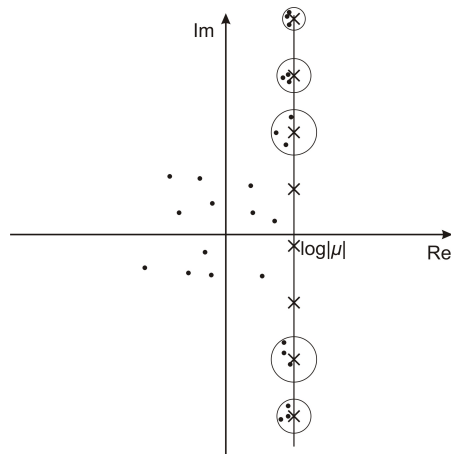


Fig. 1. Spectrum of \mathcal{A} , for each $\mu \in \sigma(A_{-1}), \mu \neq 0$.

5.2. Complete stabilizability and exact controllability

The notion of exact controllability for System (10) must be modified. As here the control u is finite dimensional, exact controllability in the sense of Definition 1 is not possible. In fact it may be shown that, in this case, the reachability set \mathcal{R}_T is in $D(\mathcal{A})$ [25, 26]. Then by exact controllability at time T , we mean $\mathcal{R}_T = D(\mathcal{A})$, and exact null controllability means to reach zero from all initial condition in $D(\mathcal{A})$. Results given in [25, 26] may be summarized in the following theorem.

Theorem 18. *If \mathcal{A} is the infinitesimal generator of a group or, equivalently, if the matrix A_{-1} is not singular, $0 \notin \sigma(A_{-1})$, then exact controllability is equivalent to complete stabilizability.*

Proof. If $\mu = 0$ is not in $\sigma(A_{-1})$, conditions 1 and 2 of Theorem 17 give a criteria of exact controllability. We refer to [25, 26] for detailed proofs. In our case of System (10), for exact null controllability we can obtain only a partial result.

Theorem 19. *Exact controllability to zero of System (10) implies complete stabilizability.*

Proof. If Condition 1 in Theorem 17 is not verified, it means that some eigenvalues are not controllable. Taking a corresponding eigenvectors as an initial condition, we can see that exact controllability does not hold. To prove Condition 2 in Theorem 17, we can proceed by derivation of the solution $z(t) = 0$ for $t \geq T \geq n$. The calculation gives $\text{Im } A_{-1} \subset \text{Im } [B \ A_{-1}B \ \cdots \ \mathcal{A}_{-1}^{n-1}B]$ (see [24]), which means that Condition 2 in Theorem 17 is verified.

The converse (in fact the criteria of exact null controllability without relation with stabilizability) has been proved in some particular cases of neutral type systems with discrete delays [15, 8] and in the case of retarded systems [17]. In the case of our general system (10), the question is still open, see Conjecture in [24] and [2].

6. Conclusion

We gave a short review of the relations between exact controllability and pole assignment (complete stabilizability). There are a lot of papers concerning different classes of systems, in particular, governed by partial differential equations. This paper gives our point of view to some questions concerning abstract infinite dimensional systems, based on results close to ours, in particular for functional differential equations of neutral type. Several problems are still open concerning the general abstract case or some particular classes.

ORCID ID

Rabah Rabah  <https://orcid.org/0000-0001-5496-3660>

REFERENCES

1. A. D. Andrew, W. M. Patterson. Range inclusion and factorization of operators on classical Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, - 1991. - 1. V. **156**. - P. 40-43. DOI: 10.1016/0022-247X(91)90380-I.
2. P. Barkhayev, R. Rabah, G. Sklyar. Conditions of exact null controllability and the problem of complete stabilizability for time-delay systems. In *Stabilization of Distributed Parameter Systems: Design Methods and Applications*. Cham, G. Sklyar, A. Zuyev, eds., Springer Intern. Publ. -2021. - P. 1-15. DOI: 10.1007/978-3-030-61742-4_1.
3. R. Datko. Uniform asymptotic stability of evolutionary processes in a Banach space. *SIAM J. Math. Anal.*, - 1972. - 3. V. **3**. - P. 428-445. DOI: 10.1137/0503042.
4. R. G. Douglas. On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, - 1966. - 2. V. **17**. - P. 413-415. DOI: 10.1090/S0002-9939-1966-0203464-1.
5. G. Eckstein. Exact controllability and spectrum assignment. In *Topics in modern operator theory (Timișoara/Herculane, 1980)*, volume 2 of *Operator Theory: Adv. Appl.*, - 1981. Birkhäuser, Basel-Boston, Mass. - P. 81-94. DOI: 10.1007/978-3-0348-5456-6_7.
6. M. R. Embry. Factorization of operators on Banach space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, - 1973. - 3. V. **38**. - P. 587-590. DOI: 10.2307/2038955.
7. M. A. Kaashoek, Cornelis V. M. van der Mee, Leiba Rodman. Analytic operator functions with compact spectrum. III: Hilbert space case: Inverse problem and applications. *J. Oper. Theory*, - 1983. -2. V. **10**. - P. 219-250.
8. V. E. Khartovskii, A. T. Pavlovskaya. Complete controllability and controllability for linear autonomous systems of neutral type. *Automation and Remote Control*, - 2013. - 5. V. **74**. - P. 769-784. DOI: 10.1134/S0005117913050032.
9. V. Komornik. Rapid boundary stabilization of linear distributed systems. *SIAM J. Control Optim.*, - 1997. - 5. V. **35**. - P. 1591-1613. DOI: 10.1137/S0363012996301609.
10. V. I. Korobov, R. Rabah. Exact controllability in Banach space. *Differential Equations*, -1980. -12. V. **15**. - P. 1531-1537. Translated from russian: *Differentsialnye Uravnenia*, -1980. -12. V. **15**. - P. 2142-2150.
11. J.-C. Louis, D. Wexler. On exact controllability in Hilbert spaces. *Journal of Differential Equations*, - 1983. -2. V. **49**. - P. 258-269. DOI: 10.1016/0022-0396(83)90014-1.

12. E. Makarov, M. Niezabitowski, S. Popova, V. Zaitsev, M. Zhuravleva. On Assignment of the Upper Bohl Exponent for Linear Discrete-Time Systems in Infinite-Dimensional Spaces. Proceedings of 25th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), - 2021. - P. 239-244. DOI: 10.1109/MMAR49549.2021.9528496.
13. A. S. Markus, V. R. Olshevsky. Complete controllability of spectrum assignment in infinite dimensional spaces. *Integral Equations Oper. Theory*, - 1993. - 1. V. **17**. - P. 107-122, 1993. Translation of the paper published in russian: *Matematicheskiye issledovaniya*, Kishinev,- 1989, V. **106**. - P. 97-113. DOI: 10.1007/bf01322549.
14. M. Megan, V. Hiriş. On the space of linear controllable systems in Hilbert spaces. *Glasnik Mat. Ser. III*, - 1975. - 1. V. **10(30)**. - P. 161-167.
15. A. V. Metel'skiĭ, S. A. Minyuk. Criteria for the constructive identifiability and complete controllability of linear time-independent systems of neutral type. *Izv. Ross. Akad. Nauk Teor. Sist. Upr.*, - 2006. - 5. - P. 15-23.
16. D. A. O'Connor, T. J. Tarn. On stabilization by state feedback for neutral differential equations. *IEEE Trans. Automat. Control*, - 1983. - 5. V. **28**. - P. 615-618. DOI: 10.1109/TAC.1983.1103286.
17. A. W. Olbrot, L. Pandolfi. Null controllability of a class of functional differential systems. *Int. J. Control*, - 1988. - 1 V. **47**. - P. 193-208. DOI: 10.1080/00207178808906006.
18. L. Pandolfi. Stabilization of neutral functional differential equations. *J. Optimization Theory Appl.*, - 1976.. - 2. V. **20**. - P. 191-204. DOI: 10.1007/BF01767451.
19. R. Rabah. Commandabilité des systèmes linéaires à retard constant dans les espaces de Banach (Controllability of linear systems with constant delay in Banach spaces). *RAIRO Automat.-Prod. Inform. Ind.*, -1986. - 6. V. **20**. - P. 529-539.
20. R. Rabah, G. M. Sklyar, P. Yu. Barkhayev. On exact controllability of neutral time-delay systems. *Ukrainian Math. Journal*, - 2016. - 6. V. **68**. - P. 800-815. DOI: 10.1007/s11253-016-1265-7.
21. R. Rabah, G. M. Sklyar, A. V. Rezounenko. Stability analysis of neutral type systems in Hilbert space. *J. Differential Equations*, - 2005. - 2. V. **214**. - P. 391-428. DOI: 10.1016/j.jde.2004.08.001.
22. R. Rabah, G. M. Sklyar, A.V. Rezounenko. On strong regular stabilizability for linear neutral type systems. *J. Differential Equations*, - 2008. - 3. V. **245**. - P. 569-593. DOI: 10.1016/j.jde.2008.02.041.

23. R. Rabah, J. Karrakchou. On Exact Controllability and Complete Stabilizability for Linear Systems in Hilbert Spaces. *Applied Mathematics Letters*, - 1997. - 1. V. **10**. - P. 35-40. DOI: 10.1016/S0893-9659(96)00107-3.
24. R. Rabah, G. Sklyar, P. Barkhayev. Exact null controllability, complete stabilizability and continuous final observability of neutral type systems. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, - 2017. - 3. V. **27**. - P. 489-499. DOI: 10.1515/amcs-2017-0034.
25. R. Rabah, G. M. Sklyar. The analysis of exact controllability of neutral-type systems by the moment problem approach. *SIAM J. Control Optim.*, - 2007. - 6. V. **46**. - P. 2148-2181. DOI: 10.1137/060650246.
26. R. Rabah, G. M. Sklyar, P. Yu. Barkhayev. Stability and stabilizability of mixed retarded-neutral type systems. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, - 2012. - 3. V. **18**. - P. 656-692. DOI: 10.1051/cocv/2011166.
27. W. Rudin. *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, 2d edition. 1991. 424 p.
28. G. M. Sklyar. The problem of the perturbation of an element of a Banach algebra by a right ideal and its application to the question of the stabilization of linear systems in Banach spaces. *Vestnik Kharkiv University*, - 1982. - 230. - P. 32-35. In Russian.
29. M. Slemrod. A note on complete controllability and stabilizability for linear control systems in Hilbert space. *SIAM J. Control*, - 1974. - 3. V. **12**. - P. 500-508. DOI: 10.1137/0312038.
30. R. Triggiani. A note on the lack of exact controllability for mild solutions in Banach spaces. *SIAM J. Control Optim.*, - 1977. - 3. **15**. - P. 407-411, DOI: 10.1137/0315028.
31. R. Triggiani. Addendum: "A note on the lack of exact controllability for mild solutions in Banach spaces" [*SIAM J. Control Optim.* **15** (1977), no. 3, 407–411; MR **55** #8942]. *SIAM J. Control Optim.*, - 1980. - 1. V. **18**. - P. 98-99, DOI: 10.1137/0318007.
32. J. van Neerven. The asymptotic behaviour of semigroups of linear operators. *Operator theory advances and application*. V. **88**. Birkhäuser, Basel. 1996. 234 p.
33. W. M. Wonham. *Linear multivariable control: a geometric approach*. Springer, New York, 3rd edition, 1985. 334 p.
34. Jerzy Zabczyk. *Mathematical control theory: an introduction*. Systems & Control: Foundations & Applications. 1992. Birkhäuser Boston, Boston. 260 p.

35. Yi. Zeng, Z. Xie, F. Guo. On exact controllability and complete stabilizability for linear systems. Appl. Math. Lett., - 2013. - 7. **26**. - P. 766-768, DOI: 10.1016/j.aml.2013.02.008.

**Про точну керованість та повну стабілізацію
для лінійних систем**

Рабah Раbah

*НДІЗКН, Вища гірнича школа м. Нант
вул. Ное 1, Нант, Франція, 44300*

У цій роботі ми розглядаємо лінійні системи з керуванням, описані рівнянням $\dot{x} = Ax + Bu$, де функції u та x приймають значення U та X відповідно. Для такого об'єкта подано короткий огляд результатів, що стосуються зв'язків між точною керованістю та повною стабілізацією (стабілізація з довільною швидкістю спаду). Аналіз проводиться в різних ситуаціях: обмежений чи необмежений стан та оператори керування A та B , простори Банаха або Гільберта U та X .

Добре відома еквівалентність між повною керованістю та розташуванням полюсів у ситуації скінченновимірних просторів в загальному випадку не має місця в нескінченновимірних просторах. Точної керованості недостатньо для повної стабілізації, якщо U і X є банаховими просторами. У постановці Гільбертового простору цей результат є справедливим. Зворотнє твердження також не є простим: в деяких ситуаціях повна стабілізація передбачає точну керованість (у просторі Банаха з обмеженими операторами), в інших ситуаціях це не відповідає дійсності. Відповідні результати наведені з деякими ідеями доведення. Технічні деталі можна знайти в цитованій літературі. Наведено кілька прикладів. Особлива увага приділяється випадку нескінченновимірних систем, збудованих за системами із загаюваннями нейтрального типу із розподіленими загаюваннями. Більш детально досліджується питання про зв'язок між точною нуль-керованістю та повною стабілізацією. Загалом між цими поняттями немає еквівалентності. Однак для деяких класів рівнянь нейтрального типу існує еквівалентність. Питання про те, чи є еквівалентність для більш загальних систем, залишається відкритим. Це короткий і невичерпний огляд деяких досліджень теорії керування у нескінченновимірних просторах. Наші роботи в цій сфері були ініційовані В. І. Коробовим протягом 70-х років минулого сторіччя у Харківському державному університеті.

Ключові слова: Точна керованість; повна стабілізація; нескінченновимірні системи; нейтральний тип.

**On exact controllability and complete
stabilizability for linear systems**

Rabah Rabah

*IRCCYN, Ecole des Mines de Nantes
1 Rue de la Noë, 44300 Nantes, France*

In this paper we consider linear systems with control described by the equation $\dot{x} = Ax + Bu$ where functions u and x take values in U and X respectively. For such object, a short review of results concerning relations between exact controllability and complete stabilizability (stabilizability with arbitrary decay rate) is given. The analysis is done in various situations: bounded or unbounded state and control operators A and B , Banach or Hilbert spaces U and X .

The well known equivalence between complete controllability and pole assignment in the situation of finite dimensional spaces is no longer true in general in infinite dimensional spaces. Exact controllability is not sufficient for complete stabilizability if U and X are Banach spaces. In Hilbert space setting this implication holds true. The converse also is not so simple: in some situations, complete stabilizability implies exact controllability (Banach space setting with bounded operators), in other situation, it is not true. The corresponding results are given with some ideas for the proofs. Complete technical development are indicated in the cited literature. Several examples are given. Special attention is paid to the case of infinite dimensional systems generated by delay systems of neutral type in some general form (distributed delays). The question of the relation between exact null controllability and complete stabilizability is more precisely investigated. In general there is no equivalence between the two notions. However for some classes of neutral type equations there is an equivalence. The question how the equivalence occurs for more general systems is still open. This is a short and non exhaustive review of some research on control theory for infinite dimensional spaces. Our works in this area were initiated by V. I. Korobov during the 70th of the past century in Kharkov State University.

Key words: Exact controllability; complete stabilizability; infinite dimensional systems; neutral type.

Article history: Received: 31 August 2021; Final form: 19 October 2021;

Accepted: 20 October 2021.

On homogeneous controllability functions

A. Polyakov

*Inria Lille-Nord Europe, 40. av. Halley, Villeneuve d'Ascq, 59655, France
andrey.polyakov@inria.fr*

The controllability function method, introduced by V. I. Korobov in late 1970s, is known to be an efficient tool for control systems design. This paper bridges the method with the homogeneity theory popular today. In particular, it is shown that the so-called homogeneous norm is a controllability function of the system in some cases. Moreover, the closed-loop control system is homogeneous in a generalized sense. This immediately yields many useful properties of the system such as robustness (Input-to-State Stability) with respect to a rather large class of perturbations.

Keywords: controllability function; generalized homogeneity; robustness.

Поляков А. **Про однорідні функції керованості.** Метод функції керованості, введений В. І. Коробов наприкінці 1970-х років, як відомо, є ефективним інструментом для дослідження систем керування. Ця стаття поєднує цей метод із популярною сьогодні теорією однорідності. Зокрема, показано, що так звана однорідна норма в деяких випадках є функцією керованості системи. Більше того, замкнута система керування є однорідною в узагальненому сенсі. Це відразу дає багато корисних властивостей системи, таких як робастність (стабільність вхідного стану) щодо досить великого класу збурень.

Ключові слова: функція керованості; узагальнена однорідність; робастність.

Поляков А. **Об однородных функциях управляемости.** Метод функции управляемости, введенный В. И. Коробов в конце 1970-х годов, как понятно, является действенным инструментом для исследования систем управления. Эта статья совмещает этот метод с популярной сегодня теорией однородности. В частности, показано, что так называемая однородная норма в некоторых случаях является функцией управляемости системы. Более того, замкнутая система управления однородна в обобщенном смысле. Это сразу дает много полезных свойств системы, таких как робастность (стабильность входного состояния) относительно достаточно большого класса возмущений.

Ключевые слова: функция управляемости; обобщенная однородность; робастность.

2010 Mathematics Subject Classification: 34H05; 34H15; 93C10; 93C15.

1. Introduction

Most of physical systems are symmetric in the view of Noether's Theorem [23]. Differential symmetries can be discovered in both ODE (Ordinary Differential Equation) and PDE (Partial Differential Equation) models of dynamical systems [9], [8], [27]. One of Lie symmetries, that is rather popular in control theory, is *homogeneity*. The homogeneity is a dilation symmetry known since 18th century, when Leonhard Euler studied functions $x \rightarrow f(x)$ which are symmetric with respect to uniform dilation $x \rightarrow \lambda x$ of its argument, namely, $f(\lambda x) = \lambda^\nu f(x)$, $\forall \lambda > 0, \forall x$, where ν is a real number. Such functions were called homogeneous and the number ν was referred as the homogeneity degree. It seems that a generalized homogeneity (the symmetry with respect to a non-uniform dilation) was first studied by Vladimir Zubov in [36]. The homogeneity is useful for analysis of nonlinear finite-dimensional dynamical systems (see also [36], [11], [13], [14], [33], [4], [2]) as well as non-linear controllers/observers design (see [13], [7], [10], [1], [19]). Homogeneity degree specifies a convergence rate of any asymptotically stable homogeneous system (see e.g. [22]). Homogeneous approximations of nonlinear models are useful in the case when a linear approximation is not informative or simply impossible [1]. Homogeneous control systems have similar properties to linear ones, e.g., local stability yields global stability, invariance of the compact set is equivalent to stability, etc. However, they may have better control quality, e.g., faster convergence, better robustness and less overshoot. For more details we refer the reader to [27, Chapter 1].

The controllability function method [16] is an efficient tool for control systems design. The monograph [17] presents most detailed study of the method and its applications to different control problems. Formally, a controllability function has no relation with the homogeneity theory. However, in some cases, its design is implicitly inspired by the homogeneity and uses the dilation symmetry of the system. This paper bridges controllability function method with the homogeneity theory showing that the control/controllability function design for linear plants results in a generalized homogeneous control system, that inherits all good properties of homogeneity, e.g., robustness (Input-to-State Stability) with respect to a sufficiently large class of perturbations.

The paper is organized as follows. First, the controllability function method and elements of the homogeneity theory are reviewed. Next, the main theorem about homogeneous controllability functions for linear plants is proven. Finally, some remarks and conclusions are given.

2. On controllability function method

Following [17] the *controllability function* $\Theta : \mathbb{R}^n \mapsto [0, +\infty)$ is a Lyapunov-like function of a closed-loop system $u = u(x)$ realizing a position control in a finite time. More precisely, the properties of Θ are characterized by the following theorem.

Theorem 1. [17, Theorem 1.2, page 19] *Let us consider the controlled process*

$$\dot{x} = f(x, u), \quad t > 0, \quad f : \mathbb{R}^{n+m} \mapsto \mathbb{R}^n \quad (1)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n, u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ and the function f is locally Lipschitz continuous on $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \Omega$, i.e.,

$$\|f(x_1, u_1) - f(x_2, u_2)\| \leq L(\rho_1, \rho_2)(\|x_1 - x_2\| + \|u_1 - u_2\|), \quad \begin{array}{l} x_i \in K(\rho_1, \rho_2), \\ \|u_i\| \in \Omega, i = 1, 2, \end{array}$$

where $K(\rho_1, \rho_2) := \{x : 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2\}$.

Let there exist a function $\Theta : \mathbb{R}^n \mapsto [0, +\infty)$ such that

- 1) $\Theta > 0$ for $x \neq 0$ and $\Theta(0) = 0$;
- 2) there exists $c > 0$ such that the set is $\mathbb{Q} := \{x : \Theta(x) \leq c\}$ is bounded;
- 3) there exists a function $u : \mathbb{Q} \mapsto \Omega$ satisfying the inequality

$$\frac{\partial \Theta(x)}{\partial x} f(x, u(x)) \leq -q\Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x), \quad \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \quad (2)$$

for some $q > 0$ and $\alpha > 0$, such that u satisfies the Lipschitz condition on any set $K(\rho_1, \rho_2) \cap \mathbb{Q}$.

Then the trajectory $x(t)$ of the closed-loop system (1) with $x(0) = x_0 \in \mathbb{Q}$ reaches the state $x = 0$ at an instant of time $T(x_0) \leq \frac{\alpha}{q}\Theta^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)$. Moreover, if $\alpha = \infty$ then $x(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$.

If $\alpha = 1$ and the symbol \leq in (2) is replaced with $=$, then the inequality becomes the Bellman (dynamic programming) equation and the function Θ is the settling time function of the closed-loop system. On the other hand, the controllability function Θ satisfies the classical [20] (resp., a generalized [32], [5]) Lyapunov theorem for $\alpha = +\infty$ (resp. $0 < \alpha < +\infty$).

Example 1. [17, page 21] A controllability function Θ for the chain of integrators

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

can be designed implicitly as a solution of the following algebraic equation

$$a_0\Theta = x^\top D(\Theta)FD(\Theta)x, \quad x \neq 0 \quad (4)$$

where $a_0 > 0$, a symmetric matrix $F = F^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfies¹ the linear matrix inequalities (LMIs)

$$F(A + BK) + (A + BK)^\top F \prec 0, \quad F \succ 0 \quad (5)$$

¹The sign \prec (resp. \succ) denotes the negative (resp. positive) definiteness of a symmetric matrix.

with $K \in \mathbb{R}^{1 \times n} : A + BK$ - Hurwitz, and the matrix-valued function D is defined as follows

$$D(\Theta) = \text{diag} \left(\Theta^{-\frac{m+n-2i+1}{2\alpha}} \right) \tag{6}$$

with α and m are natural numbers being selected such that the linear matrix inequality (LMI)

$$F - H_\alpha F - H_\alpha F \succ 0, \quad H_\alpha = \text{diag} \left(-\frac{m+n-2i+1}{2\alpha} \right), \tag{7}$$

is fulfilled. The corresponding controller is given by

$$u(x) = \Theta^{\frac{m-n-1}{2\alpha}} KD(\Theta)x. \tag{8}$$

3. Homogeneity

This section presents a brief summary of the homogeneity theory of dynamical system in \mathbb{R}^n .

3.1. Dilations in \mathbb{R}^n

The standard (Euler's) dilation in a vector space is the operator $x \rightarrow \lambda x$, $\lambda > 0$. Generalized dilations and the generalized homogeneity in \mathbb{R}^n are introduced in [36], [15], [14], [26].

Definition 1. [14] A family of mappings $\mathbf{d}(s) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$ is said to be a dilation group (or, simply, a **dilation**) in \mathbb{R}^n if

- (**Group property**) $\mathbf{d}(0)x = x$, $\mathbf{d}(t) \circ \mathbf{d}(s)x = \mathbf{d}(t+s)x$, $\forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$;
- (**Limit property**) $\lim_{s \rightarrow -\infty} \|\mathbf{d}(s)x\| = 0$ and $\lim_{s \rightarrow +\infty} \|\mathbf{d}(s)x\| = \infty$ for all $x \neq 0$.

Below we deal only with the so-called linear dilation [26] defined as follows:

$$\mathbf{d}(s) := e^{sG_{\mathbf{d}}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i G_{\mathbf{d}}^i}{i!}, \tag{9}$$

where $G_{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is an anti-Hurwitz matrix being a generator of the dilation. For $G_{\mathbf{d}} = I_n$ (the identity matrix), we have the standard (Euler's) dilation $\mathbf{d}(s) = e^s I_n$ but the case of diagonal matrix $G_{\mathbf{d}}$ corresponds to the so-called weighted dilation [36], [31], [12], [18], [1], [28] popular today.

Definition 2. [26] A linear dilation \mathbf{d} is said to be monotone with respect to a norm $\|\cdot\|$ if there exists $\beta > 0$ such that

$$\|\mathbf{d}(s)\| \leq e^{\beta s}, \quad \forall s \leq 0, \tag{10}$$

where $\|\mathbf{d}(s)\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|\mathbf{d}(s)x\|}{\|x\|}$ is the matrix norm of $\mathbf{d}(s)$.

A criterion of the monotonicity of the linear dilation in \mathbf{R}^n is given by the following lemma

Lemma 1. [26] *Any linear dilation \mathbf{d} in the finite dimensional space \mathbb{R}^n is monotone with respect to the weighted Euclidean norm $\|x\|_P = \sqrt{x^\top P x}$, $x \in \mathbb{R}^n$ provided that the symmetric matrix $P = P^\top \in \mathbf{R}^{n \times n}$ satisfies the linear matrix inequality*

$$G_{\mathbf{d}}^\top P + P G_{\mathbf{d}} \succ 0, \quad P \succ 0, \quad (11)$$

where the symbol $\succ 0$ means that the matrix is positive definite.

It is known [26] that any vector from $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ can be uniquely projected to a unit sphere using monotone dilation. More precisely, for any $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ there exists a unique pair $(z, s) : \|z\| = 1, s \in \mathbb{R}$ such that $\mathbf{d}(s)x = z$. We use this feature of monotone dilation in our further constructions.

3.2. Canonical homogeneous norm. Any compact and convex neighborhood of the origin induces a norm in \mathbb{R}^n by means of the standard dilation $x \rightarrow \lambda x, \lambda > 0$ (see, e.g., [30]). In the general case, the similar construction for monotone dilation leads to the so-called homogeneous norm [10].

Definition 3. *The function $\|\cdot\|_{\mathbf{d}} : \mathbb{R}^n \mapsto [0, +\infty)$ defined as follows $\|0\|_{\mathbf{d}} = 0$ and*

$$\|x\|_{\mathbf{d}} = e^{s_x} \quad : \quad \|\mathbf{d}(-s_x)x\| = 1, \quad x \neq 0,$$

is called the canonical homogeneous norm, where \mathbf{d} is a monotone dilation with respect to the norm $\|\cdot\|$ in \mathbb{R}^n .

The canonical homogeneous norm is continuous on \mathbb{R}^n and locally Lipschitz continuous on $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (see, [26]). Moreover, in [27, Theorem 7.1., page 188] it is proven that $\|\cdot\|_{\mathbf{d}}$ is, in fact, a norm (in the classical sense) in a finite-dimensional space $\tilde{\mathbb{R}}^n$ homeomorphic² to \mathbb{R}^n .

Below we show that the canonical homogeneous norm is the controllability function for linear control systems considered in [17, Chapter 1]. The related analysis would require differentiability of $\|\cdot\|_{\mathbf{d}}$ on $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. The latter can always be guaranteed for a canonical homogeneous norm induced by a weighted Euclidean norm.

Lemma 2. [26] *If the canonical homogeneous norm $\|\cdot\|_{\mathbf{d}}$ is induced by the norm $\|x\| = \sqrt{x^\top P x}$ with a symmetric matrix $P = P^\top \in \mathbf{R}^{n \times n}$ satisfying (11) then $\|\cdot\|_{\mathbf{d}} \in C(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ and*

$$\frac{\partial \|x\|_{\mathbf{d}}}{\partial x} = \|x\|_{\mathbf{d}} \frac{x^\top \mathbf{d}^\top (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) P \mathbf{d} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}})}{x^\top \mathbf{d}^\top (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) P G_{\mathbf{d}} \mathbf{d} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) x}, \quad x \neq 0. \quad (12)$$

²The space $\tilde{\mathbb{R}}^n$ consists of vectors from \mathbb{R}^n , but a sum of vectors and a multiplication of a vector by a scalar are defined differently.

Below we show that a properly designed canonical homogeneous norm is a controllability function for linear control plant.

3.3. *Homogeneous systems.* By definition, we say that an ODE is homogeneous if its right-hand side is a homogeneous vector field.

Definition 4. [14] A vector field (resp. a function) $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ (resp. $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) is said to be \mathbf{d} -homogeneous of the degree $\nu \in \mathbb{R}$ is

$$\begin{aligned} f(\mathbf{d}(s)x) &= e^{\nu s} \mathbf{d}(s)f(x), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ (\text{resp. } h(\mathbf{d}(s)x) &= e^{\nu s} h(x), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n), \end{aligned} \tag{13}$$

where \mathbf{d} is a dilation in \mathbb{R}^n .

The canonical homogeneous norm is the simplest example of the homogeneous function of the degree 1.

Example 2: The system

$$\dot{x} = f(x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ -k_1 x_1^{\frac{1}{5}} - k_2 x_2^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

is \mathbf{d} -homogeneous of the degree $\nu = -2$ with respect to the dilation

$$\mathbf{d}(s) = \begin{pmatrix} e^{5s} & 0 \\ 0 & e^{3s} \end{pmatrix}.$$

Indeed, simple computations show

$$f(\mathbf{d}(s)x) = e^{-2s} \mathbf{d}(s)f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Moreover, one can be shown [29] that

$$V(x) = c \left(\frac{5k_1 |x_1|^{\frac{6}{5}}}{6} + \frac{x_2^2}{2} \right)^{\frac{4}{3}} + k_1 x_1 x_2, \quad c > \max \left\{ \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{4}{3}}, \frac{k_1^{\frac{5}{6}} 2^{\frac{2}{3}} (1 + k_2/6)}{4k_2/3} \right\}$$

is the controllability function (in the sense of Theorem 1)

$$\exists q > 0 : \dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq -q V^{\frac{3}{4}}(x), \quad \forall x \neq 0,$$

of the system

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u$$

with the feedback control

$$u(x) = -k_1 x_1^{\frac{1}{5}} - k_2 x_2^{\frac{1}{3}}, \quad k_1 > \frac{5}{6} k_2.$$

To highlight some features the homogeneous systems we present the series of known results.

Theorem 2. [36] *If $x(t, x_0)$ is a solution of a \mathbf{d} -homogeneous system*

$$\dot{x} = f(x), \quad t > 0, \quad f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad f \in C(\mathbb{R}^n) \quad (14)$$

with the initial condition $x(0) = x_0$ then

$$x(t, \mathbf{d}(s)) = \mathbf{d}x(e^{\mu s}t, x_0)$$

is a solution of the same ODE with the scaled initial condition $x(0) = \mathbf{d}(s)x_0$.

The latter theorem implies that any local property of the system (14) can be extended globally. For instance, local stability implies global stability, global-in-time existence of solutions for small initial data yields global-in-time existence of solutions for large initial data, etc.

The Zubov-Rosier Theorem [36], [31] given below is the converse Lyapunov theorem for homogeneous systems. For shortness, we say that a "system is stable" if its zero solution is stable.

Theorem 3. [31] *A \mathbf{d} -homogeneous system (14) is asymptotically stable if and only if there exists a positive definite \mathbf{d} -homogeneous function $V : \mathbb{R}^n \mapsto [0, +\infty)$ of degree 1 such that $V \in C(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ and*

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq -qV^{1+\mu}(x), \quad \forall x \neq 0, \quad (15)$$

where μ is the homogeneity degree of the vector field f and $q > 0$ is a positive parameter.

In other words, any stable homogeneous system admits a homogeneous Lyapunov function. Notice that, for $\mu < 0$ the inequality (15) repeats the inequality (2). The estimate (15) yields the following corollary which characterizes the convergence rates of homogeneous systems.

Corollary 1. [22] *If the system is asymptotically stable then it is*

- *globally uniformly finite-time stable³ for $\mu < 0$;*
- *globally uniformly exponentially stable for $\mu = 0$;*
- *globally uniformly nearly fixed-time stable⁴ for $\mu > 0$,*

where $\mu \in \mathbb{R}$ is a homogeneity degree of the vector field f .

³A system is globally uniformly finite-time stable if it is Lyapunov stable and there exists a locally bounded function $T : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ such that $\|x(t)\| = 0, \forall t \geq T(x_0), \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$. For more details about finite-time stability see [5], [32].

⁴A system is globally uniformly nearly fixed-time stable if it Lyapunov stable and $\forall r > 0, \exists T_r > 0 : \|x(t)\| < r, \forall t \geq T_r$ independently of $x_0 \in \mathbb{R}^n$. For more details about fixed-time stability see [24].

One of useful properties of homogeneous control systems is robustness (Input-to-State Stability) in the sense of the following definition.

Definition 5. [34] *The system*

$$\dot{x} = f(x, \delta), \quad f : \mathbb{R}^{n+k} \mapsto \mathbb{R}^n, \quad f \in C(\mathbb{R}^{n+k}) \quad (16)$$

is said to be Input-to-State Stable (ISS) if there exist⁵ $\beta \in \mathcal{KL}$ and $\gamma \in \mathcal{K}$:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t) + \gamma \left(\sup_{\tau \in [0, t]} \|\delta(\tau)\| \right), \quad \forall t > 0.$$

The ISS analysis is a non-trivial problem in the general case [35], however, ISS of a perturbed homogeneous systems follows from asymptotic stability of a non-perturbed one provided that the disturbances are involved to the system in a homogeneous way [33], [12], [1].

Theorem 4. [3] *Let \mathbf{d} be a dilation in \mathbb{R}^n , $\tilde{\mathbf{d}}$ is a dilation in \mathbb{R}^k , and $t\mu \in \mathbb{R}$. If*

$$f(\mathbf{d}(s)x, \tilde{\mathbf{d}}(s)\delta) = e^{\mu s} \mathbf{d}(s) f(x, \delta), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \delta \in \mathbb{R}^k.$$

and the system (16) with $\delta = 0$ is asymptotically stable then this system is ISS.

Example 3. The control system considered in Example 2 is robust (Input-to-State Stable) with respect to bounded additive exogenous perturbations and additive measurement noises. Indeed, let us denote

$$f(x, \delta) = \begin{pmatrix} x_2 \\ u(x + \delta) \end{pmatrix} + \delta_1, \quad x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

where the feedback control u is defined in Example 2, $\delta_1 \in \mathbb{R}^2$ is a measurement noise and δ_2 is an exogenous perturbation. Let the dilation \mathbf{d} be defined as in Example 2. Then

$$\tilde{\mathbf{d}}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{d}(s) & 0 \\ 0 & e^{-2s} \mathbf{d}(s) \end{pmatrix},$$

is a dilation in \mathbb{R}^4 with the generator

$$G_{\tilde{\mathbf{d}}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⁵A function $\gamma : [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$ is of class \mathcal{K} if it is continuous, strictly increasing and $\gamma(0) = 0$.

A function $\beta : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ is of class \mathcal{KL} if the function $r \mapsto \beta(r, s)$ is of class \mathcal{K} for any fixed $s \in \mathbb{R}$ and for any fixed $r \geq 0$ the function $s \mapsto \beta(r, s)$ is decreasing to zero as $s \rightarrow +\infty$.

being an anti-Hurwitz matrix. In Example 2, it was shown that the system

$$\dot{x} = f(x, 0)$$

is globally uniformly asymptotically stable. Since

$$f(\mathbf{d}(s)x, \tilde{\mathbf{d}}(s)\delta) = e^{-2s}\mathbf{d}(s)f(x, \delta), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \delta \in \mathbb{R}^4, \forall s \in \mathbb{R}$$

then, by Theorem 4, this system is ISS.

4. Homogeneous controllability functions for linear plants

Let us consider the linear control system

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t > 0, \quad x(0) = x_0 \quad (17)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the system state, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is the system matrix, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ is a control input and $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Inspired by Theorem 1 and [26] we present the following result.

Theorem 5. *Let the pair $\{A, B\}$ be controllable and the pair $Y_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $G_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ be a solution of the linear algebraic equation*

$$AG_0 - G_0A + BY_0 = A, \quad G_0B = 0 \quad (18)$$

with respect to G_0, Y_0 , then

- 1) $G_{\mathbf{d}} = I_n + \mu G_0$ is anti-Hurwitz for any $\mu \in [-1, 0)$;
- 2) $G_0 - I_n$ is invertible and the matrix $A_0 = A + BY_0(G_0 - I_n)^{-1}$ satisfies

$$A_0G_{\mathbf{d}} = (G_{\mathbf{d}} + \mu I_n)A_0, \quad G_{\mathbf{d}}B = B. \quad (19)$$

If a solution $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ satisfies the system of linear matrix inequalities (LMIs)

$$A_0X + XA_0^{\top} + BY + Y^{\top}B^{\top} \prec 0, \quad G_{\mathbf{d}}X + XG_{\mathbf{d}}^{\top} \succ 0, \quad X = X^{\top} \succ 0 \quad (20)$$

then

- 3) the canonical homogeneous $\|\cdot\|_{\mathbf{d}}$ induced by the weighted Euclidean norm $\|x\| = \sqrt{x^{\top}X^{-1}x}$ is a **controllability function** of the system (17) with the control

$$u(x) = Y_0(G_0 - I_n)^{-1}x + \|x\|_{\mathbf{d}}^{\mu+1}YX^{-1}\mathbf{d}(-\ln\|x\|_{\mathbf{d}})x \quad (21)$$

and

$$\frac{d}{dt}\|x\|_{\mathbf{d}} \leq \frac{\lambda_{\max}(A_0X + XA_0^{\top} + BY + Y^{\top}B^{\top})}{\lambda_{\max}(G_{\mathbf{d}}X + XG_{\mathbf{d}}^{\top})}\|x\|_{\mathbf{d}}^{1+\mu}, \quad x \neq 0, \quad (22)$$

where $\lambda_{\max}(Q)$ denotes a maximal eigenvalue of a symmetric matrix Q and \mathbf{d} is a dilation generated by $G_{\mathbf{d}}$;

4) $u \in C^1(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ for any $\mu \in [-1, 0)$, u is continuous at zero if $\mu \in (-1, 0)$ and u is discontinuous at zero but locally bounded if $\mu = -1$;

5) the closed-loop system (17), (21) is \mathbf{d} -homogeneous of the degree μ .

Proof. 1) Since the pair $\{A, B\}$ then there exists [21], [28] a coordinate transformation $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ such that

$$M^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ A_{kk+1} \end{pmatrix}, \quad M^{-1}A_0M = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{k-1k} \\ A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} & \dots & A_{kk} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

where $A_{ii+1} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_{i+1}}$, $\text{rank}(A_{ii+1}) = n_i$, $n_i \leq n_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, k$, $n_1 + \dots + n_k = n$, $n_k \leq m$, $n_{k+1} = m$ and k is a minimal natural number such that $\text{rank}(B, AB, \dots, A^{k-1}B) = n$.

In this case, the equation (18) can be equivalently rewritten as follows

$$\tilde{A}\tilde{G}_0 - \tilde{G}_0\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{Y}_0 = \tilde{A}, \quad \tilde{G}_0\tilde{B} = 0 \quad (24)$$

where $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{A} = M^{-1}A_0M$, $\tilde{G}_0 = M^{-1}G_0M$ and $\tilde{Y}_0 = Y_0M$.

Taking into account, the structure of \tilde{A} and \tilde{B} we conclude that the linear equation (24) has a solution with respect to \tilde{Y}_0, \tilde{G}_0 and the matrix \tilde{G}_0 has the block lower triangular form

$$\tilde{G}_0 = \begin{pmatrix} -(k-1)I_{n_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & -(k-2)I_{n_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & \dots & -I_{n_{k-1}} & 0 \\ * & * & * & \dots & * & 0 \end{pmatrix},$$

where $*$ denotes a possibly non-zero block. The latter means $G_0 - I$ is invertible and $G_{\mathbf{d}} = I_n + \mu G_0$ is anty-Hurwitz for $\mu < 0$.

2) Since $G_0 - I_n$ is invertible and the pair G_0, Y_0 satisfies (18) then

$$A - A + \mu AG_0 - \mu G_0A + \mu BY_0 = \mu A$$

or, equivalently,

$$AG_{\mathbf{d}} + \mu BY_0 = (G_{\mathbf{d}} + \mu I_n)A.$$

On the one hand, obviously, $G_{\mathbf{d}}B = B$ and

$$\begin{aligned} (G_{\mathbf{d}} + \mu I_n)A &= (G_{\mathbf{d}} + \mu I_n)(A + BY_0(G_0 - I_n)^{-1} - BY_0(G_0 - I_n)^{-1}) = \\ &= (G_{\mathbf{d}} + \mu I_n)A_0 - (1 + \mu)BY_0(G_0 - I_n)^{-1}. \end{aligned}$$

On the other hand, one has

$$AG_{\mathbf{d}} + \mu BY_0 = (A + BY_0(G_0 - I_n)^{-1} - BY_0(G_0 - I_n)^{-1})G_{\mathbf{d}} + \mu BY_0 =$$

$$A_0G_{\mathbf{d}} - BY_0(G_0 - I_n)^{-1}G_{\mathbf{d}} + \mu BY_0 = A_0G_{\mathbf{d}} - BY_0(G_0 - I_n)^{-1}(G_{\mathbf{d}} - \mu(G_0 - I_n)) = A_0G_{\mathbf{d}} - (\mu + 1)BY_0(G_0 - I_n)^{-1}.$$

Hence, we derive the identity (19).

3) First of all, notice that, the canonical homogeneous is well defined since X^{-1} satisfies the second and the third inequalities from (20). It is continuous on \mathbb{R}^n and continuously differentiable on $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ in the view of Lemma 2.

On the other hand, the formula $\mathbf{d}(s) = e^{sG_{\mathbf{d}}}$ and the identity (19) yield

$$A_0\mathbf{d}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i A_0 G_{\mathbf{d}}^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i (G_{\mathbf{d}} - \mu I_n)^i A_0}{i!} = e^{sG_{\mathbf{d}}} A_0 = e^{\mu s} \mathbf{d}(s) A_0. \quad (25)$$

and

$$\mathbf{d}(s)B = e^s B, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (26)$$

In this case, for the closed loop system, using the formula (12) we derive

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|x\|_{\mathbf{d}} &= \|x\|_{\mathbf{d}} \frac{x^{\top} \mathbf{d}^{\top} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) X^{-1} \mathbf{d} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) (A_0 x + \|x\|_{\mathbf{d}}^{\mu+1} B Y X^{-1} \mathbf{d} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) x)}{x^{\top} \mathbf{d}^{\top} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) X^{-1} G_{\mathbf{d}} \mathbf{d} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) x} = \\ &= \|x\|_{\mathbf{d}}^{1+\mu} \frac{x^{\top} \mathbf{d}^{\top} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) X^{-1} (A_0 + B Y X^{-1}) \mathbf{d} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) x}{x^{\top} \mathbf{d}^{\top} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) X^{-1} G_{\mathbf{d}} \mathbf{d} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) x} = \\ &= \|x\|_{\mathbf{d}}^{1+\mu} \frac{x^{\top} \mathbf{d}^{\top} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) X^{-1} (A_0 X + B Y + X A_0^{\top} + Y^{\top} B^{\top}) X^{-1} \mathbf{d} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) x}{x^{\top} \mathbf{d}^{\top} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) X^{-1} (G_{\mathbf{d}} X + X G_{\mathbf{d}}^{\top}) X^{-1} \mathbf{d} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) x}. \end{aligned}$$

Hence, taking into account that X and Y satisfy (20) we derive (22).

4) Since the canonical homogeneous is continuous on \mathbb{R}^n and continuously differentiable on $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ then, by construction, u is continuously differentiable on $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Moreover, from the definition of the canonical homogeneous norm we have

$$x^{\top} \mathbf{d}^{\top} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) X^{-1} \mathbf{d} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) x = 1,$$

so

$$\|u\| \leq r_1 \|x\| + r_2 \|x\|_{\mathbf{d}}^{\mu+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

with $r_1 \geq 0$ and $r_2 > 0$ dependent of Y_0, G_0, X , and Y . The latter means that u is locally bounded for any $\mu \in [-1, 0)$ and continuous at zero for $\mu \in (-1, 0)$.

5) Let us denote the right-hand side of the closed-loop system by

$$f(x) = A_0 x + \|x\|_{\mathbf{d}}^{\mu+1} B Y X^{-1} \mathbf{d} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) x$$

Using the identities (25), (26) and $\|\mathbf{d}(s)x\|_{\mathbf{d}} = e^s \|x\|_{\mathbf{d}}$ we derive

$$\begin{aligned} f(\mathbf{d}(s)x) &= A_0 \mathbf{d}(s)x + \|\mathbf{d}(s)x\|_{\mathbf{d}}^{\mu+1} B Y X^{-1} \mathbf{d} (-\ln \|\mathbf{d}(s)x\|_{\mathbf{d}}) \mathbf{d}(s)x = \\ &= e^{\mu s} \mathbf{d}(s) A_0 x + e^{s(1+\mu)} \|x\|_{\mathbf{d}}^{\mu+1} B Y X^{-1} \mathbf{d} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}} - s) \mathbf{d}(s)x = \\ &= e^{\mu s} \mathbf{d}(s) \left(A_0 x + \|x\|_{\mathbf{d}}^{\mu+1} B Y X^{-1} \mathbf{d} (-\ln \|x\|_{\mathbf{d}}) x \right) = e^{\mu s} \mathbf{d}(s) f(x), \end{aligned}$$

for all $x \in \mathbb{R}^n$ and all $s \in \mathbb{R}$. The proof is complete.

Remark 1. A solution of the linear matrix equation (18) is not unique in the general case of the multiply-input linear control system. In the single input case ($m = 1$), the solution is always unique and \tilde{G}_0 is a diagonal matrix.

Remark 2. The system of linear matrix inequalities (20) is always feasible at least for μ close to 0. Indeed, the feasibility of the first LMI together with the third one follows from controllability of the pair $\{A, B\}$ (see, [6]), while the second LMI becomes the third one for μ tending to 0 (reps. $G_{\mathbf{d}} \rightarrow I_n$ as $\mu \rightarrow 0$). Notice that, the system of LMIs (20) is always feasible for $\mu \in [-1, 0)$, at least, in the single input case [25].

As a straightforward corollary of Theorems 4 and 5 (see also Example 3 as the hint of the proof) we provide the following result.

Corollary 2. The control system (17), (21) designed by Theorem 5 is ISS with respect to bounded additive measurement noises if $\mu \in [-1, 0)$ and ISS with respect to bounded additive exogenous perturbations if $\mu \in (-1, 0)$.

Remark 3. If $m = 1$ and A as in Example 1 then $Y_0 = 0$,

$$G_0 = \begin{pmatrix} -n+1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -n+2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}(s) = \begin{pmatrix} e^{s(1-\mu(n-1))} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{1-\mu(n-2)} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{s(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^s \end{pmatrix}.$$


Obviously, for $F = a_0 X^{-1}$, an integer $\alpha = -\frac{1}{\mu}$ and $m = \alpha + n - 1$ the canonical homogeneous norm defined in Theorem 5 simply coincides with the controllability function given by (4), (6) and the system of LMIs (20) implies (5), (7) with $K = YX^{-1}$. Therefore, the controller (21) coincides with (8). The latter means that the control system (3), (8) is \mathbf{d} -homogeneous.

Similar conclusions can be made for controllability functions designed in [17, Chapter 1, §5] and [17, Chapter 1, §6].

5. Conclusions

The paper shows that linear autonomous control system always admits a generalized homogeneous controllability function. Moreover, the well-known controllability function studied in [17, Chapter 1] are homogeneous as well! This immediately results in robustness (Input-to-State Stability) of the corresponding control systems with respect to a rather large class of disturbances. An interesting open problem in this context is the homogeneity analysis of controllability functions designed by means of integral operators (see [17, Chapter 5]).

ORCID ID

A.Polyakov,  <https://orcid.org/0000-0002-5876-3495>

REFERENCES

1. V. Andrieu, L. Praly, and A. Astolfi. Homogeneous Approximation, Recursive Observer Design, and Output Feedback, *SIAM Journal of Control and Optimization*, – 2008. – **47(4)**. – P. 1814–1850. DOI: 10.1137/060675861.
2. E. Bernuau, D. Efimov, W. Perruquetti, and A. Polyakov. On homogeneity and its application in sliding mode control, *Journal of The Franklin Institute*, – 2014. – **351(4)**. – P. 1866–1901. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2014.01.007.
3. E. Bernuau, A. Polyakov, D. Efimov, and W. Perruquetti. Verification of ISS, iISS and IOSS properties applying weighted homogeneity, *System & Control Letters*, – 2013. – **62(12)**. – P. 1159–1167. DOI: 10.1016/j.sysconle.2013.09.004.
4. S. P. Bhat and D. S. Bernstein. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability, *Mathematics of Control, Signals and Systems*, – 2005. – **17**. – P. 101–127. DOI: 10.1007/s00498-005-0151-x.
5. S. P. Bhat and D. S. Bernstein. Finite time stability of continuous autonomous systems, *SIAM J. Control Optim.*, – 2000. – **38(3)**. – P. 751–766. DOI: 10.1137/S0363012997321358.
6. S. Boyd, E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. 1994. SIAM, Philadelphia, ix + 185 p. DOI: 10.1137/1.9781611970777.
7. J.-M. Coron and L. Praly. Adding an integrator for the stabilization problem, *Systems & Control Letters*, – 1991. – **17(2)**. – P. 89–104. DOI: 10.1016/0167-6911(91)90034-C.
8. V. Fischer and M. Ruzhansky. *Quantization on Nilpotent Lie Groups*. 2016. Springer, XIII + 557 p. DOI: 10.1007/978-3-319-29558-9.
9. G. Folland. Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups, *Arkiv for Matematik*, – 1975. – **13(1-2)**. – P. 161–207.
10. L. Grüne. Homogeneous state feedback stabilization of homogeneous systems, *SIAM Journal of Control and Optimization*, – 2000. – **38(4)**. – P. 1288–1308. DOI: 10.1137/S0363012998349303.
11. H. Hermes. Nilpotent approximations of control systems and distributions, *SIAM Journal of Control and Optimization*, – 1986. – **24(4)**. – P. 731–736. DOI: 10.1137/0324045
12. Y. Hong. H_∞ control, stabilization, and input-output stability of nonlinear systems with homogeneous properties, *Automatica*, – 2001. – **37(6)**. – P. 819–829. DOI: 10.1016/S0005-1098(01)00027-9.

13. M. Kawski. Homogeneous stabilizing feedback laws, *Control Theory and Advanced Technology*, – 1990. – **6(4)**. – P. 497–516.
14. M. Kawski. Families of dilations and asymptotic stability, *Analysis of Controlled Dynamical Systems*, – 1991. – **8**. – P. 285–294. DOI: 10.1007/978-1-4612-3214-8_25.
15. V. V. Khomenuk. On systems of ordinary differential equations with generalized homogenous right-hand sides, *Izvestia vuzov. Mathematica*, – 1961. – **3(22)**. – P. 157–164 (in Russian).
16. V. I. Korobov. A solution of the synthesis problem using controllability function, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, – 1979. – **248**. – P. 1051–1063.
17. V. I. Korobov. *Controllability Function Method*. 2007, Institute of Computer Research "Regular and chaotic dynamics", M.–Izhevsk, 576 p. (in Russian). ISBN 978-5-93972-610-8
18. A. Levant. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control, *International Journal of Control*, – 2003. – **76(9-10)**. – P. 924–941. DOI: 10.1080/0020717031000099029.
19. F. Lopez-Ramirez, A. Polyakov, D. Efimov, and W. Perruquetti. Finite-time and fixed-time observer design: Implicit Lyapunov function approach, *Automatica*, – 2018. – **87**. – P. 52–60. DOI: 10.1016/j.automatica.2017.09.007.
20. A. M. Lyapunov. *The general problem of the stability of motion*. 1992. Taylor & Francis.
21. M. Misrikhanov and V. Ryabchenko. Pole placement for controlling a large scale power system, *Automation and Remote Control*, – 2011. – **72**. – P. 2123–2146. DOI: 10.1134/S0005117911100110.
22. H. Nakamura, Y. Yamashita, and H. Nishitani. Smooth Lyapunov functions for homogeneous differential inclusions, In *Proceedings of the 41st SICE Annual Conference*, – 2002. – **3**. – P. 1974–1979. DOI: 10.1109/SICE.2002.1196633.
23. E. Noether. Invariante variationsprobleme, *Kgl. Ges. d. Wiss. Nachrichten, Math.-phys. Klasse*, – 1918. – P. 235–257 (In German).
24. A. Polyakov. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, – 2012. – **57(8)**. – P. 2106–2110. DOI: 10.1109/TAC.2011.2179869.
25. A. Polyakov. Time-suboptimal feedback design via linear matrix inequalities, *Automation and Remote Control*, – 2015. – **76**. – P. 847–862. DOI: 10.1134/S0005117915050100.

26. A. Polyakov. Sliding mode control design using canonical homogeneous norm, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, – 2018. – **29(3)** – P. 682–701. DOI: 10.1002/rnc.4058.
27. A. Polyakov. *Generalized Homogeneity in Systems and Control*. 2020. Springer, XVIII + 447 p. DOI: 10.1007/978-3-030-38449-4.
28. A. Polyakov, D. Efimov, and W. Perruquetti. Robust stabilization of MIMO systems in finite/fixed time, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, – 2016. – **26(1)** – P. 69–90. DOI: 10.1002/rnc.3297.
29. A. Polyakov, Y. Orlov, H. Oza, and S. Spurgeon. Robust finite-time stabilization and observation of a planar system revisited, In *Conference on Decision and Control*, – 2015. – P. 5689-5694. DOI: 10.1109/CDC.2015.7403112.
30. R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. 1970. Princeton University Press, 470 p.
31. L. Rosier. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field, *Systems & Control Letters*, – 1992. – **19(6)**. – P. 467–473. DOI: 10.1016/0167-6911(92)90078-7.
32. E. Roxin. On finite stability in control systems, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, – 1966. – **15**. – P. 273–283.
33. E. P. Ryan. Universal stabilization of a class of nonlinear systems with homogeneous vector fields, *Systems & Control Letters*, – 1995. – **26(3)**. – P. 177–184. DOI: 10.1016/0167-6911(95)00013-Y.
34. E. D. Sontag. Smooth stabilization implies coprime factorization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, – 1989. – **34(4)**. – P. 435–443. DOI: 10.1109/9.28018.
35. E. D. Sontag and Y. Wang. On characterizations of the input-to-state stability property, *Systems & Control Letters*, – 1996. – **24(5)**. – P. 351–359. DOI: 10.1016/0167-6911(94)00050-6.
36. V. I. Zubov. On systems of ordinary differential equations with generalized homogenous right-hand sides, *Izvestia vuzov. Mathematica*, – 1958. – **1**. – P. 80–88 (in Russian).

Про однорідні функції керованості

Поляков. А.

Інрія Лілль-Норд Європа, пр-т. Алле, 40, Вільньов д'Аск, Франція, 5965.

Метод функції керованості, введений В. І. Коробовим наприкінці 1970-х років, як відомо, є ефективним інструментом для проектування систем керування. Він розроблений як для лінійних/нелінійних, так і для скінченно/нескінченновимірних систем. Ця стаття поєднує цей метод із теорією

однорідності, що корінням сягає початку 18 століття та являє собою симетрією функції щодо рівномірного масштабування її аргументу. Узагальнення такого ефективного підходу були введені в 20 столітті. У цій роботі показано, що так звана однорідна норма є функцією керованості лінійної автономної системи керування, а відповідна замкнута система є однорідною в узагальненому сенсі. Це відразу дає багато корисних властивостей, відомих для однорідних систем, таких як робастність (стабільність вхідних даних) щодо досить великого класу збурень, зокрема щодо обмежених адитивних шумів вимірювання та обмежених адитивних екзогенних збурень. Основна теорема, представлена в цій роботі, дещо уточнює побудову функції керованості для лінійних автономних систем керування з кількома входами. Процедура полягає в розв'язанні лінійного алгебраїчного рівняння та систему лінійних матричних нерівностей. Сама однорідність і використання канонічної однорідної норми істотно спрощують знаходження функції керованості та аналіз замкнутої системи. Теоретичні результати підкріплені прикладами. Перспективним напрямком для майбутніх досліджень є подальше вивчення побудови функцій керованості на основі однорідності.

Ключові слова: функція керованості; узагальнена однорідність; робастність.

On homogeneous controllability functions

A. Polyakov

Inria Lille-Nord Europe, 40. av. Halley, Villeneuve d'Ascq, 5965, France

The controllability function method, introduced by V. I. Korobov in late 1970s, is known to be an efficient tool for control systems design. It is developed for both linear/nonlinear and finite/infinite dimensional systems. This paper bridges the method with the homogeneity theory popular today. The standard homogeneity known since 18th century is a symmetry of function with respect to uniform scaling of its argument. Some generalizations of the standard homogeneity were introduced in 20th century. This paper shows that the so-called homogeneous norm is a controllability function of the linear autonomous control system and the corresponding closed-loop system is homogeneous in the generalized sense. This immediately yields many useful properties known for homogeneous systems such as robustness (Input-to-State Stability) with respect to a rather large class of perturbations, in particular, with respect to bounded additive measurement noises and bounded additive exogenous disturbances. The main theorem presented in this paper slightly refines the design of the controllability function for a multiply-input linear autonomous control systems. The design procedure consists in solving subsequently a linear algebraic equation and a system of linear matrix inequalities. The homogeneity itself and the use of the canonical homogeneous norm essentially simplify the design of a controllability function and the analysis of the closed-loop system. Theoretical results are supported with examples. The further study of homogeneity-based design of controllability functions seems to be a promising direction for future research.

Keywords: controllability function; generalized homogeneity; robustness.

Article history: Received: 28 July 2021; Final form: 11 November 2021;

Accepted: 15 November 2021.

A small gain theorem for finite-time input-to-state stability of infinite networks and its applications

S. S. Pavlichkov

*Department of Mechanical and Process Engineering,
Technical University of Kaiserslautern,
42, Gottlieb-Daimler-Str., Kaiserslautern, 67663, Germany
s_s_pavlichkov@yahoo.com*

We prove a small-gain sufficient condition for (global) finite-time input-to-state stability (FTISS) of infinite networks. The network under consideration is composed of a countable set of finite-dimensional subsystems of ordinary differential equations, each of which is interconnected with a finite number of its "neighbors" only and is affected by some external disturbances. We assume that each node (subsystem) of our network is finite-time input-to-state stable (FTISS) with respect to its finite-dimensional inputs produced by this finite set of the neighbors and with respect to the corresponding external disturbance. As an application we obtain a new theorem on decentralized *finite-time* input-to-state stabilization with respect to external disturbances for infinite networks composed of a countable set of strict-feedback form systems of ordinary differential equations. For this we combine our small-gain theorem proposed in the current work with the controllers design developed by S. Pavlichkov and C. K. Pang (NOLCOS-2016) for the gain assignment of the strict-feedback form systems in the case of finite networks.

The current results address the FTISS and decentralized FTISS stabilization and redesign the technique proposed in recent work S. Dashkovskiy and S. Pavlichkov, Stability conditions for infinite networks of nonlinear systems and their application for stabilization, *Automatica*. – 2020. – 112. – 108643, in which the case of ℓ_∞ -ISS of infinite networks was investigated.

Keywords: nonlinear systems; input-to-state stability; small gain conditions.

Павличков С. С. Теорема про мале посилення для стійкості вхід-стан за скінченний час нескінченних мережевих систем і її застосування. Ми доводимо достатню умову стійкості вхід-стан за скінченний час нескінченних мережевих систем в термінах малого посилення (small gain condition). Мережева система, що розглядається, складається зі зліченної множини скінченновимірних систем звичайних диференціальних рівнянь, кожна з яких з'єднана тільки зі скінченною множиною сусідніх підсистем, а також містить зовнішнє збурення. Передбачається, що кожен вузол мережі (кожна підсистема) є стійкою вхід-стан за скінченний час відносно його скінченновимірних входів утворених фазовими змінними сусідніх підсистем і зовнішнім збуренням. Як застосування цього результату (наслідок)

ми отримуємо нову теорему про децентралізовану стабілізацію вхід-стан за скінченний час для нескінченних мережевих систем, які представляють собою злічений набір з'єднаних трикутних систем звичайних диференціальних рівнянь. Для цього ми комбінуємо доведену в даній роботі теорему малого посилення (small gain theorem) з методом побудови децентралізованих стабілізуючих керувань, який отримано в роботі S. Pavlichkov and C. K. Pang (NOLCOS-2016) для кінцевих мережевих систем.

Дана робота переносить результати недавньої роботи S. Dashkovskiy and S. Pavlichkov, Stability conditions for infinite networks of nonlinear systems and their application for stabilization, Automatica. – 2020. – 112. – 108643 на випадок стабілізації за скінченний час.

Ключові слова: нелінійні системи; стійкість вхід-стан; умови малого посилення

Павличков С. С. Теорема о малом усилении для устойчивости вход-состояние за конечное время бесконечных сетевых систем и ее применения. Мы доказываем достаточное условие устойчивости вход-состояние за конечное время бесконечных сетевых систем в терминах малого усиления (small gain condition). Рассматриваемая сетевая система состоит из счетного множества конечномерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, каждая из которых соединена только с конечным множеством соседних систем, а также содержит внешнее возмущение. Предполагается, что каждый узел сети (каждая подсистема) обладает свойством устойчивости вход-состояние за конечное время относительно его конечномерных входов образованных фазовыми переменными соседних подсистем и внешним возмущением. В качестве применения этого результата (следствия) мы получаем новую теорему о децентраллизованной стабилизации вход-состояние за конечное время бесконечных сетевых систем представляющих собой счетный набор соединенных треугольных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого мы комбинируем доказанную в настоящей работе теорему малого усиления (small gain theorem) с методом построения децентрализованных стабилизирующих управлений полученным в работе S. Pavlichkov and C. K. Pang (NOLCOS-2016) для конечных сетевых систем.

Настоящая работа переносит результаты недавней работы S. Dashkovskiy and S. Pavlichkov, Stability conditions for infinite networks of nonlinear systems and their application for stabilization, Automatica. – 2020. – 112. – 108643 на случай стабилизации за конечное время.

Ключевые слова: нелинейные системы; устойчивость вход-состояние; условия малого усиления

2010 Mathematics Subject Classification: 93C10; 93A15; 93D25; 93B70; 93D40; 93A14.

1. Introduction

The definition of input-to-state stability (ISS) was introduced in 1989 in [36] as a natural generalization of the classical global asymptotic stability for the case when the dynamics of the system under consideration is affected by some external disturbance. Very soon, the concept of ISS became very fruitful. First, it

appeared that the classical converse Lyapunov theorems (on the existence of the Lyapunov functions for globally asymptotically stable systems) can be extended to the case of ISS. More specifically a systems of ordinary differential equations (ODE) with external disturbance input is ISS *if and only if* it has an ISS Lyapunov function [37]. Second, deep results devoted to various characterizations of ISS including its relationship with the classical Lyapunov stability and asymptotic stability properties were obtained [38]; in particular one of results from [38] states that a system of ODE with external disturbance inputs of class L_∞ is ISS if and only if it is globally asymptotically stable whenever the disturbance is identically equal to zero, and the system possesses the so-called asymptotic gain (AG) property, which means that, for any disturbance input which is different from zero, each trajectory of the system eventually converges to a ball with its center at origin and the radius of this ball is a \mathcal{K} -function of the L_∞ -norm of the corresponding disturbance regardless of the initial condition. Third, this theory led to the so-called small gain theorems firstly for two interconnected systems [17],[16], which later was extended to the general case of $N \geq 2$ interconnected subsystems [8], [18], [9]. Later these classical results devoted to systems of ODE were extended to networks of impulsive and delayed systems [10], interconnections of partial differential equations (PDE)[27], etc. In general, the purport of the small gain theorems is to provide sufficient conditions for (ISS) stability of entire interconnection of several ISS subsystems. This, in turn, provided many applications such as nonlinear stabilization in presence of dynamic uncertainties [17],[39] or decentralized(or distributed or cooperative control) of multi-agent systems, see e.g. [24],[32],[33], [31].

The problem of finite-time stabilization was raised and solved in 1979 for linear control systems in [21, 22] by means of the controllability function method, which was later developed in many works such as [2, 23, 4, 1]. This area enjoyed a renaissance after 2000, see, for instance, [3, 15, 40, 13, 14, 34]. In contrast to the above-mentioned papers based on the controllability function method [21, 22, 2, 23, 4, 1], in which the corresponding finite-time control Lyapunov function (i.e., the controllability function) is defined as an implicit function, works [15, 40, 13] are based on a certain revision of the backstepping approach for the case of finite-time stabilization, where the Lyapunov functions and controls are designed explicitly. The latter allowed to obtain an extension of the ISS framework and small-gain approaches to the case of finite-time stability and further applications in design of nonlinear finite-time stabilizers in presence of dynamic uncertainties similarly to the classical work [17]. Such a generalization was proposed in [14].

Since stability and stabilization of large-scale networks has many meaningful applications [11, 25, 26], another recent popular topic has become infinite networks [5, 35, 6, 41]. The main focus was the infinite networks of finite-dimensional linear control systems with linear interconnections. In work [7], a new small-gain theorem for infinite networks of nonlinear ODE systems interconnected nonlinearly was proved and its applications were demonstrated by solving the decentralized stabilization problem for infinite networks of nonlinear control systems with

uncontrollable linearizations and power integrators. Also there are new recent results devoted to characterizations of ISS of infinite-dimensional systems [28] as well as further extensions of ISS small gain conditions to the case of infinite networks of nonlinear ODE systems, see, for instance, [19].

The goal of the current work is to extend the results of [7] to the case of *finite-time stability and stabilization* of infinite networks, i.e., to prove the corresponding small gain theorem and to show how it can be applied to the decentralized *finite-time* stabilization of infinite networks composed of nonlinear control systems of ordinary differential equations. The current paper extends and generalizes its conference predecessor [30] to the case of finite-time ISS stability and decentralized stabilization in presence of external disturbance inputs and with respect to these disturbance inputs. In the special case when all these external disturbances are zeroes (i.e. are absent), we just obtain finite-time stability and finite-time decentralized stabilization of infinite networks as a corollary.

2. Preliminaries

A function $\alpha : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ is said to be of class \mathcal{K} , if it is continuous, strictly increasing and $\alpha(0) = 0$, and $\alpha : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ is said to be of class \mathcal{K}_∞ if it is of class \mathcal{K} and unbounded. In compliance with [14], we say that $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ is a generalized \mathcal{K} -function, or a $\mathcal{G}\mathcal{K}$ -function, if it is continuous, with $\alpha(0) = 0$ and satisfies $\alpha(s) = \max\{0, \bar{\alpha}(s) - \bar{\alpha}(s_0)\}$, where $\bar{\alpha}(\cdot)$ is a \mathcal{K} -function and $s_0 \geq 0$ is a given parameter. A continuous function $\beta : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ is said to be of class \mathcal{KL} if for each fixed $t \geq 0$ the function $\beta(\cdot, t)$ is of class \mathcal{K} and for each fixed $s \geq 0$, we have $\beta(s, t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$ and $t \mapsto \beta(s, t)$ is decreasing. A continuous function $\beta : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ is said to be a generalized \mathcal{KL} -function, or a $\mathcal{G}\mathcal{KL}$ -function if for each $t \geq 0$ the function $\beta(\cdot, t)$ is a $\mathcal{G}\mathcal{K}$ -function and for each $s \geq 0$ the function $\beta(s, \cdot)$ is decreasing with $\beta(s, t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$ with some $T(s) \leq +\infty$ and $t \mapsto \beta(s, t)$ is decreasing.

For any finite-dimensional vector $\xi \in \mathbb{R}^N$, by $|\xi|$, $|\xi|_\infty$, and $|\xi|_1$ we denote its Euclidean norm, max-norm, and Manhattan Taxicab norm respectively, i.e., $|\xi| := \langle \xi, \xi \rangle^{\frac{1}{2}}$, $|\xi|_\infty := \max_{1 \leq i \leq N} |\xi_i|$, and $|\xi|_1 := \sum_{i=1}^N |\xi_i|$. If \mathcal{N} is a *finite* set, i.e., it has a *finite* number of elements, then we denote the number of its elements by $|\mathcal{N}|$.

Let (\mathcal{M}, d) be a metric space. A map $\mathbb{R} \supset [a, b] \ni t \mapsto \mathcal{X}(t) \in \mathcal{M}$ is said to be absolutely continuous on the segment $[a, b]$ if and only if, for every $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that for every finite sequence of pairwise disjoint subintervals $]\tau_m, s_m[$ of $[a, b]$, we have:

$$\sum_m (s_m - \tau_m) < \delta \Rightarrow \sum_m d(\mathcal{X}(s_m), \mathcal{X}(\tau_m)) < \varepsilon. \tag{1}$$

Throughout the paper, by $AC([a, b]; \mathcal{M})$ we denote the class of absolutely continuous maps $\mathbb{R} \supset [a, b] \ni t \mapsto \mathcal{X}(t) \in \mathcal{M}$.

Next, instead of $i = \overline{1, n}$ we can also write $i \in \{1, \dots, n\}$ to make some formulae shorter.

3. A finite-time small gain theorem for infinite networks

In this Section, we deal with the following infinite network

$$\dot{X}_i(t) = \Phi_i(X_i(t), \{X_j(t)\}_{j \in J(i)}, D_i(t)), \quad i \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

where $X_i = [X_{i,1}, \dots, X_{i,N_i}]^\top \in \mathbb{R}^{N_i}$ is the state vector of the i -th subsystem, $D_i = [D_{i,1}, \dots, D_{i,n_i}]^\top \in \mathbb{R}^{n_i}$ is the disturbance input of the i -th subsystem, every Φ_i is of class $C(\mathbb{R}^{N_i + \sum_{j \in J(i)} N_j}; \mathbb{R}^{N_i})$, and, for every $i \in \mathbb{N}$, the set $J(i) \subset \mathbb{N}$ of the neighbors of the i -th subsystem is a *finite* set of the corresponding indices from \mathbb{N} . According to our notation, $i \notin J(i)$ for all $i \in \mathbb{N}$, i.e. i -th subsystem is not treated as a neighbor of itself. We suppose that the state vector $X = \{X_i\}_{i=1}^\infty$, and the disturbance input vector $D = \{D_i\}_{i=1}^\infty$ of the entire network (2) are elements of ℓ_∞ . Furthermore, it is assumed that the dynamics of (2) is locally uniformly bounded in the following sense:

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \max_{j \in J(i)} \max_{|X_i|_\infty \leq R, |X_j|_\infty \leq R, |D_i|_\infty \leq R} |\Phi_i(X_i, \{X_j\}_{j \in J(i)}, D_i)|_\infty < \infty \quad (3)$$

for every $R \in]0, +\infty[$. Throughout the paper, we assume that external disturbances $\mathbb{R} \ni t \mapsto D(t) = \{D_i(t)\}_{i=1}^\infty$ are such that for each $i \in \mathbb{N}$ we have $D_i(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n_i})$ and $D(t) = \{D_i(t)\}_{i=1}^\infty \in \ell_\infty$ a.e. on $t \in \mathbb{R}$, and such that $\sup_{i \in \mathbb{N}} \max_{j=1, n_i} \|D_{i,j}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})} < +\infty$. This class of disturbances

$D(\cdot) = \{D_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ is denoted by $L_\infty(\mathbb{R}; \ell_\infty)$ throughout the paper, and, by definition, we denote $\|D(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}; \ell_\infty)} := \sup_{i \in \mathbb{N}} \max_{j=1, n_i} \|D_{i,j}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})}$. Also, by definition, we put $\|X_i(\cdot)\|_{C([t_0, T]; \mathbb{R}^{N_i})} := \max_{t \in [t_0, T]} |X_i(t)|_\infty$ for every $i \in \mathbb{N}$, and every $X_i(\cdot) \in C([t_0, T]; \mathbb{R}^{N_i})$.

The following two definitions of a solution (trajectory) of (2) are the same as in [7].

Definition 1. Take any $D(\cdot) = \{D_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty \in L_\infty(\mathbb{R}; \ell_\infty)$ and any nonempty $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ of the form $\mathcal{T} =]a, b[$, or $\mathcal{T} = [a, b]$, or $\mathcal{T} = [a, b[$, or $\mathcal{T} =]a, b]$. A map $\mathcal{T} \ni t \mapsto X(t) = \{X_i(t)\}_{i=1}^\infty \in \ell_\infty$ is said to be a solution to (2) on \mathcal{T} , if and only if for each $[a', b'] \subset \mathcal{T}$ and each $i \in \mathbb{N}$ the map $t \mapsto X_i(t)$ is of class $AC([a', b']; \mathbb{R}^{N_i})$, and (2) holds a.e. on $t \in \mathcal{T}$, or, which is the same, for each $t_0 \in \mathcal{T}$, we have

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad X_i(t) = X_i(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_i(X_i(s), \{X_j(s)\}_{j \in J(i)}, D_i(s)) ds. \quad (4)$$

Definition 2. Given any nonempty (open, half-open, or closed) interval $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$, any $t_0 \in \mathcal{T}$, any $X^0 = \{X_i^0\}_{i=1}^\infty$ in ℓ_∞ , and any $D(\cdot) = \{D_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ in $L_\infty(\mathbb{R}; \ell_\infty)$, let $Y(t_0, X^0, D(\cdot), \mathcal{T})$ denote the set of all solutions $\mathcal{T} \ni t \mapsto X(t)$ to (2) on \mathcal{T} in the sense of Definition 1 such that $X(t_0) = X^0$ and $D_i = D_i(t)$.

Let us note that, according to Lemma 1 from [7], if $\mathcal{T} \ni t \mapsto X(t) = \{X_i(t)\}_{i=1}^\infty \in \ell_\infty$ is a solution to (2) on \mathcal{T} in the sense of Definition 2, then the entire map $\mathcal{T} \ni t \mapsto X(t) = \{X_i(t)\}_{i=1}^\infty \in \ell_\infty$ is also absolutely continuous on each $[a', b'] \subset \mathcal{T}$ (although the latter statement seems to be stronger at the first glance).

In contrast to [7], we are now interested in the problem of ℓ_∞ -finite-time input-to-state stability (ℓ_∞ -FTISS) of (2) in the current paper; as a corollary we will obtain global ℓ_∞ -finite-time stability (ℓ_∞ -FTS) of (2) in the special case $D(\cdot) = 0 \in L_\infty(\mathbb{R}; \ell_\infty)$, which was considered (with some drawbacks) in [30]. The corresponding definitions are as follows.

Definition 3. System (2) is said to be ℓ_∞ -finite-time input-to-state stable or ℓ_∞ -FTISS if and only if there exist $\gamma \in \mathcal{K}$ and $\beta \in \mathcal{GKL}$ such that $\beta(r, s) = 0$ for each $s \geq T(r)$ with some $r \mapsto T(r)$ of class $C([0, +\infty[; [0, +\infty[)$ and such that $T(0) = 0$, and, for each $t_0 \in \mathcal{T}$, each $X^0 = \{X_i^0\}_{i=1}^\infty$ in ℓ_∞ , and each $D(\cdot) = \{D_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ in $L_\infty(\mathbb{R}; \ell_\infty)$, we have $Y(t_0, X^0, D(\cdot), [t_0, +\infty[) \neq \emptyset$ and each solution $X(\cdot) \in Y(t_0, X^0, D(\cdot), [t_0, +\infty[)$ satisfies the following inequality

$$\|X(t)\|_{\ell_\infty} \leq \max\{\beta(\|X^0\|_{\ell_\infty}, t - t_0), \gamma(\|D(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}; \ell_\infty)})\} \quad \text{for all } t \geq t_0. \quad (5)$$

In particular, if $D(\cdot) = 0$, i.e., there is no any external disturbance $D(\cdot)$ in system (2), we obtain the following definition of ℓ_∞ -finite-time stability (ℓ_∞ -FTS)

$$\|X(t)\|_{\ell_\infty} \leq \beta(\|X^0\|_{\ell_\infty}, t - t_0) \quad \text{for all } t \geq t_0, \quad (6)$$

where $\beta \in \mathcal{GKL}$ is the same as above in (5). In both the cases, the above-mentioned function $r \mapsto T(r)$ is called the settling time for system (2).

Remark 1. For comparison, let us quote the original, classical definition of finite-time input-to-state stability (FTISS) of finite-dimensional systems of ordinary differential equations (ODE), which was given in [14]. System of ODE

$$\dot{X}(t) = F(X(t), D(t)), \quad X \in \mathbb{R}^N, \quad D \in \mathbb{R}^M \quad (7)$$

with states $X \in \mathbb{R}^N$, external disturbance input $D(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^M)$, and continuous $F(\cdot, \cdot)$ is said to be finite-time input-to-state stable (FTISS), if and only if there exist $\gamma \in \mathcal{K}$ and $\beta \in \mathcal{GKL}$ such that $\beta(r, s) = 0$ for each $s \geq T(r)$ with some $r \mapsto T(r)$ of class $C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ such that $T(0) = 0$ and for each $t_0 \in \mathbb{R}$, each $X^0 \in \mathbb{R}^N$ and each $D(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^M)$ every solution to (7) with $X(t_0) = X^0$, $D = D(t)$ satisfies the inequality

$$|X(t)| \leq \max\{\beta(\|X^0\|, t - t_0), \gamma(\|D(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^M)})\} \quad \text{for all } t \geq t_0. \quad (8)$$

(actually, the original Definition 3 from [14] has sum instead of max in the right-hand side of (8), but both these two versions are equivalent, of course). Also following [14] (with some simplification), we say that $V(\cdot)$ of class $C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}_+)$ is a finite-time ISS Lyapunov function for system (7), if and only if there

exist $a \in]0, 1[$, $\lambda > 0$ and $\alpha_1(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$, $\alpha_2(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$, $\bar{\gamma}(\cdot) \in \mathcal{K}$ such that $\alpha_1(|X|) \leq V(X) \leq \alpha_2(|X|)$ for all $X \in \mathbb{R}^N$ and such that the following FTI-SS Lyapunov inequality holds

$$V(X) \geq \bar{\gamma}(|D|) \Rightarrow \nabla V(X)F(X, D) \leq -\lambda[V(X)]^a \quad \text{for all } X \in \mathbb{R}^N, D \in \mathbb{R}^M. \quad (9)$$

In comparison with [14], the main simplification here is that $V(\cdot)$ should not be necessarily of class C^1 in [14], but this is an equivalent formulation in our case. As it is noted in [14] (and can be easily shown), if system (7) has a finite-time ISS Lyapunov function, then (7) is FTISS.

Accordingly instead of the small-gain theorem from [7] our current version of finite-time (FT) small gain theorems is as follows.

Theorem 1. *Suppose that each Φ_i is continuous, inequality (3) holds true and there exist positive definite FTISS Lyapunov functions $V_j(X_j)$ in $C^1(\mathbb{R}^{N_j}; [0, +\infty[)$ such that*

(i) *There exists $\alpha(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ such that $V_i(X_i) \geq \alpha(|X_i|)$ uniformly for all $X_i \in \mathbb{R}^{N_i}$, $i \in \mathbb{N}$ (i.e., $V_i(\cdot)$ are uniformly radially unbounded)*

(ii) *For each $R > 0$ we have:*

$$\begin{aligned} \sup_{i \in \mathbb{N}} N_i &< +\infty, & \sup_{i \in \mathbb{N}} n_i &< +\infty, \\ \sup_{i \in \mathbb{N}} \max_{|X_i| \leq R} V_i(X_i) &< +\infty, & \sup_{i \in \mathbb{N}} \max_{|X_i| \leq R} \left| \frac{\partial V_i(X_i)}{\partial X_i} \right| &< +\infty \end{aligned} \quad (10)$$

(iii) *There exist $\lambda > 0$, $\mu \in]0, 1[$, $\varepsilon \in]0, 1[$, and $\gamma(\cdot) \in \mathcal{K}$ such that each i -th subsystem of (2) satisfies the following Lyapunov ISS inequality:*

$$\begin{aligned} V_i(X_i) &\geq \max\left\{(1 - \varepsilon) \max_{j \in J(i)} V_j(X_j), \gamma(|D_i|_\infty)\right\} \Rightarrow \\ \nabla V_i(X_i) \Phi_i(X_i, \{X_j\}_{j \in J(i)}, D_i) &\leq -\lambda V_i^{1-\mu}(X_i). \end{aligned} \quad (11)$$

Then the following three statements hold true:

(I) *For each $t_0 \in \mathbb{R}$ each initial $X^0 = \{X_i^0\}_{i=1}^\infty$ in ℓ_∞ , and each $D(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}; \ell_\infty)$, the set $Y(t_0, X^0, D(\cdot), [t_0, +\infty[)$ is not empty and every trajectory $t \mapsto X(t) = \{X_i(t)\}_{i=1}^\infty \in \ell_\infty$ from $Y(t_0, X^0, D(\cdot), [t_0, +\infty[)$ is well-defined and uniformly bounded on the entire $[t_0, +\infty[$, i.e., $t \mapsto X(t)$ satisfies $X_i(t_0) = X_i^0$ and*

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \dot{X}_i(t) = \Phi_i(X_i(t), \{X_j(t)\}_{j \in J(i)}, D_i(t)) \quad \text{a.e. on } t \in [t_0, +\infty[.$$

For $X^0 = 0 \in \ell_\infty$, and $D_i(\cdot) = 0$, we just have $X(t) = 0 \in \ell_\infty$ for all $t \in [t_0, +\infty[$.

(II) Define the finite-time ISS Lyapunov function for the entire network by

$$V(X) := \sup_{i \in \mathbb{N}} \{V_i(X_i)\} \quad \text{for all } X = \{X_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}. \quad (12)$$

Then, for every trajectory $t \mapsto X(t)$ of (2) defined in (I), the function $t \mapsto V(X(t))$ is absolutely continuous on every $[a, b] \subset [t_0, +\infty[$, and

$$V(X(t)) > \gamma(\|D(\cdot)\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}; \ell_{\infty})}) \Rightarrow \dot{V}(X(t)) \leq -\lambda V^{1-\mu}(X(t)) \quad \text{a.e. on } [t_0, +\infty[. \quad (13)$$

This immediately implies that (2) is ℓ_{∞} -FTISS in the sense of Definition 3.

(III) If $D(\cdot) = 0 \in L_{\infty}(\mathbb{R}; \ell_{\infty})$ then system (2) is ℓ_{∞} -FTS in the sense of Definition 3 and the settling time $T(r)$ mentioned in Definition 3 can be obtained from the following estimate:

$$V(X(t)) = 0 \quad \text{for all } t \in [T(V(X^0)), +\infty[,$$

where

$$T(V(X^0)) \leq \frac{1}{\lambda\mu} [V(X^0)]^{\mu}. \quad (14)$$

Remark 2. Note that Assumptions (i), (ii) imply the existence of $\alpha_{\max}(\cdot) \in \mathcal{K}_{\infty}$ such that

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall X_i \in \mathbb{R}^{N_i} \quad \alpha(|X_i|) \leq V_i(X_i) \leq \alpha_{\max}(|X_i|). \quad (15)$$

In addition, by Assumption (ii), the FT Lyapunov function $V(X)$ from (12) is well-defined by (12) for all $X \in \ell_{\infty}$, and then, from (15) it follows that

$$\forall X = \{X_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\infty} \quad \alpha(|X|) \leq V(X) \leq \alpha_{\max}(|X|). \quad (16)$$

Remark 3. Assumption (iii) with (11) is a finite-time analog of Assumptions (iii), (iv) from [7], the latter being devoted to the problem of uniform asymptotic stabilization for infinite networks (2). For finite networks, they can be formulated in more general form [9], [18], but being motivated by these finite-dimensional and essentially nonlinear results, we note that our version of small gain theorems for infinite networks deals with linear gains similarly to [7]. However, as in [7], we will see that this version does suffice for such important applications as decentralized stabilization of infinite networks composed of nonlinear control systems which are interconnected nonlinearly.

Proof of Theorem 1.

Step 1. As in [7] we first prove the existence of the corresponding trajectories of (2). Take and fix any initial $t_0 \in \mathbb{R}$ and $X^0 = \{X_i^0\}_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}$, and any $D(\cdot) \in L_{\infty}(\mathbb{R}; \ell_{\infty})$. Without loss of generality, we first assume that

$$\|X^0\|_{\ell_{\infty}} + \|D(\cdot)\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}; \ell_{\infty})} > 0$$

(the trivial case $X^0 = 0 \in \ell_\infty$, $D(\cdot) = 0 \in L_\infty(\mathbb{R}; \ell_\infty)$ will be discussed in the very end of the proof). This Step 1 is similar to the corresponding Step 1 from [7]. Define

$$V^0 := V(X(t_0)) = \sup_{i \in \mathbb{N}} V_i(X_i(t_0)); \quad \hat{D} := \gamma(\|D(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}; \ell_\infty)}); \quad (17)$$

and taking any $\sigma \in]0, \max\{\frac{V^0}{4}, \frac{\hat{D}}{4}\}[$, define

$$\begin{aligned} R_0 &:= 2 \|X^0\|_{\ell_\infty} + \alpha^{-1}(2V^0 + 2\hat{D} + 1) + 2V^0 + 2\hat{D} + 1; \\ M_0 &:= 1 + \sup_{i \in \mathbb{N}} \max_{|X_i| \leq 2R_0 + 1, |D_i|_\infty \leq \gamma^{-1}(2\hat{D})} \max_{|X_j| \leq 2R_0 + 1, j \in J(i)} |\Phi_i(X_i, \{X_j\}_{j \in J(i)}, D_i)| \\ &\quad + \sup_{i \in \mathbb{N}} \max_{|X_i| \leq 2R_0 + 1, |D_i|_\infty \leq \gamma^{-1}(2\hat{D})} \max_{|X_j| \leq 2R_0 + 1, j \in J(i)} \left| \frac{\partial V_i(X_i)}{\partial X_i} \right| |\Phi_i(X_i, \{X_j\}_{j \in J(i)}, D_i)| \\ \theta &:= \frac{\sigma}{4M_0 + 1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Then we define the following standard iterations $X^{(m)}(\cdot) = \{X_i^{(m)}(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ on $[t_0 - \theta, t_0 + \theta]$ for $m = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} X_i^{(0)}(t) &= X_i^0, \quad t \in [t_0 - \theta, t_0 + \theta], \quad i \in \mathbb{N}, \\ X_i^{(m)}(t) &= X_i^0 + \int_{t_0}^t \Phi_i(X_i^{(m-1)}(s), \{X_j^{(m-1)}(s)\}_{j \in J(i)}, D_i(s)) ds, \\ t_0 - \theta &\leq t \leq t_0 + \theta, \quad i \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (19)$$

It is straightforward that each $X_i^{(m)}(\cdot)$ is of class $AC([t_0 - \theta, t_0 + \theta]; \mathbb{R}^{N_i})$, and, using (i) and (18), we obtain

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \forall t \in [t_0 - \theta, t_0 + \theta] \quad |X_i^{(m)}(t)| \leq R_0. \quad (20)$$

As in [7], we apply the Arzela-Ascoli lemma and Cantor's diagonal argument and prove the existence of a subsequence $X^{(m_q)}(\cdot) = \{X_i^{(m_q)}(\cdot)\}_{i=1}^\infty \in C^1([t_0 - \theta, t_0 + \theta]; \mathbb{R}^{N_i})_{i=1}^\infty$, $q \in \mathbb{N}$ such that for every fixed $i \in \mathbb{N}$ there is $X_i(\cdot)$ of class $C([t_0 - \theta, t_0 + \theta]; \mathbb{R}^{N_i})$ such that

$$\|X_i^{(m_q)}(\cdot) - X_i(\cdot)\|_{C([t_0 - \theta, t_0 + \theta]; \mathbb{R}^{N_i})} \rightarrow 0 \quad \text{as } q \rightarrow \infty.$$

Combining this with (19), (20), we obtain:

$$\begin{aligned} X_i(t) &= X_i^0 + \int_{t_0}^t \Phi_i(X_i(s), \{X_j(s)\}_{j \in J(i)}, D_i(s)) ds, \\ t &\in [t_0 - \theta, t_0 + \theta] \quad i \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (21)$$

Hence $X(\cdot) = \{X_i(\cdot)\}_{i=1}^{+\infty}$ belongs to $Y(t_0, X^0, D(\cdot), [t_0 - \theta, t_0 + \theta])$ with $X_i(\cdot) \in AC([t_0 - \theta, t_0 + \theta]; \mathbb{R}^{N_i})$ and

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [t_0 - \theta, t_0 + \theta] \quad |X_i(t)| \leq R_0. \quad (22)$$

Step 2. First we assume that $V^0 > \hat{D}$; the other cases will be discussed in the end of the proof. Define

$$\varepsilon^* := \frac{1}{2} \min\{\varepsilon, V^0 - \hat{D}, \varepsilon \hat{D}, \frac{\varepsilon}{4} V^0\}. \tag{23}$$

Define $\theta > 0$ as in Step 1 (see (18)), and let $t \mapsto X(t)$ be any trajectory of (2) with $X(t_0) = X^0$ defined on some $[t_0 - \theta^*, t_0 + \theta^*]$ with some $\theta^* \in]0, \theta]$, i.e., $t \mapsto X(t)$ satisfies (21) with $\theta^* \in]0, \theta]$ instead of θ .

Using (3),(10),(15),(21), find $L = L(R_0, V_0) > 0$ and $\tau^* \in]0, \frac{\theta^*}{2}]$ such that

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall t' \in [t_0, t_0 + \tau^*] \quad \forall t'' \in [t_0, t_0 + \tau^*] \quad |V_i(X_i(t')) - V_i(X_i(t''))| \leq L|t' - t''|. \tag{24}$$

(Indeed, as we noted above, $t \mapsto X(t)$ should be of class $AC([t_0 - \tau^*, t_0 + \tau^*]; \ell_\infty)$, and therefore $\sup_{i \in \mathbb{N}} \|X_i(\cdot)\|_{C([t_0 - \tau^*, t_0 + \tau^*]; \mathbb{R}^{N_i})}$ should be uniformly bounded; then we apply (10),(15),(21)). Then, fix any $\tau \in]0, \tau^*]$ such that

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \theta^* - \tau] \quad \forall s \in [0, \tau] \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad |V_i(X_i(t+s)) - V_i(X_i(t))| \leq \frac{\varepsilon^*}{4} \leq \frac{\varepsilon}{32} V^0. \tag{25}$$

Then, in particular,

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \tau] \quad |V_i(X_i(t)) - V_i(X_i(t_0))| \leq \frac{\varepsilon^*}{4} \leq \frac{\varepsilon}{32} V^0, \tag{26}$$

and

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \tau] \quad V(X(t)) \leq V^0 + \frac{\varepsilon^*}{4}. \tag{27}$$

For every $\delta \in]0, \varepsilon^*]$, by $I(\delta) \subset \mathbb{N}$ denote the following set of indices

$$I(\delta) := \{j \in \mathbb{N} \mid V_j(X_j(t_0)) \geq V^0 - \delta\}. \tag{28}$$

As in [7] we obtain the following lemma.

Lemma 1. *The following statements hold true.*

(S1) *For each $i \in \mathbb{N}$ and each $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ we have:*

$$V_i(X_i(t)) \geq V^0 - \frac{3\varepsilon^*}{4} \Rightarrow \dot{V}_i(X_i(t)) \leq -\lambda[V_i(X_i(t))]^{1-\mu}$$

(S2) *For each $i \in \mathbb{N}$ and each $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ we have:*

$$V_i(X_i(t)) \leq \max\{V_i(X_i(t_0)), V^0 - \frac{3\varepsilon^*}{4}\}.$$

(S3) *For each $i \in I(\frac{\varepsilon^*}{2})$ we have:*

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \tau] \quad \dot{V}_i(X_i(t)) \leq -\lambda V_i^{1-\mu}(X_i(t)) \tag{29}$$

(S4) For each $j \in \mathbb{N} \setminus I(\frac{\varepsilon^*}{2})$ and each $i \in I(\frac{\varepsilon^*}{4})$ we have: $V_j(X_j(t)) \leq V_i(X_i(t))$ for all $t \in [t_0, t_0 + \tau]$.

Proof of Statement (S1) follows from (23),(26),(27), from (iii), (11) and from (12),(17). Proof of Statement (S2) follows from Statement (S1). Proof of Statement (S3) follows from (26)-(28) and from Statement (S1). Proof of Statement (S4) follows from (25),(26),(28) and from Statements (S1),(S2).

Since $I(\frac{\varepsilon^*}{4}) \subset I(\frac{\varepsilon^*}{2})$, Statement (S4) of Lemma 1 yields:

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \tau] \quad V(X(t)) = \sup_{i \in \mathbb{N}} V_i(X_i(t)) = \sup_{i \in I(\frac{\varepsilon^*}{2})} V_i(X_i(t)). \quad (30)$$

Finally, from Statement (S4) of Lemma 1 we obtain integrating the inequality (29):

$$\begin{aligned} \forall i \in I(\frac{\varepsilon^*}{2}) \quad [V_i(X_i(t+h))]^\mu &\leq [V_i(X_i(t))]^\mu - \lambda\mu h \quad \text{for all } t \geq t_0, \quad h > 0 \\ \text{such that } t_0 \leq t \leq t+h &\leq t+\tau, \end{aligned}$$

Taking $\sup_{i \in \mathbb{N}}$, and using (12),(30), we obtain

$$\begin{aligned} [V(X(t+h))]^\mu &\leq [V(X(t))]^\mu - \lambda\mu h \quad \text{for all } t \geq t_0, \quad h > 0 \\ \text{such that } t_0 \leq t \leq t+h &\leq t+\tau, \end{aligned}$$

which yields for any $h > 0$

$$[V(X(t+h))] - V(X(t)) \leq [[V(X(t))]^\mu - \lambda\mu h]^{\frac{1}{\mu}} - V(X(t)),$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \frac{V(X(t+h)) - V(X(t))}{h} &\leq V(X(t)) \frac{\left[1 - \frac{\lambda\mu h}{[V(X(t))]^\mu}\right]^{\frac{1}{\mu}} - 1}{h} \quad \text{for all } t \geq t_0, \quad h > 0 \quad (31) \\ \text{such that } t_0 \leq t \leq t+h &\leq t+\tau, \end{aligned}$$

From (24), (30), it follows that that $t \mapsto V(X(t))$ satisfies (24) on $[t_0, t_0 + \tau]$; hence $t \mapsto V(X(t))$ is absolutely continuous and differentiable almost everywhere on $[t_0, t_0 + \tau]$. If $\hat{D} = 0$ then, taking $\lim_{h \rightarrow +0}$ in(31) we obtain (III).

If $V^0 > \hat{D} > 0$, then we repeat the argument from [7], Proof of Theorem 1, Steps 2,3 beginning with eq.(31) of [7] and until the very end of the Proof of Theorem 1 from [7] and obtain (I),(II) (more specifically, using Lemma 1 we note that $Y(t_0, X^0, D(\cdot), [t_0, +\infty])$ is not empty, since (18) implies that the solution constructed on $[t_0, t_0 + \theta]$ in Step 1 can be extended inductively to $[t_0 + \theta, t_0 + 2\theta]$, with the new initial condition at $t = t_0 + \theta$, then to $[t_0 + 2\theta, t_0 + 3\theta]$, etc. and the length of each new interval will be not less than $\theta > 0$ defined in (18), because the inequality $\frac{dV(X(t))}{dt} > 0$ is not possible whenever $V(X(t)) > \hat{D}$ according to

Lemma 1 and the assumption $V^0 > \hat{D}$, hence, after each extension of the time interval, the inequality (22) will hold on each extended time interval. Then, as in [7], for any solution $t \mapsto X(t)$ from $Y(t_0, X^0, D(\cdot), [t_0, +\infty[)$, we find $\tilde{\theta} := \sup\{\bar{\theta} > 0 \mid V(X(t_0 + \bar{\theta})) > \hat{D}\}$ and obtain that $V(X(t_0 + s)) \leq \hat{D}$ for all $s \geq \tilde{\theta}$, because, otherwise, we again obtain contradiction with Lemma 1. Finally, if $V^0 \leq \hat{D}$, then again from Lemma 1 it follows that $V(X(t_0 + s)) \leq \hat{D}$ for all $s \geq 0$, since $\exists s > 0 \mid V(X(t_0 + s)) > \hat{D}$ implies $\exists s' > 0$ s.t. $V(X(t_0 + s')) > \hat{D}$ and $\frac{d}{ds}V(X(t_0 + s')) > 0$, which is again impossible due to Lemma 1 and for every solution $t \mapsto X(t)$ from $Y(t_0, X^0, D(\cdot), [t_0, +\infty[)$, whereas $Y(t_0, X^0, D(\cdot), [t_0, +\infty[)$ is again not empty, which again follows from the inductive extension of construction in Step 1 to $[t_0 + \theta, t_0 + 2\theta], [t_0 + 2\theta, t_0 + 3\theta], \dots$. The same can be obtained for the trivial case $V^0 = \hat{D} = 0$: on the one hand, $X(t) = 0$ belongs to $Y(t_0, X^0, D(\cdot), [t_0, +\infty[)$, and, on the other hand there no any other solutions from $Y(t_0, X^0, D(\cdot), [t_0, +\infty[)$, because $\frac{dV(X(t))}{dt} > 0$ and $V(X(t)) > 0$ is not possible for any $t \geq t_0$ for the same reasons as above).

The proof of Theorem 1 is complete.

4. Applications: decentralized finite-time stabilization of infinite networks

Motivated by [20, 25, 26, 29, 31] consider the following infinite network of interconnected strict-feedback form control systems

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,k} = x_{i,k+1} + \Delta_{i,k}(X_{i,k}, \mathcal{X}_{i,k}, D_i), & k = 1, \dots, \nu_i - 1, \\ \dot{x}_{i,\nu_i} = u_i + \Delta_{i,\nu_i}(X_{i,\nu_i}, \mathcal{X}_{i,\nu_i}, D_i), \end{cases} \quad i \in \mathbb{N}, \quad (32)$$

with controls $u_i \in \mathbb{R}^1$, $i \in \mathbb{N}$, with the state vector $X = \{X_{i,\nu_i}\}_{i=1}^\infty \in \ell_\infty$, where $X_{i,k}$, $\mathcal{X}_{i,k}$, are given by

$$X_{i,k} := [x_{i,1}, \dots, x_{i,k}]^\top, \quad \mathcal{X}_{i,k} := \{X_{\kappa, \min\{k, \nu_\kappa\}}\}_{\kappa \in J(i)}, \quad k = 1, \dots, \nu_i \quad (33)$$

for all $i \in \mathbb{N}$, and with external disturbance inputs $\mathbb{R} \ni t \mapsto D(t) = \{D_i(t)\}_{i=1}^\infty$ such that for each $i \in \mathbb{N}$ we have $D_i(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{\nu_i})$ and $D(t) = \{D_i(t)\}_{i=1}^\infty \in \ell_\infty$ a.e. on $t \in \mathbb{R}$, and such that $\sup_{i \in \mathbb{N}} \max_{j=1, \dots, \nu_i} \|D_{i,j}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})} < +\infty$. As in Section 3, $J(i) \subset \mathbb{N}$ can be considered as the set of “neighbors” affecting i -th agent (node) of (32). As in Section 3, we assume without loss of generality that $i \notin J(i)$ for all $i \in \mathbb{N}$. Let us remark that *finite but large-scale* networks of form (32) with hierarchical structure of interconnections (32), (33) have engineering and physical motivation, see, for instance, [26, 25]. The case of infinite networks can be interpreted, for instance, as “open multi-agent systems”, when some agents (nodes) may unexpectedly arrive, some agents (nodes) may unexpectedly depart, and the maximal number of nodes is unknown [12].

We suppose that (32) satisfies the following assumptions:

- (A1) Every $J(i) \subset \mathbb{N}$ is *finite* for each $i \in \mathbb{N}$, and $\sup_{i \in \mathbb{N}} |J(i)| < +\infty$;

(A2) $\Delta_{i,k}(0,0,0) = 0$ and $\Delta_{i,k}(\cdot, \cdot, \cdot)$ are functions of class C^1 ;

(A3) The dimensions of the state spaces and disturbances of all the agents are uniformly bounded, i.e., $\nu := \sup_{i \in \mathbb{N}} \nu_i < +\infty$, and $n := \sup_{i \in \mathbb{N}} n_i < +\infty$;

(A4) For every $R > 0$ we have:

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \max_{1 \leq k \leq \nu_i} \max_{|X_{i,k}| \leq R, |\mathcal{X}_{i,k}| \leq R, |D_i| \leq R} |\Delta_{i,k}(X_{i,k}, \mathcal{X}_{i,k}, D_i)| < \infty; \quad (34)$$

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \max_{z \in J(i) \cup \{i\}} \max_{1 \leq k \leq \nu_i} \max_{\substack{|X_{i,k}| \leq R, \\ |\mathcal{X}_{i,k}| \leq R, \\ |D_i| \leq R}} \left| \frac{\partial \Delta_{i,k}(X_{i,k}, \mathcal{X}_{i,k}, D_i)}{\partial X_{z,k}} \right| < \infty; \quad (35)$$

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \max_{z \in J(i) \cup \{i\}} \max_{1 \leq k \leq \nu_i} \max_{\substack{|X_{i,k}| \leq R, \\ |\mathcal{X}_{i,k}| \leq R, \\ |D_i| \leq R}} \left| \frac{\partial \Delta_{i,k}(X_{i,k}, \mathcal{X}_{i,k}, D_i)}{\partial D_i} \right| < \infty; \quad (36)$$

As a corollary of our main Theorem 1, we obtain the following result.

Theorem 2. *Under the above Assumptions (A1)-(A4), there is a decentralized continuous feedback $u_i = u_i(X_{i,\nu_i})$ with $u_i(0) = 0$, $i \in \mathbb{N}$, which renders (32) ℓ_∞ -FTISS in the sense of Definition 3, i.e., there exist $\gamma \in \mathcal{K}$ and $\beta \in \mathcal{GKL}$ such that $\beta(r, s) = 0$ for each $s \geq T(r)$ with some $r \mapsto T(r)$ of class $C([0, +\infty[; [0, +\infty[)$ such that $T(0) = 0$, and such that, first, there exists at least one solution to the closed-loop system (32) with this decentralized feedback $u_i = u_i(x_{i,1}, \dots, x_{i,\nu_i})$, $i \in \mathbb{N}$ with every initial condition $X_{i,\nu_i}(t_0) = X_{i,\nu_i}^0 \in \mathbb{R}^{\nu_i}$, with every $X^0 = \{X_{i,\nu_i}^0\}_{i=1}^\infty \in \ell_\infty$, and with every disturbance input $\mathbb{R} \ni t \mapsto D(t) = \{D_i(t)\}_{i=1}^\infty$ such that $D_i(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n_i})$ for all $i \in \mathbb{N}$ and $D(t) = \{D_i(t)\}_{i=1}^\infty \in \ell_\infty$ a.e. on $t \in \mathbb{R}$, and $\sup_{i \in \mathbb{N}} \max_{j=1, n_i} \|D_{i,j}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})} < +\infty$, and, second, every such a solution $t \mapsto X(t) \in \ell_\infty$ can be extended to the entire $[t_0, +\infty[$ and it always satisfies the following inequality*

$$\|X(t)\|_{\ell_\infty} \leq \max\{\beta(\|X^0\|_{\ell_\infty}, t - t_0), \gamma(\|D(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}; \ell_\infty)})\} \quad \text{for all } t \geq t_0.$$

The design of the above-mentioned decentralized feedback $u_i = u_i(x_{i,1}, \dots, x_{i,\nu_i})$, $i \in \mathbb{N}$ is constructive, the settling time is finite and estimated by our main Theorem 1, and the controllers $u_i(\cdot)$ along with the ℓ_∞ -FTISS Lyapunov function and with the settling time are derived explicitly.

In the special case, when $D_i(\cdot) = 0$, or D_i are absent from (32), the same decentralized feedback $u_i = u_i(x_{i,1}, \dots, x_{i,\nu_i})$, $i \in \mathbb{N}$ renders (32) ℓ_∞ -FTS in the sense of Definition 3.

Proof of Theorem 2. The proof of Theorem 2 is a combination of our main Theorem 1 with the gain assignment obtained in the decentralized backstepping design proposed in [29]. The only remark in comparison with [29] is that our network is now composed on *infinite (countable)* set of nodes, whereas the network in [29] was finite and without external disturbance inputs. However our conditions (A1)-(A4) will eventually provide conditions (i)-(iii) of our main Theorem 1 inside the design borrowed from [29] (and our external disturbance inputs can be included into common inputs in the gain assignment borrowed from [29]).

More specifically, to reduce our proof to Theorem 1, we first fix any $\varepsilon \in]0, \frac{1}{4}[$, and fix any finite sequences of positive real numbers $\varepsilon^{(k)} \in]0, \varepsilon[$ and $\gamma^{(k)} = 1 - \varepsilon^{(k)} > 0$, $k = 1, 2, \dots, \nu$, such that

$$0 < \gamma^{(k-1)} < \gamma^{(k)} < 1 - \varepsilon \quad \text{for all } k = 2, \dots, \nu, \tag{37}$$

where $\nu \in \mathbb{N}$ is defined in Assumption (A3).

Second, we take any $n \in \mathbb{N}$ such that $n \geq \nu := \sup_{i \in \mathbb{N}} \nu_i = \max_{i \in \mathbb{N}} \nu_i$. As in [40], define $d = \frac{4n}{2n+1}$ and

$$V_{i,1}(x_{i,1}) := \frac{x_{i,1}^2}{2}; \quad \xi_{i,1} := x_{i,1}; \quad q_k := \frac{2n-2k+3}{2n+1}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{38}$$

and denote

$$\bar{\chi}_{i,k} := (\mathcal{X}_{i,k}, D_i) \quad \text{for all } k = 1, \dots, \nu_i - 1, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{39}$$

and $\bar{X}_{i,k} := (X_{i,k}, \bar{\chi}_{i,k})$. Then we rewrite our system (32) as

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,j} = x_{i,j+1} + \Delta_{i,j}(X_{i,j}, \bar{\chi}_{i,j}), & j = 1, \dots, \nu_i - 1, \\ \dot{x}_{i,k} = u_i + \Delta_{i,\nu_i}(X_{i,\nu_i}, \bar{\chi}_{i,\nu_i}), & i \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{40}$$

and thus we unify our notation with [29]. Then, with this new notation, we repeat (almost copy and paste) the passage from Section 5 of [29] beginning with (11) from [29] until the very end of Section 5. The only updates will be as follows: $\pi_{i,k,\sigma}(\theta, \bar{X}_k)$ should be everywhere replaced with $\Delta_{i,k}(\bar{X}_k) = \Delta_{i,k}(X_{i,k}, \bar{\chi}_{i,k})$ and $\varkappa \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$ should be replaced everywhere with $j \in J(i)$.

Using this backstepping algorithm from [29], i.e., recursive design of controllers, FT Lyapunov functions, and gain assignment by induction on $k = 1, 2, \dots, \nu_i$ for each fixed $i \in \mathbb{N}$ and for each reduced order system

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,j} = x_{i,j+1} + \Delta_{i,j}(X_{i,j}, \bar{\chi}_{i,j}), & j = 1, \dots, k - 1, \\ \dot{x}_{i,k} = x_{i,k+1} + \Delta_{i,k}(X_{i,k}, \bar{\chi}_{i,k}), & i \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{41}$$

and having designed inductively the feedbacks and FTISS Lyapunov functions which satisfy Assumption (iii) of our main Theorem 1 with $\varepsilon^{(k)} > 0$, $k = 1, 2, \dots, \nu$ from (37) instead of ε , we finally need to explain why Assumptions (i),(ii) hold true as well.

To obtain the uniform estimates from (i)-(ii), we note that, by (34)-(36) from Assumption (A4), functions $\lambda_{i,1}(X_{i,1}) > 0$ from eq. (13) in [29] can be designed such that all $\lambda_{i,1}(X_{i,1}) > 0$ and all their partial derivatives are uniformly bounded w.r.t. $i \in \mathbb{N}$, on every closed ball of every fixed radius. From this, we will obtain (ii) for the closed-loop system (41) with $x_{i,2} = x_{i,2}^*$ in the Base Case $k = 1$. Condition (i) is straightforward in the Base Case $k = 1$ due to (38).

To obtain (i),(ii) at every Inductive Step $(k - 1) \rightarrow k$, one uses the formulas

$$\frac{\partial V_{i,1}}{\partial x_{i,1}} = x_{i,1}, \quad \text{and} \quad \frac{\partial W_{i,k}}{\partial x_{i,k}} = \xi_{i,k}^{2-q_k}, \quad \text{and}$$


$$\frac{\partial W_{i,k}}{\partial x_{i,l}} = -(2 - q_k) \frac{\partial (x_{i,k}^*)^{\frac{1}{q_k}}}{\partial x_{i,l}} \int_{x_{i,k}^*}^{x_{i,k}} (s^{\frac{1}{q_k}} - x_{i,k}^*)^{1-q_k} ds \quad (l < k). \quad (42)$$

from [29] and notes that our Assumption (A4) implies that the functions $\phi_{i,k,j}(\cdot)$, $\psi_{z,k,j}(\cdot)$ from eq. (12) in [29] are bounded on every compact subset of their domain *uniformly w.r.t.* $i \in \mathbb{N}$. Similarly, Assumption (A4) implies that the functions $\tilde{c}_{i,k,l,j}(\cdot)$, from Lemma 1 of [29], $\bar{\rho}_{i,k}(\cdot)$, from (23) from Lemma 3 of [29] are bounded on every compact subset of their domain *uniformly w.r.t.* $i \in \mathbb{N}$. Since they are involved in (24), (25) of [29] we obtain that the coefficients A, B, Q from (26)-(28) in [29] are also bounded on every compact subset of the corresponding domain uniformly w.r.t. $i \in \mathbb{N}$. Finally, $c_{i,k}(\cdot)$, from Lemma 4 of [29], are also bounded on every compact subset of the corresponding domains uniformly w.r.t. $i \in \mathbb{N}$ similarly by (A4).

All this proves that $\lambda_{i,1}(X_{i,1}) > 0, \dots, \lambda_{i,k-1}(X_{i,k}) > 0$ and all their partial derivatives are uniformly bounded w.r.t. $i \in \mathbb{N}$, on every closed ball of every fixed radius. From this, we obtain (i)-(ii) for the closed-loop system (41) with $x_{i,k} = x_{i,k}^*$ at every Inductive Step $(k - 1) \rightarrow k$, and finally for $k = \nu_i$, which ends the proof of Theorem 2.

Acknowledgement. This result was partially obtained when the author was with the University of Groningen, and its special case devoted to finite-time stability and stabilization of infinite networks without any external disturbance inputs and even without the precise definition of ℓ_∞ -FTS and its analysis was published in the conference predecessor [30] of the current work.

ORCID ID

S. S. Pavlichkov  <https://orcid.org/0000-0001-8740-2376>

REFERENCES

1. M. O. Bebiya. Global synthesis of bounded controls for systems with power nonlinearity, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, Ser.

- “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”.–2015. – **81**. – P. 36–51. DOI: 10.26565/2221-5646-2015-81-04
2. G. A. Bessonov, V. I. Korobov, and G. M. Sklyar. The problem of the stable synthesis of bounded controls for a certain class of non-steady systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 1988. – **52(1)**. – P. 11–17. DOI: 10.1016/0021-8928(88)90052-4
 3. S. P. Bhat and D. S. Bernstein. Finite time stability of continuous autonomous systems, *SIAM J. Control Optim.*–2000. – **38(3)**. – P. 751–766. DOI: 10.1137/S0363012997321358
 4. A. E. Choque Rivero. The controllability function method for the synthesis problem of a nonlinear control system, *International Review of Automatic Control*. – 2008. – **4(1)**. – P. 441–445.
 5. R. Curtain, O. V. Iftime, and H. Zwart. System theoretic properties of a class of spacially invariant systems, *Automatica*. – 2009. – **45**. – P. 1619–1627. DOI: 10.1016/j.automatica.2009.03.005
 6. R. D’Andrea and G. E. Dullerud. Distributed control design for spacially interconnected systems, *IEEE Trans. Automatic Control*. – 2003. – **48**. – P. 1478–1495. DOI: 10.1109/TAC.2003.816954
 7. S. Dashkovskiy and S. Pavlichkov. Stability conditions for infinite networks of nonlinear systems and their application for stabilization, *Automatica*. – 2020. – **112**. – 108643. DOI: 10.1016/j.automatica.2019.108643
 8. S. Dashkovskiy, B. Ruffer and F. Wirth. An ISS small gain theorem for general networks, *Math. Control Signals Systems*. – 2007. – **19(2)**. – P. 93–122. DOI: 10.1007/s00498-007-0014-8
 9. S. Dashkovskiy, B. Ruffer and F. Wirth. Small gain theorems for large scale systems and construction of ISS Lyapunov functions, *SIAM J. Control Optim.* – 2010. – **48(6)**. – P. 4089–4018. DOI: 10.1137/090746483
 10. S. Dashkovskiy, M. Kosmykov, A. Mironchenko, and L. Naujok. Stability of interconnected impulsive systems with and without time delays, using Lyapunov methods, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*. – 2012. – **6(3)**. – P. 899–915. DOI: 10.1016/j.nahs.2012.02.001
 11. P. De Leenheer, D. Angeli, and E. D. Sontag. Monotone chemical reaction networks, *Journal of Mathematical Chemistry*. – 2007. – **41(3)**. – P. 295–314. DOI: 10.1007/s10910-006-9075-z
 12. J. M. Hendrickx and S. Martin. Open multi-agent systems: Gossiping with random arrivals and departures, In: *Proc. 2017 IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (Melbourne, VIC, Australia, December 12–15, 2017)*. – 2017. – P. 763–768. DOI: 10.1109/CDC.2017.8263752

13. Y. Hong and Z.-P. Jiang. Finite-time stabilization of nonlinear systems with parametric and dynamic uncertainties, *IEEE Trans. Automatic Control*. – 2006. – **51**. – P. 1950–1956. DOI: 10.1109/TAC.2006.886515
14. Y. Hong, Z.-P. Jiang, and G. Feng. Finite-time input-to-state stability and applications to finite-time control design, *SIAM J. Control Optim.* – 2010. – **48(7)**. – P. 4395–4418. DOI: 10.1137/070712043
15. Y. Hong, H. O. Wang, and L. G. Bushnell. Adaptive finite-time control of nonlinear systems, In: *Proc. 2001 American Control Conf. (Arlington, VA, USA, 25 Jun – 27 Jun 2001)*. – 2001. – P. 4149–4154. DOI: 10.1109/ACC.2001.945626
16. H. Ito. State-dependent scaling problems and stability of interconnected iISS and ISS systems, *IEEE Trans. Automat. Control*. – 2006. – **51(10)**. – P. 1626–1643. DOI: 10.1109/TAC.2006.882930
17. Z.-P. Jiang, A. R. Teel, and L. Praly. Small-gain theorem for ISS systems and applications, *Math. Control Signals Systems*. – 1994. – **7(2)**. – P. 95–120. DOI: 10.1007/BF01211469
18. Z.-P. Jiang and Y. Wang. A generalization of the nonlinear small-gain theorem for large-scale complex systems, In: *Proc. of the 7th World Congress of Intelligent Control and Automation, Chongqing, China*. – 2008. – P. 1188–1193. DOI: 10.1109/WCICA.2008.4593093
19. C. Kawan, A. Mironchenko, A. Swikir, N. Noroozi, and M. Zamani. A Lyapunov-based small-gain theorem for infinite networks, *IEEE Trans. Autom. Control*. DOI: 10.1109/TAC.2020.3042410
20. V. I. Korobov. Controllability, stability of certain nonlinear systems, *Differ. Uravn.* – 1973. – **9(4)**. – P. 614–619.
21. V. I. Korobov. A general approach to the solution of the bounded control synthesis problem in a controllability problem, *Mat. Sb. (USSR)*. – 1979. – **109(151)**. – P. 582–606.
22. V. I. Korobov. A solution of the problem of synthesis using a controllability function, *Doklady Akademii Nauk USSR*. – 1979. – **248**. – P. 1051–1063.
23. V. I. Korobov and G.M. Sklyar. Methods for constructing positional controls, and a feasible maximum principle, *Differ. Uravn.* – 1990. – **26(11)**. – P. 1914–1924.
24. T. Liu and Z.-P. Jiang. Distributed output-feedback control of nonlinear multi-agent systems, *IEEE Trans. Automatic Control*. – 2013. – **58(11)**. – P. 2912–2917. DOI: 10.1109/TAC.2013.2257616

25. S. Mehraeen, S. Jagannathan, and M. L. Crow. Decentralized dynamic surface control of large-scale interconnected systems in strict-feedback form using neural networks with asymptotic stabilization, *IEEE Trans. Neural Networks*. – 2011. – **22**. – P. 1709–1722. DOI: 10.1109/TNN.2011.2140381
26. S. Mehraeen, S. Jagannathan, and M. L. Crow. Power system stabilization using adaptive neural network-based dynamic surface control, *IEEE Trans. Power Systems*. – 2011. – **26(2)**. – P. 669–680. DOI: 10.1109/TPWRS.2010.2059717
27. A. Mironchenko and H. Ito. Construction of Lyapunov functions for interconnected parabolic systems: an iISS approach, *SIAM J. Control Optimiz.* – 2015. – **53(6)**. – P. 3364–3382. DOI: 10.1137/14097269X
28. A. Mironchenko and F. Wirth. Characterizations of input-to-state stability for infinite-dimensional systems, *IEEE Trans. Autom. Control*. – 2018. – **63(6)**. – P. 1692–1707. DOI: 10.1109/TAC.2017.2756341
29. S. Pavlichkov and C. K. Pang. Decentralized finite-time stabilization of multi-agent systems with invertible and non-invertible input-output links, In: *Proc. 10th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (Monterey, CA, USA, August 23–25, 2016)*. – 2016. – P. 760–765. DOI: 10.1016/j.ifacol.2016.10.257
30. S. Pavlichkov. A finite-time small-gain theorem for infinite networks and its applications, In: *Proc. 2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (Miami Beach, FL, USA, December 17–19, 2018)*. – 2018. – P. 700–705. DOI: 10.1109/CDC.2018.8619208
31. S. Pavlichkov and C. K. Pang. A note on applications of a trajectory-based small-gain theorem to decentralized stabilization of switching networks with generalized dead zones, *Journal of the Franklin Institute*. – 2020. – **357(12)**. – P. 7796–7817. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2020.05.045
32. I. Polushin, S. Dashkovskiy, A. Takhmar, and R. Patel. A small gain framework for networked cooperative force-reflecting teleoperation, *Automatica*. – 2013. – **49**. – P. 338–348. DOI: 10.1016/j.automatica.2012.11.001
33. I. Polushin, H. J. Marquez, A. Tayebi, and P.X. Liu. A multichannel IOS small gain theorem for systems with multiple time-varying communication delays, *IEEE Trans. Automatic Control*. – 2009. – **54(2)**. – P. 404–409. DOI: 10.1109/TAC.2008.2009582
34. A. Polyakov, D. Efimov, and W. Perruquetti. Finite-time and fixed time stabilization: Implicit Lyapunov function approach, *Automatica*. – 2015. – **51**. – P. 332–340. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.10.082

35. B. Recht and R. D'Andrea. Distributed control of systems over discrete groups, *IEEE Trans. Automatic Control*. – 2004. – **49**. – P. 1446–1452. DOI: 10.1109/TAC.2004.834122
36. E. D. Sontag. Smooth stabilization implies coprime factorization, *IEEE Trans. Automat. Control*. – 1989. – **34(4)**. – P. 435–443. DOI: 10.1109/9.28018
37. E. D. Sontag and Y. Wang. On characterizations of the input-to-state stability property, *Systems and Control Letters*. – 1995. – **24(5)**. – P. 351–359. DOI: 10.1016/0167-6911(94)00050-6
38. E. D. Sontag and Y. Wang. New characterizations of input-to-state stability, *IEEE Trans. Automatic Control*. – 1996. – **41(9)**. – P. 1283–1294. DOI: 10.1109/9.536498
39. J. Tsinias and I. Karafyllis. ISS property for time-varying systems and application to partial-state feedback stabilization and asymptotic tracking, *IEEE Trans. Automatic Control*. – 1999. – **44(11)**. – P. 2179–2184. DOI: 10.1109/9.802941
40. X. Xuang, W. Lin, and B. Yang. Global finite-time stabilization for a class of uncertain nonlinear systems, *Automatica*. – 2005. – **41**. – P. 881–888. DOI: 10.1016/j.automatica.2004.11.036
41. H. Zwart, A. Firooznia, J. Ploeg, and N. van de Wouw. Optimal control for non-exponentially stabilizable spacially invariant systems with an application to vehicular platooning, In: *Proc. 52nd IEEE Contr. Dec. Conf. (Firenze, Italy, 10 Dec – 13 Dec 2013)*. – 2013. – P. 3038–3042. DOI: 10.1109/CDC.2013.6760345

**Теорема про мале посилення для стійкості вхід-стан за
скінченний час нескінченних мережевих систем і її застосування**

Павличков С. С.

Факультет машинобудування та технологічних процесів,

Технічний університет Кайзерслаутерн

Готліб-Даймлер штрассе, 42, Кайзерслаутерн, Німеччина, 67663

Ми доводимо достатню умову стійкості вхід-стан за скінченний час нескінченних мережевих систем в термінах малого посилення (small gain condition). Мережева система, що розглядається, складається зі зліченної множини скінченновимірних систем звичайних диференціальних рівнянь, кожна з яких з'єднана тільки зі скінченною множиною сусідніх підсистем, а також містить зовнішнє збурення. Передбачається, що кожен вузол мережі (кожна підсистема) є стійкою вхід-стан за скінченний час відносно його скінченновимірних входів утворених фазовими змінними сусідніх підсистем і зовнішнім збуренням. Як застосування цього результату (наслідок) ми отримуємо нову теорему про децентралізовану стабілізацію вхід-стан за скінченний час для нескінченних мережевих систем, які представляють собою зліченний набір з'єднаних трикутних систем звичайних диференціальних рівнянь. Для цього ми комбінуємо доведену в даній роботі теорему малого посилення (small

gain theorem) з методом побудови децентралізованих стабілізуючих керувань, який отримано в роботі S. Pavlichkov and C. K. Pang (NOLCOS-2016) для кінцевих мережевих систем. Дана робота переносить результати недавньої роботи S. Dashkovskiy and S. Pavlichkov, Stability conditions for infinite networks of nonlinear systems and their application for stabilization, Automatica. – 2020. – 112. – 108643 на випадок стабілізації за скінченний час. Ця стаття поширює та узагальнює свого попередника – конференційну статтю на випадок стійкості вхід-стан за скінченний час та децентралізованої стабілізації за наявності зовнішніх входів-збурень. В окремому випадку, коли всі зовнішні збурення є нулями, ми просто отримуємо стійкість за скінченний час та відповідно децентралізовану стабілізацію нескінченних мережевих систем за скінченний час.

Ключові слова: нелінійні системи; стійкість вхід-стан; умови малого посилення.

A small gain theorem for finite-time input-to-state stability of infinite networks and its applications

S. S. Pavlichkov

Department of Mechanical and Process Engineering,

Technical University of Kaiserslautern

42, Gottlieb-Daimler-Str., Kaiserslautern, 67663, Germany

We prove a small-gain sufficient condition for (global) finite-time input-to-state stability (FTISS) of infinite networks. The network under consideration is composed of a countable set of finite-dimensional subsystems of ordinary differential equations, each of which is interconnected with a finite number of its “neighbors” only and is affected by some external disturbances. We assume that each node (subsystem) of our network is finite-time input-to-state stable (FTISS) with respect to its finite-dimensional inputs produced by this finite set of the neighbors and with respect to the corresponding external disturbance. As an application we obtain a new theorem on decentralized *finite-time* input-to-state stabilization with respect to external disturbances for infinite networks composed of a countable set of strict-feedback form systems of ordinary differential equations. For this we combine our small-gain theorem proposed in the current work with the controllers design developed by S. Pavlichkov and C. K. Pang (NOLCOS-2016) for the gain assignment of the strict-feedback form systems in the case of finite networks. The current results address the finite-time input-to-state stability and decentralized finite-time input-to-state stabilization and redesign the technique proposed in recent work S. Dashkovskiy and S. Pavlichkov, Stability conditions for infinite networks of nonlinear systems and their application for stabilization, Automatica. – 2020. – 112. – 108643, in which the case of ℓ_∞ -ISS of infinite networks was investigated. The current paper extends and generalizes its conference predecessor to the case of finite-time *ISS* stability and decentralized stabilization in presence of external disturbance inputs and with respect to these disturbance inputs. In the special case when all these external disturbances are zeroes (i.e. are absent), we just obtain finite-time stability and finite-time decentralized stabilization of infinite networks accordingly.

Keywords: nonlinear systems; input-to-state stability; small gain conditions.

Article history: Received: 2 September 2021; Final form: 22 October 2021;

Accepted: 25 October 2021.

Лінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача з виродженим імпульсним впливом

Чуйко С. М., Чуйко О. В., Шевцова К. С.

*Донбаський державний педагогічний університет,
вул. Генерала Батюка, 19, м. Слов'янськ, Донецька обл., Україна 84 116
chujko-slav@ukr.net*

У статті знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчного рівняння з виродженим імпульсним впливом. Знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна для лінійної нетерової крайової задачі для диференціально-алгебраїчного рівняння з виродженим імпульсним впливом.

Ключові слова: диференціально-алгебраїчні рівняння, крайові задачі, рівняння з імпульсним впливом.

S. M. Chuiko, E. V. Chuiko, K. S. Shevtsova. **Linear differential-algebraic boundary value problem with singular pulse influence.** In this article we found the conditions of the existence and constructive scheme for finding the solutions of the linear Noetherian differential-algebraic boundary value problem for a differential-algebraic equation with singular impulse action.

Keywords: differential-algebraic equations, boundary value problems, pulse influence.

Чуйко С. М., Чуйко О. В., Шевцова К. С. **Линейная дифференциально-алгебраическая краевая задача с вырожденным импульсным воздействием.** В статье найдены условия развязности, а также конструкцию обобщенного оператора Грина задачи Коши для дифференциально-алгебраического уравнения с вырожденным импульсным воздействием. Найдены условия развязности, а также конструкция обобщенного оператора Грина для линейной нетеровой краевой задачи для дифференциально-алгебраического уравнения с вырожденным импульсным воздействием.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, краевые задачи, уравнения с импульсным воздействием.

2010 Mathematics Subject Classifications: 15A24; 34B15; 34C25.

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу про знаходження розв'язків [1, 2]

$$z(t) \in \mathbb{C}^1 \left\{ [a, b] \setminus \{\tau_i\}_I \right\}$$

© Чуйко С. М., Чуйко О. В., Шевцова К. С., 2021

лінійного неоднорідного диференціально-алгебраїчного рівняння

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad t \neq \tau_i \quad (1)$$

з імпульсним впливом

$$\Delta z(\tau_i) = S_i z(\tau_i - 0) + a_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (2)$$

які задовольняють крайовій умові

$$\ell z(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^q. \quad (3)$$

Тут $A(t)$, $B(t) \in \mathbb{C}_{m \times n}[a, b]$ — неперервні матриці, $f(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ — неперервний вектор; $\ell z(\cdot)$ — лінійний обмежений векторний функціонал

$$\ell z(\cdot) : \mathbb{C}^1 \left\{ [a, b] \setminus \{\tau_i\}_I \right\} \rightarrow \mathbb{R}^q.$$

Матрицю $A(t)$ припускаємо, взагалі кажучи, прямокутною: $m \neq n$, або ж квадратною, але виродженою матрицею сталого рангу. Розв'язок $z(t)$ вважаємо неперервним зліва

$$z(\tau_j) = \lim_{t \rightarrow \tau_j + 0} z(t), \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Крім того, розв'язок $z(t)$ нетерової ($q \neq n$) диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) – (3) з імпульсним впливом у точках

$$a < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_p < b,$$

можливо, зазнає розриви

$$\Delta z(\tau_i) := z(\tau_i + 0) - z(\tau_i - 0), \quad i = 1, 2, \dots, p$$

першого роду; тут S_i — сталі $(n \times n)$ -вимірні матриці, $a_i \in \mathbb{R}^n$. Імпульсний вплив (2) припускаємо виродженим, а саме, припускаємо, що принаймні для одного $i = 1, 2, \dots, p$ матриця $I_n + S_i$ стає виродженою: $(\det(I_n + S_i) = 0)$. У протилежному випадку, а саме, за умови $(\det(I_n + S_i) \neq 0)$ для усіх значень $i = 1, 2, \dots, p$ будемо казати, що імпульсний вплив (2) невироджений [1].

Дослідженню диференціально-алгебраїчних рівнянь за допомогою центральної канонічної форми і досконалих пар і трійок матриць присвячені монографії [3, 4, 5]. Достатні умови звідності диференціально-алгебраїчної лінійної системи до центральної канонічної форми були отримані А. М. Самойленком і В. П. Яковцем [6]. У статтях [7, 8] запропоновано достатні умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна для лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (3) без використання центральної канонічної форми і досконалих пар і трійок матриць.

Задача (1), (2) є узагальненням задач з невідродженим імпульсним впливом [1] на випадок диференціально-алгебраїчної лінійної системи (1). За умови $A(t) \equiv I_n$ задача про знаходження умов існування та побудову розв'язків системи диференціальних рівнянь (1) з невідродженим імпульсним впливом була розв'язана А. М. Самойленком та М. О. Перестюком у монографії [1] та узагальнювала задачу з крайовими умовами типу "shock conditions" [9]. За умови [7, 8]

$$P_{A^*(t)} \equiv 0 \quad (4)$$

система (1) розв'язна відносно похідної

$$z' = A^+(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)); \quad (5)$$

тут $\text{rank } A(t) = m \leq n$. Крім того

$$\mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)) := A^+(t)f(t) + P_{A\rho_0}(t)\nu_0(t),$$

$A^+(t)$ — псевдообернена (за Муром – Пенроузом) матриця, $P_{A^*(t)}$ — матриця-ортопроектор [2]:

$$P_{A^*(t)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(A^*(t)),$$

$P_{A\rho_0}(t)$ — $(n \times \rho_0)$ -вимірний матриця, утворена із ρ_0 лінійно-незалежних стовпців $(n \times n)$ – матриці-ортопроектора

$$P_A(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(A(t)).$$

Таким чином, за умови (4) система (5), розв'язана відносно похідної, як і її розв'язок, залежать від довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$. Позначимо $X_0(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$X_0'(t) = A^+(t)B(t)X_0(t), \quad X_0(a) = I_n$$

отриманої традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь (5). За умови (4) для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ система (5), а відповідно і система (1), має розв'язок вигляду [7, 8]

$$z(t, c) = X_0(t)c + K_0 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$K_0 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t) := X_0(t) \int_a^t X_0^{-1}(s) \mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s)) ds, \quad a \leq t \leq \tau_1$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1).

2. Критичний випадок За умови (4) система (1) розв'язна для довільної неоднорідності $f(t)$. Крім того, нормальна фундаментальна матриця

$X_0(t)$ невідроджена, тому для розв'язання диференціально-алгебраїчної системи (1), (2) з невідродженим імпульсним впливом застосований метод, запропонований А. М. Самойленком та М. О. Перестюком у монографії [1]. Загальний розв'язок задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1) з виродженим імпульсним впливом (2) для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ на відрізку $[\tau_1, \tau_2]$ зображується у вигляді

$$z(t, \gamma_1) = X_0(t)\gamma_1 + X_0(t) \int_{\tau_1}^t X_0^{-1}(s) \mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s)) ds, \quad \gamma_1 \in \mathbb{R}^n.$$

Нормальна фундаментальна матриця $X_0(t)$ невідроджена, тому

$$\gamma_1 = X_0^{-1}(\tau_1)(I_n + S_1)K_0 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (\tau_1) + X_0^{-1}(\tau_1) a_1.$$

Таким чином, за умови (4) для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ система (1) з невідродженим імпульсним впливом (2) має розв'язок вигляду

$$z(t, c) = X_1(t)c + K_1 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$X_1(t) = X_0(t)X_0^{-1}(\tau_1)(I_n + S_1)X_0(\tau_1), \quad \tau_1 \leq t \leq \tau_2,$$

крім того

$$K_1 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t) := X_0(t)X_0^{-1}(\tau_1)(I_n + S_1)K_0 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (\tau_1) + X_0(t)X_0^{-1}(\tau_1) a_1 + X_0(t) \int_{\tau_1}^t X_0^{-1}(s) \mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s)) ds, \quad \tau_1 \leq t \leq \tau_2$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1) з виродженим імпульсним впливом (2). Продовжуючи, за умови (4), для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ отримуємо розв'язок системи (1) з виродженим імпульсним впливом (2)

$$z(t, c) = X_p(t)c + K_p \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$X_p(t) = X_0(t)X_0^{-1}(\tau_p)(I_n + S_p)X_{p-1}(\tau_p), \quad \tau_p \leq t \leq b,$$

крім того

$$K_p \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t) := X_0(t)X_0^{-1}(\tau_p)(I_n + S_p)K_{p-1} \left[f(s), \nu_0(s) \right] (\tau_p) +$$

$$+X_0(t)X_0^{-1}(\tau_p)a_p + X_0(t) \int_{\tau_p}^t X_0^{-1}(s) \mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s)) ds, \quad \tau_p \leq t \leq b$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1) з виродженим імпульсним впливом (2). Таким чином, за умови (4), для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ отримуємо розв'язок системи (1) з невиродженим імпульсним впливом (2)

$$z(t, c) = X(t)c + K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

де [10]

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t), & a \leq t \leq \tau_1, \\ \dots & \dots \\ X_p(t), & \tau_p \leq t \leq b, \end{cases}$$

крім того

$$K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t) = \begin{cases} K_0 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), & a \leq t \leq \tau_1, \\ \dots & \dots \\ K_p \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), & \tau_p \leq t \leq b \end{cases}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1) з невиродженим імпульсним впливом (2). Останній оператор у випадку $A(t) \equiv I_n$ дещо відрізняється від побудованого у статті [10]. За умови $A(t) \equiv I_n$ задача про знаходження умов існування та побудову розв'язків лінійної крайової задачі (1) — (3) з невиродженим імпульсним впливом була розв'язана А.М. Самойленком, М.О. Перестюком та О.А. Бойчуком у статті [11]. Таким чином, метою даної статті є перенесення результатів [3, 4, 5, 6, 7, 8] на диференціально-алгебраїчну крайову задачу (1) — (3) з виродженим імпульсним впливом. На відміну від статті [11], отримана нормальна фундаментальна матриця $X(t)$ системи (1) з виродженим імпульсним впливом (2) вироджена [12], причому її ранг вздовж проміжку $[a, b]$ не зростає.

Підставляючи загальний розв'язок $z(t, c)$ задачі Коші $z(a) = c$ для диференціально-алгебраїчної системи (1) з виродженим імпульсним впливом (2) у крайову умову (3), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння

$$Qc = \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (\cdot). \quad (6)$$

Рівняння (6) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (\cdot) \right\} = 0. \quad (7)$$

Тут P_{Q^*} — ортопроектор: $\mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{N}(Q^*)$; матриця $P_{Q_d^*}$ утворена з d лінійно-незалежних рядків ортопроектора P_{Q^*} , крім того $Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{q \times n}$. За умови (7) і тільки за неї загальний розв'язок рівняння (6)

$$c = Q^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (\cdot) \right\} + P_{Q_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає загальний розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) – (3)

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + X(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (\cdot) \right\} + K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут P_Q — матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(Q)$; матриця $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ утворена з r лінійно-незалежних стовпців ортопроектора P_Q . Таким чином, доведена наступна лема.

Лема 1. За умови (4) для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ розв'язок задачі Коші $z(a) = 0$ для системи (1) з виродженим імпульсним впливом (2)

$$z(t) \in \mathbb{C}^1 \left\{ [a, b] \setminus \{\tau_i\}_I \right\}$$

має вигляд

$$z(t, c) = X(t)c + K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$, за умови (7) і тільки за неї, загальний розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) – (3)

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \nu_0(s); \alpha \right] (t), \quad X_r(t) := X(t)P_{Q_r}, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G \left[f(s); \nu_0(s); \alpha \right] (t) := X(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (\cdot) \right\} + K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t)$$

диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) – (3).

Доведена лема узагальнює відповідні результати, отримані для задач з невиродженим імпульсним впливом [1, 2] на випадок диференціально-алгебраїчної лінійної системи (1). Відзначимо, що навідрізу від [5], при доведенні леми ми не використовували центральну канонічну форму і досконалі пари матриць.

Приклад 1. Знайдемо розв'язок

$$z(t) \in \mathbb{C}^1 \left\{ [0, 3\pi] \setminus \{\pi, 2\pi\}_I \right\}$$

лінійної диференціально-алгебраїчної антиперіодичної крайової задачі з імпульсним впливом

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta z(\tau_i) = S_i z(\tau_i - 0), \quad \ell z(\cdot) = 0. \quad (8)$$

Тут

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix},$$

крім того

$$f(t) := \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \quad S_1 := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\ell z(\cdot) := z(0) + z(\pi) + z(2\pi) + z(3\pi).$$

Умову (4) виконано, отже, система (8), розв'язна відносно похідної, а її розв'язок, залежить від довільної неперервної скалярної функції $\nu_0(t)$. Покладемо $\nu_0(t) := 0$, при цьому система (8), має розв'язок вигляду

$$z(t, c) = X_0(t)c + K_0 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad 0 \leq t < \tau_1, \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$K_0 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - \cos 2t \\ -2 \sin 2t \\ 1 - \cos 2t \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(0) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (8), крім того

$$X_0(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos t & \sin t & \cos t - 1 \\ -2 \sin t & 2 \cos t & -2 \sin t \\ \cos t - 1 & \sin t & 1 + \cos t \end{pmatrix}.$$

Система (8) з імпульсним впливом має розв'язок вигляду

$$z(t, c) = X_1(t)c + K_1 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad \pi \leq t < 2\pi, \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$K_1 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t) = K_0 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t),$$

крім того

$$X_1(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 - \cos t & 0 & 1 - \cos t \\ 2 \sin t & 0 & 2 \sin t \\ 1 - \cos t - 1 & 0 & -1 - \cos t \end{pmatrix}.$$

Система (8) з імпульсним впливом має розв'язок вигляду

$$z(t, c) = X_2(t)c + K_2 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad 2\pi \leq t \leq 3\pi, \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$K_2 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t) = K_0 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t),$$

крім того $X_2(t) \equiv 0$. У наслідок виродженості імпульсного впливу (8)

$$\det(I_3 + S_1) = \det(I_3 + S_2) = 0$$

матриця $X(t)$ вироджена. Крайова задача (8) з виродженим імпульсним впливом являє собою критичний випадок, оскільки

$$P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

У той же час, крайова задача (8) розв'язна, оскільки умову (7) виконано. Загальний розв'язок

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \nu_0(s); \alpha \right] (t), \quad X_r(t) = X(t), \quad c_r \in \mathbb{R}^1$$

крайової задачі (8) з невиродженим імпульсним впливом (8) визначає узагальнений оператор Гріна

$$G \left[f(s); \nu_0(s); \alpha \right] (t) = K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t),$$

крім того

$$X_r(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < \pi, \quad X_r(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \pi \leq t < 2\pi,$$

$$X_r(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 2\pi \leq t \leq 3\pi.$$

У загальному випадку, а саме для довільної неперервної вектор-функції

$$\nu_0(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}[a, b]$$

розв'язність лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) – (3) істотно залежить від вибору цієї функції. Покладемо

$$\nu_0(t) := \Psi(t)\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}^w;$$

тут

$$\Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0 \times w}[a, b]$$

— довільна неперервна матриця повного рангу. За умови (4) узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1) з виродженим імпульсним впливом (2) зображується у вигляді

$$K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t) = K \left[f(s) \right] (t) + K \left[P_{A_{\rho_0}}(s) \nu_0(s) \right] (t).$$

Позначимо матрицю

$$\mathcal{D} := \left[Q ; \ell K \left[P_{A_{\rho_0}}(s) \Psi(s) \right] (\cdot) \right] \in \mathbb{R}^{q \times (n+w)}.$$

Підставляючи загальний розв'язок задачі Коші для диференціально-алгебраїчного рівняння (1) з виродженим імпульсним впливом (2) у крайову умову (3), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{D} \check{c} = \alpha - \ell K \left[f(s) \right] (\cdot), \quad \check{c} := \text{col}(c, \gamma) \in \mathbb{R}^{n+w}. \quad (9)$$

Рівняння (9) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{\mathcal{D}^*} \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s) \right] (\cdot) \right\} = 0. \quad (10)$$

Тут $P_{\mathcal{D}^*}$ — ортопроектор:

$$\mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{D}^*);$$

матриця $P_{\mathcal{D}^*}$ утворена з d лінійно-незалежних рядків ортопроектора $P_{\mathcal{D}^*}$. За умови (10) і тільки за неї загальний розв'язок рівняння (9)

$$\check{c} = \mathcal{D}^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s) \right] (\cdot) \right\} + P_{\mathcal{D}} \delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^{n+w}$$

визначає загальний розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) – (3)

$$\begin{aligned} z(t, \delta) = & K \left[f(s) \right] (t) + \left\{ X(t); K \left[P_{A_{\rho_0}} \Psi(s) \right] (t) \right\} \mathcal{D}^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s) \right] (\cdot) \right\} + \\ & + \left\{ X(t); K \left[P_{A_{\rho_0}}(s) \Psi(s) \right] (t) \right\} P_{\mathcal{D}} \delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^{n+w}. \end{aligned}$$

Тут $P_{\mathcal{D}}$ — матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^{n+w} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{D})$. Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема 1. *За умови (4) для фіксованої неперервної матриці повного рангу $\Psi(t)$ у випадку (10) розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) – (3) з виродженим імпульсним впливом*

$$z(t) \in \mathbb{C}^1 \left\{ [a, b] \setminus \{\tau_i\}_I \right\}$$

має вигляд

$$z(t, c_r) = W_r(t)c_r + G \left[f(s); \psi(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r;$$

тут

$$G \left[f(s); \psi(s); \alpha \right] (t) := K \left[f(s) \right] (t) + W(t) \mathcal{D}^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s) \right] (\cdot) \right\}$$

– узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) – (3) з виродженим імпульсним впливом. Матриця $W_r(t)$ утворена з r лінійно-незалежних стовпців матриці $W(t)P_{\mathcal{D}}$; тут

$$W(t) := \left\{ X(t); K \left[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s) \right] (t) \right\}.$$

Відзначимо, що на відміну від [5, 13] при доведенні теореми не використовується вимога про приведення системи (1) до центральної канонічної форми. На відміну від [14, 15] доведена теорема узагальнює узагальнений оператор Гріна, отриманий для диференціальної крайової задачі, до диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) – (3) з невиродженим імпульсним впливом.

3. Приведення до некритичного випадку. За умови $P_{\mathcal{D}^*} \neq 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (1) – (3) з виродженим імпульсним впливом представляє критичний випадок, і навпаки: за умови $P_{Q^*} \neq 0$, $P_{\mathcal{D}^*} = 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (1) – (3) з виродженим імпульсним впливом приведена до некритичного випадку. Останнє означення є узагальненням некритичного випадку ($P_{Q^*} = 0$) для нетерової крайової задачі для диференціальної системи, яка отримується з системи (1) при $A(t) \equiv I_n$, на випадок залежності узагальненого оператора Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (1) від довільної неперервної функції [8].

Приклад 2. *Знайдемо розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з виродженим імпульсним впливом*

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad t \neq \tau_1 := \pi, \quad \Delta z(\tau_1) = S_1 z(\tau_1 - 0), \quad \ell z(\cdot) = 0. \quad (11)$$

Тут

$$\ell z(\cdot) := \Omega(z(0) + z(2\pi)), \quad \Omega := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

матриці $A(t)$, S_1 та функція $f(t)$ наведені у прикладі 1.

Оскільки умову (4) виконано, система (11), розв'язна відносно похідної, а її розв'язок, залежить від довільної неперервної скалярної функції $\nu_0(t)$. Покладемо $\nu_0(t) := 0$, при цьому система (11), має розв'язок вигляду

$$z(t, c) = X_0(t)c + K_0 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad 0 \leq t < \tau_1, \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$K_0 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - \cos 2t \\ -2 \sin 2t \\ 1 - \cos 2t \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(0) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (11), крім того

$$X_0(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos t & \sin t & \cos t - 1 \\ -2 \sin t & 2 \cos t & -2 \sin t \\ \cos t - 1 & \sin t & 1 + \cos t \end{pmatrix}.$$

Також система (11), має розв'язок вигляду

$$z(t, c) = X_1(t)c + K_1 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad \pi \leq t \leq 2\pi, \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$K_1 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t) = K_0 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t)$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (11), крім того

$$X_1(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 - \cos t & 0 & 1 - \cos t \\ 2 \sin t & 0 & 2 \sin t \\ 1 - \cos t - 1 & 0 & -1 - \cos t \end{pmatrix}.$$

У наслідок виродженості імпульсного впливу (11)

$$\det(I_3 + S_1) = 0$$

матриця $X(t)$ вироджена. Крайова задача (11) з виродженим імпульсним впливом являє собою критичний випадок, оскільки для фіксованої функції $\nu_0(t) := 0$ має місце нерівність

$$P_{Q^*} = 1 \neq 0.$$

В той же час для функції $\Psi(t) := \sin t$ крайова задача (11) з виродженим імпульсним впливом являє собою некритичний випадок, оскільки

$$\mathcal{D} = (0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

— матриця повного рангу, отже умову (10) виконано. Загальний розв'язок

$$z(t, c_r) = W_r(t)c_r + G\left[f(s); \nu_0(s); \alpha\right](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^3$$

крайової задачі (11) з виродженим імпульсним впливом визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\left[f(s); \nu_0(s); \alpha\right](t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - \cos 2t \\ -2 \sin 2t \\ 1 - \cos 2t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$$

тут

$$W_r(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos t & \sin t & \cos t - 1 \\ -2 \sin t & 2 \cos t & -2 \sin t \\ \cos t - 1 & \sin t & 1 + \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

крім того

$$W_r(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 - \cos t & 0 & 1 - \cos t \\ 2 \sin t & 0 & 2 \sin t \\ 1 - \cos t - 1 & 0 & -1 - \cos t \end{pmatrix}, \quad \pi \leq t \leq 2\pi.$$

У найпростішому, а саме, у некритичного випадку $P_{Q^*} = 0$ умова (7) виконується, отже лінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача (1) – (3) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ та α .

Наслідок. За умов (4) та $P_{Q^*} = 0$ для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ та довільних неоднорідностей $f(t)$ та α розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з виродженим імпульсним впливом (1) – (3)

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\left[f(s); \nu_0(s); \alpha\right](t), \quad X_r(t) := X(t)P_{Q_r}, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\left[f(s); \nu_0(s); \alpha\right](t) := X(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_0(s) \right](\cdot) \right\} + K \left[f(s), \nu_0(s) \right](t).$$

Приклад 3. Знайдемо розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad t \neq \tau_1, \quad \Delta z(\tau_1) = S_1 z(\tau_1 - 0), \quad \ell z(\cdot) = 0. \quad (12)$$

з виродженим імпульсним впливом. Тут

$$\ell z(\cdot) := \Omega(z(0) + z(2\pi)), \quad \Omega := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

матриці $A(t)$, S_1 та функція $f(t)$ наведені у прикладі 1.

Оскільки умову (4) виконано, система (12), розв'язна відносно похідної, а її розв'язок, залежить від довільної неперервної скалярної функції $\nu_0(t)$. Покладемо $\nu_0(t) := 0$, при цьому система (12), має розв'язок вигляду

$$z(t, c) = X_0(t)c + K_0 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad 0 \leq t < \tau_1, \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$K_0 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - \cos 2t \\ -2 \sin 2t \\ 1 - \cos 2t \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(0) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (12); матриця $X_0(t)$ наведена у прикладі 1. Система (12) з виродженим імпульсним впливом має розв'язок вигляду

$$z(t, c) = X_1(t)c + K_1 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad \tau_1 \leq t \leq 2\pi, \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$K_1 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t) = K_0 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t),$$

крім того

$$X_1(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 - \cos t & 0 & 1 - \cos t \\ 2 \sin t & 0 & 2 \sin t \\ 1 - \cos t & 0 & -1 - \cos t \end{pmatrix}, \quad \pi \leq t \leq 2\pi.$$

Крайова задача (11) з виродженим імпульсним впливом являє собою некритичний випадок, оскільки $P_{Q^*} = 0$, отже, вона розв'язна, оскільки умову (7) виконано. Розв'язок

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \nu_0(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^2$$

крайової задачі (11) з виродженим імпульсним впливом визначає узагальнений оператор Гріна

$$G \left[f(s); \nu_0(s); \alpha \right] (t) = K_0 \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

крім того

$$X_r(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos t & 0 & \cos t - 1 \\ 2 \sin t & 0 & -2 \sin t \\ \cos t - 1 & 0 & 1 + \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < \pi,$$


$$X_r(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 - \cos t & 0 & 1 - \cos t \\ 2 \sin t & 0 & 2 \sin t \\ 1 - \cos t & 0 & -1 - \cos t \end{pmatrix}, \quad \pi \leq t \leq 2\pi.$$

Отримані результати аналогічно [17] можуть бути використані в теорії стійкості для диференціально-алгебраїчних рівнянь з виродженим імпульсним впливом.

ORCID ID

S. M. Chuiko  <https://orcid.org/0000-0001-7186-0129>

E. V. Chuiko  <https://orcid.org/0000-0002-6032-490X>

K. S. Shevtsova  <https://orcid.org/0000-0002-1112-1145>

REFERENCES

1. A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk. Impulsive Differential Equations. 1987. Vishcha shkola, Kiev, 287 p. (in Russian).
2. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). 2016. De Gruyter, Berlin; Boston, 298 pp. <https://doi.org/10.1515/9783110378443>.
3. S. L. Campbell. Singular systems of differential equations. 1980. Pitman Advanced Publishing Program, San Francisco–London–Melbourne, 178 p.
4. Yu. E. Boyarintsev, V. F. Chistyakov. Algebro-Differential Systems. Methods for Solving and Studying. 1998. Nauka, Novosibirsk, 224 p. (in Russian).
5. A. A. Boichuk, L. M. Shehda. Degenerate Fredholm boundary-value problems, Nonlinear oscillation, — 2007. — V. **10**, 3. — P. 306-314. <https://doi.org/10.1007/s11072-007-0024-y>.
6. A. M. Samoilenko, M. I. Shkil', V. P. Yakovets. Linear systems of differential equations with degeneration. 2000. Vyshcha Shkola, Kiev, 296 p. (in Russian).
7. S. M. Chuiko. On a reduction of the order in a differential-algebraic system, Journal of Math. Sciences, — 2018. — V. **235**, 1. — P. 2-14. <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4054-z>.
8. S. M. Chuiko. A generalized Green operator for a linear Noetherian differential-algebraic boundary value problem, Siberian Advances in Mathematics, — 2020. — V. **30**, 4. — P. 177-191. <https://doi.org/10.3103/S1055134420030037>.
9. D. Wexler. On Boundary Value Problems for an Ordinary Linear Differential Systems, Ann. Vft. Pura et Appl., — 1968. — V. **80**. — P. 123-136.
10. A. A. Boichuk, E. V. Chuiko, S. M. Chuiko. Generalized Green operator of a boundary-value problem with degenerate pulse influence, Ukrainian Mathematical Journal, — 1996. — V. **48**, 5. — P. 588-594 (in Russian).

11. A. A. Boichuk, N. A. Perestyuk, A. M. Samoilenko. Periodic solutions of impulse differential systems in critical cases, *Differents. Uravn.*, — 1991. — V. **27**, 9. — P. 1516-1521 (in Russian).
12. S. M. Chuiko. Noether boundary value problems for degenerate differential-algebraic systems with linear pulse conditions, *Dynamical systems*, — 2014. — V. **4** (**32**), 1–2. — P. 89-100 (in Russian).
13. A. A. Boichuk, A. A. Pokutnyi, V. F. Chistyakov. Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, — 2013. — V. **53**, 6. — P. 777-788. <https://doi.org/10.1134/S0965542513060043>.
14. S. M. Chuiko. A generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action, *Differential Equations*, — 2001. — V. **37**, 8. — P. 1189-1193. <https://doi.org/10.1023/A:1012440123296>.
15. S. M. Chuiko. A Green operator for boundary value problems with an impulsive effect, *Doklady Mathematics*, — 2001. — V. **64**, 1. — P. 41–43.
16. S. M. Chuiko, O. V. Nesmelova. Nonlinear boundary-value problems for degenerate differential-algebraic systems, *Journal of Mathematical Sciences*, — 2021. — V. **252**, 4. — P. 463-471. <https://doi.org/10.1007/s10958-020-05174-5>.
17. V. I. Korobov, M. O. Bebiya. Stabilization of one class of nonlinear systems, uncontrollable in the first approximation, *Rep. NAS Ukraine*, — 2014. — V. **2**. — P. 20-25. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2014.02.020>.

**Лінійна диференціально-алгебраїчна крайова
задача з виродженим імпульсним впливом**

Чуйко С. М., Чуйко О. В., Шевцова К. С.

*Донбаський державний педагогічний університет, вул. Генерала Батюка, 19,
м. Слов'янськ, Донецька обл., Україна 84 116*

Дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач започатковане у роботах К. Вейерштрасса, М. М. Лузіна та Ф. Р. Гантмахера. Систематичному вивченню диференціально-алгебраїчних крайових задач присвячені роботи С. Кемпбелла, Ю. Є. Бояринцева, В. Ф. Чистякова, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка, В. П. Яковця, О. А. Бойчука, А. Ілчманна та Т. Рейса. Вивчення диференціально-алгебраїчних крайових задач пов'язане з численними застосуваннями таких задач у теорії нелінійних коливань, у механіці, біології, радіотехніці, теорії керування, теорії стійкості руху. В той же час дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач тісно пов'язане з дослідженням імпульсних крайових задач для диференціальних рівнянь, започаткованим у роботах М. М. Боголюбова, А. Д. Мишкіса, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка та О. А. Бойчука. Отже, актуальною проблемою є перенесення результатів, отриманих у статтях С. Кемпбелла, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка та О. А. Бойчука на імпульсні крайові задачі для диференціально-алгебраїчних рівнянь, зокрема, знаходження необхідних та достатніх умов існування

шуканих розв'язків, а також, конструкції оператора Гріна задачі Коші та узагальненого оператора Гріна імпульсної крайової задачі для диференціально-алгебраїчного рівняння.

У статті знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчного рівняння з виродженим імпульсним впливом. Знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна для лінійної нетерової крайової задачі для диференціально-алгебраїчного рівняння з виродженим імпульсним впливом. Запропонована у статті схема дослідження лінійних нетерових крайових задач для диференціально-алгебраїчного рівняння з виродженим імпульсним впливом у критичних і некритичних випадках може бути перенесена на крайові задачі для диференціально-алгебраїчних рівнянь з виродженим імпульсним впливом. Побудована схема аналізу лінійної нетерової крайової задачі для диференціально-алгебраїчного рівняння з виродженим імпульсним впливом узагальнює результати С. Кемпбелла, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка та О. А. Бойчука і може бути поширена для доведення розв'язності та побудови розв'язків нелінійної імпульсної крайової задачі для диференціально-алгебраїчного рівняння у критичних і некритичних випадках.

Ключові слова: диференціально-алгебраїчні рівняння; крайові задачі; рівняння з імпульсним впливом.

**Linear differential-algebraic boundary
value problem with singular pulse influence**

S. M. Chuiko, E. V. Chuiko, K. S. Shevtsova

*Donbas State Pedagogical University, 19, Batiuk General str.,
Slavyansk, Donetsk region, 84 116, Ukraine*

The study of differential-algebraic boundary value problems was initiated in the works of K. Weierstrass, N. N. Luzin and F. R. Gantmacher. Systematic study of differential-algebraic boundary value problems is devoted to the work of S. Campbell, Yu. E. Boyarintsev, V. F. Chistyakov, A. M. Samoilenko, M. O. Perestyuk, V. P. Yakovets, O. A. Boichuk, A. Ilchmann and T. Reis. The study of the differential-algebraic boundary value problems is associated with numerous applications of such problems in the theory of nonlinear oscillations, in mechanics, biology, radio engineering, theory of control, theory of motion stability. At the same time, the study of differential algebraic boundary value problems is closely related to the study of pulse boundary value problems for differential equations, initiated M. O. Bogolybov, A. D. Myshkis, A. M. Samoilenko, M. O. Perestyuk and O. A. Boichuk. Consequently, the actual problem is the transfer of the results obtained in the articles by S. Campbell, A. M. Samoilenko, M. O. Perestyuk and O. A. Boichuk on a pulse linear boundary value problems for differential-algebraic equations, in particular finding the necessary and sufficient conditions for the existence of the desired solutions, and also the construction of the Green's operator of the Cauchy problem and the generalized Green operator of a pulse linear boundary value problem for a differential-algebraic equation.

In this article we found the conditions of the existence and constructive scheme for finding the solutions of the linear Noetherian differential-algebraic boundary value problem for a differential-algebraic equation with singular impulse action. The proposed scheme of the research of the linear differential-algebraic boundary value problem for a differential-algebraic equation with impulse action in the critical case in this article can be transferred to the linear differential-algebraic boundary value problem for a differential-algebraic equation with singular impulse action. The above scheme of the

analysis of the seminonlinear differential-algebraic boundary value problems with impulse action generalizes the results of S. Campbell, A. M. Samoilenko, M. O. Perestyuk and O. A. Boichuk and can be used for proving the solvability and constructing solutions of weakly nonlinear boundary value problems with singular impulse action in the critical and noncritical cases.

Keywords: differential-algebraic equations; boundary value problems; pulse influence.

Article history: Received: 14 August 2021; Final form: 10 October 2021;

Accepted: 20 October 2021.

Форма хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі

Харченко Д. С.¹

¹Центральноукраїнський державний педагогічний університет
імені В. Винниченка, вул. Шевченка, 1, м. Кропивницький, 25000, Україна
harcenkodiana5@gmail.com

Стаття присвячена проблемі поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою», стратифікованій за густиною. З використанням методу багатомасштабних розвинень отримано перші три наближення досліджуваної задачі, з яких в статті наведено перші два. Представлено розв'язки першого наближення та дисперсійне співвідношення. Виведено еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів на поверхнях контакту у вигляді нелінійного рівняння Шредінгера. Отримано частинний розв'язок нелінійного рівняння Шредінгера. Виведено формули відхилень поверхонь контакту та умови, при яких змінюється форма хвильових пакетів на верхній та нижній поверхнях контакту. Наведено та проаналізовано області знакосталості коефіцієнтів при других гармоніках на верхній та нижній поверхнях контакту для обох пар частот. Також графічно проілюстровано та проаналізовано різні випадки, при яких виникає асиметрія форми хвильових пакетів.

Ключові слова: тришарова гідродинамічна система; хвильові пакети; форма хвильових пакетів.

D. S. Kharchenko **The shape of wave-packets in a three-layer hydrodynamic system.** The article is devoted to the problem of wave-packet propagation in a three - layer hydrodynamic system "layer with a hard bottom - layer - layer with a cover stratified by density. Using the method of multiscale developments, the first three approximations of the studied problem are obtained, of which the first two are given in the article. The solutions of the first approximation and the variance relation are presented. The evolution equations of the circumferential wave packets on the contact surfaces are derived in the form of the nonlinear Schrodinger equation. A partial solution of the nonlinear Schrodinger equation is obtained. The formulas of deviations of contact surfaces and the conditions under which the shape of wave-packets on the upper and lower contact surfaces changes are derived. The regions of familiarity of the coefficients for the second harmonics on the upper and lower contact surfaces for both frequency pairs are given and analyzed. Various cases in which there is an asymmetry in the shape of wave-packets also graphically illustrated and analyzed

Keywords: three-layer hydrodynamic system; wave-packets; shape of wave-packets.

Харченко Д. С. **Форма волновых пакетов в трехслойной гидродинамической системе.** Статья посвящена проблеме распространения волновых пакетов в трехслойной гидродинамической системе «слой с твердым дном - слой - слой с крышкой», стратифицированной по плотности. С использованием метода многомасштабных разложений получены первые три приближения исследуемой задачи, из которых в статье приведены первые два. Представлены решения первого приближения и дисперсионное соотношение. Выведены эволюционные уравнения обводных волновых пакетов на поверхностях контакта в виде нелинейного уравнения Шредингера. Получено частное решение нелинейного уравнения Шредингера. Выведены формулы отклонений поверхностей контакта и условия, при которых изменяется форма волновых пакетов на верхней и нижней поверхностях контакта. Приведены и проанализированы области знакопостоянства коэффициентов при вторых гармониках на верхней и нижней поверхностях контакта для обеих пар частот. Также графически проиллюстрировано и проанализированы различные случаи, при которых возникает асимметрия формы волновых пакетов.

Ключевые слова: трехслойная гидродинамическая система; волновые пакеты; форма волновых пакетов.

2010 Mathematics Subject Classification: 76A02; 76B15; 76M35.

1. Вступ

Питання аналізу та вивчення властивостей хвильових пакетів та хвиль у рідинах різного типу залишаються актуальними та зустрічається в багатьох дослідженнях. Наприклад, у статті [1] зроблений аналітичний аналіз поширення слабонелінійних хвильових пакетів у двошаровій рідині з вільною поверхнею. Були отримані рівняння еволюції хвильових пакетів на кордоні розділу і вільної поверхні у вигляді нелінійних диференціальних рівнянь типу Шредингера другого порядку. Проаналізовано вид внутрішніх і поверхневих хвиль в залежності від співвідношення щільності шарів і хвильового числа з урахуванням поверхневого натягу. В результаті були виявлені ефекти обліку другого наближення при моделюванні хвильових рухів в двошаровій системі, що призводять до притуплення або загострення гребенів і западин хвиль. Аналітичні результати підтверджені натурними спостереженнями.

Стаття [2] присвячена дослідженню поширення слабконелінійних хвильових пакетів на поверхнях контакту гідродинамічної системи «півпростір-шар-шар з твердою кришкою» з використанням методу багатомасштабного розв'язання. Отримано розв'язки другого наближення слабконелінійної задачі та виведено умову її розв'язності. Для кожної частоти хвильового пакету побудовано області знакосталості коефіцієнта при другій гармоніці на нижній і верхній поверхнях контакту. Виявлено залежності від геометричних і фізичних параметрів гідродинамічної системи у закономірності хвилеутворення. Проаналізовано графіки форми відхилення нижньої і верхньої поверхонь контакту, які є характерними для побудованих областей знакосталості коефіцієнта. Виявлено області, де хвилі набувають U-подібної та П-подібної

форми. Встановлено істотний вплив довжини хвилі на форму відхилення поверхонь контакту гідродинамічної систем.

У статті [4] досліджується задача поширення хвильових пакетів на поверхні розділу двох рідких шарів з урахуванням сил поверхневого натягу. Аналіз проводиться асимптотичним методом багатомасштабних розвинень до третього наближення. На цій основі виведено нелінійне еволюційне рівняння типу Шредінгера для випадку малих частот, що відповідає критичним хвильовим числам. Отримані вирази для відхилення поверхні розділу та критичного хвильового числа залежно від характерних параметрів задачі.

Задачі про поширення хвильових пакетів та хвиль в шаруватих гідродинамічних системах є актуальними на даний момент часу. Дослідження таких явищ дає можливість якісно та кількісно аналізувати основні характеристики поширення хвиль в рідинах. Нижче представлено модель для аналізу форми хвиль, які можуть поширюватися в тришаровій гідродинамічній системі скінченної глибини.

2. Постановка задачі

У даній роботі продовжується дослідження задачі поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» [3]. $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, -h_1 \leq z \leq 0\}$, $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, 0 \leq z \leq h_2\}$, $\Omega_3 = \{(x, z) : |x| < \infty, h_2 \leq z \leq h_2 + h_3\}$ - нижній, середній та верхній шари відповідно, розділені поверхнями контакту $z = \eta_1(x, t)$ та $z = \eta_2(x, t)$. Верхній шар обмежений кришкою. Сила тяжіння направлена перпендикулярно поверхні розподілу у від'ємному z -напрямку. Математична постановка проблеми виглядає наступним чином:

швидкість поширення пакетів:

$$\varphi_{j,xx} + \varphi_{j,zz} = 0 \quad \text{у} \quad \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

кінематичні умови на поверхнях контакту:

$$\eta_{1,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x}\eta_{1,x} \quad \text{при} \quad z = \eta_1(x, t), \quad j = 1, 2 \quad (2)$$

$$\eta_{2,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x}\eta_{2,x} \quad \text{при} \quad z = h_2 + \eta_2(x, t), \quad j = 2, 3 \quad (3)$$

динамічні умови на поверхнях контакту:

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{1,t} - \rho_2\varphi_{2,t} + g(\rho_1 - \rho_2)\eta_1 + \frac{1}{2}\rho_1(\nabla\varphi_1)^2 - \frac{1}{2}\rho_2(\nabla\varphi_2)^2 - \\ - T_1(1 + (\eta_{1,x})^2)^{-3/2}\eta_{1,xx} = 0 \quad \text{при} \quad z = \eta_1(x, t) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \rho_2\varphi_{2,t} - \rho_3\varphi_{3,t} + g(\rho_2 - \rho_3)\eta_2 + \frac{1}{2}\rho_2(\nabla\varphi_2)^2 - \frac{1}{2}\rho_3(\nabla\varphi_3)^2 - \\ - T_2(1 + (\eta_{2,x})^2)^{-3/2}\eta_{2,xx} = 0 \quad \text{при} \quad z = h_2 + \eta_2(x, t) \end{aligned}$$

умова непроникливості на дні:

$$\varphi_{1,z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -h_1 \quad (5)$$

умова непроникливості на крищі:

$$\varphi_{3,z} = 0 \quad \text{при} \quad z = h_2 + h_3 \quad (6)$$

тут $\varphi_j (j = 1, 2, 3)$ потенціали швидкості частинок в Ω_j , η_1, η_2 - відхилення поверхонь контакту, T_1, T_2 - коефіцієнти поверхневого натягу на поверхнях контакту, g - прискорення вільного падіння. З використанням методу багато масштабних розвинень, функції відхилення поверхонь контакту та потенціали швидкостей представлено у вигляді:

$$\begin{aligned} \eta_j(x, t) &= \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{jn}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), j = 1, 2 \\ \varphi_j(x, t, z) &= \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (7)$$

В результаті, задача першого наближення має вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi_{j1,x_0x_0} + \varphi_{j1,zz} &= 0 \text{ у } \Omega_j, j = 1, 2, 3 \\ \eta_{11,t_0} - \varphi_{j1,z} &= 0 \text{ на } z = 0, j = 1, 2 \\ \eta_{21,t_0} - \varphi_{j1,z} &= 0 \text{ на } z = h_2, j = 2, 3 \\ \varphi_{11,t_0} - \rho_2 \varphi_{21,t_0} + (1 - \rho_2) \eta_{11} - T_1 \eta_{11,x_0x_0} &= 0 \text{ на } z = 0 \\ \rho_2 \varphi_{21,t_0} - \rho_3 \varphi_{31,t_0} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_{21} - T_2 \eta_{21,x_0x_0} &= 0 \text{ на } z = h_2 \\ \varphi_{11,z} &= 0 \text{ на } z = -h_1 \\ \varphi_{31,z} &= 0 \text{ при } z = h_2 + h_3 \end{aligned} \quad (8)$$

задача другого наближення описується наступними рівняннями:

$$\begin{aligned} \varphi_{j2,x_0x_0} + \varphi_{j2,zz} &= -2\varphi_{j1,x_0x_1} \text{ у } \Omega_j, j = 1, 2, 3 \\ \eta_{12,t_0} - \varphi_{j2,z} &= -\eta_{11,x_0} \varphi_{j1,x_0} - \eta_{11,t_1} + \eta_{11} \varphi_{j1,zz} \text{ на } z = 0, j = 1, 2 \\ \eta_{22,t_0} - \varphi_{j2,z} &= -\eta_{21,x_0} \varphi_{j1,x_0} - \eta_{21,t_1} + \eta_{21} \varphi_{j1,zz} \text{ на } z = h_2, j = 2, 3 \\ \varphi_{12,t_0} - \rho_2 \varphi_{22,t_0} + (1 - \rho_2) \eta_{12} - T_1 \eta_{12,x_0x_0} &= -\varphi_{11,t_1} - \eta_{11} \varphi_{11,t_0z} + \\ &+ \rho_2 (\varphi_{21,t_1} + \eta_{11} \varphi_{21,t_0z}) - \frac{1}{2} ((\varphi_{11,x_0})^2 + (\varphi_{11,z})^2) + \frac{1}{2} \rho_2 ((\varphi_{21,x_0})^2 + (\varphi_{21,z})^2) + \\ &+ 2T_1 \eta_{11,x_0x_1} \text{ на } z = 0 \\ \rho_2 \varphi_{22,t_0} - \rho_3 \varphi_{32,t_0} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_{22} - T_2 \eta_{22,x_0x_0} &= -\rho_2 (\varphi_{21,t_1} + \eta_{21} \varphi_{21,t_0z}) + \\ &+ \rho_3 (\varphi_{31,t_1} + \eta_{21} \varphi_{31,t_0z}) - \frac{1}{2} \rho_2 ((\varphi_{21,x_0})^2 + (\varphi_{21,z})^2) + \frac{1}{2} \rho_3 ((\varphi_{31,x_0})^2 + \\ &+ (\varphi_{31,z})^2) + 2T_2 \eta_{21,x_0x_1} \text{ на } z = h_2 \\ \varphi_{12,z} &= 0 \text{ на } z = -h_1 \\ \varphi_{32,z} &= 0 \text{ при } z = h_2 + h_3 \end{aligned} \quad (9)$$

Для задачі першого наближення виведене дисперсійне співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2^2 \omega^4}{sh^2(kh_2)} - ((1 - \rho_2)k + T_1 k^3 - \omega^2 (cth(kh_1) + \rho_2 cth(kh_2))) ((\rho_2 - \rho_3)k + \\ + T_2 k^3 - \omega^2 (\rho_2 cth(kh_2) + \rho_3 cth(kh_3))) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Отримане дисперсійне рівняння має дві пари незалежних розв'язків:
для моди ω_1 :

$$\begin{aligned} \varphi_{11}^{(1)} &= \frac{2\omega_1}{ksh(kh_1)}ch(k(h_1+z))Asin(kx-\omega_1t) \\ \varphi_{21}^{(1)} &= -\left(\frac{2\omega_1ch(k(h_2-z))}{ksh(kh_2)} + \frac{2((1-\rho_2)k+T_1k^3-\omega_1^2cth(kh_1)-\rho_2\omega_1^2cth(kh_2))ch(kz)}{\rho_2\omega_1k}\right) \times \\ &\times Asin(kx-t\omega_1) \\ \varphi_{31}^{(1)} &= \frac{2sh(kh_2)((1-\rho_2)k+T_1k^3-\omega_1^2cth(kh_1)-\rho_2\omega_1^2cth(kh_2))ch(k(h_2+h_3-z))}{\rho_2\omega_1ksh(kh_3)} \times \\ &\times Asin(kx-t\omega_1) \\ \eta_{11}^{(1)} &= 2Acos(kx-\omega_1t) \\ \eta_{21}^{(1)} &= -\frac{sh(kh_2)((1-\rho_2)k+T_1k^3-\omega_1^2cth(kh_1)-\rho_2\omega_1^2cth(kh_2))}{\omega_1^2\rho_2}2Acos(kx-\omega_1t) \end{aligned} \quad (11)$$

для моди ω_2 :

$$\begin{aligned} \varphi_{11}^{(2)} &= -\frac{2\rho_2\omega_2^3ch(k(h_1+z))Bsin(kx-\omega_2t)}{ksh(kh_1)sh(kh_2)((1-\rho_2)k+T_1k^3-\omega_2^2cth(kh_1)-\rho_2\omega_2^2cth(kh_2))} \\ \varphi_{21}^{(2)} &= \left(\frac{\rho_2\omega_2^2ch(k(h_2-z))}{sh(kh_2)((1-\rho_2)k+T_1k^3-\omega_2^2cth(kh_1)-\rho_2\omega_2^2cth(kh_2))} + ch(kz)\right)\frac{2\omega_2Bsin(kx-\omega_2t)}{ksh(kh_2)} \\ \varphi_{31}^{(2)} &= -\frac{2\omega_2ch(k(h_2+h_3-z))Bsin(kx-\omega_2t)}{ksh(kh_3)} \\ \eta_{11}^{(2)} &= -\frac{2Bcos(kx-\omega_2t)\omega_2^2\rho_2}{sh(kh_2)((1-\rho_2)k+T_1k^3-\omega_2^2cth(kh_1)-\rho_2\omega_2^2cth(kh_2))} \\ \eta_{21}^{(2)} &= 2Bcos(kx-\omega_2t) \end{aligned} \quad (12)$$

Де $\eta_{21}^{(1)}$ - хвиля-відгук на хвилю $\eta_{11}^{(1)}$ з частотою ω_1 та амплітудою A на нижній поверхні контакту. А $\eta_{21}^{(2)}$ є хвилею-відгуком на хвилю $\eta_{11}^{(2)}$ з частотою ω_2 та амплітудою B , яка поширюється на верхній поверхні контакту.

3. Аналіз форми хвильового пакету на нижній поверхні контакту

Нижче наведено розв'язки другого наближення задачі (9), які були знайдені в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \eta_{12} &= B_0 + B_1e^{i\theta} + B_2e^{2i\theta} + cc \\ \eta_{22} &= C_0 + C_1e^{i\theta} + C_2e^{2i\theta} + cc \\ \varphi_{12} &= F_{11}(z+h_1)sh(k(z+h_1))e^{i\theta} + F_{10}ch(k(z+h_1))e^{i\theta} + \\ &+ F_{20}ch(2k(z+h_1))e^{2i\theta} + cc \\ \varphi_{22} &= (N_{10} + N_{11}z)e^{i\theta+k(h_2-z)} + N_{20}e^{2i\theta+2k(h_2-z)} + \\ &+ (M_{10} + M_{11}z)e^{i\theta-k(h_2-z)} + M_{20}e^{2i\theta-2k(h_2-z)} + cc \\ \varphi_{32} &= L_{11}(z-(h_2+h_3))sh(k(z-(h_2+h_3)))e^{i\theta} + \\ &+ L_{10}ch(k(z-(h_2+h_3)))e^{i\theta} + L_{20}ch(2k(z-(h_2+h_3)))e^{2i\theta} + cc \end{aligned} \quad (13)$$

Невідомі коефіцієнти у (13) мають складний аналітичний вигляд та були отримані з використанням CAS Maple.

Формули відхилення нижньої поверхні контакту для перших двох наближень мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\eta_{11} &= Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta} \\ \eta_{12} &= B^*A\bar{A} + \Lambda_1 A^2 e^{2i\theta} + cc\end{aligned}\quad (14)$$

де cc - комплексно спряжена, A - обвідна хвильового пакету, $\Lambda_1 = B_2/A^2$, $B^* = B_0/A\bar{A}$.

Еволюційне рівняння на нижній поверхні контакту отримано у вигляді нелінійного рівняння Шредінгера:

$$A_{,t} + \omega' A_{,x} - 0.5\omega'' A_{,xx} = i\alpha^2 L A^2 \bar{A} \quad (15)$$

Відмітимо, що еволюційне рівняння на верхній поверхні контакту матиме такий самий вигляд.

Після переходу до системи, яка рухається з груповою швидкістю, розв'язок рівняння (2) має вигляд:

$$A = ae^{i\alpha^2 a^2 \omega^{-1} L t}, \bar{A} = ae^{-i\alpha^2 a^2 \omega^{-1} L t} \quad (16)$$

де a - стала. Після підстановки отриманого розв'язку (16) у рівняння (14) з врахуванням розкладу (7) за методом багатомаштабних розвинень, отримується рівняння (17), яким визначається форма хвильового пакету на нижній поверхні контакту:

$$\begin{aligned}\eta_1(x, t) &= 2a \cos(kx - t\tilde{\omega}) + a^2 \alpha [2B^* + 2\Lambda_1 \cos(2(kx - t\tilde{\omega}))], \\ \text{де } \tilde{\omega} &= \omega - a^2 \alpha^2 \omega^{-1} L\end{aligned}\quad (17)$$

З отриманого рівняння видно, що для дослідження форми поверхні контакту потрібно визначити знак коефіцієнту $\Lambda_1(\rho_2, \rho_3, T_1, T_2, k, h_1, h_2, h_3) = \frac{L_1}{L_2}$. При переході через криву $L_1 = 0$ вздовж якої $\Lambda_1(\rho_2, \rho_3, T_1, T_2, k, h_1, h_2, h_3) = 0$, або $L_2 = 0$ вздовж якої $\Lambda_1(\rho_2, \rho_3, T_1, T_2, k, h_1, h_2, h_3) \rightarrow \infty$ знак величини Λ_1 змінюється на протилежний.

На рис. 1а наведений графік знакосталості величини Λ_1 у системі (ρ_2, k) для першої пари частот ω_1 для наступних фіксованих значень параметрів: $\rho_3 = 0.8, T_1 = 0, T_2 = 0, h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$. З графіку видно, що криві $L_1 = 0$ та $L_2 = 0$ розбивають площину на 5 областей. В областях S_1, S_3, S_4 - $\Lambda_1 > 0$, а в областях S_2, S_5 - $\Lambda_1 < 0$. На рисунках 1б і 1в наведені графіки перших двох гармонік η_{11} та η_{12} та відхилення поверхні контакту η_1 для випадків $\Lambda_1 > 0$ та $\Lambda_1 < 0$ відповідно для першої пари частот ω_1 . Фіксовані параметри набувають наступних значень: $t = 0, a = 0.1, \alpha = 0.1, \rho_2 = 0.85, k = 1.5$ (рис. 1б) та $\rho_2 = 0.9, k = 0.5$ (рис. 1в). У випадку $\Lambda_1 > 0$ амплітуда першої гармоніки η_{11} значно менша за амплітуду другої η_{12} . Максимум другої гармоніки η_{12} співпадає з мінімумом першої η_{11} , далі наступний максимум η_{12} співпадає з максимумом η_{11} . Це призводить до загострення гребнів та затушення підосв. Отже, в областях S_1, S_3, S_4 хвиля має U - подібну форму.

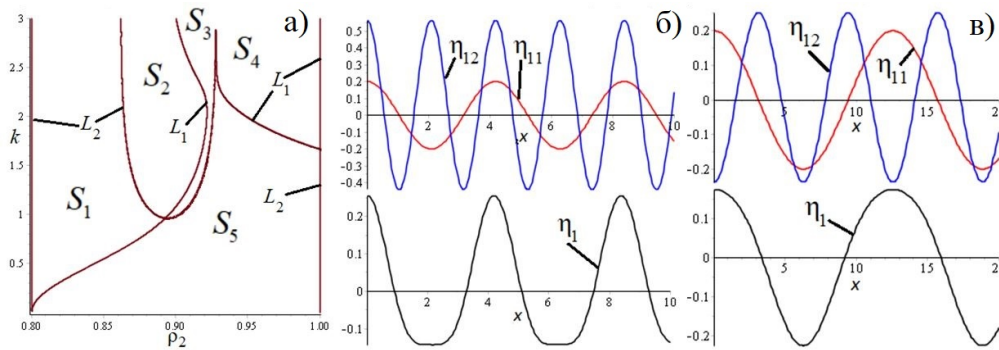


Рис. 1. а) Области знакосталості Λ_1 б) $\Lambda_1 > 0$ в) $\Lambda_1 < 0$.

Аналізуючи випадок $\Lambda_1 < 0$ видно, що амплітуда першої гармоніки η_{11} менша за амплітуду другої гармоніки η_{12} . Мінімуми η_{12} і η_{11} співпадають, наступний мінімум другої гармоніки η_{12} співпадає з максимумом першої гармоніки η_{11} . З цього слідує, що в областях S_2, S_5 хвиля має \cap -подібну форму.

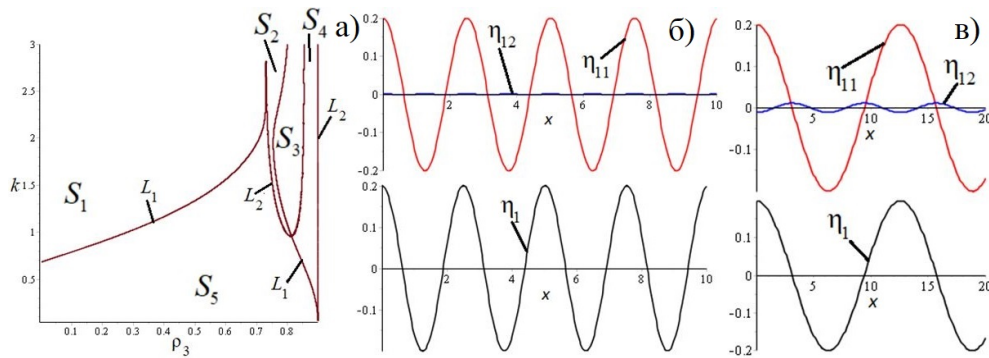


Рис. 2. а) Области знакосталості Λ_1 б) $\Lambda_1 > 0$ в) $\Lambda_1 < 0$.

На рис. 2а наведений графік знакосталості рівняння Λ_1 у системі (ρ_3, k) для першої пари частот ω_1 для наступних значень: $\rho_2 = 0.9, T_1 = 0, T_2 = 0, h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$. Аналогічно до попереднього графіку (рис. 1а) $L_1 = 0$ та $L_2 = 0$ розбивають площину на 5 областей. В областях S_1, S_2, S_4 - $\Lambda_1 > 0$, а в областях S_3, S_5 - $\Lambda_1 < 0$.

На рисунках 2б і 2в наведені графіки перших двох гармонік η_{11}, η_{12} та відхилення поверхні контакту η_1 для випадків $\Lambda_1 > 0$ та $\Lambda_1 < 0$ відповідно для першої пари частот ω_1 . Для $\Lambda_1 > 0$ фіксовані параметри густини верхнього шару і хвильового числа набувають значень: $\rho_3 = 0.7, k = 2.5$. На рис. 2б помітно, що амплітуда першої гармоніки значно перевищує амплітуду другої. Максимум η_{12} співпадає з мінімумом η_{11} , далі максимумами гармонік η_{11} та η_{12} співпадають. Це означає, що в областях S_1, S_2, S_4 відбувається незначне затушення підшків і загострення гребнів. Таким чином, хвильовий пакет має \cup -подібну форму.

На рис. 2в амплітуда другої гармоніки η_{12} також значно менша за амплітуду першої гармоніки η_{11} , проте порівняно з рис. 2б, амплітуда другої гармоніки більша. Фіксовані параметри у випадку $\Lambda_1 < 0$ набувають наступних значень: $\rho_3 = 0.4, k = 0.5$. З графіку видно, що мінімум другої гармоніки η_{12} співпадає з мінімумом першої гармоніки η_{11} . Потім мінімум η_{12} співпадає з максимумом η_{11} . Як наслідок, в областях S_3, S_5 відбувається загострення підосв і затуплення гребнів, тобто хвиля має \cap -подібну форму.

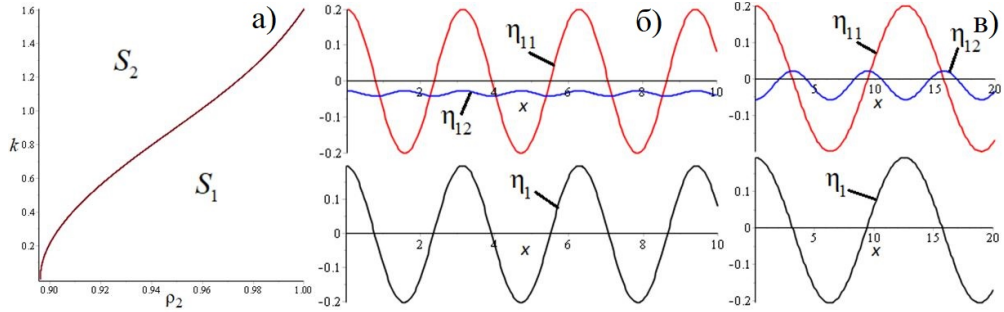


Рис. 3. а) Области знакосталості Λ_1 б) $\Lambda_1 > 0$ в) $\Lambda_1 < 0$.

На рис. 3а наведений графік знакосталості рівняння Λ_1 у системі (ρ_2, k) для другої пари частот ω_2 . Криві $L_1 = 0$ та $L_2 = 0$ ділять площину на дві області. В області S_1 - $\Lambda_1 < 0$, а в області S_2 - $\Lambda_1 > 0$.

На рисунках 3б і 3в наведені графіки перших двох гармонік η_{11} та η_{12} та відхилення поверхні контакту η_1 для випадків $\Lambda_1 > 0$ та $\Lambda_1 < 0$ відповідно для другої пари частот ω_2 . Для $\Lambda_1 > 0$ (рис. 3б) параметри густини середнього шару і хвильового числа наступні: $\rho_2 = 0.98, k = 2$. З графіку видно, що амплітуда першої гармоніки η_{11} значно більша за амплітуду другої гармоніки η_{12} . Максимум η_{12} співпадає з мінімумом η_{11} , далі наступний максимум η_{12} співпадає з максимумом η_{11} . Це призводить до загострення підосв і затуплення гребнів. Тобто в області S_2 хвиля має \cap -подібну форму. На графіку 3в при $\Lambda_1 < 0$ ($\rho_2 = 0.98, k = 0.5$) амплітуда другої гармоніки більша ніж у випадку на рис. 3б. Проте амплітуда η_{12} також значно менша за амплітуду η_{11} . Мінімуми η_{11} і η_{12} співпадають, далі максимум η_{11} співпадає з мінімумом η_{12} . В результаті форма хвильового пакету також має \cap -подібну форму.

На рис. 4а представлений графік знакосталості рівняння Λ_1 у системі (ρ_3, k) для другої пари частот ω_2 . Криві $L_1 = 0$ та $L_2 = 0$ розбивають площину на дві області. В області S_2 - $\Lambda_1 > 0$, а в області S_1 - $\Lambda_1 < 0$. На рисунку 4б наведені графіки відхилення нижньої поверхні контакту та перших двох гармонік η_{11} та η_{12} у випадку $\Lambda_1 > 0$ для таких фіксованих значень $\rho_3 = 0.3, k = 1$. Амплітуда другої гармоніки менша за амплітуду першої. Максимум η_{12} співпадає з мінімумом η_{11} , наступний максимум другої гармоніки співпадає з максимумом першої. Як наслідок хвиля має \cap -подібну форму. Якщо $\Lambda_1 < 0$ ($\rho_3 = 0.5, k = 0.5$) амплітуда другої гармоніки помітно менша за амплітуду першої. Мінімум другої гармоніки η_{12} співпадає з мінімумом η_{11} ,

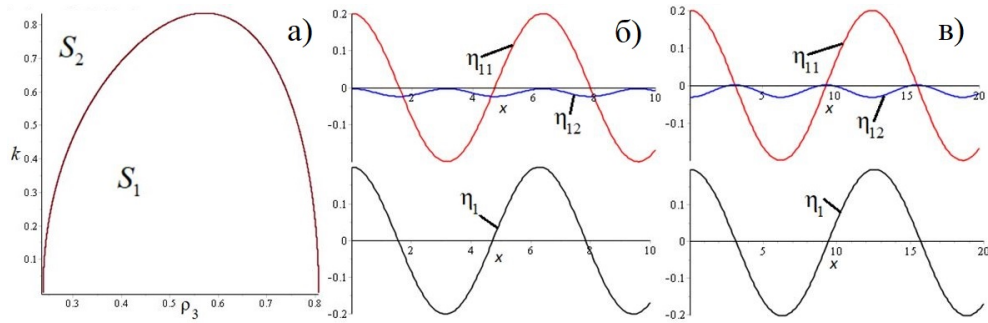


Рис. 4. а) Области знакосталості Λ_1 б) $\Lambda_1 > 0$ в) $\Lambda_1 < 0$

наступний мінімум другої гармоніки співпадає з максимумом першої. Отже, хвиля також має \cap - подібну форму.

4. Аналіз форми хвильового пакету на верхній поверхні контакту

Для верхньої поверхні контакту формули відхилення мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \eta_{21} &= K_5 A e^{i\theta} + K_5 \bar{A} e^{-i\theta} \\ \eta_{22} &= C^* \bar{A} + \Lambda_2 A^2 e^{2i\theta} + c c \end{aligned} \quad (18)$$

де $\Lambda_2 = C_2/A^2$, $C^* = C_0/A\bar{A}$.

Після виконання аналогічних до пункту 3 перетворень та підстановок отримується формула (19), яка визначає форму хвильового пакету на верхній поверхні контакту:

$$\eta_2(x, t) = 2K_5 a \cos(kx - t\tilde{\omega}) + a^2 \alpha [2C^* + 2\Lambda_2 \cos(2(kx - t\tilde{\omega}))] \quad (19)$$

З даного рівняння видно, що для дослідження форми верхньої поверхні контакту потрібно визначити знак коефіцієнту $\Lambda_2 = \frac{M_1}{M_2}$. При переході через криву $M_1 = 0$ вздовж якої $\Lambda_2(\rho_2, \rho_3, T_1, T_2, k, h_1, h_2, h_3) = 0$, або $M_2 = 0$ вздовж якої $\Lambda_2(\rho_2, \rho_3, T_1, T_2, k, h_1, h_2, h_3) \rightarrow \infty$ величина Λ_2 змінює знак.

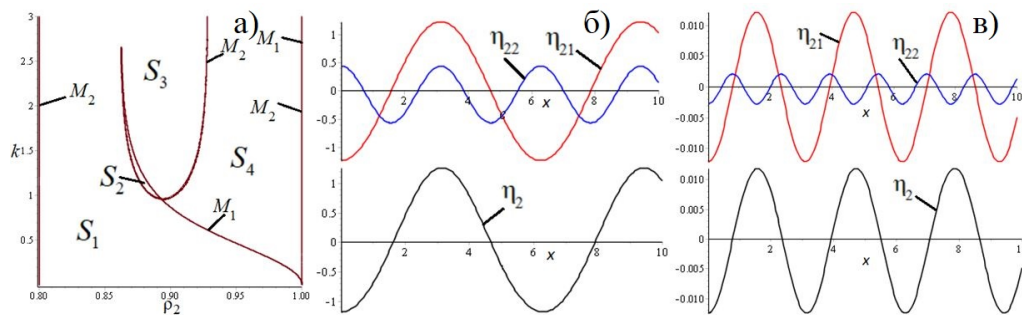


Рис. 5. а) Области знакосталості Λ_2 б) $\Lambda_2 > 0$ в) $\Lambda_2 < 0$.

На рис. 5а представлений графік знакосталості коефіцієнта Λ_2 верхньої поверхні контакту у системі (ρ_2, k) для першої пари коренів ω_1 . Для $\Lambda_2 > 0$ (рис. 5б) фіксовані параметри набувають значень: $\rho_2 = 0.85, k = 1$. Для $\Lambda_2 < 0$ (рис. 5в) фіксовані параметри набувають значень: $\rho_2 = 0.95, k = 2$. Інші параметри аналогічні попереднім випадкам. Криві $M_1 = 0, M_2 = 0$ розділяють площину на чотири області. В областях S_1, S_3 - $\Lambda_2 > 0$, а в областях S_2, S_4 - $\Lambda_2 < 0$. Аналізуючи графік 5б помітно, що амплітуда першої гармоніки η_{21} більша за амплітуду другої гармоніки η_{22} , максимум η_{22} співпадає з максимумом η_{21} , наступний максимум η_{22} навпаки співпадає з мінімумом. Отже в областях S_1, S_3 , в яких $\Lambda_2 > 0$ спостерігається загострення гребнів і затушення підосв. Тобто, хвиля η_2 в такому випадку матиме \cup - подібну форму. На рис. 5в представлений випадок, коли $\Lambda_2 < 0$. Амплітуда другої гармоніки менша за амплітуду першої. Мінімум другої гармоніки співпадає з максимумом першої, далі мінімуми η_{21} та η_{22} співпадають. Отже, в областях S_2, S_4 спостерігається загострення підосв і затушення гребнів. Тобто форма хвилі має \cap - подібну форму.

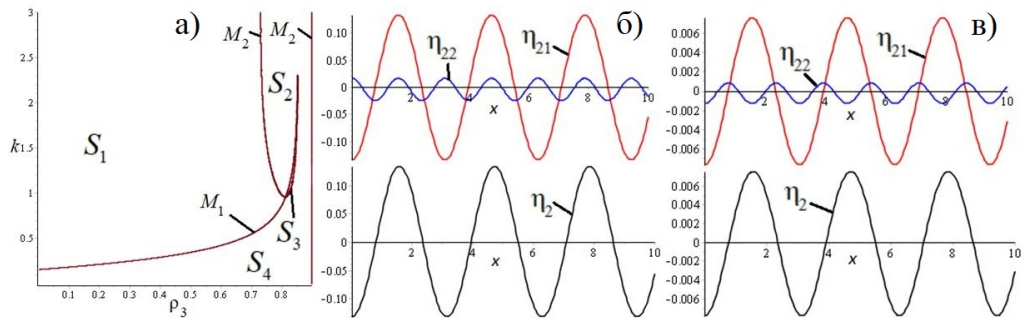


Рис. 6. а) Области знакосталості Λ_2 б) $\Lambda_2 > 0$ в) $\Lambda_2 < 0$.

На рис. 6а представлені графіки кривих $M_1 = 0, M_2 = 0$ коефіцієнта Λ_2 , що розділяють площину (ρ_3, k) на чотири області для першої пари коренів. В областях S_1, S_3 - $\Lambda_2 < 0$, в областях S_2, S_4 - $\Lambda_2 > 0$. Для $\Lambda_2 > 0$ (рис. 6б) фіксовані параметри набувають значень: $\rho_3 = 0.8, k = 2$. Для $\Lambda_2 < 0$ (рис. 6в) фіксовані параметри набувають значень: $\rho_3 = 0.5, k = 2$. З рис. 6б видно, що амплітуда другої гармоніки η_{22} значно менша за амплітуду першої гармоніки η_{21} . Максимуми η_{21} та η_{22} співпадають, далі максимум η_{22} співпадає з мінімумом η_{21} . Така ситуація означає, що в областях S_2, S_4 відбувається загострення гребнів та затушення підосв. Отже хвиля має \cup - подібну форму. На рис. 6в продемонстрований випадок, коли $\Lambda_2 < 0$. З графіку видно, що амплітуда другої гармоніки значно менша за амплітуду першої. Мінімум другої гармоніки η_{22} співпадає з максимумом першої гармоніки η_{21} , далі мінімуми обох гармонік співпадають. Це означає, що в областях S_1, S_3 гребні затуплюються, а підосви загострюються. Отже, хвиля в цих областях має \cap - подібну форму.

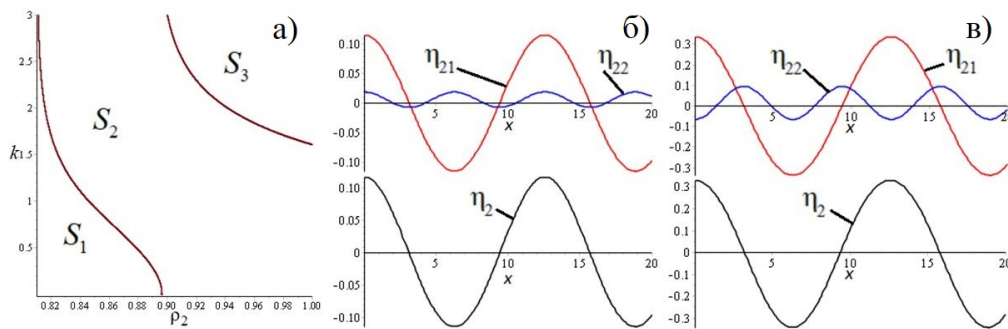


Рис. 7. а) Области знакосталості Λ_2 б) $\Lambda_2 > 0$ в) $\Lambda_2 < 0$

Графік 7а ілюструє зміну знаку коефіцієнта Λ_2 у системі (ρ_2, k) для другої пари коренів. Криві ділять площину на три області. В областях $S_1, S_3 - \Lambda_2 > 0$, а в області $S_2 - \Lambda_2 < 0$. Для $\Lambda_2 > 0$ (рис. 7б) фіксовані параметри набувають значень: $\rho_2 = 0.84, k = 0.5$. Для $\Lambda_2 < 0$ (рис. 7в) фіксовані параметри набувають значень: $\rho_2 = 0.94, k = 0.5$. Аналізуючи графіки 7б і 7в видно, що амплітуда другої гармоніки η_{22} значно менша за амплітуду першої гармоніки η_{21} в обох випадках. Проте на графіку 7б максимум η_{22} співпадає з мінімумом η_{21} , наступний максимум η_{22} співпадає з максимумом η_{21} . На рис. 7в мінімуми обох гармонік співпадають, далі наступний мінімум другої гармоніки співпадає з максимумом першої гармоніки. Це означає, що в областях S_1, S_3 відбувається загострення гребнів і затушення підосв. Отже, хвиля стає \cup - подібної форми. В області S_2 спостерігається затушення гребнів і загострення підосв. Тобто хвиля має \cap - подібну форму.

Графік 8а ілюструє зміну знаку коефіцієнта Λ_2 для другої пари коренів у системі (ρ_3, k) . Криві $M_1 = 0, M_2 = 0$ ділять площину на три області. В областях $S_1, S_3 - \Lambda_2 > 0$, а в області $S_2 - \Lambda_2 < 0$. Для $\Lambda_2 > 0$ (рис. 8б) фіксовані параметри набувають значень: $\rho_3 = 0.5, k = 2.5$. Для $\Lambda_2 < 0$ (рис. 8в) фіксовані параметри набувають значень: $\rho_3 = 0.5, k = 0.4$.

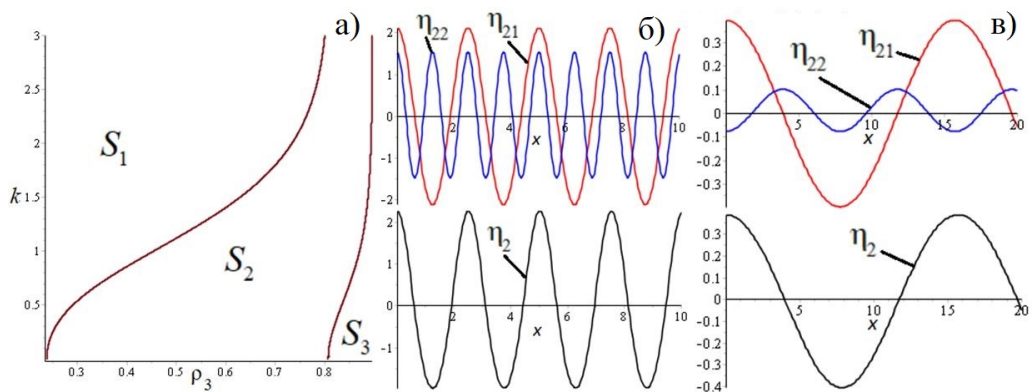


Рис. 8. а) Области знакосталості Λ_2 б) $\Lambda_2 > 0$ в) $\Lambda_2 < 0$


На рис. 8б видно, що амплітуда другої гармоніки η_{22} не на багато менша за амплітуду першої гармоніки η_{21} . Максимум η_{22} співпадає з мінімумом η_{21} , далі максимуми гармонік співпадають. Отже, в областях S_1, S_3 підшви хвилі затуплюються, а гребні загострюються. Тобто хвиля має \cup - подібну форму. На графіку 8в амплітуда другої гармоніки значно менша за амплітуду першої. Мінімуми обох гармонік співпадають, потім мінімум η_{22} співпадає з максимумом η_{21} . З цього випливає, що в області S_2 хвиля має \cap - подібну форму.

Висновок

В даній статті було досліджено поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою». Для обох поверхонь контакту виведені рівняння, якими визначається форма хвильового пакету. Графічно проілюстровано та проаналізовано межі знакосталості коефіцієнтів Λ_1 та Λ_2 , які впливають на форму хвилі, для обох коренів дисперсійного рівняння. Також наведено графіки відхилень поверхонь контакту для обох пар частот і отримано наступні результати. Для нижньої поверхні контакту при $\Lambda_1 > 0$ для першої пари частот у системах (ρ_2, k) і (ρ_3, k) хвиля приймає \cup - подібну форму. Отже, накладання максимумів другої гармоніки та мінімумів першої, і накладання максимумів обох гармонік призводить до загострення гребнів і затуплення підшв. Для $\Lambda_1 < 0$ при накладанні мінімумів обох гармонік відбувається затуплення гребнів і загострення підшв. Для другої пари частот при $\Lambda_1 > 0$ і при $\Lambda_1 < 0$ для нижньої поверхні контакту хвильові пакети мають \cap - подібну форму. Отже, для другої пари частот накладання максимумів другої гармоніки та мінімумів першої і накладання максимумів ($\Lambda_1 > 0$), та накладання мінімумів і накладання максимумів першої гармоніки та мінімумів другої ($\Lambda_1 < 0$) призводить до затуплення гребнів та загострення підшв.

Для верхньої поверхні контакту при $\Lambda_2 > 0$ для обох пар частот хвильові пакети мають \cup - подібну форму. Тобто, накладання максимумів (для першого кореня) та накладання максимумів другої гармоніки і мінімумів першої (для другого кореня) призводить до загострення гребнів і затуплення підшв. Для випадку $\Lambda_2 < 0$ для обох пар коренів хвилі приймають \cap - подібну форму. Отже, накладання мінімумів другої гармоніки і максимумів першої (для ω_1), та накладання мінімумів обох гармонік (для ω_2) веде до затуплення гребнів та загострення підшв.

ORCID ID

Д. С. Харченко  <https://orcid.org/0000-0002-7135-627X>

REFERENCES

1. O. V. Avramenko, V. Naradovyi. Analysis of Propagation of Weakly Nonlinear Waves in a Two-layer Fluid with Free Surface, Eastern-European Journal of

- Enterprise Technologies. – 2015. – Vol. 4, No 7(76). – P. 39–44. 10.15587/1729-4061.2015.48282
2. O. V. Avramenko, M. V. Lunyova. Analysis of the shape of wave packets in a three-layer hydrodynamic system "half-space-layer-layer with a solid cover", Mathematical methods and physical and mechanical fields. – 2019. – Vol. 62, No 3. – P. 127–142.
 3. V. Naradovyi, D. Kharchenko. Investigation of the energy of wave motions in a three-layer hydrodynamic system, Waves in Random and Complex Media. – 2019. 10.1080/17455030.2019.1699674
 4. I. T. Selezov, O. V. Avramenko, Yu. V. Hurtovyy. Propagation of nonlinear wave packets at near-critical wave numbers in a two-layer liquid of finite depth, Mathematical methods and physical and mechanical fields. – 2007. – Vol. 50, No 1. – P. 91–97.

Форма хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі

Харченко Д. С.

*Центральноукраїнський державний педагогічний університет
імені В. Винниченка, вул. Шевченка 1, м. Кропивницький, Україна, 25000*

Стаття присвячена проблемі поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою», стратифікованій за густиною. Виконано огляд сучасних досліджень з обраної тематики. Математична постановка задачі наведена в безрозмірному вигляді та містить рівняння руху рідини, кінематичні та динамічні умови на поверхнях контакту, а також граничні умови на кришці та на дні. З використанням методу багатомасштабних розвинень отримано перші три наближення досліджуваної задачі, з яких в статті наведено перші два, оскільки третє наближення має громіздкий аналітичний вигляд. Представлено розв'язки першого наближення та дисперсійне співвідношення. Виведено еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів на поверхнях контакту у вигляді нелінійного рівняння Шредінгера на основі дисперсійного співвідношення та умов розв'язності другого та третього наближень. Отримано частинний розв'язок нелінійного рівняння Шредінгера після переходу до системи, яка рухається з груповою швидкістю. Для першого та другого наближення виведено формули відхилень поверхонь контакту, з урахуванням розв'язку нелінійного рівняння Шредінгера. Виведено умови, при яких змінюється форма хвильових пакетів на верхній та нижній поверхнях контакту. Наведено та проаналізовано області знакосталості коефіцієнтів при других гармоніках на верхній та нижній поверхнях контакту для обох пар частот, які є коренями дисперсійного співвідношення. Також, для обох пар частот графічно проілюстровано та проаналізовано різні випадки накладання максимумів та мінімумів першої та другої гармонік, при яких виникає асиметрія форми хвильових пакетів. Всі результати проілюстровані графічно. Аналітичні перетворення, обчислення та графічне представлення результатів виконано з використанням пакету символьних обчислень та комп'ютерної алгебри Maple.

Ключові слова: тришарова гідродинамічна система; хвильові пакети; форма хвильових пакетів.

The shape of wave packets in a three-layer hydrodynamic system

D. S. Kharchenko

*Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University**1 Shevchenko str., Kropyvnytskyi, 25000, Ukraine*

The article is devoted to the problem of wave-packet propagation in a three - layer hydrodynamic system "layer with a hard bottom - layer - layer with a cover stratified by density. The current research on selected topics is reviewed. The mathematical formulation of the problem is given in dimensionless form and contains the equations of fluid motion, kinematic and dynamic conditions on the contact surfaces, as well as the boundary conditions on the lid and on the bottom. Using the method of multiscale developments, the first three approximations of the studied problem are obtained, of which the first two are given in the article, because the third approximation has a cumbersome analytical form. The solutions of the first approximation and the variance relation are presented. The evolution equations of the circumferential wave-packets on the contact surfaces are derived in the form of the nonlinear Schrodinger equation on the basis of the variance relation and the conditions for the solvability of the second and third approximations. A partial solution of the nonlinear Schrodinger equation is obtained after the transition to a system moving with group velocity. For the first and second approximations, the formulas for the deviations of the contact surfaces are derived, taking into account the solution of the nonlinear Schrodinger equation. The conditions under which the shape of wave-packets on the upper and lower contact surfaces changes are derived. The regions of familiarity of the coefficients for the second harmonics on the upper and lower contact surfaces for both frequency pairs, which are the roots of the variance relation, are presented and analyzed. Also, for both frequency pairs, different cases of superimposition of maxima and minima of the first and second harmonics, in which there is an asymmetry in the shape of wave packets, are graphically illustrated and analyzed. All results are illustrated graphically. Analytical transformations, calculations and graphical representation of results were performed using a package of symbolic calculations and computer algebra Maple.

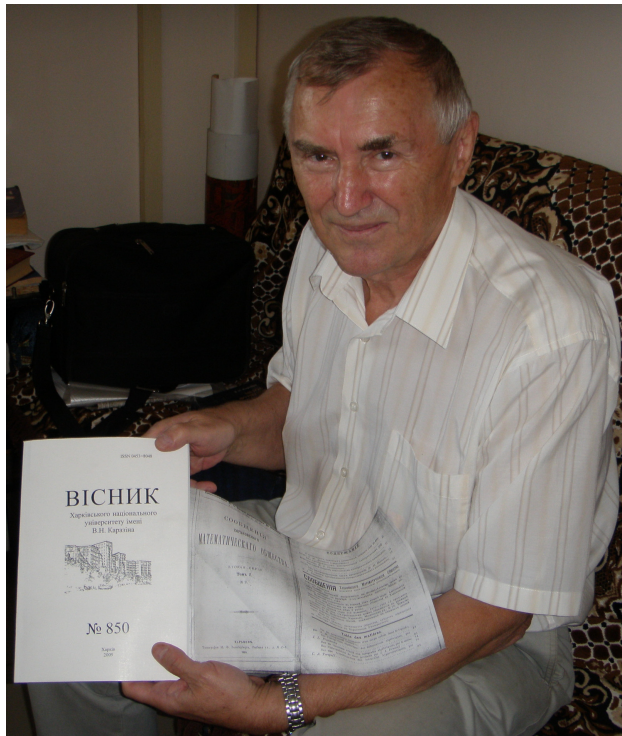
Keywords: three-layer hydrodynamic system; wave-packets; shape of wave-packets.

Article history: Received: 24 September 2021; Final form: 9 November 2021;

Accepted: 11 November 2021.

VALERY IVANOVICH KOROBV

To the 80th anniversary



On September 27, 2021, the Editor-in-Chief of our journal, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Valery Ivanovich Korobov turned the 80th anniversary.

The whole life of this remarkable outstanding person got in touch with mathematics and Kharkiv University. Valery Ivanovich graduated from the Kharkiv State University in 1961, and in 1964 became a PhD student of Igor Girsanov in Moscow State University. In 1967 he returned to Kharkiv and continued to work at Kharkiv University. In 1971 at the Faculty of Mathematics and Mechanics, the first "applied" department was organized due to Valery's efforts. It was named "Department of Mathematical Theory of Systems" and Valery Ivanovych became the head of the department at the age of 30 – the youngest head of the department at the university.

Valery Ivanovych established a Kharkiv scientific school of the mathematical control theory, which is well known in Ukraine and far beyond. Some of his results

© S. Yu. Ignatovich, A. V. Rezounenko, G. M. Sklyar, T. I. Smortsova, 2021

originated new scientific areas. For instance, for the first time ever, Valery Ivanovich investigated the controllability of triangular systems; stated and solved the *min*-moment problem; he is the author of the controllability function method, which is the extension of the Lyapunov functions method on control systems. He has more than 180 scientific papers, including the monograph — "Controllability Function Method" (2007).

Being a great teacher, Valery Ivanovich trained hundreds of students, became a scientific advisor for 13 PhD students. Three of his students became Doctors of Sciences – Nguyen Khoa Son (Vietnam), Rabah Rabah (France), Grigory Sklyar (Ukraine).

For his outstanding scientific achievements, Valery Ivanovich Korobov was awarded the M. V. Ostrogradsky Scholarship (2009), the State Prize of Ukraine in Science and Technology (2010). For the contribution to the development of astronautics, he was awarded the S. P. Korolev Medal of the Cosmonautics Federation of Russia (2009). In 2017, for significant results in pedagogical and scientific activities, he was awarded the honorary title of "Professor Emeritus of V. N. Karazin Kharkiv National University".

In September 2016, the School of Mathematics and Computer Sciences of V. N. Karazin Kharkiv National University hosted the International Conference "Differential Equations and Control Theory" dedicated to the 75th anniversary of Valery Ivanovich Korobov. That conference brought together his students, followers, colleagues from different countries. Since then, the conference "Differential Equations and Control Theory" was held annually.


We sincerely congratulate Valery Ivanovich with the jubilee and wish him health and new scientific achievements.

Rabah Rabah, Nguyen Khoa Son, S. M. Chuiko, Y. Ya. Khruslov, S. Yu. Ignatovich¹, L. A. Pastur, N. F. Patsegon, A. V. Rezounenko¹, G. M. Sklyar², T. I. Smortsova¹, G. M. Zholtkevich, V. O. Zolotaryov


¹V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody sqr., Kharkiv, 61022, Ukraine

²University of Szczecin, 22a al. Papieza Jana Pawla II, 70-453, Szczecin, Poland

ORCID ID: S. Yu. Ignatovich  <https://orcid.org/0000-0003-2272-8644>

A. V. Rezounenko  <https://orcid.org/0000-0001-8104-1418>

G. M. Sklyar  <https://orcid.org/0000-0003-4588-9926>

T. I. Smortsova  <https://orcid.org/0000-0001-5535-1383>

Article history: Received: 27 September 2021; Final form: 11 November 2021;

Accepted: 15 November 2021.

Правила для авторів
«Вісника Харківського національного університету
імені В. Н. Каразіна»,
Серія «Математика, прикладна математика і механіка»

Редакція просить авторів при направленні статей керуватися наступними правилами.

1. В журналі публікуються статті, що мають результати математичних досліджень (англійською або українською мовами).

2. Поданням статті вважається отримання редакцією файлів статті оформлених у редакторі LATEX (версія 2e), анотацій, відомостей про авторів та архіва, що включає LATEX файли статті та файли малюнків. Файл-зразок оформлення статті можна знайти в редакції журналу та на веб-сторінці (<http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>).

3. Стаття повинна починатися з анотацій, в яких повинні бути чітко сформульовані мета та результати роботи. Анотації повинні бути трьома мовами (англійською, українською та російською): першою повинна стояти анотація тією мовою, якою є основний текст статті. Закордонні автори можуть звернутися до редакції за допомогою з перекладом анотацій на українську та російську мову. В анотації повинні бути прізвища, ініціали авторів, назва роботи, ключові слова та номер за міжнародною математичною класифікацією (Mathematics Subject Classification 2010). Анотація не повинна мати посилань на літературу чи малюнки. На першій сторінці вказується номер УДК класифікації. В кінці статті треба додати розширені (обсягом **не менш ніж 1800 знаків** кожна) анотації англійською та українською мовами.

4. Список літератури повинен бути оформлений латинським шрифтом. Приклади оформлення списку літератури:

1. А.М. Ляпунов. A new case of integrability of differential equations of motion of a solid body in liquid, Rep. Kharkov Math. Soc., – 1893. – 2. V.4. – P. 81-85.
2. А.М. Ляпунов. The general problem of the stability of motion. 1892. Kharkov Mathematical Society, Kharkov, 251 p.

5. Кожний малюнок повинен бути пронумерований та представлений окремим файлом в одному з форматів: EPS, BMP, JPG. В файлі статті малюнок повинен бути вставлений автором. Під малюнком повинен бути підпис. Назви файлів малюнків повинні починатись з прізвища першого автора.

6. Відомості про авторів повинні містити: прізвища, імена, по батькові, службові адреси та номери телефонів, адреси електронних пошт та інформацію про наукові профайли авторів (orcid.org, www.researcherid.com, www.scopus.com) з відповідними посиланнями. Прохання також повідомити прізвище автора, з яким треба вести листування.

7. Рекомендуємо використовувати в якості зразка оформлення останні випуски журналу (vestnik-math.univer.kharkov.ua/currentv.htm).

8. У випадку порушення правил оформлення редакція не буде розглядати статтю.

Електронна скринька: vestnik-khnu@ukr.net

Електронна адреса в Інтернеті: <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна,
Серія “Математика, прикладна математика і механіка”, Том 94, 2021 р.

Збірник наукових праць

Англійською, українською, російською мовами

Підписано до друку 29. 11. 2021 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк цифровий.

Ум. друк. арк. 8,7

Обл.– вид. арк. 7,5

Наклад 100 пр. Зам. № 11/21

Безкоштовно.

Видавець і виготовлювач Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

Видавництво Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
тел. 705-24-32