ISSN 2221-5646 (Print),
ISSN 2523-4641 (Online)

KARAZIN UNIVERSITY
CLASSICS AHEAD OF TIME

VISNYK OF V.N.KARAZIN KHARKIV NATIONAL UNIVERSITY

Ser. MATHEMATICS, APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Том 93 ' 2021

Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна серія

МАТЕМАТИКА, ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА І МЕХАНІКА

Volume 93, 2021

ISSN 2221-5646 (Print)
ISSN 2523-4641 (Online)

Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна

Серія
«Математика, прикладна математика і механіка»

Серія започаткована 1965 р.

Том 93

Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”
Vol. 93

Харків
2021

До Віснику включено статті з математичного аналізу, математичної фізики, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних наук, категорія «Б» за спеціальностями 111 - Математика та 113 - Прикладна математика (Наказ МОН України №1643 від 28.12.2019 р.).

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 7 від 29 червня 2021 р.).

Адреса редакційної колегії: 61022, Харків, майдан Свободи, 4, ХНУ імені В.Н. Каразіна, ф-т математики і інформатики, к. 7-27, т. 7075240, 7075135, **e-mail:** vestnik-khnu@ukr.net
Інтернет: http://vestnik-math.univer.kharkov.ua; http://periodicals.karazin.ua/mech _math

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21568-11468 Р від 21.08.2015

ЗМІСТ

CONTENTS

СОДЕРЖАНИЕ

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 93, 2021, с. 4–11

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 93, 2021, p. 4–11
DOI: 10.26565/2221-5646-2021-93-01

УДК 517.954

Керованість систем лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

Макаров О. А.

Харківький національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
makarovifamily07@gmail.com

Отримано необхідні та достатні умови повної керованості систем лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами в просторі Л. Шварца. Знайдено також ряд ефективних достатніх умов повної керованості для окремих випадків. Для всіх цих окремих випадків наведено приклади.
Ключові слова: повна керованість; задача Коши; перетворення Фур'є.

A. A. Makarov. **Controllability of systems of linear partial differential equations.** Necessary and sufficient conditions for complete controllability of systems of linear partial differential equations with constant coefficients in L. Schwartz space are obtained. A number of sufficient conditions for complete controllability have also been found for special cases.Examples are given for all of these special cases.
Keywords: complete controllability; the Cauchy problem; Fourier transform.

Макаров А. А. **Управляемость линейных систем дифференциальных уравнений с частными производными.** Получены необходимые и достаточные условия полной управляемости линейных систем дифференциальных уравнений с частными производными с постоянными коэффициентами в пространстве Л. Шварца. Найден также ряд достаточных условий полной управляемости для частных случаев. Для всех этих частных случаев приведены примеры.
Ключевые слова: полная управляемость; задача Коши; преобразование Фурье.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10.

1. Вступ та постановка задачі

Теорії керованості останнім часом присвячено багато робіт, але значна частина з них присвячена звичайним диференціальним рівнянням; а з рівнянь з частинними похідними розглядаються здебільшого рівняння математичної фізики. Наприклад, в роботах Скляра Г. М. та Фардіголи Л. В. [1, 2] розглядалась керованість хвильового рівняння.

У роботі автора [3] була досліджена керованість системи лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Крім того було доведено, що якщо власні значення поліноміальної матриці, по якій будується ця система, дійсні або уявні, то існує керування у вигляді $u(x)v(t)$.

У даній роботі доведено критерій повної керованості даної системи у просторі Л. Щварца, а також знайдено ряд ефективних достатніх умов повної керованості. Всі ці випадки проілюстровані прикладами.

Отримана також умова некерованості системи, за допомогою якої наведено приклад некерованої системи.

Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами наступного вигляду

$$\begin{gathered}\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w(x,t) + v(t)u(x), \quad t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n \\ w(x,0) = \varphi(x),\end{gathered} \tag{1}$$

де:
— $P(s)$ — квадратна матриця $m \times m$, єлементи якої є поліномами;
— вектор-функції $u(x)$ та $\varphi(x)$ належать простору Л. Шварца $S = \bigcap\limits_{s,l=0}^{\infty} C_l^s$, який складається з нескінченно-диференційованих та швидко спадних функцій (див. [4]);
— скалярна функція $v(t)$ є кусково-неперервною, але в даній роботі ми будемо розглядати лише функцію $v(t) = e^{-\alpha t}$ з $\alpha > 0$.

Визначення. Система (1) називається повністю керованою у просторі S, якщо для будь-якої функції $\varphi(x) \in S$ існує керування $u(x) \in S$ таке, що розв'язок даної системи $w(\cdot,t) \in S$ задовольняє умові $w(x,T) = 0$.

2. Критерій повної керованості

В статті [3] була доведена теорема.

Теорема. Система (1) буде повністю керованою у просторі S тоді і тільки тоді, якщо існує обернена матриця

$$\left(\int\limits_0^T \exp(-\alpha t)\exp\left(-tP(s)\right)dt\right)^{-1} \in C_{-\infty}^{\infty}, \quad \forall s \in \mathbb{R}^n,$$

де $C_{-\infty}^{\infty} = \bigcap\limits_{s=0}^{\infty}\bigcup\limits_{l=0}^{\infty} C_{-l}^{s}$ — простір нескінченно-диференційованих функцій, яки зростають не швидше степені (див. [4]).

Наслідок. Якщо визначник

$$\Delta = \det\int\limits_0^T \exp\left(-t(P(s)+\alpha E)\right)dt \neq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}^n,$$

то система (1) буде повністю керованою у просторі S (E — одинична матриця).

Це випливає з роботи [5], де доведено, що з умови $\Delta \neq 0$ випливає належність оберненої матриці простору $C^{\infty}_{-\infty}$.

Умова наслідку еквівалентна наступній умові

$$\frac{\exp\left(-T(\lambda_j(s)+\alpha)\right)-1}{\lambda_j(s)+\alpha} \neq 0, \quad j=\overline{1,m}, \tag{2}$$

де $\lambda_j(s)$ — власні значення матриці $P(s)$.

Теорема 1. ***(загальний критерій керованості)***
Нехай існує невід'ємне α таке, що на множинах

$$N_j = \{s \in \mathbb{R}^n : \ Re\lambda_j(s) = -\alpha\}, \quad j=\overline{1,m}$$

виконуютьcя нерівності $Im\lambda_j(s) \neq \dfrac{2k\pi}{T}, \quad k=\pm 1, \pm 2, \ldots.$
Тоді система (1) є повністю керованою.

Доведення. У силу наведенного наслідку достатньо перевірити умову (2), яка рівнозначна тому, що $Re\lambda_j(s) \neq -\alpha$ або $Im\lambda_j(s) \neq \dfrac{2k\pi}{T}$.
А це, в силу умові Теореми, виконано.
Теорема доведена.
Приклад 1. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1(x,t)}{\partial t} = 4w_2(x,t) + \Delta w_2(x,t) + u_1(x)e^{-\alpha t}, \\ \dfrac{\partial w_2(x,t)}{\partial t} = -2w_1(x,t) + \Delta w_1(x,t) + u_2(x)e^{-\alpha t} \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Запишемо матрицю $P(s)$ для даної системи $P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 4-|s|^2 \\ -|s|^2 & -2 \end{pmatrix}$, де $|s|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} s_k^2$. Тоді характеристичне рівняння має вигляд $\lambda^2 - 2\lambda - |s|^4 + 4|s|^2 = 0$.
Його корені $\lambda_{1,2}(s) = 1 \pm \sqrt{|s|^4 - 4|s|^2 + 1} = 1 \pm \sqrt{(|s|^2-2)^2 - 3}$ або обидва дійсні, або комплексні з $|Im\lambda_j(s)| \leq \sqrt{3}$.
Отже, наприклад, при $T=1$ виконується умова Теореми 1: $Im\lambda_j(s) \neq \dfrac{2k\pi}{T}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, тобто система повністю керована.

Теорема 2. ***(умова некерованості)***
Якщо при будь-яких значеннях $\alpha \geq 0$ існує $s_0 \in \mathbb{R}^n$ і існує значення $\lambda_j(s_0)$ таке, що $Re\lambda_j(s_0) = -\alpha$ та $Im\lambda_j(s_0) = \dfrac{2k\pi}{T}$ з деяким цілим k, тоді система (1) є некерованою.

Д о в е д е н н я. Це випливає з того, що не виконана умова (2).

Приклад 2. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1(x_1,x_2,t)}{\partial t} = w_2(x_1,x_2,t) + u_1(x)e^{-\alpha t}, \\ \dfrac{\partial w_2(x_1,x_2,t)}{\partial t} = -\Delta w_1(x_1,x_2,t) + 2\dfrac{\partial w_2(x_1,x_2,t)}{\partial x_1} + u_2(x)e^{-\alpha t}. \end{cases}$$

Так як матриця для даної системи має вигляд $P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s_1^2 + s_2^2 & 2is_1 \end{pmatrix}$, то характеристичне рівняння буде таким $\lambda^2 - 2is_1\lambda - s_1^2 - s_2^2 = 0$.
Його корені $\lambda_{1,2}(s) = is_1 \pm s_2$. Тому у рівнянні $T(is_1 - s_2 + \alpha) = 2k\pi i$ завжди буде дійсний корінь $\begin{cases} s_1 = 2k\pi/T, \\ s_2 = \alpha \end{cases}$, а значить, система не є керованою.

В цьому випадку керування слід шукати в іншому вигляді.
Так, в роботі [3] було доведено, що рівняння

$$\frac{\partial w_1(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w(x,t) + u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \ t \in [0;T]$$

завжди повністю кероване в просторі Л. Шварца з керуванням

$$u(x,t) = F_s^{-1}\left(\frac{ReP(s)\cdot\widetilde{\varphi}(s)}{\exp(-T\cdot ReP(s)) - 1}\cdot\exp\left(i\,t\,ImP(s)\right)\right),$$

де F_s^{-1} — обернене перетворення Фур'є по змінної s.

Приклад 2-1. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial w_1(x_1,x_2,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w_1(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 w_1(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^2} +$$
$$+ b_1\cdot\frac{\partial w_1(x_1,x_2,t)}{\partial x_1} + b_2\cdot\frac{\partial w_1(x_1,x_2,t)}{\partial x_2} + u(x_1,x_2,t), \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

В данному рівнянні:
— $P(s) = -s_1^2 + s_2^2 + ib_1s_1 + ib_2s_2$,
— $ReP(s) = -s_1^2 + s_2^2$,
— $ImP(s) = b_1s_1 + b_2s_2$.

Система $\begin{cases} -s_1^2 + s_2^2 = -\alpha, \\ b_1s_1 + b_2s_2 = \dfrac{2k\pi}{T} \end{cases}$ завжди має дійсні корені, тому не існує керування вигляду $u(x)e^{-\alpha t}$. Але існує керування

$$u(x,t) = F_s^{-1}\left(\frac{(-s_1^2 + s_2^2)\cdot\widetilde{\varphi}(s)}{\exp T(s_1^2 - s_2^2) - 1}\cdot\exp(i\,t\,(b_1s_1 + b_2s_2)\right) =$$
$$= G_1(x) * \varphi(x_1 - b_1t,\ x_2 - b_2t), \quad \text{де } G_1(x) = F_s^{-1}\left(\frac{s_2^2 - s_1^2}{\exp T(s_1^2 - s_2^2) - 1}\right),$$

при якому це рівняння повністю кероване у просторі Л. Шварца.

3. Окремі випадки

З теореми 1 випливає ряд важливих наслідків.

Наслідок 1. Якщо система (1) коректна за Петровським [6], тобто $Re\lambda_j(s) < C$, або $Re\lambda_j(s) > -C$ з деяким C для будь-яких $s \in \mathbb{R}^n$ та $j = \overline{1,m}$, то вона є повністю керованою.

Доведення. Перевіримо умову $\lambda_j(s) + \alpha \neq \dfrac{2k\pi}{T}$ при $k \neq 0$.

Якщо $Re\lambda_j(s) < C$, то існує $\alpha > C$ при якій $Re\lambda_j(s) \neq \alpha$, тобто нерівність доведена. Таким чином, твердження доведено.

Приклад 3. (рівняння звуку у в'язкому середовищі)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1(x,t)}{\partial t} = w_2(x,t) + u_1(x)e^{-\alpha t}, \\ \dfrac{\partial w_2(x,t)}{\partial t} = 2\Delta w_2(x,t) + \Delta w_1(x,t) + u_2(x)e^{-\alpha t}. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння має вигляд $\lambda^2 + 2|s|^2\lambda + |s|^2 = 0$.
Його корені $\lambda_{1,2}(s) = -|s|^2 \pm \sqrt{|s|^4 - |s|^2} = -|s|^2 \pm |s|\sqrt{|s|^2 - 1}$.
При $|s| \geq 1$ корені дійсні і $\max\limits_j Re\lambda_j(s) < 0$, а при $|s| < 1$ корені комплексні та $\max\limits_j Re\lambda_j(s) = 0$. Тобто система коректна за Петровським.

Наслідок 2. Якщо $x \in \mathbb{R}$, то система (1) завжди повністю керована з деяким α.

Доведення. Заперечення умови (2) еквівалентно системі

$$\begin{cases} Re\lambda_j(s_0) = -\alpha, \\ Im\lambda_j(s_0) = \dfrac{2k\pi}{T} \end{cases}$$

з деяким j та дійсним s_0.
Випадок дійсних власних значень був розглянутий в роботі [3]. Тому розглянемо тільки випадок, коли $Im\lambda_j(s_0) \neq 0$.

Друге рівняння системи має кінцеве або злічену кількість нулів при фіксованому k, а всього цих коренів — зліченна множина $s_k \in \mathbb{R}$. Тоді множина значень $Re\lambda_j(s_k)$ теж зліченна і тому завжди знайдеться таке α, при якому $Re\lambda_j(s_k) \neq -\alpha$. Значить існує $\alpha \in \mathbb{R}$ таке, що виконується умова (2), а отже система керована.

3. Висновки

У даній роботі доведено загальний критерій керованості для систем лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними у просторі Л. Шварца з керуванням вигляду $u(x)e^{-\alpha t}$.

Також знайдені умови некерованої системи та наведен приклад такої системи.

Крім того розглянуті важливі окремі випадки керованих систем: коректні за Петровським системи та будь-які системи з однією просторовою змінною.

Для всіх випадків наведені приклади.

ORCID ID

A. A. Makarov https://orcid.org/0000-0002-9050-4987

REFERENCES

1. G. M. Sklyar, L. V. Fardigola. The Markov trigonometric moment problem in controllability problems for the wave equation on a half-axis, Matem. Fizika, Analiz, Geometriya, 2002. – Vol. **9**, No. **2**. – P. 233-242.

2. L. V. Fardigola. Controllability Problems for the String Equation on a Half-Axis with a Boundary Control Bounded by a Hard Constant, SIAM J. Control Optim., – 2008. – Vol. **47**, No. **4**. – P. 2179-2199. https://doi.org/10.1137/070684057

3. A. A. Makarov. Controllability of evolution partial differential equation, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”, – 2016. – **83**. – P. 47-56. DOI: https://doi.org/10.26565/2221-5646-2016-83-04 (in Russian).

4. L. R. Volevich, S. G. Gindikin. Distributions and convolution equations. 1994. Nauka, M., 336 p. (in Russian). **in English:** 1992. Gordon and Breach, Philadelphia, xi+465 p., ISBN 2-88124-753-9

5. L. V. Fardigola. An integral boundary-value problem in a layer for a system of partial differential equations, Mat. sbornik, – 1995. – Vol. **186**. – No. **11**. – P. 123-144. (in Russian) **English translation:** Sbornik: Mathematics, – 1995. – Vol. **186**. – No. **11**. – P. 1671–1692

6. I. N. Gelfand, G. E. Shilov. Some questions of the theory of differential equations. 1958. Physmatgiz, M., 275 p. (in Russian).

Керованість систем лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

Макаров О. А.

Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна

м. Свободи, 4, Харків, Україна, 61022

Останнім часом теорія керованості вивчалася в багатьох роботах. Але чимало з них присвячено керованим системам, які описуються звичайними диференціальними рівняннями. У випадку систем, які описуються диференціальними рівняннями

з частинними похідними, вони вивчалися здебільшого для класичних рівнянь математичної фізики. Наприклад, у роботах Г. Скляра і Л. Фардиголи було вивчено проблеми керованості для хвильового рівняння на пів осі.

У цій роботі проблему повної керованості вивчено для систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами в просторах Шварца швидко спадних функцій. Одержано необхідні і достатні умови повної керованості цих систем з розподіленим керуванням спеціального вигляду: $\mathbf{u}(x,t) = e^{-\alpha t}u(x)$.

Для доведення цих умов було використано інші необхідні і достатні умови, одержані автором раніше (див. роботу "Керованість еволюційного диференціального рівняння в частинних похідних". Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". 2016. Т. 83, с. 47–56 [3]).

Так система

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w(x,t) + e^{-\alpha t}u(x), \quad t \in [0,T], \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

є повністю керованою в просторі Шварца, якщо існує $\alpha > 0$ таке, що

$$\det\left(\int_0^T \exp\big(-t(P(s)+\alpha E)\big)\,dt\right) \neq 0, \quad s \in \mathbb{R}^N.$$

Ця умова еквівалентна наступній умові: існує $\alpha > 0$ таке, що

$$\exp\big(-T(\lambda_j(s)+\alpha)\big) \neq 1, \quad \text{якщо } (\lambda_j(s)+\alpha) \neq 0, \qquad s \in \mathbb{R}^n, \ j = \overline{1,m},$$

де $\lambda_j(s)$, $j = \overline{1,m}$, є власними значеннями матриці $P(s)$, $s \in \mathbb{R}^n$.

Також досліджено окремий випадок системи (1), для якої $\operatorname{Re}\lambda_j(s)$, $s \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,m}$, є обмеженими зверху або знизу. Наприклад, системи (1), які є коректними за Петровським, є повністю керованими.

Одержано також умови існування системи вигляду (1), яка не є повністю керованою. Наведено приклад такої системи. Проте, якщо керування заданого вигляду не існує, то може існувати керування іншого вигляду. Приклад, що ілюструє цей ефект, також наведено в роботі.

Ключові слова: повна керованість; задача Коші; перетворення Фур'є.

Controllability of systems of linear partial differential equations

A. A. Makarov
V. N. Karazin Kharkiv National University,
4 Svobody sqr., Kharkiv, 61022, Ukraine

In a number of papers, the controllability theory was recently studied. But quite a few of them were devoted to control systems described by ordinary differential equations. In the case of systems described by partial differential equations, they were studied mostly for classical equations of mathematical physics. For example, in papers by G. Sklyar and L. Fardigola, controllability problems were studied for the wave equation on a half-axis.

In the present paper, the complete controllability problem is studied for systems of linear partial differential equations with constant coefficients in the Schwartz space of rapidly decreasing functions. Necessary and sufficient conditions for complete controllability are obtained for these systems with distributed control of the special form: $\mathbf{u}(x,t) = e^{-\alpha t}u(x)$.

To prove these conditions, other necessary and sufficient conditions obtained earlier by the author are applied (see "Controllability of evolution partial differential equation". Visnyk of V. N. Karasin Kharkiv National University. Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics". 2016. Vol. 83, p. 47–56 [3]).

Thus, the system

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w(x,t) + e^{-\alpha t} u(x), \quad t \in [0,T], \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

is completely controllable in the Schwartz space if there exists $\alpha > 0$ such that

$$\det\left(\int_0^T \exp\big(-t(P(s)+\alpha E)\big)\,dt\right) \neq 0, \quad s \in \mathbb{R}^N.$$

This condition is equivalent to the following one: there exists $\alpha > 0$ such that

$$\exp\big(-T(\lambda_j(s)+\alpha)\big) \neq 1 \quad \text{if } (\lambda_j(s)+\alpha) \neq 0, \qquad s \in \mathbb{R}^n, \ j = \overline{1,m},$$

where $\lambda_j(s)$, $j = \overline{1,m}$, are eigenvalues of the matrix $P(s)$, $s \in \mathbb{R}^n$.

The particular case of system (1) where $\operatorname{Re}\lambda_j(s)$, $s \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,m}$, are bounded above or below is studied. These systems are completely controllable. For instance, if the Petrovsky well-posedness condition holds for system (1), then it is completely controllable.

Conditions for the existence of a system of the form (1) which is not completely controllable are also obtained. An example of a such kind system is given. However, if a control of the considered form does not exists, then a control of other form solving complete controllability problem may exist. An example illustrating this effect is also given in the paper.

Keywords: complete controllability; Cauchy problem; Fourier transform.

Article history: Received: 17 March 2021; Final form: 25 May 2021;
Accepted: 30 May 2021.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 93, 2021, с. 12–17

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 93, 2021, p. 12–17
DOI: 10.26565/2221-5646-2021-93-02

УДК 519.216

Speed of convergence of complementary probabilities on finite group

A. L. Vyshnevetskiy

Kharkiv National Automobile and Highway University,
25 Yaroslava Mudrogo str., Kharkiv, 61002, Ukraine.
E-mail: alexwish50@gmail.com

Let RG be a group algebra of a finite group G over the field R of real numbers. A probability $P(g)$ on the group G corresponds to an element $p = \sum_g P(g)g \in RG$; we call it probability on the algebra RG. For a natural number n, n-fold convolution of probability P on G corresponds to $p^n \in RG$. Let $e \in RG$ be the probability that corresponds to the uniform probability $E(g) = |G|^{-1}(g \in G)$. Two probabilities $p, p_1 \in RG$ are called complementary, if their convex linear combination equals to e, i.e. $\alpha p + (1-\alpha)p_1 = e$ for some α, $0 < \alpha < 1$. We find condition for existence of such α and compare $\parallel p^n - e \parallel$ and $\parallel {p_1}^n - e \parallel$ for arbitrary norm $\|.\|$.
Keywords: probability; finite group; convergence; convolution; group algebra.

Вишневецький О. Л. **Швидкість збіжності додаткових ймовірностей на скінченній групі.** Нехай RG – групова алгебра скінченної групи G над полем R дійсних чисел. Імовірність $P(g)$ на групі G відповідає елементу $p = \sum_g P(g)g \in RG$; ми називаємо її ймовірністю на алгебрі RG. Для натурального числа n, n-кратна згортка ймовірності P на G відповідає $p^n \in RG$. Нехай $e \in RG$ – ймовірність, що відповідає рівномірній ймовірності $E(g) = |G|^{-1}(g \in G)$. Дві ймовірності $p, p_1 \in RG$ називаються додатковими, якщо їх опукла лінійна комбінація дорівнює e, тобто $\alpha p + (1-\alpha)p_1 = e$ для деякого α, $0 < \alpha < 1$. Ми знаходимо умови існування такого α і порівнюємо $\parallel p^n - e \parallel$ і $\parallel {p_1}^n - e \parallel$ для довільної норми $\|.\|$.
Ключові слова: ймовірність; скінченна група; збіжність; групова алгебра.

Вишневецкий А. Л. **Скорость сходимости дополнительных вероятностей на конечной группе.** Пусть RG – групповая алгебра конечной группы G над полем R вещественных чисел. Вероятность $P(g)$ на группе G соответствует элементу $p = \sum_g P(g)g \in RG$; мы называем её вероятностью на алгебре RG. Для натурального числа n, n-кратная свертка вероятности P на G соответствует $p^n \in RG$. Пусть $e \in RG$ – вероятность, соответствующая равномерной вероятности $E(g) = |G|^{-1}(g \in G)$. Две вероятности $p, p_1 \in RG$ называются дополнительными, если их выпуклая линейная комбинация равна e, т. е. $\alpha p + (1-\alpha)p_1 = e$ для некоторого α, $0 < \alpha < 1$.

Мы находим условия существования такого α и сравниваем $\| p^n - e \|$ и $\| {p_1}^n - e \|$ для произвольной нормы $\|.\|$.
Ключевые слова: вероятность; конечная группа; сходимость; групповая алгебра.

2010 Mathematics Subject Classification: prim. 60B15, 60B10; sec. 20D99.

1. Introduction

Let G be a finite group of order $|G|$, RG the group algebra of the group G over the field R of real numbers. Each real function $F(g)$ on the group G corresponds to an element $f = \sum\limits_g F(g)g \in RG$ (we write $\sum\limits_g$ instead of $\sum\limits_{g\in G}$). We denote a function on the group G with a capital letter and the corresponding element of RG with the same (but small) letter, and call the latter a probability on RG. For instance, the trivial (uniform) probability $E(g) = \dfrac{1}{|G|}$ $(g \in G)$ corresponds to the element

$$e = \frac{1}{|G|}\sum_g g \in RG.$$

Exploring probabilities on group algebras is sometimes more convenient than on groups (see e.g. [4])

Convolution of two functions P, Q on G

$$(P * Q)(h) = \sum_g P(g)Q(g^{-1}h) \quad (h \in G)$$

corresponds to product pq of corresponding elements $p,\ q \in RG$.

Let function $P(g)$ be a probability on a group G, i.e.

$$P(g) \geq 0 \ (g \in G),\ \sum_g P(g) = 1 \tag{1}$$

and $P^{(n)} = P * ... * P$ (n times) an n-fold convolution of function P. There is a lot of works devoted to evaluation of speed of convergence of $P^{(n)}$ to the uniform probability $E(g)$ on G at $n \to \infty$ (see e.g. review [2]). In other words, a norm of $\| p^n - e \|$ is evaluated (for different norms) at $n \to \infty$. The case when $p^n = e$ for some finite n was studied in [4]. Conditions for convergence p^n to e are well known, some refinements are in [3].

For any element $b = \sum\limits_g b_g g \in RG$ we denote $|b| = \sum\limits_g |b_g| \in R$. We write $b \geq 0$ if $b_g \geq 0$ for all $g \in G$. Now for any probability

$$p = \sum_g a_g g \tag{2}$$

on RG conditions (1) can be written as follows:

$$p \geq 0, \quad |p| = 1 \tag{3}$$

Since $h \sum\limits_g g = \sum\limits_g g$ for any $h \in G$, then $he = e$ and by linearity, we get $be = |b|e$ for any element $b = \sum\limits_g b_g g \in RG$. So

$$pe = e \tag{4}$$

for any probability $p \in RG$.

2. Theorem

We study the case when a linear combination of two probabilities on RG equals to e. Since $|a| + |b| = |a + b|$ for any $a, b \in RG$, then from (3) this linear combination must be convex.

Convex linear combinations of idempotent distributions on countable groups were studied in [1])

Definition 1. *Probabilities p, $p_1 \in RG$ are called complementary, if their convex linear combination equals to e, i.e.*

$$\alpha p + (1 - \alpha) p_1 = e \tag{5}$$

for some number α, $0 < \alpha < 1$.

We find out when for a given probability $p \in RG$ a complementary probability $p_1 \in RG$ exists, i.e.

$$p_1 = \frac{e - \alpha p}{1 - \alpha} \tag{6}$$

is a probability for a number α, $0 < \alpha < 1$. By (3) we have to check if $p_1 \geq 0$ and $|p_1| = 1$. We also compare $\|p^n - 1\|$ and $\|p_1^n - 1\|$ (n is a natural number) for any norm $\|.\|$.

Theorem 1. *Let $p = \sum\limits_g a_g g$ be a probability in algebra RG, $a = \max\limits_{g \in G} a_g$. Then for any α, $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{a|G|}$ there exist a probability $p_1 \in RG$ such that (5) holds. Moreover,*

$$\|p_1^n - e\| = \frac{1}{(\alpha^{-1} - 1)^n} \|p^n - e\|. \tag{7}$$

P r o o f. Let p_1 be as defined in (6). $p_1 \geq 0$ if and only if $(1 - \alpha)p_1 \geq 0$. By (5)

$$(1 - \alpha)p_1 = e - \alpha p = \sum_g \Big(\frac{1}{|G|} - \alpha a_g \Big) g.$$

So $p_1 \geq 0$ if and only if

$$\sum_g \Big(\frac{1}{|G|} - \alpha a_g\Big) g \geq 0,$$

i.e.

$$\frac{1}{|G|} - \alpha a_g \geq 0$$

for any $g \in G$. It is equivalent to

$$\alpha \leq \frac{1}{a|G|} \tag{8}$$

where $a = \max\limits_{g\in G} a_g$. This necessary condition for two complementary probabilities to exist is equivalent to the condition $p_1 \geq 0$. Now we prove that $|p_1| = 1$:

$$|(1-\alpha)p_1| = |e - \alpha p| = \sum_g \Big(\frac{1}{|G|} - \alpha a_g\Big) = \sum_g \frac{1}{|G|} - \alpha \sum_g a_g = 1 - \alpha|p| = 1 - \alpha$$

i.e. $|p_1| = 1$ (as $\alpha \neq 1$). So under condition (8) p_1 is a probability.

Now we compare $\|p^n - 1\|$ and $\|p_1^n - 1\|$ (n is a natural number) for any norm $\|.\|$. As well known, e is an idempotent of the algebra RG: $e^k = e$ for any natural number k. Taking into account the binomial formula, (4) and (6), we obtain:

$$(1-\alpha)^n p_1^n = (e - \alpha p)^n =$$
$$= e^n - C_n^1 e^{n-1}\alpha p + C_n^2 e^{n-2}\alpha^2 p^2 - \dots + (-1)^n C_n^{n-1} e \alpha^{n-1} p^{n-1} + (-1)^n \alpha^n p^n =$$
$$= e\Big(1 - C_n^1 \alpha + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}\alpha^{n-1} + (-1)^n\alpha^n - (-1)^n\alpha^n\Big) + (-1)^n\alpha^n p^n =$$
$$= e(1-\alpha)^n + (-1)^n \alpha^n (p^n - e).$$

We divide by $(1-\alpha)^n$:

$$p_1^n = \frac{e(1-\alpha)^n + (-1)^n\alpha^n(p^n - e)}{(1-\alpha)^n} = e + \frac{(-1)^n\alpha^n}{(1-\alpha)^n}(p^n - e).$$

Then

$$\|p_1^n - e\| = \Big\|\frac{(-1)^n\alpha^n}{(1-\alpha)^n}(p^n - e)\Big\| = \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)^n}\|p^n - e\| = \frac{1}{(\alpha^{-1} - 1)^n}\|p^n - e\|.$$

The theorem is proved. It can be formulated as follows.

If $\alpha p + (1-\alpha)p_1 = e$ for probabilities $p, p_1 \in RG$ and some number α, $0 < \alpha < 1$, then $\alpha \leq \dfrac{1}{a|G|}$, where $a = \max\limits_{g\in G} a_g$ and equality (7) holds.

Corollary 1. *If* $a = \dfrac{2}{|G|}$, *then* $\|p_1^n - e\| = \|p^n - e\|$.

Indeed, if $a = \dfrac{2}{|G|}$, one can put $\alpha = \dfrac{1}{2}$ in (2.3).

Corollary 2. *p^n converges to e iff p_1^n converges to e.*

ORCID ID

A. L. Vyshnevetskiy https://orcid.org/0000-0003-1757-0416

REFERENCES

1. A. D. Bendikov, A. A. Grigor'yan, Ch. Pittet, W. Woess. Isotropic Markov semigroups on ultra-metric spaces, Russian Math. Surveys, 2014. – Vol. **69**, No **4**. – P. 589–680. https://doi.org/10.1070/RM2014v069n04ABEH004907

2. L. Saloff-Coste. Random walks on finite groups. In: H. Kesten (editor). Probability on Discrete Structures, Encyclopaedia of Mathematical Sciences (Probability Theory), – 2004. – Vol. **110**. Springer, Berlin, Heidelberg, – P. 263-340. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-662-09444-0_5

3. A. L. Vyshnevetskiy. Conditions of convergence of a random walk on a finite group, Colloquium Mathematicum. https://doi.org/10.4064/cm8196-5-2020

4. A. L. Vyshnevetskiy, E. M. Zhmud'. Random walks on finite groups converging after finite number of steps, Journal Algebra and Discrete Mathematics, 2008. – Vol. **7**, No **2**, – P. 123-129. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/153370

Швидкість збіжності додаткових ймовірностей на скінченній групі.

Вишневецький О. Л.

Харківський національний автомобільно-дорожній університет, вул. Ярослава Мудрого 25, Харків, Україна, 61002

Нехай функція P є ймовірністю на скінченній групі G, тобто $P(g) \geq 0$ $(g \in G)$, $\sum_g P(g) = 1$ (ми пишемо $\sum\limits_g$ замість $\sum\limits_{g \in G}$). Згортка двох функцій P, Q на групі G є $(P * Q)(h) = \sum\limits_g P(g)Q(g^{-1}h)$ $(h \in G)$. Нехай $E(g) = \frac{1}{|G|}\sum\limits_g g$ є рівномірною (тривіальною) ймовірністю на групі G, $P^{(n)} = P * ... * P$ (n разів) - n -кратна згортка P. За добре відомої нескладної умови ймовірність $P^{(n)}$ збігається до $E(g)$ при $n \to \infty$. Багато робіт присвячено оцінці швидкості цієї збіжності для різних норм. Будь-яка ймовірність (і, загалом, будь-яка функція зі значеннями в полі R дійсних чисел) на групі може бути пов'язана з елементом групової алгебри цієї групи над полем R. Це можна зробити наступним чином. Нехай RG - групова алгебра скінченної групи G над полем R. Ймовірність $P(g)$ на групі G відповідає елементу $p = \sum\limits_g P(g)g$ алгебри RG. Ми позначаємо функцію на групі G великою

літерою, а відповідний елемент з RG тією ж (але малою) літерою, і останній називаємо ймовірністю на RG. Наприклад, рівномірна ймовірність $E(g)$ відповідає елементу $e = \frac{1}{|G|}\sum\limits_g g \in RG$. Згортка двох функцій P, Q на G відповідає добутку pq відповідних елементів P, Q в груповій алгебрі RG. Для натурального числа n, n-кратна згортка ймовірності P на G відповідає елементу $p^n \in RG$. У статті ми вивчаємо випадок, коли лінійна комбінація двох ймовірностей в алгебрі RG дорівнює ймовірності $e \in RG$. Така лінійна комбінація повинна бути опуклою. Точніше, ми співставляємо ймовірності $p \in RG$ іншу ймовірність $p_1 \in RG$ наступним чином. Дві ймовірності $p, p_1 \in RG$ називаються додатковими, якщо їх опукла лінійна комбінація дорівнює e, тобто $\alpha p + (1-\alpha)p_1 = e$ для деякого числа α, $0 < \alpha < 1$. Ми знаходимо умови існування такого α і порівнюємо $\| \ p^n - e \ \|$ та $\| \ {p_1}^n - e \ \|$ для довільної норми $\|.\|$.
Ключові слова: ймовірність; скінченна група; збіжність; згортка; групова алгебра.

Speed of convergence of complementary probabilities on finite group.

A. L. Vyshnevetskiy
Kharkiv National Automobile and Highway University,
25 Yaroslava Mudrogo str., Kharkiv, 61002, Ukraine

Let function P be a probability on a finite group G, i.e. $P(g) \geq 0 \ \ (g \in G), \ \sum\limits_g P(g) = 1$ (we write $\sum\limits_g$ instead of $\sum\limits_{g\in G}$). Convolution of two functions $P, \ Q$ on group G is $(P * Q)(h) = \sum\limits_g P(g)Q(g^{-1}h) \ \ (h \in G)$. Let $E(g) = \frac{1}{|G|}\sum\limits_g g$ be the uniform (trivial) probability on the group G, $P^{(n)} = P * ... * P$ (n times) an n-fold convolution of P. Under well known mild condition probability $P^{(n)}$ converges to $E(g)$ at $n \to \infty$. A lot of papers are devoted to estimation the rate of this convergence for different norms. Any probability (and, in general, any function with values in the field R of real numbers) on a group can be associated with an element of the group algebra of this group over the field R. It can be done as follows. Let RG be a group algebra of a finite group G over the field R. A probability $P(g)$ on the group G corresponds to the element $p = \sum\limits_g P(g)g$ of the algebra RG. We denote a function on the group G with a capital letter and the corresponding element of RG with the same (but small) letter, and call the latter a probability on RG. For instance, the uniform probability $E(g)$ corresponds to the element $e = \frac{1}{|G|}\sum\limits_g g \in RG$. The convolution of two functions P, Q on G corresponds to product pq of corresponding elements p, q in the group algebra RG. For a natural number n, the n-fold convolution of the probability P on G corresponds to the element $p^n \in RG$. In the article we study the case when a linear combination of two probabilities in algebra RG equals to the probability $e \in RG$. Such a linear combination must be convex. More exactly, we correspond to a probability $p \in RG$ another probability $p_1 \in RG$ in the following way. Two probabilities $p, p_1 \in RG$ are called complementary if their convex linear combination is e, i.e. $\alpha p + (1-\alpha)p_1 = e$ for some number α, $0 < \alpha < 1$. We find conditions for existence of such α and compare $\| \ p^n - e \ \|$ and $\| \ {p_1}^n - e \ \|$ for an arbitrary norm $\|.\|$.
Keywords: probability; finite group; convergence; convolution; group algebra.

Article history: Received: 11 February 2021; Final form: 27 May 2021;
Accepted: 9 June 2021.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 93, 2021, с. 18–33

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 93, 2021, p. 18–33
DOI: 10.26565/2221-5646-2021-93-03

УДК 517.962.22

Implicit linear difference equations over a non-Archimedean ring

A. B. Goncharuk

V. N. Karazin Kharkiv National University,
4 Svobody sqr., Kharkiv, 61022, Ukraine
angoncharuk@ukr.net

The present article gives sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of an implicit linear difference equation of an arbitrary order over a certain class of non-Archimedean rings, in particular a ring of formal power series. It is shown that this solution can be found using the Cramer rule. Some results on such equations over a ring of polynomials are also given.
Keywords: difference equations; non-Archimedean valuation; ring of polynomials.

Гончарук А. Б. **Неявні лінійні різницеві рівняння над неархімедовими кільцями.** У статті наводяться достатні умови для існування та єдиності розв'язку неявного лінійного різницевого рівняння будь-якого порядку над деяким класом неархімедових кілець, зокрема кільцем формальних степеневих рядів. Показано, що цей розв'язок можна знайти за допомогою правила Крамера. Також наведені деякі результати щодо таких рівнянь над кільцем поліномів.
Ключові слова: різницеве рівняння; неархімедове нормування; кільце поліномів.

Гончарук А. Б. **Неявные линейные разностные уравнения над неархимедовыми кольцами.** В статье приводятся достаточные условия существования и единственности решения неявного линейного разностного уравнения любого порядка над некоторым классом неархимедовых колец, в частности над кольцом формальных степенных рядов. Показано, что это решение может быть найдено с помощью правила Крамера. Приводятся также некоторые результаты, касающиеся таких уравнениях над кольцом многочленов.
Ключевые слова: разностные уравнения; неархимедово нормирование; кольцо многочленов.

2010 Mathematics Subject Classification: 12J25; 39A06.

1. Introduction

In the article [1] a simple interesting fact about recurrence equations is discovered: there is shown that the infinite implicit system of linear equations in variables $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots$

$$bx_{n+1} = ax_n + f_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

where $a,\ b,\ f_n \in \mathbb{Z},\ b \neq \pm 1$ and a and b are coprime, which has infinitely many solutions over $\mathbb{Q}$, may have either no integer solution or exactly one.

It is proven that there exists a unique solution from the ring of p-adic integers $\mathbb{Z}_p$ and this solution is found explicitly as a sum of series converging in $\mathbb{Z}_p$ with respect to the well-known non-Archimedean valuation (see [1, Cor.2.1]).

In [2] it is shown that this unique solution can be found using the Cramer‘s rule. In [3] both these results are generalized for the second order equation.

Let us consider the similar equation over the ring of polynomials with the coefficients from some field K:

$$b(z)x_{n+1}(z) = a(z)x_n(z) + f_n(z),\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

where $a(z),\ b(z),\ f_n(z) \in K[z],\ \deg b \geq 1$.

Since for obtaining the solution over $\mathbb{Z}$ we considered the equation over the completion of $\mathbb{Z}$, i.e. $\mathbb{Z}_p$, then for obtaining the solution over $K[z]$ it is naturally to consider the equation over the completion of $K[z]$, i.e. $K[[z]]$. This analogy is described, for instance, in [4, §7].

In the present article a construction integrating these two cases is described: the ring of p-adic integers is a particular case of the valuation ring of a field with a non-Archimedean valuation $\mathbb{Q}_p$, the ring of formal power series also is a valuation ring of a field of formal Laurent series ([5, Ch. XII, §6]).

The results for the finding a solution of such an equation over the ring of integers are generalized to an equation of the arbitrary order and for the class of rings, which are valuation rings of non-Archimedean field. The results obtained in this article also clarify the previous results for integers.

In Theorems 1 and 2 of Section 2 a sufficient conditions for the uniqueness and existence of a solution of n-th order difference equation over the valuation ring of a field with a non-Archimedean valuation is formulated. The solution is explicitly found as a sum of the series (see Theorem 2), converging with respect to the non-Archimedean valuation in the field. In Section 3 it is shown that this unique solution can be found using the Cramer‘s rule.

Section 4 is devoted to the equations over the ring of polynomials. The results of Section 2, applied to the equations over the field of formal power series (Corollaries 2 and 3), require some additional study to check the existence of a polynomial solution. There is given Theorems 4, 5 and 6, facilitating this checking in different particular situations and some specific examples of its applying.

2. Existence and uniqueness theorems

Consider a field F with a non-Archimedean valuation $|\cdot|$ (see [6, 1.2]) and its valuation ring $R = \{s \in F : |s| \leq 1\}$ (see [5, Ch. XII, §4]).

Theorem 1. *Suppose $a_j \in R$, $|a_j| < |a_0|$ for all $1 \le j \le m$, and $f_n \in R$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Then the following implicit difference equation*

$$a_m w_{n+m} + a_{m-1} w_{n+m-1} + \ldots + a_1 w_{n+1} + a_0 w_n = f_n, \; n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

has no more than one solution over R.

Proof. To prove the uniqueness of solution of the equation (1) it is enough to proof that the homogeneous equation

$$a_m w_{n+m} + a_{m-1} w_{n+m-1} + \ldots + a_1 w_{n+1} + a_0 w_n = 0, \; n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

has only trivial solution $w_n = 0$ for any n over R.

Over the field F the solution $\{w_n\}$ satisfies

$$w_n = -\frac{a_m}{a_0} w_{n+m} - \frac{a_{m-1}}{a_0} w_{n+m-1} - \ldots - \frac{a_1}{a_0} w_{n+1}, \; n = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (3)$$

Then, taking into account that the valuation is non-Archimedean, we obtain $|w_n| \le \max\limits_{1 \le i \le m} \{|\frac{a_i w_{n+i}}{a_0}|\}$. Therefore for any n there is i such that $|\frac{a_i w_{n+i}}{a_0}| \ge |w_n|$. By r denote $\max\limits_{1 \le j \le m} \{|\frac{a_j}{a_0}|\}$. Note that by assumptions of the theorem, $r < 1$. We obtain that for any n there is i such that $|w_n| \le r|w_{n+i}|$.

Thus starting with w_0 one can construct a subsequence $\{w_{n_i}\}$ such that $n_0 = 0$ and $|w_{n_i}| \le r|w_{n_{i+1}}|$ for all i. It means that $|w_0| \le r^i \cdot |w_{n_i}|$ for any i. Since $|w_n|$ belongs to R then $|w_n| \le 1$ for all n, then $|w_0| \le r^i$ for any i. Note also that by the assumption of the theorem, $r < 1$. Thus $w_0 = 0$ and consequently $w_n = 0$ for all n.

The proof is complete.

Remark 3.1. *Suppose R_0 is a factorial ring, $v \in R_0$ is a prime element ([5, Ch.XII, 4]). Then any element x from the field of fractions $Frac(R_0)$ has a unique representation $x = v^t \cdot c$ such that $t \in \mathbb{Z}$ and $c = \frac{r}{s}$, where $r, s \in R_0$ and both of r, s have not v in their factorizations. By definition, put $|x|_v = 2^{-t}$. The valuation $|\cdot|_v$ is non-Archimedean over $Frac(R_0)$ and R_0 is a valuation ring for $Frac(R_0)$.*

Over the ring R_0 the assumption $|a_j|_v < |a_0|_v \le 1$ of Theorem 1 can be rewritten in the following form: if $a_j = v^{t_j} \cdot c_j$, where $t_j \in \mathbb{Z}$ and $c_j = \frac{r_j}{s_j}$, where $r_j, s_j \in R_0$ and both of r_j, s_j have not v in their factorizations, then $t_j > t_0 \ge 0$ for all $0 \le j \le m$.

In this case Theorem 1 yields, for instance, the following consequence:

Corollary 1. *If there exists $v \in R_0$ such that v does not divide a_0 and v divides a_j for all $1 \le j \le m$, then the equation (1) has no more than one solution over R_0.*

The following theorem gives a sufficient condition for the existence of solutions of Equation (1) over the ring R.

Suppose conditions of Theorem 1 hold and $|a_0| = 1$. Then a_0 is invertible in R. Indeed, in the field F there is an element a_0^{-1} and $|a_0^{-1}| = 1$, thus it belongs to R. Thus the following infinite linear system

$$\begin{cases} y_0 = 1, & \\ a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \ldots + a_k y_0 = 0, & k = 1, \ldots, m-1 \\ a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \ldots + a_m y_{k-m} = 0, & k = m, m+1, m+2, \ldots \end{cases} \tag{4}$$

is explicit. It has a unique solution $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ over R. The following theorem describes a solution of (1).

Theorem 2. *Let the field F be complete. If $|a_j| < |a_0| = 1$ for all $1 \le j \le m$, all the following series*

$$w_n = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \frac{f_{n+k}}{a_0}, \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

converge in R with respect to the valuation $|\cdot|$. This sequence $\{w_n\}$ is a unique solution of (1).

Proof. The valuation $|\cdot|$ is non-Archimedean, so to prove the series (5) converge over R it is enough to prove that $\left|y_k \frac{f_{n+k}}{a_0}\right|$ tends to zero. ([6, 2.1])

Since f_n, a_0^{-1} both belong to R, then $\left|\frac{f_{n+k}}{a_0}\right| \le 1$. Let us prove that $|y_n| \le r^{[\frac{n}{m}]} \cdot S$, where $S = \max\limits_{0 \le j \le m-1} \{|y_j|\}$ and $r = \max\limits_{1 \le j \le m} \{|a_j|\}$.

The proof is by induction on n. For the cases $n < m$, there is nothing to proof. Indeed, $|y_n| \le S = \max\limits_{0 \le j \le m-1} \{|y_j|\}$.

For the case $n = m = m + 0$, by the system (4), we get

$$y_m = -\frac{a_1}{a_0} y_{m-1} - \frac{a_2}{a_0} y_{m-2} - \ldots - \frac{a_m}{a_0} y_0,$$

so, keeping in mind that $|\cdot|$ is non-Archimedean and $|a_0| = 1$, we can estimate

$$|y_m| = \left|\frac{a_1}{a_0} y_{m-1} + \frac{a_2}{a_0} y_{m-2} + \ldots + \frac{a_m}{a_0} y_0\right| \le \max_{1 \le j \le m} \{|a_j y_{m-j}|\} \le r \cdot S.$$

For the inductive step assume that the inequality holds for $n \le m + k - 1$. Let us prove that it holds also for $n = m + k$, i.e. $|y_n| \le r^{[\frac{k+m}{m}]} \cdot S$.

By the system (4), we get

$$y_{k+m} = -\frac{a_1}{a_0} y_{k+m-1} - \frac{a_2}{a_0} y_{k+m-2} - \ldots - \frac{a_m}{a_0} y_k,$$

so, keeping in mind that $|\cdot|$ is non-Archimedean and $|a_0| = 1$, we can estimate

$$|y_{k+m}| \le \max_{1 \le j \le m} \{|a_j y_{k+m-j}|\} \le r \cdot \max_{1 \le j \le m} \{|y_{k+m-j}|\}$$

By the inductive assumptions, $|y_j| \leq r^{[\frac{j}{m}]} \cdot S \leq r^{[\frac{k}{m}]} \cdot S$ for all $k \leq j \leq k+m-1$, that is $\max\limits_{1\leq j\leq m} \{|y_{k+m-j}|\} \leq r^{[\frac{k}{m}]} \cdot S$. It follows that $|y_{k+m}| \leq r \cdot r^{[\frac{k}{m}]} \cdot S = r^{[\frac{k+m}{m}]} \cdot S$.

Therefore, by the principle of induction, the inequality $|y_n| \leq r^{[\frac{n}{m}]} \cdot S$ is true for any $n \in \mathbb{N}_0$.

Since $r < 1$, then $|y_n|$ tends to 0, so the series (5) converges.

To verify that (5) satisfies (1), let us substitute it into the equation. Taking into account that $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfies (4), we obtain

$$a_m w_{n+m} + a_{m-1} w_{n+m-1} + \ldots + a_1 w_{n+1} + a_0 w_n = \frac{1}{a_0} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} a_i y_k f_{n+k+i} =$$

$$= \frac{1}{a_0} \sum_{i=0}^{m-1} f_{i+n} \sum_{j=0}^{i} a_j y_{i-j} + \frac{1}{a_0} \sum_{i=m}^{\infty} f_{i+n} \sum_{j=0}^{m} a_j y_{i-j} = f_n. \quad (6)$$

The proof is complete.

Remark 3.2. *In the particular case $m = 1$ we have the equation*

$$a_1 w_{n+1} + a_0 w_n = f_n, \ n = 0, 1, 2, \ldots, \quad (7)$$

which has a unique solution over R if $|a_0| = 1$ and $|a_1| < 1$. By Theorem 1, this solution has the form of series (5). *In this case* (4) *has a solution*

$$y_k = (-1)^k \frac{a_1^k}{a_0^k}, \ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

so the solution of (7) *can be written as*

$$w_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_1^k}{a_0^{k+1}} f_{n+k}, \ n = 0, 1, 2, \ldots, \quad (8)$$

In the particular case $R = \mathbb{Z}_p$ this result is obtained in [1].

Remark 3.3. *The case $m = 2$ is described in details over the ring of integers in [3].*

3. Cramer formulas

Suppose F is a field of characteristic zero with a non-Archimedean valuation $|\cdot|$ and for the equation (1) conditions of Theorem 2 hold. Then it has a unique solution over R, which can be found using Cramer's rule.

Since a_0 is invertible, without loss of generality one can consider the following equation instead of (1):

$$a_m w_{n+m} + a_{m-1} w_{n+m-1} + \ldots + a_1 w_{n+1} + w_n = f_n, \ n = 0, 1, 2, \ldots \quad (9)$$

It can be written as a system of linear equations in this way:

$$\mathcal{A}w = f,\ \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_m & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} & a_m & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Let $\mathcal{A}_n$ be obtained from the matrix $\mathcal{A}$ by replacing the n-th column with the vector f.

By Δ_j (respectively, $\Delta_{n,j}$) denote the principal corner minor of the $(j+1)$th order of the matrix $\mathcal{A}$ (respectively, $\mathcal{A}_n$).

Theorem 3. *Suppose the conditions of Theorem 2 hold. Then the unique solution over R can be found using Cramer's rule:*

$$w_n = \frac{\det \mathcal{A}_n}{\det \mathcal{A}},\ n = 0,\,1,\,2,\,\ldots \tag{10}$$

where the determinants are defined as following limits in R with the valuation $|\cdot|$:

$$\det \mathcal{A} = \lim_{r\to\infty} \Delta_r,$$

$$\det \mathcal{A}_n = \lim_{r\to\infty} \Delta_{n+1,r},\ n = 0,\,1,\,2,\,\ldots$$

Proof. By Theorems 1 and 2, equation (1) has a unique solution over R in the form (5). Let us show that this solution coincides with the Cramer formulas (10). Note that $\Delta_j = 1$ for all j, so $\det \mathcal{A} = 1$. Let us consider

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} f_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_m & 0 & 0 & \cdots \\ f_1 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} & a_m & 0 & \cdots \\ f_3 & 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Denote by B_k the determinant formed by the first k columns and rows of the matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & a_m & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m \\ 0 & 0 & \cdots & a_{m-3} & a_{m-2} & a_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Add also $B_0 = 1$. If $0 < k < m$ it is written as

$$B_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & a_1 & \cdots & a_{k-2} & a_{k-1} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{k-3} & a_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Considering the $\Delta_{1,j}$ and decomposing it relative to the first column, we get the partial sums of

$$\det \mathcal{A}_1 = f_0 + \sum_{j=1}^{m} (-1)^j f_j B_j$$

We should prove that the right-hand side of this formula coincides with $\sum\limits_{k=0}^{r} y_k f_k$, so we should prove that $y_k = (-1)^k B_k$ if $k \geq 1$.

Recurrence equations

$$\begin{cases} y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \ldots + a_k y_0 = 0, & k = 1, \ldots, m-1 \\ y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \ldots + a_m y_{k-m} = 0, & k = m, m+1, m+2, \ldots \end{cases} \tag{11}$$

with the initial condition $y_0 = 1$ give a unique sequence $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$. Thus we should prove that $\{(-1)^k B_k\}_{k=0}^{\infty}$ is a solution of these equations too.

Decomposing B_k relative to the first row, we get

$$\begin{cases} B_k = a_1 B_{k-1} - a_2 B_{k-2} + a_3 B_{k-3} - \ldots + (-1)^{m-1} a_m B_{k-m}, & \text{if } k \geq m \\ B_k = a_1 B_{k-1} - a_2 B_{k-2} + a_3 B_{k-3} - \ldots + (-1)^k a_k B_0, & \text{if } k < m \end{cases}$$

Hence,

$$\begin{cases} B_k - a_1 B_{k-1} + a_2 B_{k-2} - a_3 B_{k-3} - \ldots + (-1)^{k+1} a_k B_0 = 0, & \text{if } k < m \\ B_k - a_1 B_{k-1} + a_2 B_{k-2} - a_3 B_{k-3} + \ldots + (-1)^m a_m B_{k-m} = 0, & \text{if } k \geq m \end{cases}$$

It follows that $\{(-1)^k B_k\}_{k=0}^{\infty}$ is a solution of (11). Thus $y_k = (-1)^k B_k$ for any k, therefore $\det \mathcal{A}_1 = w_0$.

Now consider $\mathcal{A}_j$ and its minor of i-th order. Note that we are interested in the limit by i, so it is enough to consider i such that $i > j$ and $i > m$.

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{j-2} & a_{j-1} & f_0 & a_{j+1} & \cdots & a_m & 0 & \cdots \\
0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{j-3} & a_{j-2} & f_1 & a_j & \cdots & a_{m-1} & a_m & \cdots \\
0 & 0 & 1 & \cdots & a_{j-4} & a_{j-3} & f_2 & a_{j-1} & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 & f_{j-1} & a_3 & \cdots & a_{m-j-1} & a_{m-j} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & f_j & a_2 & \cdots & a_{m-j-2} & a_{m-j-1} & \cdots \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_{j+1} & a_1 & \cdots & a_{m-j-3} & a_{m-j-2} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_{j+2} & 1 & \cdots & a_{m-j-4} & a_{m-j-3} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_{j+3} & 0 & \cdots & a_{m-j-5} & a_{m-j-4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}\right)$$

We see that its determinant equals $\det \mathcal{A}_1$, in which the vector $(f_{j+1}, f_{j+2}, f_{j+3}, \ldots)^{\intercal}$ is taken instead of f. It follows that $\Delta_{j,i} = \sum_{k=0}^{i} y_k f_{j+k}$, so $\det \mathcal{A}_j = \sum_{k=0}^{\infty} y_k f_{j+k}$.

The proof is complete.

4. Implicit linear difference first-order equation over the ring of polynomials

Let K be a field with the characteristic zero. For any $z_0 \in K$ we can consider the ring of formal power series $K[[z-z_0]]$. It is a factorial ring ([5, Ch.IV, Th.9.3.]), so we can construct its field of fractions and valuation ring as in Remark 3.1. This field of fractions is a field of Laurent series $K((z-z_0))$, it is complete. By definition, for $w \in K((z-z_0))$ put $|w(z-z_0)|_{z-z_0} = 2^t$, where t is the smallest integer for that $(z-z_0)^t \cdot w(z-z_0) \in K[[z-z_0]]$ (see [5, Ch.XII, §6]).

Then Theorems 1 and 2 yield the following corollaries:

Corollary 2. *Let us consider the equation*

$$b(z-z_0)w_{n+1}(z-z_0) + f_n(z-z_0) = a(z-z_0)w_n(z-z_0), \ n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

where $b(z-z_0), \ a(z-z_0), \ f_n(z-z_0) \in K[[z-z_0]]$.

Suppose $a(z-z_0) = (z-z_0)^k \cdot a_1(z-z_0)$ *and* $b(z-z_0) = (z-z_0)^m \cdot b_1(z-z_0)$, *where* $a_1(z_0) \neq 0$, $b_1(z_0) \neq 0$ *and* k, m *are non-negative integers. If* $k < m$, *then there exists at most one sequence of formal power series* $\{w_n(z-z_0)\}$ *that satisfies* (12).

Corollary 3. *Suppose* $a(z_0) \neq 0$ *and* $b(z_0) = 0$. *Then the sequence of series*

$$w_n(z-z_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b^i(z-z_0)}{a^{i+1}(z-z_0)} f_{n+i}(z-z_0), \ n = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

is a unique solution of (12) *over* $K[[z-z_0]]$.

Two previous results are related to the solution in the ring of formal power series. They imply also the following result, concerning the solution over the ring of polynomials.

Suppose $a(z), \ b(z), \ f_n(z) \in K[z]$. Let us consider the equation

$$b(z)w_{n+1}(z) + f_n(z) = a(z)w_n(z), \ n = 0, 1, 2, \dots. \quad (14)$$

Since any polynomial can be rewritten as a formal power series from $K[[z-z_0]]$ for any z_0, then this equation can be consider over $K[[z-z_0]]$ for any z_0.

Corollary 4. *If for some* z_0 *Equation* (14), *considering over* $K[[z-z_0]]$, *satisfies the assumptions of Corollary 2, then Equation* (14) *has no more than one polynomial solution. If also the conditions of Corollary 3 hold for this* z_0, *then either sequence of sums*

$$w_n(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b^i(z)}{a^{i+1}(z)} f_{n+i}(z), \ n = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

is a sequence of polynomials that solves (14) *or there is no polynomial solution of* (14).

Proof. By Corollary 2, Equation (14) has no more than one formal power series solution (15). It is only candidate for being the polynomial solution.

The following example shows that it may be no polynomial solution of Equation (14).

Example 1. The equation

$$zw_{n+1} + 1 = w_n, \ n = 0, 1, 2, \dots,$$

has no polynomial solution. Indeed, we are under the conditions of Corollary 4, so there is unique formal power series solution $w_n(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ for all n, which obviously is not a polynomial.

The following theorem directly follows from Corollary 4 if K is algebraically closed. In the general case it needs a proof.

Theorem 4. *The homogeneous equation*

$$b(z)w_{n+1}(z) = a(z)w_n(z), \ n = 0, 1, 2, \dots \tag{16}$$

has only zero solution if and only if $b(z)$ *does not divide* $a(z)$. *Thus Equation* (14) *has at most one polynomial solution if* $b(z)$ *does not divide* $a(z)$.

Proof. Indeed, since $b(z)$ does not divide $a(z)$, there exists $p(z) \in K[z]$ such that $p(z)$ divides $b(z)$ but does not divide $a(z)$. Also, (16) means that

$$\frac{b^n(z)}{a^n(z)} w_n(z) = w_0(z), \ n = 0, 1, 2, \dots.$$

We get that $w_0(z)$ is divisible by $p^n(z)$ for any degree n, which is impossible for a non-zero element $w_0(z)$. Since $w_0(z) = 0$, then $w_n(x) = 0$ for any n.

If $b(z)$ divides $a(z)$, then the equation (14) can be rewritten in an explicit form. It follows that there exist infinitely many solutions of this equation: one for each initial value w_0.

The proof is complete.

Example 2. Suppose $f_n(z) = f(z)$ for each n, and suppose $b(z)$ does not divide $a(z)$. Suppose there exists a solution $\{w_n\}$ of the difference equation

$$b(z)w_{n+1}(z) + f(z) = a(z)w_n(z).$$

Consider the sequence $\{w_{n+1}\}$. Obviously, it also satisfies these equalities. By the uniqueness of the solution, we get $w_n = w_{n+1}$ for all n. It means that if the solution exists, it is constant. Therefore, it should satisfy the equality

$$b(z)w(z) + f(z) = a(z)w(z),$$

so we obtain that

$$w_n(z) = w(z) = \frac{f(z)}{a(z) - b(z)}$$

is the only candidate to be a solution, thus there exists a solution if and only if $a(z) - b(z)$ divides $f(z)$.

Particularly the equation $zw_{n+1} + 1 = w_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ from the previous example has no polynomial solution since $b(z) - a(z) = 1 - z$ does not divide $f(z) = 1$.

The example considered shows that the equation may have no polynomial solution, and to check that using Corollary 4, one have to check whether the sequence of formal power series (15) is a sequence of polynomials. The following result gives that it is enough to check whether only the first term $w_0(z)$ is a polynomial.

Theorem 5. *Suppose $a(z) = 1$. If the w_0 from* (15) *is a polynomial, then w_n from* (15) *is a polynomial for any n.*

Proof. Let us prove this by induction. Since $\{w_n\}$ satisfies the equation, then

$$w_{n+1}(z) = \frac{w_n(z) - f_n(z)}{b(z)}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Since $w_n(z)$ and $f_n(z)$ both are polynomials, then $w_n(z) - f_n(z)$ is a polynomial too. Let us prove that $b(z)$ divides it. By (15), we get

$$w_n(z) - f_n(z) = b(z)\big(f_{n+1}(z) + b(z)f_{n+2}(z) + b^2(z)f_{n+3}(z) + \ldots\big), \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{17}$$

Let us choose $\tilde{z}$ from the algebraic closure $\tilde{K}$ of K such that $z - \tilde{z}$ divides $b(z)$. Then $b(\tilde{z}) = 0$.

Let $\hat{b}(z - \tilde{z}) = b(z)$ and $\hat{f}_n(z - \tilde{z}) = f_n(z)$ for any n. Find the $\{w_n(z)\}$ as a sequence of formal power series $\hat{w}_n(z - \tilde{z})$ from $\tilde{K}[[z - \tilde{z}]]$. Then for any n we obtain an equality between two formal power series from $\tilde{K}[[z - \tilde{z}]]$:

$$\hat{b}(z - \tilde{z}) \sum_{i=0}^{\infty} \hat{b}^i(z - \tilde{z}) \hat{f}_{n+i+1}(z - \tilde{z}) = \hat{w}_n(z - \tilde{z}) - \hat{f}_n(z - \tilde{z}).$$

Since $b(\tilde{z}) = 0$, then $\hat{b}(0) = 0$. Thus $w_n(\tilde{z}) - f_n(\tilde{z}) = \hat{w}_n(0) - \hat{f}_n(0) = 0$, it means that $z - \tilde{z}$ divides the polynomial $w_n(z) - f_n(z)$. So we can divide this equality by $z - \tilde{z}$ and consider the equality

$$\frac{\hat{b}(z - \tilde{z})}{z - \tilde{z}} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{b}^i(z - \tilde{z}) \hat{f}_{n+i+1}(z - \tilde{z}) = \frac{\hat{w}_n(z - \tilde{z}) - \hat{f}_n(z - \tilde{z})}{z - \tilde{z}},$$

where the right-hand side is a polynomial with coefficients from $\tilde{K}$.

Repeating this for each divisor of $b(z)$, we obtain

$$\sum_{i=0}^{\infty} \hat{b}^i(z-\tilde{z})\hat{f}_{n+i+1}(z-\tilde{z}) = \frac{\hat{w}_n(z-\tilde{z}) - \hat{f}_n(z-\tilde{z})}{\hat{b}(z-\tilde{z})} = \frac{w_n(z) - f_n(z)}{b(z)} = w_{n+1}(z),$$

is a polynomial with coefficients from the algebraic closure of K.

We claim that its coefficients belong to K. Indeed, polynomials $w_n(z) - f_n(z)$ and $b(z)$ have coefficients from K. Let k denote a degree of $w_{n+1}(z)$. Then consider $k+1$ pairwise different elements $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k \in K$ that are not roots of the polynomial $b(z)$. Elements $\dfrac{w_n(x_j) - f_n(x_j)}{b(x_j)} \in K$, where $0 \le j \le k$, are the values of our polynomial. There is a unique polynomial of degree k that takes these $k+1$ values, and it has coefficients from K.

The proof is complete.

Remark 3.4. *In fact, the equality* (17) *does not yield that* $b(z)$ *divides* $w_n(z) - f_n(z)$*: it is possible that the polynomial does not divide the product of this polynomial and a formal power series, for example,*

$$(1-z)(1+z+z^2+z^3+\ldots) = 1.$$

By Theorem 3, the formal power series considered has a special structure $f_n(z) + b(z)f_{n+1}(z) + b^2(z)f_{n+2}(z) + \ldots$*, this is what allows us to carry out further reasoning.*

Example 3. Let us consider the equation

$$zw_{n+1}(z) + \sum_{j=0}^{k} A_j z^{n+j} = w_n(z).$$

In this case $a(z) = 1, b(z) = z$ and $f_n(z) = \sum_{j=0}^{k} A_j z^{n+j}$. Then we are under the conditions of Corollaries 2, 3 and Theorem 5 over the ring $K[[z]]$. Then the first element of the solution sequence is

$$\begin{aligned} w_0(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \sum_{j=0}^{k} A_j z^j = \sum_{j=0}^{k} A_j \sum_{i=0}^{\infty} z^{i+j} = \sum_{j=0}^{k} A_j \sum_{i=j}^{\infty} z^i = \\ = \sum_{j=0}^{k} A_j (\sum_{i=j}^{k} z^i + \sum_{i=k+1}^{\infty} z^i) = \sum_{j=0}^{k} A_j \sum_{i=j}^{k-1} z^i + \sum_{j=0}^{k} A_j \cdot \sum_{i=k+1}^{\infty} z^i. \end{aligned}$$

It is a polynomial if and only if $\sum_{j=0}^{k} A_j = 0$. Then $w_0(z) = \sum_{j=0}^{k} A_j \sum_{i=j}^{k-1} z^i$. Theorem 5 implies that under this condition $w_n(z)$ also are polynomials.

It is interesting to note that the condition, which is an analogue to this one, is appeared in [7] due to the finding a rational solution of some type of difference functional equations ([7, Theorem 2]).

Example 4. Let us consider the equation

$$(z-1)w_{n+1}(z) + A_n z + B_n = w_n(z).$$

In this case $a(z) = 1, b(z) = z - 1,\ f_n(z) = A_n z + B_n$. we are under the conditions of Corollaries 2, 3 and Theorem 5 over the ring $K[[z-1]]$. Rewriting $f_n(z)$ as a power series from $K[[z-1]]$, we get $f_n(z) = A_n(z-1) + A_n + B_n$

Then the first power series of the solution sequence is

$$w_0(z) = \sum_{i=0}^{\infty}(A_i z + B_i)(z-1)^i = \sum_{i=0}^{\infty}(A_i(z-1)^{i+1} + (A_i + B_i)(z-1)^i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} A_{i-1}(z-1)^i + \sum_{i=0}^{\infty}(A_i + B_i)(z-1)^i = A_0 + B_0 + \sum_{i=1}^{\infty}(A_{i-1} + A_i + B_i)(z-1)^i$$

It is a polynomial if and only if there is j such that for any $i \geq j$ the condition $A_{i-1} + A_i + B_i = 0$ holds. Theorem 5 implies that in this case $w_n(z)$ also are polynomials.

For checking whether the formal power series solution of (14) is a sequence of polynomials, one can look at degrees.

Example 5. The equation $zw_{n+1} + 1 = w_n$ has no polynomial solution, because $\deg w_n(z) = \deg w_{n+1}(z) + 1$, so the degree of $w_n(z)$ decreases, which is impossible for a sequence of polynomials.

The following theorem provides general information about the degree of a polynomial solution, which is useful either for finding it or for proving the non-existence.

Theorem 6. *Suppose* $\deg a < \deg b$. *If the sequence of polynomials* $w_n(z)$ *is a solution of Equation* (14)*, then there exists some number* k *such that the inequality*

$$\deg w_k \leq \deg f_k - \deg b + \deg a$$

holds.

Proof. Assume the converse, then $\deg w_k > \deg f_k - \deg b + \deg a$ for all k. Let us consider the following cases, keeping in mind that $\{w_k\}$ satisfies (14):

1. if $\deg f_k < \deg w_{k+1} + \deg b$, then $\deg w_k + \deg a = \deg w_{k+1} + \deg b$;
2. if $\deg f_k = \deg w_{k+1} + \deg b$, then $\deg w_{k+1} = \deg f_k - \deg b < \deg w_k - \deg a$;
3. if $\deg f_k > \deg w_{k+1} + \deg b$, then $\deg w_k + \deg a = \deg f_k > \deg w_{k+1} + \deg b$.

In all these cases we conclude that $\deg w_{k+1} < \deg w_k$ for any k. The sequence of degrees of $w_k(z)$ decreases, which is impossible for a sequence of polynomials' degrees.

The proof is complete.

Example 6. Let us consider the equation

$$(z+1)w_{n+1} + Az^n + Bz^{n+1} + Cz^{n+2} + Dz^{n+3} = w_n(z).$$

In this case $a(z) = 1, b(z) = z+1,\ f_n(z) = Az^n + Bz^{n+1} + Cz^{n+2} + Dz^{n+3}$. We are under the conditions of Corollaries 2 and 3 over the ring $K[[z+1]]$, thus we can write down the solution:

$$w_n(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (Az^n + Bz^{n+1} + Cz^{n+2} + Dz^{n+3})(z+1)^i$$

To check whether these series are polynomials directly, one needs either to rewrite $f_n(z)$ as a power series from $K[[z+1]]$, or to rewrite $b^i(z)$ as a power series from $K[[z]]$. It is not easy to do both.

By Theorem 6, if $w_n(z)$ is a polynomial, then for some n its degree is no more than $\deg(Az^n + Bz^{n+1} + Cz^{n+2} + Dz^{n+3}) - \deg(z+1) = n+2$. It means that if the polynomial solution exists, all terms of this sum having a greater degree are reduced. The terms having a less degree are only in the first three summands, we are not interested in others.

Thus if the equation considered has a polynomial solution, it may be the sum of terms with degree no more than $n+2$ from the first three summands:

$$w_n(z) = Az^n + (A+B)z^{n+1} + (2A+B+C)z^{n+2}$$

Now it is left to check when this polynomial satisfies the equation:

$$\begin{aligned}(z+1)(Az^{n+1} + (A+B)z^{n+2} + (2A+B+C)z^{n+3}) +& \\ + Az^n + Bz^{n+1} + Cz^{n+2} + Dz^{n+3} =& \\ = Az^n + (A+B)z^{n+1} + (2A+B+C)z^{n+2}.&\end{aligned} \tag{18}$$

We get that the coefficients of z^n, z^{n+1} and z^{n+2} coincide automatically, coefficients of z^{n+3} and z^{n+4} give us assumptions $3A + 2B + C + D = 0$ and $2A + B + C = 0$. We conclude that the equation considered has a polynomial solution if an only if $D = A + C$ and $2A + B + C = 0$. The solution found is

$$w_n(z) = Az^n + (A+B)z^{n+1}.$$

Acknowledgement. The research was supported by the National Research Foundation of Ukraine funded by Ukrainian State budget in frames of project 2020.02/0096 “Operators in infinite-dimensional spaces: the interplay between geometry, algebra and topology”

ORCID ID

A. B. Goncharuk https://orcid.org/0000-0002-3562-795X

REFERENCES

1. V. A. Gerasimov, S. L. Gefter, A. B. Goncharuk. Application of the p-Adic Topology on $\mathbb{Z}$ to the Problem of Finding Solutions in Integers of an Implicit Linear Difference Equation, Journal of Mathematical Sciences, – 2018. – **235**. – P. 256–261. DOI: 10.1007/s10958-018-4072-x

2. S. Gefter, A. Goncharuk. Generalized backward shift operators on the ring $\mathbb{Z}[[x]]$, Cramer's rule for infinite linear systems, and p-adic integers. In: A. Böttcher, D. Potts, P. Stollmann, D. Wenzel (eds) The Diversity and Beauty of Applied Operator Theory. Operator Theory: Advances and Applications, Vol. **268**. Birkhäuser, Cham., – 2018. – P. 247–259. DOI: 10.1007/978-3-319-75996-8_13

3. S. L. Gefter, V. V. Martseniuk, A. B. Goncharuk, A. L. Piven'. Analogue of the Cramer Rule for an Implicit Linear Second Order Difference Equation Over the Ring of Integers, Journal of Mathematical Sciences, – 2020. – **244**. – P. 601–607. DOI: 10.1007/s10958-019-04635-w

4. I. R. Shafarevich. Basic Notions of Algebra. In: A. I. Kostrikin, I. R. (eds) Algebra I. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. 1990. Springer, Berlin, Heidelberg, 258 p. DOI: 10.1007/978-3-662-39643-8_1

5. S. Lang. Algebra. 2002. Springer-Verlag, New York, XV+918 p. DOI: 10.1007/978-1-4613-0041-0

6. C. Perez-Garcia, W. H. Schikhof. Locally Convex Spaces over Non-Archimedean Valued Fields. 2010. Cambridge University Press, 472 p. DOI: 10.1017/CBO9780511729959

7. A. I. Derevianko, S. L. Gefter. Rational Solutions of the Simplest Linear Inhomogeneous Difference Equations, Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics, Proceedings of the 5th International Scientific Conference of Students and Young Scientists. 2015. Bukrek, Kyiv. P. 117–122.

Неявні лінійні різницеві рівняння над неархімедовими кільцями

Гончарук А. Б.
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
м. Свободи, 4, Харків, Україна, 61022

Над будь-яким полем неявне лінійне різницеве рівняння зводиться до звичайного явного, яке має нескінченно багато розв'язків – свій для кожного початкового значення. Цікаво розглянути неявне різницеве рівняння над кільцем, оскільки над будь-яким кільцем випадок неявного рівняння значно відрізняється від випадку явного. Результати щодо різницевих рівнянь над кільцями, що були отримані раніше, здебільшого стосуються кільця цілих чисел і рівнянь першого та другого порядку.

У цій статті вивчаються неявні різницеві рівняння високого порядку над деякими іншими класами кілець, зокрема, над кільцем поліномів.

Для вивчення різницевого рівняння над кільцем цілих чисел корисною була ідея розглянути цілі p-адичні числа – поповнення кільця цілих чисел щодо неархімедової p-адичної норми. Щоб знаходити розв'язок неявного різницевого рівняння над кільцем поліномів, природним буде розглянути таку ж конструкцію для цього кільця: кільце формальних степеневих рядів, яке є поповненням кільця поліномів щодо неархімедової норми.

Кільце формальних степеневих рядів та кільце цілих p-адичних чисел – це окремі випадки кільця нормування щодо неархімедової норми деякого поля: поля рядів Лорана та поля p-адичних раціональних чисел відповідно. У цій статті вивчається неявне лінійне різницеве рівняння над кільцем нормування довільного поля нульової характеристики з неархімедовим нормуванням. Сформульовано достатні умови для єдиності та існування розв'язку. Наведено явну формулу для єдиного розв'язку, яка має вигляд суми ряду, що сходиться за неархімедовою нормою.

Різницеве рівняння відповідає нескінченній системі лінійних рівнянь. Доведено, що у випадку, коли неявне різницеве рівняння має єдиний розв'язок, його можна знайти, використовуючи правило Крамера. Також у статті наведені деякі результати, що полегшують пошук розв'язку неявного різницевого рівняння над кільцем поліномів.
Ключові слова: різницеве рівняння; неархімедове нормування; кільце поліномів.

Implicit linear difference equations over a non-Archimedean ring

A. B. Goncharuk
V. N. Karazin Kharkiv National University
4 Svobody sqr., Kharkiv, 61022, Ukraine

Over any field an implicit linear difference equation one can reduce to the usual explicit one, which has infinitely many solutions – one for each initial value. It is interesting to consider an implicit difference equation over any ring, because the case of implicit equation over a ring is a significantly different from the case of explicit one. The previous results on the difference equations over rings mostly concern to the ring of integers and to the low order equations. In the present article the high order implicit difference equations over some other classes of rings, particularly, ring of polynomials, are studied.

To study the difference equation over the ring of integer the idea of considering p-adic integers – the completion of the ring of integers with respect to the non-Archimedean p-adic valuation was useful. To find a solution of such an equation over the ring of polynomials it is naturally to consider the same construction for this ring: the ring of formal power series is a completion of the ring of polynomials with respect to a non-Archimedean valuation.

The ring of formal power series and the ring of p-adic integers both are the particular cases of the valuation rings with respect to the non-Archimedean valuations of some fields: field of Laurent series and field of p-adic rational numbers respectively. In this article the implicit linear difference equation over a valuation ring of an arbitrary field with the characteristic zero and non-Archimedean valuation are studied. The sufficient conditions for the uniqueness and existence of a solution are formulated. The explicit formula for the unique solution is given, it has a form of sum of the series, converging with respect to the non-Archimedean valuation.

Difference equation corresponds to an infinite system of linear equations. It is proved that in a case the implicit difference equation has a unique solution, it can be found using Cramer rules. Also in the article some results facilitating the finding the polynomial solution of the equation are given.
Keywords: difference equations; non-Archimedean valuation; ring of polynomials.

Article history: Received: 23 December 2020; Final form: 10 June 2021;
Accepted: 13 June 2021.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 93, 2021, с. 34–36

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”
Vol. 93, 2021, p. 34–36
DOI: 10.26565/2221-5646-2021-93-04

УДК 929

До 75-річчя академіка НАН України О. А. Борисенка

24 травня 2021 року виповнилося 75 років з дня народження відомого математика, фахівця в галузі геометрії і топології багатовимірних поверхонь у ріманових, псевдоріманових і фінслерових просторах, лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки (2005), премій НАН України імені М. М. Крилова (2003) та імені О. В. Погорєлова (2010), почесної відзнаки "за підготовку наукової зміни"(2020), відзнаки НАН України "За наукові досягнення"(2021), нагороджений орденом "За заслуги III ступеня"(2005), доктора фізико-математичних наук (1983), професора (1984), академіка НАН України Олександра Андрійовича Борисенка. Дуже символічним є той факт, що саме в день його ювілею відділення математики обрало Олександра Андрійовича кандидатом у дійсні члени Національної Академії Наук України, а 26 травня на загальних зборах його було остаточно обрано. Щиро вітаємо ювіляра з високою оцінкою його багаторічної самовідданої праці в математиці. Шлях Олександра Андрійовича до цієї вершини був непростим, початкові умови (використовуючи термін з диференціальних рівнянь) були несприятливими. Народився на околиці міста Лебедин у Сумській області. Був дев'ятою дитиною в сім'ї. Батько помер у 1954 році і всі турботи про родину лягли на плечі матері – Параски Пилипівни. Роки дитинства були заповнені повсякденною працею: випас корів, збір яблук у колгоспному садку, робота на цегельному заводі. Такий спосіб життя однак не завадив навчатися в школі на «відмінно». Давала взнаки звичка сумлінно і наполегливо працювати.

У 1964 році вступив на механіко-математичний факультет Харківського державного університету. Не володіючи досконало на той час російською мовою (а викладання велося саме російською), багато часу провів у бібліотеці самостійно опановуючи математичні ідеї. Спеціалізуючись по кафедрі геометрії, на четвертому курсі відвідував семінар «Опуклі багатогранники», який вів Євген Полікарпович Сенькін – людина, що першою помітила талант молодого дослідника і ввела Олександра Андрійовича до світу високої геометрії, запросивши його на міський геометричний семінар. Керівником семінару був видатний математик – Олексій Васильович Погорєлов. Саме на семінарах Погорєлова Борисенко навчився розуміти, що таке справжній висококласний математичний результат. У подальшому Олександр Андрійович звіряв як свої результати, так і результати інших дослідників з «еталоном» від Погорєлова.

Восени 1969 р. вступив до аспірантури на кафедру геометрії Харківського університету. Молодому досліднику прийшлося самому шукати свій власний шлях в геометрії у відповідності до власних інтересів. Він зацікавився підмноговидами довільної ковимірності в ріманових просторах. Отримані результати склали основу докторської дисертацій, захищеної в Московському університеті у 1983 році. За висловлюванням одного з опонентів дисертації, Олександр Андрійович виконав роботу «поза школою», що без сумніву є ознакою таланту і віри в правильність обраного шляху в науці.

Олександр Андрійович плідно працював у дуже різних напрямках досліджень в геометрії. Вражає і широта інтересів, і глибина отриманих результатів.

У геометрії підмноговидів виокремив клас (сильно-) параболічних підмноговидів, вивчав їх метричні і топологічні властивості; знайшов умови, за якими ці підмноговиди є цілком геодезичними в симетричних просторах рангу один, у ріманових просторах; надав опис ріманових просторів, які містять компактні підмноговиди недодатної зовнішньої кривини. Як результат розвитку теорії підмноговидів, розв'язав кілька проблем: багатовимірну проблему Гільберта для ізометричного занурення компактного ріманового простору постійної кривини в рімановий простір більшої кривини, проблему Бернштейна для двовимірних мінімальних поверхонь у сферичному просторі довільної вимірності. **У топології** досліджував зв'язок зовнішньогеометричних і топологічних властивостей багатовимірних підмноговидів і одержав теореми про ейлерову характеристику, групи гомологій, когомологій, характеристичні класи Понтрягіна підмноговидів. Отримав результати з топологію сідлових підмноговидів у рімановому просторі. **У геометрії комплексних многовидів** повністю описав глобальну будову комплексних гіперповерхонь Хопфа в комплексних просторах сталої голоморфної кривини і в їх непарних аналогах (у Сасакієвих многовидах). **У опуклій геометрії** об'єктом досліджень були опуклі повні гіперповерхні у многовидах Адамара (в однозв'язних повних ріманових просторах недодатної секційної кривини). У цьому напрямі було введено нові класи гіперповерхонь, одержано нові теореми порівняння, знайдено якісно нові екстремальні властивості багатовимірного простору Лобачевського серед многовидів Адамара. Це дало змогу дати асимптотичні точні оцінки на об'єм, повну кривину, радіус вписаної кулі компактної опуклої гіперповерхні. **У геометрії нерегулярних многовидів** отримав екстремальні оцінки в просторах Александрова, довів обернену ізопериметричну нерівність у нерегулярних двовимірних просторах Александрова та знайшов екстремальні випадки, коли досягаються рівності. **У Фінслеровій геометрії** дослідив глобальні властивості підмноговидів у фінслеровому просторі та у просторі Мінковського. Так, наприклад, знайшов умови циліндричності повних підмноговидів у просторі Мінковського. **У геометрії розшарованих просторів** переніс означення метрики Сасакі з дотичного на нормальне розшарування підмноговиду, а фактично, на загальний випадок векторного і сферичного розшарувань над рімановим многовидом; були знайдені застосування метричної теорії розшарувань для вивченні будови багатовимірних підмноговидів у ріманових і псевдоріманових просторах. **У геометрії грасманова образу** розв'язав проблему про однозначну визначеність багатовимірних поверхонь за грасмановим образом. У дослідженні **потоків середньої кривини** отримав оригінальні результати щодо потоків середньої кривини з гаусовою щільністю. Досліджував **геодезичні потоки** на нерегулярних поверхнях з конічними особливостями. Наприклад, знайдено всі прості замкнені геодезичні на правильних тетраедрах у просторах сталої кривини.

Наукові досягнення Олександра Андрійовича визнані далеко за кордоном. Він був запрошеним професором в університетах Туреччини, Іспанії, Бразилії, Ізраїлю, Німеччини.

З 1980 по 2012 рік Олександр Андрійович був завідувачем кафедри геометрії в Харківському університеті. За цей час було розроблено нові програми фундаментальних та спеціальних курсів, видано підручники українською мовою: «Аналітична геометрія» та «Диференціальна геометрія і топологія». На цей час ці підручники складають основу відповідних курсів факультету математики і інформатики, що виник після реорганізації механіко-математичного факультету у 2015 році.

У роботі з аспірантами Олександр Андрійович дотримувався принципу: новому аспіранту - новий напрямок досліджень. Всі його 13 учнів (В. Т. Лисиця, О. Л. Ямпольський, Ю. А. Ніколаєвський, В. В. Ушаков, С. І. Окрут, Н. К. Фарафонова, Д. В. Болотов, Д. І. Власенко, О. В. Лейбіна (Ликова), В. В. Круглов, Є. В. Петров, Є. А. Олін, К. Д. Драч) захистили кандидатські дисертації з абсолютно різних тематик. Двоє з його учнів (Д. В. Болотов, О. Л. Ямпольський) стали докторами наук.

Щиро вітаємо Олександра Андрійовича з ювілеєм і обранням у дійсні члени Національної Академії наук України і зичимо подальших успіхів в математиці, нових талановитих учнів і доброго здоров'я.

Редколегія[1]

ORCID ID: Alexander Rezounenko 0000-0001-8104-1418.

V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody sqr., Kharkiv, 61022, Ukraine

Article history: Received: 30 May 2021;

[1]За матеріалами інтерв'ю О. А. Борисенка: "Пів століття в геометрії. До 75-річчя члена-кореспондента НАН України О. А. Борисенка. (2021). Вісник Національної академії наук України, (5), 95–102." visnyk-nanu.org.ua/ojs/index.php/v/article/view/70

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 93, 2021, с. 37–39
УДК 929

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 93, 2021, p. 37–39
DOI: 10.26565/2221-5646-2021-93-05

ІВАН ДМИТРОВИЧ БОРИСОВ (некролог)

26.11.1941 – 3.12.2020

3 грудня 2020 року пішов з життя старший науковий співробітник кафедри прикладної математики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна Борисов Іван Дмитрович, відомий фахівець у галузі статики і динаміки рідин, які взаємодіють з електромагнітними полями.

Іван Дмитрович народився 26 листопада 1941 року у станиці Пролетарська (тепер – місто Пролетарськ) Ростовської області. Зі шкільних років він захоплювався авіамоделюванням. Тому не дивно, що свою освіту І. Д. продовжив у Харківському авіаційному інституті, який закінчив у 1965 році, отримавши диплом інженера-механіка літальних апаратів (з відзнакою). Дипломну роботу І. Д. виконував під керівництвом видатного математика і педагога, професора Анатолія Дмитровича Мишкіса, відомого своїми підручниками і науковими працями з теорії диференціальних рівнянь, функціонально-диференціальних рівнянь, гідромеханіки. Вже в студентські роки І. Д. вдалося знайти основний напрямок своєї подальшої наукової творчості. В його дипломній роботі був запропонований ефективний метод побудови рівноважних форм капілярної рідини, і цей науковий результат пізніше буде включений до відомої колективної монографії «Гидромеханика невесомости» (за редакцією А. Д. Мишкіса), яка вийшла в світ у 1976 році.

Після закінчення ХАІ Іван Дмитрович Борисов вступив до аспірантури, а потім працював у відділі прикладної математики Фізико-технічного інституту низьких температур АН УРСР під керівництвом А. Д. Мишкіса. Основна наукова тематика відділу була пов'язана з проблемами гідромеханіки в умовах невагомості або близьких до них. Це пояснювалося гострою необхідністю вирішення в ті часи низки питань щодо керування поведінкою рідин в умовах космічного польоту.

У 70-80-і роки І. Д. Борисов опублікував у журналі «Магнитная гидродинамика» (English translation: «Magnetohydrodynamics») цикл статей, присвячених методам визначення рівноважних форм і умов стійкості рівноваги для капілярної магнітної рідини в магнітному полі. Через багато років І. Д. повернувся до цієї тематики, отримавши оригінальні результати, пов'язані з доведенням теорем існування та єдиності розв'язків задачі про малі коливання магнітної рідини в зовнішньому магнітному полі і дослідженням їхніх спектральних властивостей.

На роботу до Харківського університету Іван Дмитрович перейшов у 1982 році на запрошення Івана Євгеновича Тарапова, який тоді був ректором Харківського університету і одночасно завідував кафедрою теоретичної механіки на механіко-математичному факультеті. З того часу життя, наукова і педагогічна діяльність І. Д. тісно пов'язані з університетом. Тут він продовжував і розвивав наукову тематику, присвячену статиці і динаміці рідин, які взаємодіють з електричними та магнітними полями.

Теоретик по натурі, він тим не менш дуже цікавився експериментами і часто сам брав участь у проведенні дослідів з вивчення властивостей рідин в електромагнітних полях. Показовим є приклад його участі наприкінці 80-х і у 90-х роках у науково-дослідницьких роботах, пов'язаних з вивченням хвильових процесів в алюмінієвих електролізерах. І. Д. активно відвідував конференції і наради фахівців алюмінієвої галузі, їздив у відрядження до алюмінієвих комбінатів по всій території СРСР (пізніше – СНД). У лабораторії кафедри він організував проведення експериментів з фізичного моделювання досліджуваних явищ хвилеутворення на поверхні рідкого алюмінію в електролізерах. Результати експериментів чудово збіглися з теоретичними прогнозами.

Надзвичайна ерудованість Івана Дмитровича в області математики і механіки притягувала до нього багатьох науковців. Він ніколи не відмовляв у консультаціях і щиро ділився своїми знаннями з колегами, а також зі студентами і аспірантами. На кафедрі механіки І. Д. був відповідальним виконавцем багатьох науково-дослідницьких робіт, він також виконував обов'язки секретаря наукового семінару кафедри. Його присутність на семінарах із цікавими доповідями завжди була пов'язана з цінними порадами, з народженням нових продуктивних ідей. В той самий час він активно відстоював принципи наукової доброчесності і порядності.

Іван Дмитрович викладав студентам старших курсів теорію інтегральних рівнянь, крайових задач для рівнянь з частинними похідними, варіаційних принципів механіки суцільних середовищ. Для студентів стиль його лекцій був доволі важким, адже І. Д. завжди тримався бездоганної математичної строгості. Він не обмежувався лише розглядом традиційних питань, але й наповнював курси оригінальними матеріалами.

Справжнім захопленням для Івана Дмитровича були шахи. Протягом багатьох років він брав участь у змаганнях різного рівня. Працюючи в Харківському університеті, І. Д. неодноразово як капітан очолював університетську команду викладачів та співробітників, і ця команда успішно виступала в першості міста з шахів серед вищих навчальних закладів.

Світла пам'ять про Івана Дмитровича Борисова, справжнього вченого і чудову людину, назавжди залишається у серцях його колег, учнів і друзів.

Ігнатович С. Ю., Кізілова Н. М., Коробов В. І.,
Пацегон М. Ф., Пославський С. О., Руднєв Ю. І.,
Стрельнікова О. О., Тишковець В. П., Тропіна А. А.

ORCID ID: S. A. Poslavskyi[1] https://orcid.org/0000-0002-1049-9947
Yu. I. Rudnyev[1] https://orcid.org/0000-0002-6590-2641

[1]V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody sqr., Kharkiv, 61022, Ukraine

Article history: Received: 4 June 2021;

Правила для авторів
«Вісника Харківського національного університету
імені В. Н. Каразіна»,
Серія «Математика, прикладная математика і механіка»

Редакція просить авторів при направленні статей керуватися наступними правилами.

1. В журналі публікуються статті, що мають результати математичних досліджень (англійською або українською мовами).

2. Поданням статті вважається отримання редакцією файлів статті оформлених у редакторі LATEX (версія 2е), анотацій, відомостей про авторів та архіва, що включає LATEX файли статті та файли малюнків. Файл-зразок оформлення статті можна знайти в редакції журналу та на веб-сторінці (http://vestnik-math.univer.kharkov.ua).

3. Стаття повинна починатися з анотацій, в яких повинні бути чітко сформульовані мета та результати роботи. Анотації повинні бути трьома мовами (англійською, українською та російскою): першою повинна стояти анотація тією мовою, якою є основний текст статті. Закордонні автори можуть звернутися до редакції за допомогою з перекладом анотацій на українську та російську мову. В анотації повинні бути призвища, ініціали авторів, назва роботи, ключові слова та номер за міжнародною математичною класифікацією (Mathematics Subject Classification 2010). Анотація не повинна мати посилань на літературу чи малюнки. На першій сторінці вказується номер УДК класифікації. В кінці статті треба додати розширені (обсягом **не менш ніж 1800 знаків** кожна) анотації англійською та українською мовами.

4. Список літератури повинен бути оформлений латинським шрифтом. Приклади оформлення списка літератури:

1. A.M. Lyapunov. A new case of integrability of differential equations of motion of a solid body in liquid, Rep. Kharkov Math. Soc., – 1893. – 2. V.**4**. – P. 81-85.
2. A.M. Lyapunov. The general problem of the stability of motion. 1892. Kharkov Mathematical Society, Kharkov, 251 p.

5. Кожний малюнок повинен бути пронумерований та представлений окремим файлом в одному з форматів: EPS, BMP, JPG. В файлі статті малюнок повинен бути вставлений автором. Під малюнком повинен бути підпис. Назви файлів малюнків повинні починатись з призища першого автора.

6. Відомості про авторів повинні містити: прізвища, імена, по батькові, службові адреси та номери телефонів, адреси електронних пошт та інформацію про наукові профайли авторів (orcid.org, www.researcherid.com, www.scopus.com) з відповідними посиланями. Прохання також повідомити прізвище автора, з яким треба вести листування.

7. Рекомендуємо використовувати в якості зразка оформлення останні випуски журналу (vestnik-math.univer.kharkov.ua/currentv.htm).

8. У випадку порушення правил оформлення редакція не буде розглядати статтю.

Електронна скринька: vestnik-khnu@ukr.net
Електронна адреса в Інтернеті: **http://vestnik-math.univer.kharkov.ua**

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна,
Серія “Математика, прикладна математика і механіка”, Том 93, 2021 р.

Збірник наукових праць

Англійською, українською, російською мовами

Підписано до друку 30. 06. 2021 р.
Формат $70 \times 108/16$. Папір офсетний. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. 2,9
Обл.– вид. арк. 3,4
Наклад 100 пр. Зам. № 1/21
Безкоштовно.

Видавець і виготовлювач Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

Видавництво Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
тел. 705-24-32