

ISSN 2221-5646 (Print),  
ISSN 2523-4641 (Online)



**KARAZIN UNIVERSITY**  
**CLASSICS AHEAD OF TIME**

VISNYK OF V.N.KARAZIN  
KHARKIV NATIONAL UNIVERSITY

**Ser. MATHEMATICS, APPLIED  
MATHEMATICS AND MECHANICS**



**Том 92 ' 2020**

Вісник Харківського національного  
університету імені В.Н.Каразіна  
серія

**МАТЕМАТИКА,  
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА  
І МЕХАНІКА**

**Volume 92, 2020**

ISSN 2221-5646 (Print)  
ISSN 2523-4641 (Online)

Міністерство освіти і науки України

# ВІСНИК

Харківського національного  
університету імені В. Н. Каразіна

**Серія**

«Математика, прикладна математика і механіка»

Серія започаткована 1965 р.

**Том 92**



Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University  
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"

**Vol. 92**

Харків  
2020

До Вісника включено статті з математичного аналізу, математичної фізики, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних наук, категорія «Б» за спеціальностями 111 - Математика та 113 - Прикладна математика (Наказ МОН України №1643 від 28.12.2019 р.).

*Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 19 від 28 грудня 2020 р.).*

**Головний редактор—Коробов В.І.**—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ ім. В.Н. Каразіна, Україна

**Члени редакційної колегії:**

**Кадець В.М.**—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

**Пацегон М.Ф.**—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

**Фаворов С.Ю.**—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

**Єгорова І.Є.**—д-р ф.-м. наук, проф., ФТІНТ НАН України

**Пастур Л.А.**—д-р ф.-м. наук, проф., акад. НАН України, ФТІНТ НАН України

**Хруслов Є.Я.**—д-р ф.-м. наук, проф., акад. НАН України, ФТІНТ НАН України

**Шепельський Д.Г.**—д-р ф.-м. наук, проф., ФТІНТ НАН України та

ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

**Когут П.І.**—д-р ф.-м. наук, проф., Дніпровський національний університет

імені Олеса Гончара, м.Дніпро, Україна

**Чуйко С.М.**—д-р ф.-м. наук, проф., Інститут прикладної математики і

механіки НАН України, м.Слов'янськ, Україна

**Домбровський А.**—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Щецина, Польща

**Карлович Ю.І.**—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Морелос, Мехіко, Мексика

**Корбич Йозеф**—д-р ф.-м. наук, проф., чл.-кор. ПАН, Університет Зелона Гора, Польща

**Нгуєн Хоа Шон**—д-р ф.-м. наук, проф., Академія наук та технології В'єтнама,

Інститут математики, Ханой, В'єтнам

**Поляков А.І.**—д-р ф.-м. наук, проф., ІНРІА Національний дослідницький інститут

інформатики та автоматики, Ле-Шене, Франція

**Скляр Г.М.**—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Щецина, Польща

**Солдатов О.П.**—д-р ф.-м. наук, проф., Белгородський університет, Росія

**Відповідальний секретар — Резуєнко О.В.**, д-р ф.-м. наук

ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

**Editor-in-Chief — V.I. Korobov—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine**

**Associate Editors:**

**S.Yu. Favorov—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine**

**V.M. Kadets—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine**

**N.F. Patsegon—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine**

**I.E. Egorova—Dr. Sci., Prof., B.Verkin Institute for Low Temperature Physics**

and Engineering, Ukraine

**E.Ya. Khruslov—Dr. Sci., Prof., academician of NASU,**

B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine

**L.A. Pastur—Dr. Sci., Prof., academician of NASU,**

B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine

**D.G. Shepelsky—Dr. Sci., Prof., B.Verkin Institute for Low Temperature Physics**

and Engineering, Ukraine

**S.M. Chujko—Dr. Sci., Prof., Donbas State Pedagogical University, Ukraine**

**P.I. Kogut—Dr. Sci., Prof., Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine**

**Andrzej Dabrowski—Dr. Sci., Prof., University of Szczecin, Poland**

**Yu. Karlovich—Dr. Sci., Prof., Morelos University, Mexico**

**Jozef Korbicz—Dr. Sci., Prof., corresponding member of PAS, University of Zielona Gora, Poland**

**Nguyen Khoa Son—Dr. Sci., Prof., Vietnamese Academy of Science and Technology,**

Institute of Mathematics, Hanoi, Vietnam

**A.E. Polyakov—Dr. Sci., Prof., INRIA Institut National de Recherche**

en Informatique et en Automatique, Le Chesnay, France

**G.M. Sklyar—Dr. Sci., Prof., University of Szczecin, Poland**

**O.P. Soldatov—Dr. Sci., Prof., Belgorod University, Russia**

**Responsible Editor—A.V. Rezouencko, Dr. Sci., Associate Prof.,**

V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

**Адреса редакційної колегії:** 61022, Харків, майдан Свободи, 4, ХНУ імені В.Н. Каразіна,

ф-т математики і інформатики, к. 7-27, т. 7075240, 7075135, **e-mail:** vestnik-khnu@ukr.net

**Інтернет:** <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>; [http://periodicals.karazin.ua/mech\\_math](http://periodicals.karazin.ua/mech_math)

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21568-11468 Р від 21.08.2015

©Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, оформлення, 2020

## ЗМІСТ

<b>Чуйко С. М., Дзюба М. В., Калініченко Я. В.</b> Лінійна нетерова крайова задача для матричного різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова	4
<b>Резуненко В. О.</b> Регуляризація задачі електростатики для трьох сфер та електростатичного заряду	15
<b>Невлюдов І. Ш., Ромашов Ю. В.</b> Обчислювальний підхід щодо оптимального управління процесами лінійної теплопровідності	25
<b>Кізілова Н. М., Пославський С. О., Баранець В. О.</b> Дослідження квазілінійної моделі осідання частинок суспензії, які агрегують, в неоднорідному полі сил	44
<b>Кадець В. М.</b> До 60 – річчя з дня народження.	57
<b>Островський Й. В.</b> Некролог	59

## CONTENTS

<b>S. M. Chuiko, M. V. Dzyuba, Ya. V. Kalinichenko.</b> Linear Noetherian boundary value problem for a matrix difference-algebraic Lyapunov equation	4
<b>V. A. Rezenko.</b> Regularization of the electrostatics problem for three spheres and an electrostatic charge	15
<b>I. Sh. Nevliudov, Yu. V. Romashov.</b> One numerical approach to optimal control the linear heat conduction processes	25
<b>N. M. Kizilova, S. O. Poslavskiy, V. O. Baranets.</b> A study of a quasilinear model of the particles of a suspension that are aggregated and settled in an inhomogeneous field	44
<b>V. M. Kadets.</b> To 60th anniversary.	57
<b>I. V. Ostrovskii.</b> Obituary	59

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Чуйко С. М., Дзюба М. В., Калиниченко Я. В.</b> Линейная нетерова краевая задача для матричного разностно-алгебраического уравнения Ляпунова	4
<b>Резуненко В. А.</b> Регуляризация задачи электростатики для трёх сфер и электростатического заряда	15
<b>Невлюдов И. Ш., Ромашов Ю. В.</b> Численный подход к оптимальному управлению процессами линейной теплопроводности	25
<b>Кизилова Н. Н., Пославский С. А., Баранец В. А.</b> Исследование квазилинейной модели оседания агрегирующих частиц суспензии в однородном поле сил	44
<b>Кадец В. М.</b> К 60 – летию со дня рождения.	57
<b>Островский И. В.</b> Некролог	59



## Лінійна нетерова крайова задача для матричного різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова

С. М. Чуйко<sup>1</sup>, М. В. Дзюба<sup>2</sup>, Я. В. Калініченко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ,  
вул. Генерала Батюка, 19, Донецька обл., Україна 84 116

<sup>2</sup>Донбаська державна машинобудівна академія,  
вул. Академічна, 72, м. Краматорськ, Донецька обл., Україна 84313  
chujko-slav@ukr.net

Знайдені умови розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна для лінійної нетерової крайової задачі для матричного різницево-алгебраїчного аналога рівняння Ляпунова.

*Ключові слова:* різницево-алгебраїчні рівняння; крайові задачі; матричне рівняння Ляпунова.

S. M. Chuiko, M. V. Dzyuba, Ya. V. Kalinichenko. **Linear Noetherian boundary value problem for the matrix difference-algebraic Lyapunov equation.** In this article we found the conditions of the existence and constructive scheme for finding the solutions of the linear Noetherian differential-algebraic boundary value problem for a matrix Lyapunov equation. *Keywords:* differential-algebraic equation; boundary value problem; matrix Lyapunov equation.

Чуйко С. М., Дзюба М. В., Калініченко Я. В. **Линейная нетерова крайовая задача для матричного разностно-алгебраического уравнения Ляпунова.** Найдены условия разрешимости, а также конструкція обобщенного оператора Грина для линейной нетеровой краевой задачи для матричного разностно-алгебраического аналога уравнения Ляпунова. *Ключевые слова:* разностно-алгебраические уравнения; краевые задачи; матричное уравнение Ляпунова.

*2010 Mathematics Subject Classification:* 15A24, 34B15, 34C25.

**1. Постановка задачі.** Досліджено задачу про знаходження обмежених розв'язків [1, 2]

$$Z(k) \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}, \quad k \in \Omega := \{0, 1, 2, \dots, \omega\}$$

лінійної нетерової ( $\alpha\beta \neq \lambda\mu$ ) крайової задачі для матричного різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова

---

© Чуйко С. М., Дзюба М. В., Калініченко Я. В., 2020

$$A(k) Z(k+1) = B(k) Z(k) + Z(k) C(k) + F(k), \quad (1)$$

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \check{A} \in \mathbb{R}^{\lambda \times \mu}. \quad (2)$$

Компоненти

$$Z^{(i,j)}(k), F^{(i,j)}(k) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$$

матриць  $Z(k)$  та  $F(k) \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$  припускаємо обмеженими на множині  $\Omega$  функціями. Тут  $A(k), B(k) \in \mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$  і  $C(k) \in \mathbb{R}^{\beta \times \beta}$  — обмежені на множині  $\Omega$  матриці,

$$\mathcal{L}Z(\cdot) : \mathbb{R}^{\alpha \times \beta} \rightarrow \mathbb{R}^{\lambda \times \mu}$$

— лінійний обмежений матричний функціонал, визначений на просторі обмежених матриць  $Z(k)$ . Визначимо оператор [3]

$$\mathcal{M}[\mathcal{B}] : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \cdot n},$$

який ставить у відповідність матриці  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  вектор-стовпець  $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ , складений із  $n$  стовпців матриці  $\mathcal{B}$ , а також обернений оператор

$$\mathcal{M}^{-1} \left\{ \mathcal{M}[\mathcal{B}] \right\} : \mathbb{R}^{m \cdot n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n},$$

який ставить у відповідність вектор-стовпцю  $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$  матрицю  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . В англійській літературі оператор  $\mathcal{M}[A]$  називають оператором векторизації і позначають [4]:  $\mathcal{M}[A] := \text{vec}(A)$ .

Задача про знаходження обмежених розв'язків  $Z(k)$  лінійного матричного різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова (1) приводиться до задачі про знаходження обмежених розв'язків [2]

$$z(k) := \mathcal{M}Z(k) \in \mathbb{R}^{\alpha \beta}, \quad k \in \Omega$$

лінійного різницево-алгебраїчного рівняння

$$A(k) Z(k+1) = B(k) Z(k) + Z(k) C(k) + F(k). \quad (3)$$

Позначимо

$$\Theta^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}, \quad j = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta$$

— природний базис простору  $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$  та  $c_j, j = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta$  — константи, які визначають розвинення матриці

$$\check{Z} = \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \Theta^{(j)} c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta$$

за векторами  $\Theta^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$  базис простору  $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ . Позначимо матриці

$$\mathcal{A}^{(k)} := \left( \mathcal{A}_1^{(k)} \quad \mathcal{A}_2^{(k)} \quad \dots \quad \mathcal{A}_{\alpha\beta}^{(k)} \right), \quad \mathcal{A}_i^{(k)} := \mathcal{M}A(k)\Theta_i \in \mathbb{R}^{\alpha\beta},$$

а також

$$\mathcal{B}^{(k)} := \left( \begin{array}{cccc} \mathcal{B}_1^{(k)} & \mathcal{B}_2^{(k)} & \dots & \mathcal{B}_{\alpha\beta}^{(k)} \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{\alpha\beta \times \alpha\beta},$$

де

$$\mathcal{B}_i^{(k)} := \mathcal{M}(A(k)\Theta_i + \Theta_i B(k)) \in \mathbb{R}^{\alpha\beta}.$$

Таким чином, задача про знаходження обмежених розв'язків  $Z(k)$  лінійного матричного різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова (3) приведена до задачі про знаходження обмежених розв'язків

$$z(k) := \mathcal{M}Z(k) \in \mathbb{R}^{\alpha\beta}, \quad k \in \Omega := \{0, 1, 2, \dots, \omega\}$$

лінійного різницево-алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{A}^{(k)} z(k+1) = \mathcal{B}^{(k)} z(k) + f(k), \quad f(k) := \mathcal{M}F(k). \quad (4)$$

**2. Умови розв'язності для фіксованої функції  $\nu_p(\mathbf{k})$ .** Припустимо, що рівняння (4) задовольняє вимогам теореми [5, с. 570], а саме: припустимо, що має місце виродження або першого  $p = 1$ , або другого порядку:  $p = 2$ , при цьому лінійна різницево-алгебраїчна система (4) має розв'язок вигляду

$$z(k, c_{\rho_{p-1}}) = X_p(k) c_{\rho_{p-1}} + K[f(i), \nu_p(i)](k), \quad c_{\rho_{p-1}} \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}},$$

залежний від довільної обмеженої вектор-функції  $\nu_p(k) \in \mathbb{R}^{\rho_p}$ ; припустимо також функцію  $\nu_p(k)$  фіксованою. Позначимо матрицю

$$Q_p := \ell X_p(\cdot) \in \mathbb{R}^{\rho_p \times \rho_{p-1}},$$

а також [6]

$$P_{Q_p} : \mathbb{R}^{\rho_{p-1}} \rightarrow \mathbb{N}(Q_p), \quad P_{Q_p^*} : \mathbb{R}^{\rho_p} \rightarrow \mathbb{N}(Q_p^*)$$

— матриці-ортопроектори. Підставляючи загальний розв'язок задачі Коші  $z(0) = c_{\rho_{p-1}} \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}}$  неоднорідного лінійного різницево-алгебраїчного рівняння (4) у крайову умову

$$\ell z(\cdot) = \check{\alpha} := \mathcal{M}\check{A} \in \mathbb{R}^{\lambda\mu},$$

приходимо до рівняння

$$Q_p c = \check{\alpha} - \ell K[f(j), \nu_p(j)](\cdot),$$

розв'язного тоді і тільки тоді, коли [6]

$$P_{Q_p^*} \left\{ \check{\alpha} - \ell K[f(j), \nu_p(j)](\cdot) \right\} = 0; \quad (5)$$

у цьому випадку розв'язок  $z(k)$  лінійної нетерової крайової задачі (1), (2) визначає вектор

$$c_{\rho_{p-1}} = Q_p^+ \left\{ \check{\alpha} - \ell K[f(j), \nu_p(j)](\cdot) \right\} + P_{Q_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут  $Q_p^+ \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1} \times \nu}$  — псевдообернена за Муром – Пенроузом матриця; матриця  $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1} \times r}$  утворена з  $r$  лінійно незалежних стовпців ортопроектора  $P_{Q_p} \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1} \times \rho_{p-1}}$ . Таким чином, доведена наступна лема.

**Лема 1.** *Задача про знаходження обмежених розв’язків лінійного різницево-алгебраїчного рівняння (1) у випадку виродження першого  $p = 1$ , або другого порядку:  $p = 2$  має розв’язок вигляду*

$$Z(k, c_{\rho_{p-1}}) = W(k, c_{\rho_{p-1}}) + K[F(i), \nu_p(i)](k),$$

залежний від довільної обмеженої вектор-функції  $\nu_p(k) \in \mathbb{R}^{\rho_p}$ . Тут

$$W(k, c_{\rho_{p-1}}) := \mathcal{M}^{-1} [X_p(k) c_{\rho_{p-1}}], \quad c_{\rho_{p-1}} \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}},$$

крім того

$$K[F(i), \nu_p(i)](k) := \mathcal{M}^{-1} [K[f(i), \nu_p(i)](k)].$$

Задача про знаходження обмежених розв’язків лінійної нетерової різницево-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) у випадку виродження або першого  $p = 1$ , або другого порядку:  $p = 2$ , для фіксованої обмеженої вектор-функції  $\nu_p(k) \in \mathbb{R}^{\rho_p}$  за умови (5) має розв’язок

$$Z(k, c_r) = W(k, c_r) + G[F(i), \nu_p(i), \check{\alpha}](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^r;$$

тут

$$W(k, c_r) := \mathcal{M}^{-1} [X_r(k) c_r], \quad X_r(k) := X_p(k) P_{Q_r}, \quad k \in \Omega$$

та

$$G[F(i), \nu_p(i), \check{\alpha}](k) := \mathcal{M}^{-1} [G[f(j), \nu_p(j), \check{\alpha}](k)]$$

— узагальнений оператор Гріна лінійної нетерової різницево-алгебраїчної крайової задачі (1), (2), крім того

$$G[f(j), \nu_p(j), \check{\alpha}](k) := K[\mathfrak{F}_p(j, \nu_p(j))](k) + \\ + X_p(k) Q_p^+ \left\{ \check{\alpha} - \ell K[f(j), \nu_p(j)](\cdot) \right\}.$$

**Приклад 1.** *Знайдемо розв’язок лінійної матричної періодичної задачі для системи різницево-алгебраїчних рівнянь першого порядку*

$$A(k) Z(k+1) = B(k) Z(k) + Z(k) C(k) + F(k), \quad k \in \Omega \quad (6)$$

$$\mathcal{L}Z(\cdot) := Z(0) - Z(3) = 0, \quad (7)$$

де

$$A(k) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(k) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

крім того

$$C(k) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(k) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача про знаходження обмежених розв'язків матричного різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова (6) приводиться до задачі про знаходження обмежених розв'язків лінійного різницево-алгебраїчного рівняння (4), де

$$\mathcal{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку система (4) вироджена, при цьому матриця

$$A_1(k) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— матриця повного рангу, тому для різницево-алгебраїчного рівняння (4) має місце виродження першого порядку

$$P_{A_1}(k) \neq 0, \quad P_{A_{p_1}}(k) \neq 0,$$

тому шуканий розв'язок різницево-алгебраїчного рівняння (4)

$$z(k, c_{\rho_0}) = X_1(k)c_{\rho_0} + K \left[ f(j), \nu_1(j) \right](k), \quad c_{\rho_0} \in \mathbb{R}^5$$

залежить від довільної обмеженої функції; покладемо її нульовою:  $\nu_1(k) := 0$ . Оскільки виконано умову (5), то лінійна матрична періодична задача для системи (6) має розв'язок

$$Z(k, c_r) = W(k, c_r) + G[F(i), \nu_p(i), \check{\alpha}](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^2;$$

тут

$$Z(k, c_r) = \begin{pmatrix} 2(c_{r_1} + c_{r_2}) & 0 \\ -1 & -1 \\ 2(c_{r_1} + c_{r_2}) & 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \Omega,$$

крім того

$$c_r := \begin{pmatrix} c_{r_1} \\ c_{r_2} \end{pmatrix}.$$

**3. Умови розв'язності для не фіксованої функції  $\nu_p$ .** У випадку виродження або першого порядку  $p = 1$ , або другого порядку:  $p = 2$ , для не фіксованої обмеженої вектор-функції

$$\nu_p(k) \in \mathbb{R}^{p_p}$$

розв'язність лінійної нетерової крайової задачі для системи лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (4) суттєво залежить від вибору цієї функції. Покладемо

$$\nu_p(k) := \Psi_p(k)\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}^\theta;$$

тут  $\Psi_p(k) \in \mathbb{R}^{\rho_p \times \theta}$  — довільна обмежена матриця повного рангу. Оператор Гріна задачі Коші для системи лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (4) представимо у вигляді

$$K \left[ f(j), \nu_p(j) \right] (k) = K \left[ f(j) \right] (k) + K \left[ \Psi_p(j) \right] (k) \gamma;$$

тут

$$K \left[ \Psi_p(j) \right] (k) := \prod_{i=0}^{p-1} S_i^{-1}(k-1) P_{D_{\rho_i}}(k) \mathcal{K} \left[ \Psi_p(j) \right] (k).$$

Підставляючи загальний розв'язок

$$z(k, c_{\rho_{p-1}}) = X_p(k) c_{\rho_{p-1}} + K[f(i), \nu_p(i)](k), \quad c_{\rho_{p-1}} \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}},$$

системи лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (4) в крайову умову

$$\ell z(\cdot) = \check{\alpha} := \mathcal{M}\check{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{\lambda_\mu},$$

приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{D}_p \check{c} = \alpha - \ell K \left[ f(j) \right] (\cdot), \quad \check{c} := \text{col}(c_{\rho_{p-1}}, \gamma) \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1} + \theta},$$

розв'язного тоді і тільки тоді, коли [1, 2, 6]

$$P_{\mathcal{D}_p^*} \left\{ \alpha - \ell K \left[ f(j) \right] (\cdot) \right\} = 0. \quad (8)$$

Тут  $P_{\mathcal{D}_p^*}$  — ортопроектор:  $\mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{D}_p^*)$ . За умови (8) і тільки за неї загальний розв'язок крайової задачі для рівняння (4)

$$\begin{aligned} z(k, \delta) &= \left\{ X_p(k); K \left[ \Psi_p(j) \right] (k) \right\} \mathcal{D}_p^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[ f(j) \right] (\cdot) \right\} + \\ &+ K \left[ f(j) \right] (k) + \left\{ X_p(k); K \left[ \Psi_p(j) \right] (k) \right\} P_{\mathcal{D}_p} \delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1} + \theta} \end{aligned}$$

визначає загальний розв'язок крайової задачі (1), (2). Таким чином, доведена наступна теорема.

**Теорема 1.** *Задача про знаходження обмежених розв'язків лінійного матричного різницево-алгебраїчного рівняння (1) у випадку виродження або першого  $p = 1$ , або другого порядку:  $p = 2$ , має розв'язок вигляду*

$$Z(k, c_{\rho_{p-1}}) = W(k, c_{\rho_{p-1}}) + K[F(i), \nu_p(i)](k),$$



залежний від фіксованої обмеженої матриці повного рангу  $\Psi_p(k)$  :

$$K[f(j), \nu_p(j)](k) = K[f(j)](k) + K[\Psi_p(j)](k) \gamma.$$

Тут

$$W(k, c_{\rho_{p-1}}) := \mathcal{M}^{-1} [X_p(k) c_{\rho_{p-1}}], \quad c_{\rho_{p-1}} \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}},$$

крім того

$$K[F(i)](k) := \mathcal{M}^{-1} [K[f(i)](k)].$$

Задача про знаходження обмежених розв'язків лінійної матричної різницево-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) у випадку виродження порядку  $p \geq 1$  для фіксованої обмеженої матриці повного рангу  $\Psi_p(k)$  при умові (8) має розв'язок

$$Z(k, c_r) = W(k, c_r) + G[F(i), \Psi_p(i), \check{\alpha}](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^r;$$

тут

$$W(k, c_r) := \mathcal{M}^{-1} [X_r(k) c_r], \quad X_r(k) := X_p(k) P_{Q_r}, \quad k \in \Omega$$

і

$$G[F(i), \Psi_p(i), \check{\alpha}](k) := \mathcal{M}^{-1} [G[f(j), \nu_p(j), \check{\alpha}](k)]$$

— узагальнений оператор Гріна лінійної нетерової різницево-алгебраїчної крайової задачі (1), (2), крім того

$$G[f(j), \nu_p(i), \check{\alpha}](k) := K[\mathfrak{F}_p(j)](k) + \left[ X_p(k); K[\Psi_p(j)](k) \right] D_p^+ \left\{ \check{\alpha} - \ell K[f(j)](\cdot) \right\}.$$

**Означення 1.** За умови  $P_{\mathcal{D}_p^*} \neq 0$  будемо казати, що лінійна нетерова крайова задача для матричного різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова (1), (2) у випадку виродження порядку  $p \geq 1$  представляє критичний випадок, і навпаки: за умови

$$P_{Q_p^*} \neq 0, \quad P_{\mathcal{D}_p^*} = 0$$

будемо казати, що матрична різницево-алгебраїчна крайова задача (1), (2) приведена до некритичного випадку.

**Приклад 2.** Знайдемо розв'язок лінійної матричної крайової задачі для системи різницево-алгебраїчних рівнянь першого порядку

$$A(k) Z(k+1) = B(k) Z(k) + Z(k) C(k) + F(k) \quad (9)$$

$$\mathcal{L}Z(\cdot) := M \mathcal{M}(Z(1) + Z(2)) = 0, \quad (10)$$

де матриці  $A(k), B(k), C(k)$  і вектор-функція  $F(k)$  наведені в прикладі 1, крім того

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

У прикладі 1 встановлено, що для різницево-алгебраїчного рівняння (9) має місце виродження першого порядку, тому шуканий розв'язок різницево-алгебраїчного рівняння (9) залежить від довільної функції; покладемо

$$\Psi_p(n) := \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \end{pmatrix}.$$

Остання матриця приводить матричну крайову задачу (9), (10) до некритичного випадку:  $P_{Q_1^*} \neq 0$ ,  $P_{D_1^*} = 0$ ; тут

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, згідно теореми 1, існує розв'язок лінійної матричної крайової задачі (9), (10) вигляду

$$Z(k, c_r) = W(k, c_r) + G[F(i), \Psi_1(i), \check{\alpha}](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^5;$$

тут

$$W(0, c_r) = \begin{pmatrix} -2(cr_1 + cr_2 + cr_3) & -2(cr_1 - 3cr_2 + cr_3) \\ -cr_4 - cr_5 & cr_4 + cr_5 \\ -2(cr_1 + cr_2 - 3cr_3) & 6cr_1 - 2(cr_2 + cr_3) \end{pmatrix},$$

$$W(1, c_r) = \begin{pmatrix} 4cr_1 - 4cr_2 + 4cr_3 - cr_4 - cr_5 & cr_4 + cr_5 \\ cr_4 + cr_5 & -cr_4 - cr_5 \\ -4cr_1 + 4cr_2 - 4cr_3 - cr_4 - cr_5 & cr_4 + cr_5 \end{pmatrix},$$

$$W(2, c_r) = \begin{pmatrix} -4cr_1 + 4cr_2 - 4cr_3 + cr_4 + cr_5 & -cr_4 - cr_5 \\ -cr_4 - cr_5 & cr_4 + cr_5 \\ 4cr_1 - 4cr_2 + 4cr_3 + cr_4 + cr_5 & -cr_4 - cr_5 \end{pmatrix},$$

$$W(3, c_r) = \begin{pmatrix} 4cr_1 - 4cr_2 + 4cr_3 - cr_4 - cr_5 & cr_4 + cr_5 \\ -5cr_4 - cr_5 & 5cr_4 + cr_5 \\ -4cr_1 + 4cr_2 - 4cr_3 - cr_4 - cr_5 & cr_4 + cr_5 \end{pmatrix}$$

та


$$G[F(i), \Psi_1(i), \check{\alpha}](k) \equiv K[F(i), \nu_1(i)](k) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна лінійної нетерової різницево-алгебраїчної крайової задачі (9), (10).

Отримані результати аналогічно [7] можуть бути використані в теорії стійкості для систем різницевих рівнянь. Для розв'язання задачі про знаходження обмежених розв'язків нетерової крайової задачі для матричного різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова (1), (2) в критичному випадку також може бути застосована техніка регуляризації [8, 9, 10].

## ORCID ID

S. M. Chuiko  <https://orcid.org/0000-0001-7186-0129>

M. V. Dzyuba  <https://orcid.org/0000-0003-2579-9157>

Ya. V. Kalinichenko  <https://orcid.org/0000-0002-8352-1965>

## REFERENCES

1. A. A. Boichuk, S. M. Chuiko, Ya. V. Kalinichenko. Linear Noetherian boundary value problem for the matrix difference equation, Ukrainian math. journal, – 2020. – 3. **72**. – P. 386-402. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01789-8>
2. A. A. Boichuk. Boundary value problems for systems of difference equations, Ukrainian mathematical journal, – 1997. – 6. **49**. – P. 832-835 (in Russian).
3. S. M. Chuiko. The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem, Siberian Mathematical Journal, – 2015. – 4. **56**. – P. 752-760 (in Russian). DOI: [10.17377/smzh.2015.56.417](https://doi.org/10.17377/smzh.2015.56.417).
4. J. R. Magnus. *L*-structured matrices and linear matrix equations, Linear algebra and its appl., – 1983. – **14**. – P. 67-88. DOI: <https://doi.org/10.1080/03081088308817543>
5. S. M. Chuiko, E. V. Chuiko, Ya. V. Kalinichenko. Boundary value problems for systems of linear difference-algebraic equations, Nonlinear oscillations, – 2019. – 4. **22**. – P. 560-573.
6. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2nd ed.). 2016. De Gruyter, Berlin; Boston, 298 p. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110378443>
7. V. I. Korobov, M. O. Bebiya. Stabilization of one class of nonlinear systems, uncontrollable in the first approximation, Rep. NAS Ukraine, – 2014. – **2**. – P. 20-25 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2014.02.020>
8. A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin. Methods for solving ill-posed problems. 1986. Nauka, M., 288 p. (in Russian).
9. S. G. Krein. Linear equations in a Banach space. 1971. Nauka, M., 104 p. (in Russian).
10. S. M. Chuiko, Ya. V. Kalinichenko. On the regularization of the Cauchy problem for a system of linear difference equations, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, – 2018. – **88**. – P. 27-34 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2018-88-03>

**Лінійна нетерова крайова задача для матричного  
різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова**

Чуйко С. М.<sup>1</sup>, Дзюба М. В.<sup>2</sup>, Калініченко Я. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Донбаський державний педагогічний університет,  
вул. Генерала Батюка, 19, м. Слов'янськ, Донецька обл., Україна 84 116*

<sup>2</sup>*Донбаська державна машинобудівна академія,  
вул. Академічна, 72, м. Краматорськ, Донецька обл., Україна 84313*

Дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач започатковане у роботах К. Вейерштрасса, М. М. Лузіна та Ф. Р. Гантмахера. Систематичному вивченню диференціально-алгебраїчних крайових задач присвячені роботи С. Кемпбелла, Ю. Є. Бояринцева, В. Ф. Чистякова, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка, В. П. Яковця, О. А. Бойчука, А. Ілчманна та Т. Рейса. Вивчення диференціально-алгебраїчних крайових задач пов'язане з численними застосуваннями таких задач у теорії нелінійних коливань, у механіці, біології, радіотехніці, теорії керування, теорії стійкості руху. В той же час дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач тісно пов'язане з дослідженням крайових задач для різницевих рівнянь, започаткованим у роботах А. А. Маркова, С. Н. Бернштейна, Я. С. Безиковича, О. О. Гольфонда, С. Л. Соболева, В. С. Рябенського, В. Б. Демідовича, А. Халаная, Г. І. Марчука, О. А. Самарського, Ю. О. Митропольського, Д. І. Мартинюка, Г. М. Вайніко, А. М. Самойленка, О. А. Бойчука та О. М. Станжицького. Дослідженню нелінійних сингулярно збурених крайових задач для різницевих рівнянь у частинних різницях присвячені роботи В. П. Аносова, Л. С. Франка, П. Є. Соболевського, О. Л. Скубачевського та А. Апералієва. Отже, актуальною проблемою є перенесення результатів, отриманих у статтях С. Кемпбелла, А. М. Самойленка та О. А. Бойчука на лінійні крайові задачі для різницево-алгебраїчних рівнянь, зокрема, знаходження необхідних та достатніх умов існування шуканих розв'язків, а також, конструкції оператора Гріна задачі Коші та узагальненого оператора Гріна лінійної крайової задачі для різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова. У статті знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна задачі Коші для різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова. Знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна для лінійної нетерової крайової задачі у випадку різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова. Запропоновано оригінальну класифікацію критичних і некритичних випадків для лінійної нетерової крайової задачі у випадку різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова.

*Ключові слова:* різницево-алгебраїчні рівняння; крайові задачі; матричне рівняння Ляпунова.

**Linear Noetherian boundary value problem for a matrix  
difference-algebraic Lyapunov equation**

S. M. Chuiko<sup>1</sup>, M. V. Dzyuba<sup>2</sup>, Ya. V. Kalimichenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Donbas State Pedagogical University, 19, Batiuk General st.,  
Slavyansk, Donetsk region, 84 116, Ukraine*

<sup>2</sup>*Donbas State Engineering Academy, 72 Academic st.  
Kramatorsk, Donbass region, 84 313, Ukraine*

The study of differential-algebraic boundary value problems was initiated in the works of K. Weierstrass, N. N. Luzin and F. R. Gantmacher. Systematic study of differential-algebraic boundary value problems is devoted to the work of S. Campbell, Yu. E. Boyarintsev, V. F. Chistyakov, A. M. Samoilenko, M. O. Perestyuk, V. P. Yakovets, O. A. Boichuk, A. Ilchmann and T. Reis. The study of the differential-algebraic boundary value problems is associated with numerous applications of such problems in the theory of

nonlinear oscillations, in mechanics, biology, radio engineering, theory of control, theory of motion stability. At the same time, the study of differential algebraic boundary value problems is closely related to the study of boundary value problems for difference equations, initiated in A. A. Markov, S. N. Bernstein, Ya. S. Besikovich, A. O. Gelfond, S. L. Sobolev, V. S. Ryaben'kii, V. B. Demidovich, A. Halanay, G. I. Marchuk, A. A. Samarskii, Yu. A. Mitropolsky, D. I. Martynyuk, G. M. Vayniko, A. M. Samoilenko, O. A. Boichuk and O. M. Standzhitsky. Study of nonlinear singularly perturbed boundary value problems for difference equations in partial differences is devoted to the work of V. P. Anosov, L. S. Frank, P. E. Sobolevskii, A. L. Skubachevskii and A. Asheraliev. Consequently, the actual problem is the transfer of the results obtained in the articles by S. Campbell, A. M. Samoilenko and O. A. Boichuk on linear boundary value problems for difference-algebraic equations, in particular finding the necessary and sufficient conditions for the existence of the desired solutions, and also the construction of the Green's operator of the Cauchy problem and the generalized Green operator of a linear boundary value problem for a difference-algebraic equation.

Thus, the actual problem is the transfer of the results obtained in the articles and monographs of S. Campbell, A. M. Samoilenko and O. A. Boichuk on the linear boundary value problems for the differential-algebraic boundary value problem for a matrix Lyapunov equation, in particular, finding the necessary and sufficient conditions of the existence of the desired solutions of the linear differential-algebraic boundary value problem for a matrix Lyapunov equation.

In this article we found the conditions of the existence and constructive scheme for finding the solutions of the linear Noetherian differential-algebraic boundary value problem for a matrix Lyapunov equation. The proposed scheme of the research of the linear differential-algebraic boundary value problem for a matrix Lyapunov equation in the critical case in this article can be transferred to the seminonlinear differential-algebraic boundary value problem for a matrix Lyapunov equation.

*Keywords:* differential-algebraic equation; boundary value problem; matrix Lyapunov equation.

Article history: Received: 1 November 2020; Final form: 18 November 2020;  
Accepted: 18 November 2020.

## Regularization of the electrostatics problem for three spheres and an electrostatic charge

V. A. Rezunenko

*V. N. Karazin Kharkiv National University,  
4 Svobody sqr., Kharkiv, 61022, Ukraine  
rezunenko@karazin.ua, varezunenko@yahoo.com*

A numerical-analytical algorithm for investigation of the electrostatic potential of a sphere with a circular hole and a charge surrounded by ribbon spheres is constructed. The method of inversion of the integral operator and semi-inversion of the matrix operator of the Dirichlet problem for the Laplace equation is used. A system of the second kind with a compact operator in space  $\ell_2$  is obtained. Particular variants of the problem are considered.

*Keywords:* spheres; hole; electrostatics; linear system of the second kind; compact.

Резуненко В. О. **Регуляризація задачі електростатики для трьох сфер та електростатичного заряду.** Побудований чисельно-аналітичний алгоритм дослідження потенціалу сфери з круговим отвором і заряду, оточених стрічковими сферами. Використаний метод обернення інтегрального оператора і напівобернення матричного оператора задачі Діріхле для рівняння Лапласа. Отримано система другого роду з компактним оператором в просторі  $\ell_2$ . Розглянуто окремі варіанти задачі.

*Ключові слова:* сфери; отвір; електростатика; лінійна система другого роду; компакт.

Резуненко В. А. **Регуляризация задачи электростатики для трёх сфер и электростатического заряда.** Построен численно-аналитический алгоритм исследования потенциала сферы с круговым отверстием, окружённой ленточными сферами. Электростатический заряд размещён между сферами. Использован метод обращения интегрального оператора и полуобращения матричных операторов задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Получена система второго рода с компактным оператором в  $\ell_2$ . Рассмотрены частные варианты задачи.

*Ключевые слова:* сферы; отверстие; электростатика; линейная система второго рода; компакт.

*2010 Mathematics Subject Classification:* 65N12; 35A25; 78A45.

### 1. Introduction

Among the problems of electrostatics on classical surfaces, the interest in problems on a sphere with various geometric and physical properties has not faded for more than a hundred years. So, at present, the parts of the sphere, made



up of conductive tapes, can be a model of microcircuit blocks, connecting nodes and adapters of various wave-guides, electrical appliances, and charge storage devices. New nanomaterials with complex molecular structures can be models of thin conductive spherical ribbons [1, 2, 3, 4, 12]. In this work, an algorithm is constructed for calculating the electrostatic field of a sphere with a circular hole and an electrostatic charge placed between two closed spheres composed of conductive ribbons.

The algorithm is based on the application of a variant of the regularization method for the non-self-adjoint Dirichlet problem for the Laplace equation, proposed and developed in the works of Kharkiv mathematicians [17, 18, 16, 14, 13]. In this work, a system of linear algebraic equations of the second kind with a compact matrix operator in the Hilbert space  $\ell_2$  of complex sequences is obtained.

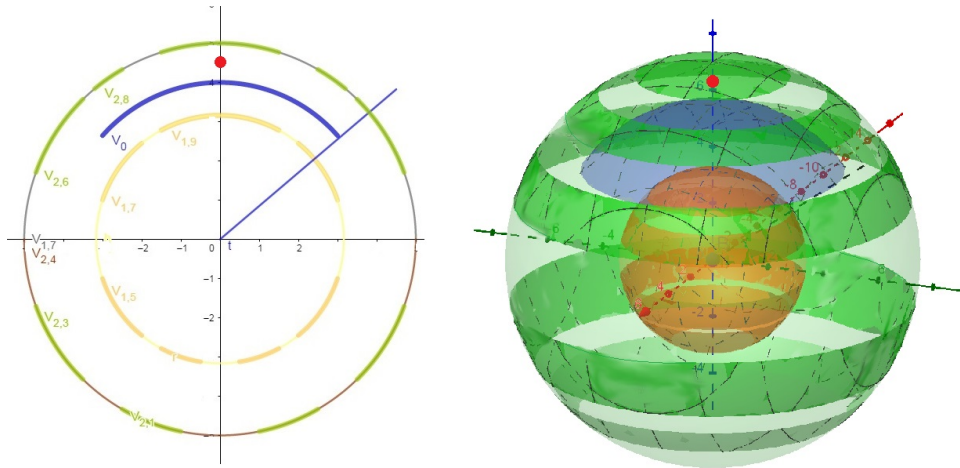
## 2. Statement of the problem

The task has several parameters. Let's consider on them in detail. Let the origin of the Cartesian and spherical coordinate systems be aligned with the center of the sphere with a circular hole. Let the radius of the sphere  $r = r_0$  and the hole in the sphere formed by a plane cut, and the polar cut angle of the sphere is  $\theta_0$ . At the hole, angle  $\theta$  varies from  $\theta_0$  to  $\pi$ . Let another closed sphere of radius  $r_1$  be located inside the sphere with a hole. The third closed sphere of radius  $r_2$  encloses the sphere with a hole. In this case, respectively,  $a_1 < a_0 < a_2$ . Closed spheres are made up of infinitely thin ribbons. There are infinitely thin partitions between the ribbons. The partitions lie in planes parallel to the plane  $XOY$ . The polar angles of the partitions are  $\theta_{1,k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  for a sphere of radius  $r_1$ . The sphere of radius  $r_2$  has other ribbons. The partitions between ribbons have polar angles  $\theta_{2,m}$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ . The number of ribbons is limited. All three spheres are equipped with independent potentials. Let  $V_0$  be the potential of the sphere with a hole,  $V_{1,k}$  be the potential of the  $k$ -ribbon of the inner sphere, and  $V_{2,m}$  be the potential of  $m$ -ribbon of the outer sphere. We assume that the electrostatic charge is located between the outer sphere and the sphere with a hole on the  $OZ$  axis at point  $b_0$ ,  $a_0 < b_0 < a_2$ . Assume the potential of the charge  $V_3 \neq 0$ . Pic. 1 (left) shows a cross section of three spheres by a vertical plane passing through the  $OZ$  axis. In Pic. 1 (right) a three-dimensional model of the spheres is given.

Here we note that this work differs from work [5] by the geometry of the problem and the presence of an electrostatic charge. The total electrostatic field must satisfy Maxwell's equations and material equations  $rot \vec{E} = 0$ ,  $div \vec{D} = \rho_0$ ,  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ , where  $\rho_0$  is the density of charges on the surface of the conductors,  $\varepsilon$  is the dielectric constant of the medium.

By the assumption, the magnetic permeability of the medium  $\mu = 0$  and the magnetic field is absent  $\vec{H} = 0$ , the magnetic induction  $\vec{B} = 0$ .

Let us take into account the connection between the electrostatic field  $\vec{E}$  and its scalar potential  $\vec{E} = -grad U$  and proceed to the scalar problem for the potential  $U$ . The total potentials must satisfy the Laplace equation, must be equal to the given potentials at the spherical boundaries are equal  $V_0$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ ,



Pic. 1. Spheres and an electrostatic charge.

respectively. Its partial tangential derivatives must be continuous at the hole in the open sphere  $r = a_0$ ,  $\theta \in (\theta_0, \pi]$ , must satisfy the condition of bounded electrostatic energy in any limited volume of three-dimensional space. except for the volume, containing the given electrostatic charge  $\int_W |\text{grad} U|^2 dW < \infty$ , have the required singularity at the point where the charge is placed, decrease at infinity as  $O(r^{-1})$ ,  $r \rightarrow \infty$ . It is required to find the electrostatic field of the three spheres and the charge placed between them. In this statement, the problem is well-posed – it has a stable unique solution [9, 15].

### 3. Functional equations

Let us represent the 3-dimensional space by the sum of four spherical domains  $G_1 = \{r \leq a_1\}$ ,  $G_2 = \{a_1 < r < a_0\}$ ,  $G_3 = \{a_0 < r < a_2\}$ ,  $G_4 = \{r > a_2\}$  for which  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . In the Laplace equation, we separate the spherical variables and represent the charge potential and the unknown secondary potentials by Fourier - Legendre power series in the corresponding domains.

$$V_3 = \left\{ \begin{matrix} V_{3,1} \\ V_{3,2} \end{matrix} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} R_n r^n, & r < b_0 \\ H_n r^{-n-1}, & r > b_0 \end{matrix} \right\} P_n(\cos \theta), \quad (1)$$

$$\left. \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \end{matrix} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} A_n r^n, & 0 \leq r < a_1 \\ F_n r^{-n-1}, & r > a_2 \end{matrix} \right\} P_n(\cos \theta), \quad (2)$$

$$\left. \begin{matrix} U_3 \\ U_4 \end{matrix} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} B_n r^{-n-1}, & a_1 < r < a_0 \\ C_n r^n, & a_1 < r < a_0 \end{matrix} \right\} P_n(\cos \theta), \quad (3)$$

$$\left. \begin{matrix} U_5 \\ U_6 \end{matrix} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} D_n r^n, & a_0 < r < a_2 \\ E_n r^{-n-1}, & a_0 < r < a_2 \end{matrix} \right\} P_n(\cos \theta), \quad (4)$$

where  $P_n(\cos \theta)$  are Legendre polynomials of the 1st kind of order zero of integer degree  $n$  of the argument  $\cos \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Note that the method of separation of variables and Fourier-Legendre series for problems of mathematical physics on a sphere were first applied by Debye in 1908–1909. Since then, the method has been effectively used for a wide range of problems, including for problems on sphero-conical and other surfaces [9, 2, 14, 8, 10]. The coefficients of series (1)–(4) are sought in the Hilbert space  $\ell_2$ , ensuring the fulfilment of the condition that the energy integral is finite. Note that the potential  $V_3$  (1) charge is known, and the potentials  $V_1$  and  $V_2$  of the ribbon spheres are known, and the potential  $V_0$  of the sphere with a hole is also known. First, we construct an algorithm for finding the coefficients of series (3)–(4) for potentials  $U_3, \dots, U_6$ . We use the boundary conditions on spherical surfaces for  $r = a_0$ ,  $r = a_1$ ,  $r = a_2$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ . We use the completeness and orthogonality of the Legendre polynomials  $P_n(\cos \theta)$  with weight  $\sin \theta$  in  $L_2(0, \pi)$  and change from the equalities of the Fourier series to the equalities of their coefficients. As a result, from the boundary conditions, we obtain a system of 3 linear equations with four sequences of unknowns  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$ ,  $E_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  (2)–(4)

$$\begin{cases} B_n a_1^{-n-1} + C_n a_1^n &= V_{1,n}^{(1)}, \\ D_n a_2^n + E_n a_2^{-n-1} &= V_{2,n}^{(2)}, \\ B_n a_0^{-n-1} + C_n a_0^n &= D_n a_0^n + R_n^{(1)}, \end{cases} \quad (5)$$

where the values  $V_{2,n}^{(2)}$ ,  $V_{1,n}^{(1)}$ ,  $R_n^{(1)}$  are known. To find the coefficients, for example,  $E_n$  we express from (5) the coefficients  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  through  $E_n$ ,  $n \geq 0$ . We transform respectively, system (5) and calculate the determinant of the new system. As a result, we get the determinant  $\Delta_n$ :

$$\Delta_n = -a_2^n \left[ \frac{1}{a_1} \left( \frac{a_0}{a_1} \right)^n + \frac{1}{a_0} \left( \frac{a_1}{a_0} \right)^n \right]. \quad (6)$$

The determinant  $\Delta_n$  is nonzero, since by condition  $a_2 > 0$ ,  $0 < a_1 < a_0$ . The system has a unique solution. It is solvable, for example, according to Cramer's rule. So we get, in particular, the coefficients  $B_n$  of the potential  $U_3$  (3):

$$B_n = \frac{1}{\Delta_n} \left\{ V_{1,n}^{(1)} (-a_0^n a_2^n) + V_{2,n}^{(2)} a_0^n a_1^n - E_n a_1^n a_2^{-n-1} a_0^n + E_n a_2^n a_0^{-n-1} a_1^n + R_n^{(1)} a_1^n a_2^n \right\}, \quad (7)$$

where  $V_{1,n}^{(1)}$  are known, and  $V_{2,n}^{(2)} = V_{1,n}^{(1)} - H_n$ ,  $R_n^{(1)} = R_n a_0^n$ . Functional equations for finding the coefficients  $E_n$  are obtained from the boundary conditions on a sphere with a hole at  $r = a_0$

$$U_4 + U_5 = -V_{3,1} + V_0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial[U_4 + U_5]}{\partial r} = \frac{\partial[-V_{3,1} + U_2 + U_3]}{\partial r}, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi. \quad (9)$$

Now, in (8)–(9) we replace the potentials by series (3), (4). Then we substitute the coefficients  $B_n, C_n, D_n$  in the series, particularly, by (5), (6), (7). As a result, we obtain a paired system of functional equations:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ E_n a_0^{-n-1} [1 - \mu_n^{(0)}] + V_{2,n}^{(2)} \mu_n^{(0)} + R_n^{(1)} \right\} P_n(\cos \theta) = V_0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \quad (10)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k + 1) \left\{ E_n a_0^{-n-1} [1 - \varepsilon_n^{(0)}] - L_n \right\} P_n(\cos \theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi, \quad (11)$$

where

$$\mu_n^{(0)} = \left( \frac{a_0}{a_2} \right)^{2n+1}, \quad \varepsilon_n^{(0)} = \frac{-\left( \frac{a_1}{a_2} \right)^{2n+1} + \left( \frac{a_1}{a_0} \right)^{2n+1}}{1 - \left( \frac{a_1}{a_0} \right)^{2n+1}}, \quad (12)$$

$$L_n = \left( V_{2,n}^{(1)} \varepsilon_n^{(1)} - V_{2,n}^{(1)} \varepsilon_n^{(2)} + H_n \varepsilon_n^{(2)} a_2^{-n-1} - R_n \varepsilon_n^{(2)} \right) a_0^{-1},$$

$$\varepsilon_n^{(1)} = \left\{ \frac{a_0^n}{a_1^{n+1}} \left[ 1 - \left( \frac{a_1}{a_0} \right)^{2n+1} \right] \right\}^{-1}, \quad \varepsilon_n^{(2)} = \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^n \left\{ \frac{a_0^n}{a_1^{n+1}} \left[ 1 - \left( \frac{a_1}{a_0} \right)^{2n+1} \right] \right\}^{-1}.$$

In (10)–(12) all quantities are infinitesimal  $\mu_n^{(0)}, \varepsilon_n^{(0)}, \varepsilon_n^{(1)}, \varepsilon_n^{(2)}, n \rightarrow \infty$ . The series in (10), (11) belong to  $L_2(0, \pi)$ . System (10), (11) is prepared for transformation into the system of algebraic equations of the second kind (SLAE-II). The transformation is based on the method of regularization of paired summator and integral functional equations, which is close to the method of the Riemann - Hilbert problem.

#### 4. System of linear algebraic equations of the second kind

The system of functional equations (10), (11) can be transformed into SLAE-II in several ways.

Let us choose a variant leading to SLAE-II with the least compact matrix operator in the norm in  $\ell_2$  [8, 11].

Note that (10), (11) is a system of the first kind. Despite the fact that it can be relatively easily transformed into a system of the 11th kind, it is also not effective for direct application of both analytical and numerical methods. Let us redesignate in (10), (11)

$$E_n = Y_n a_0^{n+1} [1 - \varepsilon_n^{(0)}]^{-1}, \quad T_n = V_{2,n}^{(2)} \mu_n^{(0)} + R_n^{(1)} \quad (13)$$

and introduce the smallness parameter

$$\varepsilon_n^{(3)} = \frac{-\varepsilon_n^{(0)} + \mu_n^{(0)}}{1 - \varepsilon_n^{(0)}}, \quad \varepsilon_n^{(3)} = \bar{o}(q^{2n-1}), \quad 0 < q < 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

We obtain the system of equations

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ Y_n \left( 1 - \varepsilon_n^{(3)} \right) + T_n \right\} P_n(\cos \theta) = V_0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \quad (15)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) [Y_n - L_n] P_n(\cos \theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi. \quad (16)$$

which is convenient for further transformations.

Let us use that the series in (15), (16) belong to the space  $L_2(0, \pi)$ . Substitute the Mehler-Dirichlet integral representation in the series (15) instead of the Legendre polynomials and change the order of summation and integration. We obtain a homogeneous Volterra integral equation of the 1st kind

$$\int_0^{\theta_0} f(\varphi) (\cos \varphi - \cos \theta)^{-\frac{1}{2}} d\varphi = 0, \quad (17)$$

which has a unique solution  $f(\varphi) = 0$ ,  $\varphi \in [0, \theta_0)$ . This, instead of (15), we obtain a functional equation for the complete orthogonal system  $\cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \varphi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  in  $L_2(0, \pi)$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ Y_n \left( 1 - \varepsilon_n^{(3)} \right) + T_n \right\} \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \varphi = V_0 \cos \frac{\varphi}{2}, \quad 0 \leq \theta < \theta_0. \quad (18)$$

In (16), we replace  $(2n+1)P_n(\cos \theta)$  by the difference  $(P'_{n+1}(\cos \theta) - P'_{n-1}(\cos \theta))(\sin \theta)$  and reduce by  $\sin \theta$ . Then we integrate the series in (16) term by term. In this case, the integration constant vanishes, since the polynomials  $P_{n+1}(x)$ ,  $P_{n-1}(x)$  have the same parity and  $P_{n+1}(0) - P_{n-1}(0) = 0$ . Now, instead of the Legendre polynomials, we substitute another (on the half-interval  $(\theta_0, \pi]$ ) integral representation and using the uniform convergence of the integrated series, we change the order of summation and integration. We obtain a homogeneous Volterra integral equation of the 1st kind, similar to (17) on the half-interval  $(\theta_0, \pi]$ . This integral equation has a trivial solution on  $(\theta_0, \pi]$ . The functional equation (16) is thus transformed into the equation

$$\sum_{n=0}^{\infty} [Y_n - L_n] \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \varphi = 0, \quad \theta_0 < \varphi \leq \pi. \quad (19)$$

Let us single out the main part in (18) and, together with (19), prepare a system of functional equations in trigonometric functions for the semi-inversion:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \varphi \\ = & \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \left( Y_m \varepsilon_m^{(0)} - T_m \right) \cos \left( m + \frac{1}{2} \right) \varphi + V_0 \cos \frac{\varphi}{2}, & 0 \leq \varphi < \theta_0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} L_k \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) \varphi, & \theta_0 < \varphi \leq \pi. \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

Let us invert the left-hand side of the Fourier series (20). As a result, we obtain a system of algebraic equations of the second kind (SLAE-II)

$$Y_n = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m \varepsilon_m^{(0)} \alpha_{n,m}^{(0)} - \sum_{m=0}^{\infty} T_m \alpha_{m,n}^{(0)} + V_0 \alpha_{n,0}^{(0)} + \sum_{k=0}^{\infty} L_k \alpha_{n,k}^{(1)}, \quad (21)$$

where

$$\alpha_{n,m}^{(0)} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(n+m+1)\theta_0}{n+m+1} + \frac{\sin(n-m)\theta_0}{n-m} \right], \quad n \neq m, \quad (22)$$

$$\alpha_{n,n}^{(0)} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(2n+1)\theta_0}{2n+1} + \theta_0 \right], \quad \alpha_{n,m}^{(1)} = \delta_{n,m} - \alpha_{n,m}^{(0)}, \quad (23)$$

where  $\delta_{n,m}$  is the Cronecer's symbol. Let us write (21) in the following matrix form

$$Y = MY + Z. \quad (24)$$

Since the matrix operator of system (24) is compact in  $\ell_2$  and the right column belongs to  $\ell_2$  and unity is not an eigenvalue of the operator, then system (24) has a unique solution in  $\ell_2$ .


The obtained SLAE-II (24) has a wider region of effective solvability both in the parameter  $r = a_0$  and in the parameter  $\theta_0$ . This is due to the application of integral equation of the Volterra type [8] on various intervals and new choice of the small parameters.

Since elements  $\alpha_{n,m}^{(0)}$  are bounded by the value  $2\theta_0/\pi$ , then the system is solvable by the method of successive approximations for  $0 \leq \theta_0 \ll \pi$ . For the numerical solution of the system, for example, with the selection of the main diagonal, it is necessary to re-designate the unknowns to accelerate the convergence of the solution  $Y_n^{(1)} = Y_n/(n+1)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . We note, in particular, that the coefficients  $A_n, F_n, n = 0, 1, 2, \dots$  of the Fourier - Legendre series of potentials  $U_1, U_2$  (2) are in explicit form. For this, it is sufficient to use the boundary conditions at  $r = r_1$  and at  $r = r_2$  and take into account that  $\theta$  belongs to the (complete) segment  $[0, \pi]$ . An important particular variant of the problem statement will be the lack of charge in the area  $G_3$ . In this case, the final SLAE-II will also change. So, on the right-hand side of SLAE-II, the quantities  $T_n$  and  $L_n$  acquire the limiting form:  $V_{2,n}^{(2)}$  instead of  $T_n$  (13),  $V_{2,n}^{(1)} \varepsilon_n^{(1)} - V_{2,n}^{(1)} \varepsilon_n^{(2)}$  instead of  $L_n$  (12).

### 5. Conclusions

An efficient algorithm for calculating the electrostatic field of a complex structure containing three nested spheres, among which the inner sphere has a circular hole is constructed. A point charge is placed between the outer sphere and the open sphere. The algorithm is based on the analytical method of semi-inversion of the matrix operator of the problem in the space  $\ell_2$ .

ORCID ID

V. A. Rezunenko  <https://orcid.org/0000-0003-4577-4950>



## REFERENCES

1. H. Nakano, T. Shimizu, H. Kataoka, J. Yamauchi. Circularly and linearly polarized waves from a metamaterial spiral antenna. *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, – 2014. – July 6-11. – P. 226.2. DOI: 10.1109/APS.2014.6904599
2. D. B. Kyruliak, Z. T. Nazarchuk, O. B. Trishchuk. Axially-symmetrical TM-waves diffraction by sphere-cone cavity. *Progress in electromagnetics research. B.*, – 2017. – Vol. **73**. – P. 1-17. DOI: 10.2528/PIERB16120904
3. K. Mei, M. Meyer. Solution to spherical anisotropic antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, – 1964. – **AP-12**. – P. 459-463. DOI: 10.1109/TAP.1964.1138250
4. L. B. Felsen, N. Marcuvitz. *Radiation and scattering of waves*. Prentice-Hall Microwaves and Fields Series. 1973. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., xxxii+888 pp.
5. V. A. Rezunenko. Electrostatic field of a segment which is shielded by sectional spheres, *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, – 2010. – N. **931**. – P. 59-72. (in Russian) <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/Vestnik-KhNU-931-2010-rezunenko.pdf>
6. V. A. Rezunenko. The field of the vertical electrical dipole placed above the spiral conductive unclosed sphere, *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, – 2015. – Vol. **81**. – P. 10-19. DOI: 10.26565/2221-5646-2015-81-02
7. V. A. Rezunenko. The field diffraction of current ring on a spiral conductive sphere with a hole, *The X-th International Conference on Antenna Theory and Techniques ICATT'2015, KhNURE, Kharkiv, 21-24 April, 2015. Proceedings*, – P. 129-131. DOI: 10.1109/ICATT.2015.7136803
8. V. A. Rezunenko. Diffraction of the field of vertical electric dipole on the spiral conductive sphere in the presence of a cone, *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, – 2018. – Vol. **88**. – P. 17-26. DOI: 10.26565/2221-5646-2018-88-02
9. O. A. Ladyzhenskaya. *The boundary value problems of mathematical physics*. Translated from the Russian by Jack Lohwater. *Applied Mathematical Sciences*. 1985. Springer, New York, 322 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-4317-3
10. V. A. Rezunenko, I. A. Vyazmitinov, L. V. Udyanskaya, V. P. Shestopalov. Antennas characteristics of spherical reflector which is working at Helmholtz resonance excitation, *International Scientific and Technical Conference "Modern Radar"*. Kiev, – 1994. – P. 72-76.

11. V. A. Rezunenko, S. V. Roshchupkin, E. I. Radchenko. Diffraction field of the vertical dipole from sphere with aperture, screening by the dielectical layer, 2007 6th International Conference on Antenna Theory and Techniques. Sevastopol, – 2007. – P. 128-130. DOI: 10.1109/ICATT.2007.4425133
12. B. M. Singh, J. G. Rokne, R. S. Dhaliwal. Two-dimensional electrostatic problem in a plane with earthed elliptic cavity due to one or two collinear charged electrostatic strips. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, – Vol. 2007. – Article ID 60595, 9 pages, 2007. DOI: 10.1155/2007/60595
13. V. P. Shestopalov, Yu. A. Tuchkin, A. E. Poedinchuk, Yu. K. Sirenko. New methods for solving direct and inverse problems of the theory of diffraction. Analytical regularization of boundary value problems in electrodynamics. 1997. Osnova, Kharkiv, 284 p. (in Russian).
14. V. A. Doroshenko, V. F. Kravchenko. Excitation open conical and biconical structures, Electromagnetic waves and electronic systems, – 2003. – Vol. 8. – P. 4-78.
15. V. A. Sadovnichy. Theory of the operators. 1999. High School, M., 368 p. (in Russian).
16. V. F. Kravchenko, Yu. K. Sirenko, K. Yu. Sirenko. Electromagnetic waves transformation and radiation by the open resonant structures. Modeling and analysis of transient and steady-state processes. 2011. Physmatlit, M., 320 p. (in Russian).
17. Z. S. Agranovich, V. A. Marchenko, V. P. Shestopalov. Electromagnetic wave diffraction on plane metallic gratings, Journal of Technical Physics, – 1962. – T. 32, Issue 4. – P. 381-394 (in Russian).
18. V. P. Shestopalov, L. N. Litvinenko, S. A. Masalov, V. G. Sologub. Diffraction of waves by gratings. 1973. Kharkov University Press, Kharkov, 288 p. (in Russian).

**Регуляризація задачі електростатики для трьох  
сфер та електростатичного заряду**

Резуненко В. О.

*Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна  
пл. Свободи, 4, Харків, Україна, 61022*

Побудований чисельно-аналітичний алгоритм дослідження потенціалу сфери з круговим отвором, оточеної зовнішньої і внутрішньої замкненими стрічковими сферами. Число стрічок на сферах довільно. Стрічки на сферах розділені непровідними нескінченно тонкими перегородками. Перегородки знаходяться в площинах, паралельних площині зрізу сфери з отвором. Кожна стрічка має свій незалежний потенціал. Електростатичний заряд розміщений між зовнішньою сферою і сферою з отвором на осі структури. Повні потенціали повинні задовольняти, зокрема, рівнянь Максвелла

з урахуванням відсутності магнітних полів, задовольняти граничним умовам, мати необхідну особливість в точці розміщення заряду. Для вирішення поставленого завдання спочатку використані метод часткових областей і розділення змінних в сферичній системі координат. При цьому для рядів Фур'є застосовуємо степеневі функції і поліноми Лежандра цілих порядків. З граничних умов, використовуючи допоміжну систему 3-х рівнянь з 4-ма невідомими, отримана парна система функціональних рівнянь першого роду відносно коефіцієнтів рядів Фур'є. Система неефективна для вирішення прямими методами. Застосовані метод обернення інтегрального оператора Вольтерра і напівобернення матричного операторів задачі Діріхле для рівняння Лапласа. Метод заснований на ідеях аналітичного методу задачі Рімана - Гільберта. При цьому використані інтегральні уявлення для поліномів Лежандра. Отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду з компактним матричним оператором у гільбертовому просторі  $\ell_2$ . Система ефективно вирішується чисельно для довільних параметрів задачі і аналітично для граничних параметрів задачі. Розглянуто окремі варіанти завдання.

*Ключові слова:* сфери; отвір; електростатика; лінійна система другого роду; компакт.

### Regularization of the electrostatics problem for three spheres and an electrostatic charge

V. A. Rezunenکو

*V. N. Karazin Kharkiv National University,*

*4 Svobody sqr., Kharkiv, 61022, Ukraine*

A numerical-analytical algorithm for investigation of the potential of a sphere with a circular hole, surrounded by external and internal closed ribbon spheres, is constructed. The number of ribbons on the spheres is arbitrary. The ribbons on the spheres are separated by non-conductive, infinitely thin partitions. The partitions are located in planes parallel to the shear plane of the sphere with a hole. Each ribbon has its own independent potential. An electrostatic charge is placed between the outer sphere and the sphere with a hole on the axis of the structure. The full potential must satisfy, in particular, Maxwell's equations, taking into account the absence of magnetic fields, satisfy the boundary conditions, have the required singularity at the point where the charge is placed. To solve this problem, we first used the method of partial domains and the method of separating variables in a spherical coordinate system. In this case, for the Fourier series, we use power functions and Legendre polynomials of integer orders. From the boundary conditions, using an auxiliary system of 3 equations with 4 unknowns, a pairwise system of functional equations of the first kind with respect to the coefficients of the Fourier series is obtained. The system is not effective for solving by direct methods. The method of inversion of the Volterra integral operator and semi-inversion of the matrix operators of the Dirichlet problem for the Laplace equation are applied. The method is based on the ideas of the analytical method of the Riemann - Hilbert problem. In this case, integral representations for the Legendre polynomials are used. A system of linear algebraic equations of the second kind with a compact matrix operator in the Hilbert space  $\ell_2$  is obtained. The system is effectively solvable numerically for arbitrary parameters of the problem and analytically for the limiting parameters of the problem. Particular variants of the problem are considered.

*Keywords:* spheres; hole; electrostatics; linear system of the second kind; compact.

Article history: Received: 5 October 2020; Final form: 10 November 2020;

Accepted: 15 November 2020.

## One numerical approach to optimal control the linear heat conduction processes

I. Sh. Nevliudov<sup>1</sup>, Yu. V. Romashov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Kharkiv National University of Radio Electronics,  
Kharkiv, Nauky Ave. 14, 61166, Ukraine*  
<sup>2</sup>*V. N. Karazin Kharkiv National University,  
Kharkiv, 4 Svobody Sq., 61022, Ukraine*  
*igor.nevliudov@nure.ua, yurii.romashov@nure.ua*

It is proposed the generalized numerical based approaches to optimal control the heat conduction processes based on solving the especially built ordinary differential equations. The example of using the proposed approaches is discussed and it is shown that using these approaches can allow to decrease almost twice the transient time required for heating-up structures.

*Keywords:* control; modeling; optimization; methods; heat conduction.

Невлюдов І. Ш., Ромашов Ю. В. **Обчислювальний підхід щодо оптимального управління процесами лінійної теплопровідності.** Запропоновано обчислювальні підходи щодо оптимального управління процесами теплопровідності. Розглянуто приклад та показано, що оптимізація управління може зменшити вдвічі час, необхідний для нагрівання конструкцій.

*Ключові слова:* управління; моделювання; оптимізація; методи; теплопровідність.

Невлюдов И. Ш., Ромашов Ю. В. **Численный подход к оптимальному управлению процессами линейной теплопроводности.** Предложены вычислительные подходы для оптимального управления процессами теплопроводности. Рассмотрен пример и показано, что оптимизация управления может уменьшить вдвое время, необходимое для нагрева конструкций.

*Ключевые слова:* управление; моделирование; оптимизация; методы; теплопроводность

*2010 Mathematics Subject Classification:* 49Mxx; 80Axx.

### 1. Introduction

The optimal control of the heat conduction processes is the in current interest scientific problem due to its relations with the global challenges of rational using the different kinds of power equipments by means the integrating control and design [1], by means introducing the new types of fuels like the biomass [1, 2], as well as by means optimizing the thermal states during the industries processes [3]

© I. Sh. Nevliudov, Yu. V. Romashov, 2020

and others ways. The current state of the optimal control of power equipments can be characterized as using the particular approaches for the particular tasks [1, 2, 3] and as having no the all-accepted engineering approaches like using the different kinds of governors for automation [4] for example. Considering these circumstances, the optimal control of heat conduction processes are having a lot attentions now [5, 6, 7, 8, 9, 10]. The most of existing research including the cited above are about different mathematical approaches and results corresponding with the optimal control. Really, the main difficulties of the optimal control problems are in general due to necessity of consideration the transients between the different states of researched systems which are defined by means the differential equations usually. As the result of that, considering the optimal control requires the complicated and often specific mathematical approaches in some cases like in [11] for example. Thus, the mathematical complications significantly limit the opportunities of engineering implementing the fundamental results existing in the fields of of the optimal control. Besides, the most of known approaches are suitable for the particular problems only and can not be used for engineering applications usually.

It is clearly understood, the approaches based on the to be suitably programmed numerical methods allowing to solve the problems using the computers are the most useful for engineering applications of the optimal control. Considering this circumstance, the purpose of this research is to develop the generalized numerical based approaches to optimal control the heat conduction processes useful for engineering applications. To realize this purpose, we will solve the follows tasks:

- it will be proposed the generalized mathematical formulation of the problem about the optimal control for the heat conduction processes represented by the partial differential equation;
- to solve the problem about the optimal control for the heat conduction processes it will be developed the numerical approaches based on reducing to the especially built ordinary differential equations;
- the particular example of using the developed approaches will be considered to illustrate their application technique.

All these will allow to give the clear representation of the proposed approaches and the technique of their using to solve the engineering problems about the optimal control of the heat conduction processes in different industrial systems.

## 2. The generalized mathematical formulation of the problem

To give the generalized approaches to solve the problem about the optimal control of the heat conduction processes it is necessary to represent the generalized but not particular mathematical formulation of the considered problem. Let consider the heat conduction processes in the domain which is imagined as consisting of the points of Euclidean space  $E^3$ , and let denote as  $\Upsilon$  and  $v$  the sets of the internal and boundary points  $P \in E^3$  of that domain (pic. 1a). We will choose the arbitrary point  $O \in E^3$ , and we will define each other point  $P \in E^3$  by the

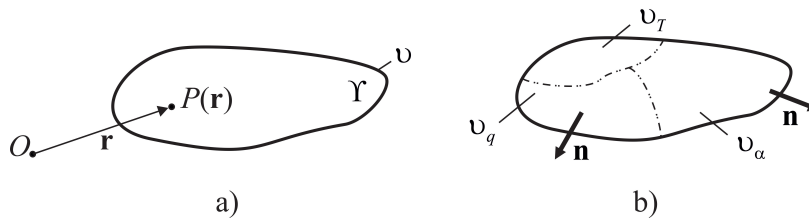
radius vector  $\mathbf{r} = \vec{OP}$  (pic. 1a). The point  $P \in E^3$  defined by the radius vector  $\mathbf{r}$  will be noted as  $P(\mathbf{r})$  (pic. 1a). The temperature  $T$  can be different in each point of the considered domain  $\Upsilon \cup v$  and it can be changing during the time  $t \geq 0$ . Thus, the temperature  $T$  depends both the  $\mathbf{r}$  position vector both the scalar time  $t$  so it can be represented as  $T = T(\mathbf{r}, t)$ .

Let the considered domain is having some given temperature field  $T = T_{\text{cur}}(\mathbf{r})$  in some given current moment of the time  $t = t_{\text{cur}}$ , but it is necessary to change this temperature field of the considered domain so the temperature will be having the required given field  $T = T_{\text{req}}(\mathbf{r})$  at the some undefined moment of the time  $t_{\text{tr}}$  defining the final of the transients, and it is necessary to find the optimal control providing the required quality of the transients under the existing restrictions on the temperature field during the transients. Such presented above formulation represents the most general verbal description of the problem about the optimal control of changing the temperature field of structures, but further we will represent the formal mathematical formulation of this problem as it is possible in general.

We will consider the most general case of the linear heat conduction processes defining by the different typical kinds of thermal interacting on the considered domain's boundary (pic. 1b):

$$v = v_T \cup v_q \cup v_\alpha, \tag{1}$$

where  $v_T$  is the part of the boundary  $v$  having the given temperature as the result of interacting with the surrounding environment;  $v_q$  is the part of the boundary  $v$  obtaining the given heat flow from the surrounding environment;  $v_\alpha$  is the part of the boundary  $v$  having the given heat transfer with the surrounding environment.



Pic. 1. The considered domain (a) and the constituents (b) of its boundary

It will be supposed, that it is exist the time dependent vector  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$  consisted of some parameters and it is named as the control vector or just the control which can have influencing on the temperature state of the considered domain according with the well-known heat conduction principles:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + Q(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \quad \forall P(\mathbf{r}) \in \Upsilon, t > t_{\text{cur}}, \tag{2}$$

$$T(\mathbf{r}, t_{\text{cur}}) = T_{\text{cur}}(\mathbf{r}) \quad \forall P(\mathbf{r}) \in \Upsilon, \tag{3}$$



$$T(\mathbf{r}, t) = T_v(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \quad \forall P(\mathbf{r}) \in v_T, t \geq t_{\text{cur}}, \quad (4)$$

$$-\lambda \vec{\nabla} T(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} = q_v(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \quad \forall P(\mathbf{r}) \in v_q, t \geq t_{\text{cur}}, \quad (5)$$

$$-\lambda \vec{\nabla} T(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} = \alpha (T(\mathbf{r}, t) - T_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{u})) \quad \forall P(\mathbf{r}) \in v_\alpha, t \geq t_{\text{cur}}, \quad (6)$$

where  $c$  and  $\lambda$  are the heat capacity and the thermal conductivity of the material of the considered domain;  $\nabla^2$  is the Laplace operator;  $Q$  is the intensity of the internal heat sources inside the material of the considered domain;  $T_v$  is the given temperature on the part  $v_T$  of the boundary  $v$ ;  $\vec{\nabla}$  is the gradient of the scalar field;  $\mathbf{n}$  is the unit external normal vector to the boundary  $v$  (see pic. 1b);  $q_v$  is the given heat flow thru the part  $v_q$  of the boundary  $v$ ;  $\alpha$  is the heat transfer coefficient thru the part  $v_\alpha$  of the boundary  $v$  and  $T_\alpha$  is the temperature of the environment surround the part  $v_\alpha$  of the boundary  $v$ .

It is necessary to note, the mathematical model (1)-(6) foresees the temperature state can be changed by means the control vector only, so that the depending of the temperature on the time is due to only the  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ .

Further, it will be required to find the control vector  $\mathbf{u}$  so that in the some undefined time moment  $t = t_{\text{tr}}$  the temperature field in the considered domain will become to given:

$$T(\mathbf{r}, t_{\text{tr}}) = T_{\text{req}}(\mathbf{r}) \quad \forall P(\mathbf{r}) \in \Upsilon, t \geq t_{\text{tr}}. \quad (7)$$

During the times  $t_{\text{cur}} \leq t \leq t_{\text{tr}}$  corresponding to the transients between the current and required temperature states it is necessary satisfying some limitations. The nature of such limitations can be different. These limitations can be due to the strength restrictions considering with the thermal stresses or they can be due to the finite power of the heating sources providing the control. It is really impossible to foresee all possible kinds of limitations on the temperature state and the control, but it is possible to imagine that such limitations are could be reduces to some condition on the temperature and the control vector which must be satisfied:

$$\Theta(T(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}(t)) = 0 \quad \forall P(\mathbf{r}) \in \Upsilon \cup v, t \geq t_{\text{cur}}, \quad (8)$$

where  $\Theta$  is some function defining the limitations on the temperature state and the control vector.

The limitations on the temperature state and on the control vector are especially represented as (8) in this research to simplify the follows expositions to represent the essence of the proposed numerical approaches for solving the problem about the optimal control of the heat conduction processes. Really, in general case it is possible to have such limitations represented by not the equality, but by the inequality, it is possible to have several limitations like (8) and other difficulties. At the same time, the most simple view (8) of these limitations is fully sufficient to represent the general idea of the numerical approaches will be proposed further, and different difficulties like due to inequalities for example or others can be reduced separately.

It is obviously that the required temperature field (7) can be achieved by a lot of different controls  $\mathbf{u}$  satisfying the limitation (8), but it is necessary to find the optimal control providing the required qualities of the transients from the current state (3) to the required state (7). It is impossible to foresee all kinds of requirements to the transients and to formulate the most general form of their mathematical representing. The most used requirement is the minimum time of the transients, but to have understood about the power of the generality of the proposed approaches it is necessary to give some general ways to formulate these requirements to the transients. First of all, to formulate the requirements to the transients it is necessary to consider some set  $v_\Psi$  of the points  $\in E^3$  defining some part of the considered domain  $\Upsilon \cup v$ ; to have the definiteness we will consider further  $v_\Psi \in v$ . Next, it is necessary to consider some function of the time:

$$\psi_T(t) = \int_{v_\Psi} \Psi(T) dv_\Psi \quad \forall t \geq t_{\text{cur}}, \quad (9)$$

where  $\Psi$  is some given function is needed to define the requirements to the transients.

The sense of the function (9) is predefined by the choosing the  $\Psi$  function. For example, the function (9) will represent the power of heat flow thru the surface  $v_\Psi$  in the case of  $\Psi(T) = -\lambda \vec{\nabla} T$ . Finally, that relation (9) will help to formulate the requirement to the transient as follows:

$$\varphi \rightarrow \min : \varphi = \int_{t_{\text{cur}}}^{t_{\text{tr}}} \Phi(\psi_T, \mathbf{u}) dt, \quad (10)$$

where  $\Phi$  is some given function is also needed to define the requirements to the transients.

Using the relations (9), (10) to define the requirements to the qualities of the transients will allow to consider the different kinds of such requirements including the minimal time of the transients, the minimal supplied power to realize the necessary given transients and others. It will not be discussed in this research because we will try to propose the generalized numerical approaches for solving the problem about the optimal control of the heat conduction processes independently to the kind of the particular formulations. Thus, we can give the generalized formulation of the problem about the optimal control of the heat conduction processes: the problem about the optimal control of the heat conduction processes is in finding the control vector  $\mathbf{u}$  allowing to transform the current temperature state (3) to the required temperature state (7) so that it control vector provide the qualities (9), (10) of the transients under the limitations (8) on the temperature state (1)-(6). It is clearly understood, the initial and boundary conditions (3)-(6) must satisfy some requirements providing the existence of the unique solution of the initial-boundary-value problem (1)-(6). The required temperature field (7) also cannot be arbitrary because this temperature field must be permissible for realizing. At the same time, all these restrictions are not discussed above. Nevertheless, the presented above formulation (1)-(6) includes all necessary items to represent

the principal idea of the numerical approaches will be considered next. Some of the restrictions necessary to provide numerical solving of the problem will be specified next if necessary.

### 3. The generalized approach for numerical solving the problem

The engineering applications of the optimal control the heat conduction processes require the numerical approaches because the analytical approaches are possible in limited numbers of the particular cases and are not applicable for all possible cases. Next, we will consider the principal ideas of some approach which will allow in principle to solve numerically the problem about the optimal control for the heat conduction processes. It is understood that each particular realization of these principal ideas can include some specific difficulties will be different for each considered particular problem and these difficulties cannot be foresaw under considering the general formulation of the problem. Thus further, we will consider actually the principal ideas of the numerical approach taking into account the difficulties of solving the problem about the optimal control principally inherent from the considered heat conduction processes, but we will not take into account the possible particular features.

To propose the numerical approach it is necessary to understand that the most principal difficulties of the optimal control of heat conduction processes are due to the partial differential equation representing the model of these processes by means the initial-boundary-value problem (1)-(6). Considering this circumstance, first principal idea of the proposed approach to numerical solving is to reduce the partial differential equation (2) to the ordinary differential equations. To do this, it is possible to use the different known approaches, but we will use the well-known method of grids. Following this method, we will introduce the grid as the set of predefined  $n$  nodal points of the considered domain defined by the following radius vectors:

$$\mathbf{r}_k \in \Upsilon \cup \nu, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

where  $\mathbf{r}_k$  is the radius vector defining the nodal point with the number  $k$ .

To having the grid (11), we can introduce the vector of the nodal values of the temperature:

$$\mathbf{x}_n(t) = (T_1(t) \ T_2(t) \ \dots \ T_n(t))^T, \quad (12)$$

where  $T_k(t) = T(\mathbf{r}_k, t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  and  $T$  is the transpose symbol.

Using the vector (12), and the well-known finite differences technique we can reduce the partial differential equation (2) with the boundary conditions (4)-(6) to the ordinary differential equations with the initial conditions occurring from the initial condition (3) as follows:

$$\frac{d\mathbf{x}_n}{dt} = \mathbf{A}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{B}_n \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}_n(t_{\text{cur}}) = \mathbf{x}_{n(\text{cur})}, \quad (13)$$

where  $\mathbf{A}_n$  and  $\mathbf{B}_n$  is the matrices built by using the finite differences for the initial-boundary-value problem (1)-(6) and the grid (11) and the nodal values (12);  $\mathbf{x}_{n(\text{cur})} = (T_{\text{cur}}(\mathbf{r}_1) \ T_{\text{cur}}(\mathbf{r}_2) \ \dots \ T_{\text{cur}}(\mathbf{r}_n))^T$ .

The discrete representation (13) of the temperature state (1)-(6) is due to the significant assumption about linearity of the initial-boundary-value problem (1)-(6). Thus, we have the ordinary differential equations with the initial conditions (13) representing the discretisation of the initial-boundary-value problem (1)-(6). Due to this circumstance, we can solve numerically the Cauchy problem (13) by using any known numerical method, like the Runge-Kutta methods, for all given control vectors  $\mathbf{u}$ . At the same time, the problem about the optimal control is in finding the optimal control which will allow transforming the current state (3) to the required state (7) under the limitation (8) and providing the optimal transient (9), (10). Thus, the grid (11) and the nodal values (12) will allow to reduce the condition (7), the limitation (8) and the requirement (9), (10) to the transients to the following views respectively

$$\mathbf{x}_n(t_{tr}) = \mathbf{x}_{n(req)}, \tag{14}$$

$$\Theta_n(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{u}(t)) = 0 \quad \forall t \geq t_{cur}, \tag{15}$$

$$\varphi_n \rightarrow \min : \varphi_n = \int_{t_{cur}}^{t_{tr}} \Phi_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}) dt, \tag{16}$$

where  $\mathbf{x}_{n(req)} = (T_{req}(\mathbf{r}_1) T_{req}(\mathbf{r}_2) \dots T_{req}(\mathbf{r}_n))^T$ ;  $\Theta_n$  and  $\Phi_n$  are the discrete representations of the relation (8) and (9), (10) respectively.

The problem about the optimal control of the heat conduction processes is reduced to the finding the optimal control  $\mathbf{u}$  which will allow transforming the current state defined by the initial condition (13) to the required state (14) under the limitation (15) and providing the optimal transient (16) for the temperature state defined by the Cauchy problem (13). We must find the control vector  $\mathbf{u}$  as the function of the time  $t$ , but the most general approach to find some unknown function is to formulate the ordinary differential equation and the initial conditions so that this unknown function will be the solution of the corresponding Cauchy problem because it is possible to use the well-known numerical methods for to solve that problem. Thus, second principal idea of the proposed numerical approach to solving the problem about the optimal control of the heat conduction processes is in defining the unknown control vector as the solution of the follows Cauchy problem:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{p}(t, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(t_{cur}) = \mathbf{u}_{cur}, \tag{17}$$

where  $\mathbf{p}$  is some function defining the permissible velocity of the control vector and  $\mathbf{u}_{cur}$  is the permissible control vector at the time moment  $t = t_{cur}$ .

It is naturally, finding the control vector by solving the Cauchy problem (17) requires having the permissible velocity  $\mathbf{p}$  and the permissible initial  $\mathbf{u}_{cur}$  of the control vector  $\mathbf{u}$ . To find the initial permissible control vector  $\mathbf{u}_{cur}$  we will use the condition (15) which will be reduced using the initial conditions from the Cauchy problems (13) and (17) as follows:

$$\Theta_n(\mathbf{x}_{n(cur)}, \mathbf{u}_{cur}) = 0. \tag{18}$$

The relation (18) will allow building the equations necessary to find the initial permissible control vector  $\mathbf{u}_{\text{cur}}$ , but view of these equations and technique of their building is significantly defined by the view of the relation (18) predefined by the constraint (15). It seems, to find the initial permissible control vector  $\mathbf{u}_{\text{cur}}$  the relation (18) in general can be resolved approximately only and the least squares method can be used for it because it will allow to have the necessary number of the equations. In some particular cases the relation (18) will give directly the necessary equations necessary to find exactly the control vector  $\mathbf{u}_{\text{cur}}$  as will be shown further on the considered example. To find the permissible velocity  $\mathbf{p}$  of the control vector we will use the the condition (15), but it had been especially transformed as follows:

$$\frac{\partial \Theta_n}{\partial \mathbf{x}_n} \frac{d\mathbf{x}_n}{dt} + \frac{\partial \Theta_n}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0 \quad \forall t \geq t_{\text{cur}}. \quad (19)$$

Taking into account the relation (19), we can suppose that

$$\frac{\partial \Theta_n}{\partial \mathbf{x}_n} = \mathbf{v}_n^T(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}), \quad \frac{\partial \Theta_n}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{w}_n^T(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}), \quad (20)$$

where  $\mathbf{v}_n$  and  $\mathbf{w}_n$  are some vector functions.

The introduced vector functions (20) allow having the suitable representing the relation (19) and it will help formulating the condition to find the permissible velocity of the control vector:

$$\mathbf{v}_n^T(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}) \frac{d\mathbf{x}_n}{dt} + \mathbf{w}_n^T(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}) \mathbf{p} = 0 \quad \forall t \geq t_{\text{cur}}. \quad (21)$$

The reduced relation (21) allows to build all necessary equations to approximately find the permissible velocity  $\mathbf{p}$  of the control vector by using the least squares method in a general case. Really, the least squares method will lead to the linear algebraical equations:

$$(\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_n^T) \cdot \frac{d\mathbf{x}_n}{dt} + (\mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_n^T) \cdot \mathbf{p} = 0 \quad \forall t \geq t_{\text{cur}}. \quad (22)$$

Solution of the linear algebraical equations (22) can be represented by using the inverse matrix as follows:

$$\mathbf{p} = -(\mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_n^T)^{-1} \cdot (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_n^T) \cdot \frac{d\mathbf{x}_n}{dt} \quad \forall t \geq t_{\text{cur}}. \quad (23)$$

It is clearly understood that the permissible velocity  $\mathbf{p}$  of the control vector from the differential equation (17) is defined by the relation (23) considering with the Cauchy problem (13), which will allow defining the vectors  $\mathbf{x}_n$  and  $\frac{d\mathbf{x}_n}{dt}$  for the given time  $t$  and the given control vector  $\mathbf{u}$ .

The control vector defined by the Cauchy problem (17) will allow infinite changing the temperature state not violating the limitation (15), if the velocity of this control vector will be defined by the relations (23) with the Cauchy problem (13) and the initial control vector will be defined by the relation (18). At the same time, it is not required to change the temperature state infinitely, but it is

required to change the temperature state finitely to the given state defined by the relation (14). Thus, in some time moment  $t = t_{sw}$  it is necessary to change the velocity of the control vector and this changing can be imagined as switching. To find the switching time  $t_{sw}$ , it is necessary first of all to define the required control vector and to do this we will use the mathematical model (13) of the temperature state as well as the required temperature state defined by the condition (14). As the result of all this, we can write the condition for defining the required control vector providing the required temperature state (14) as follows:

$$\mathbf{A}_n \mathbf{x}_{n(\text{req})} + \mathbf{B}_n \mathbf{u}_{\text{req}} = 0, \tag{24}$$

where  $\mathbf{u}_{\text{req}}$  is the required control vector providing the required temperature state (14).

The permissible kind of the required temperature field  $T_{\text{req}}$  used in the condition (7) was not defined above in the general formulation (1)-(10) of the problem about the optimal control of the heat conduction processes. At the same time, it is obviously, that the required temperature field cannot be arbitrary and must providing the unique solution of the considered problem including. Let assume, that the required temperature field is such so it is existed the unique control vector  $\mathbf{u}_{\text{req}}$  will be satisfied the relation (24). This assumption can be imagined as the principal possibility of providing the required temperature field (7) represented thru its discretisation (14) by means the control vector  $\mathbf{u}$ . Let define the time moment  $t = t_{sw}$  so to satisfy the follows condition:

$$\mathbf{v}_n^T(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}) \frac{d\mathbf{x}_n}{dt} + \mathbf{w}_n^T(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}) (\mathbf{u}_{\text{req}} - \mathbf{u}) \delta(t - t_{sw}) = 0, \tag{25}$$

where  $\mathbf{x}_n$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\frac{d\mathbf{x}_n}{dt}$  are all defined at the time moment  $t = t_{sw}$   $\delta$  is the Dirac function.

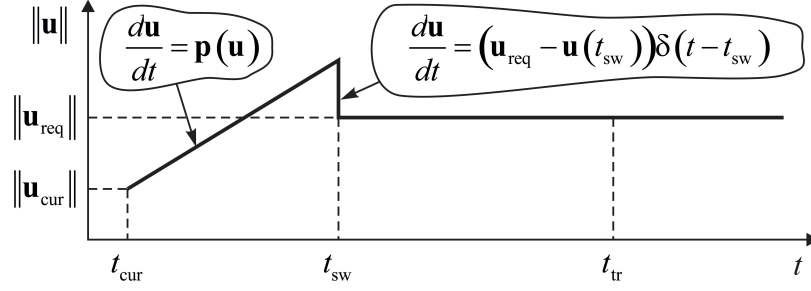
Using the relations (24), (25) we can formulate the third principal idea of the proposed approach to solve the problem about the optimal control of the heat conduction processes. This third principal idea is to satisfy the limitation (15) and the condition (14) defining the required temperature state by formulating the Cauchy problem to find the control vector as follows (pic. 2):

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \begin{cases} \mathbf{p}(t, \mathbf{u}), & t_{\text{cur}} \leq t \leq t_{sw} \\ (\mathbf{u}_{\text{req}} - \mathbf{u}) \delta(t - t_{sw}), & t > t_{sw} \end{cases}, \quad \mathbf{u}(t_{\text{cur}}) = \mathbf{u}_{\text{cur}}. \tag{26}$$

The switching time  $t_{sw}$  involved to the differential equation (26) is defined thru the relation (25) of course, and it is naturally to suppose that this relation (25) will allow finding the set of the time moments  $t_{sw}$  which are the set of the discrete or continuous values in some interval:

$$t_{sw}^{\min} \leq t_{sw} \leq t_{sw}^{\max}, \tag{27}$$

where  $t_{sw}^{\min}$  and  $t_{sw}^{\max}$  are some minimum and maximum values of the switching times  $t_{sw}$  satisfying the relation (25).



Pic. 2. Defining the velocity of the control vector

Solving numerically the Cauchy problem (26), we can choose the switching time  $t_{sw}$  arbitrary from the interval (27) and we will can estimating the transient time  $t_{tr}$  corresponded this choice. Thus, by numerical solving the Cauchy problem (26) for the different chosen switching times  $t_{sw}$ , we can build the function:

$$t_{tr} = t_{tr}(t_{sw}). \quad (28)$$

This function (28) with the requirement (16) to the transients will allow to have the follows function:

$$\varphi_n = \varphi_n(t_{sw}). \quad (29)$$

Fourth principal idea of the proposed numerical approach to solve the problem about the optimal control the heat conduction processes is to minimize the approximately built function (29) inside the interval (27).

#### 4. Example about the optimal control of the heat conduction

The discussed above generalized numerical approach to solve the problem about the optimal control the heat conduction processes is included only the principals ideas, but somethings are not fully presented, because it can be specified only considering to the each particular problem. Really, the approaches for defining of the permissible velocity using the relation (21), the required control vector using the relation (24) as well as the switching time from the relation (26) is not clear from the presented above principle ideas. Such approaches can have the differences for each particular case, but the proposed general scheme based on the discussed above the principal ideas is same for the different kinds of the problems about the optimal control the heat conduction processes. The follows example will show the possible application of the discussed above principal ideas as well as influencing the particulars on the solving process.

As example, we will consider the problem about the optimal control of heating-up the planar wall (pic. 3a) representing the typical structures of the thermal and nuclear power plants. We will assume that the heat flow is existed only along the direction of the plane wall thickness, the initial temperature field of the planar wall is uniform, the temperature state of the planar wall is controlled by the temperature of one edge of this wall, but second edge has the thermal isolation

(pic. 3a). Corresponding these assumptions, the temperature field  $T = T(z, t)$  is depended on the  $z$  coordinate along the thickness of the plane wall (pic. 3a) and on the time  $t \geq 0$ , and the generalized mathematical formulation of the problem (1)-(6) will be reduced to the follows [12]:

$$\Upsilon : 0 < z < l, \quad v_T : z = 0, \quad v_q : z = l, \quad v_\alpha = \emptyset, \quad (30)$$

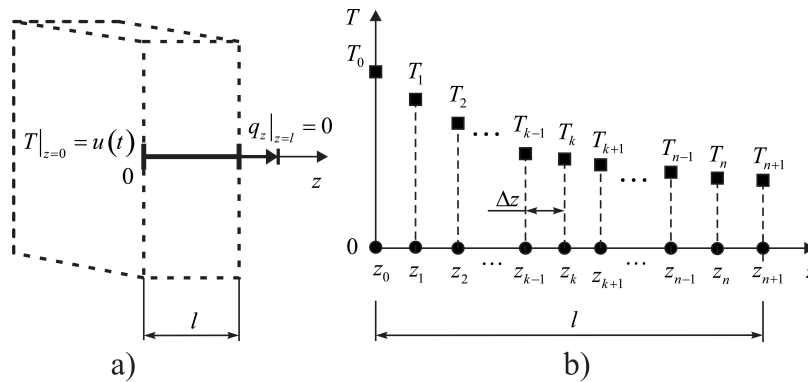
$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad \forall 0 < z < l, \quad t > 0, \quad (31)$$

$$T(z, 0) = T_{\text{cur}}, \quad \forall 0 < z < l, \quad (32)$$

$$T(z, t) = u(t), \quad z = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(z, t) = 0, \quad z = l, \quad \forall t \geq 0, \quad (34)$$

where  $l$  is the thickness of the planar wall (pic. 3a);  $a$  is the temperature conduction coefficient of the structural material of the planar wall;  $T_{\text{cur}} = \text{const}$  is the given current temperature at the time moment  $t = 0$ ;  $u$  is the control.



Pic. 3. The planar wall (a) and discretisation of their temperature state (b)

Further, we will find the control  $u$  so that in the some undefined time moment  $t = t_{\text{tr}}$  the temperature field of the considered planar wall will become to given:

$$T(z, t_{\text{tr}}) = T_{\text{req}} \quad \forall 0 \leq z \leq l, t \geq t_{\text{tr}}, \quad (35)$$

where  $T_{\text{req}} = \text{const}$  is the given required temperature so that  $T_{\text{req}} > T_{\text{cur}}$ .

During the times  $0 \leq t \leq t_{\text{tr}}$  corresponding to the transients between the current and required temperature states it is necessary satisfying the strength restriction which can be represented for the planar wall as follows:

$$|u(t) - T(l, t)| \leq \frac{2[\sigma]}{E\beta} \quad \forall t \geq 0, \quad (36)$$

where  $[\sigma]$ ,  $E$  and  $\beta$  are the the given permissible stress, the Young's modulus and the temperature expansion coefficient of the structural material of the planar wall.



The nature of the strength restriction (36) is not for discussing in this research, but it is necessary to note that this restriction (36) represents limiting of the temperature stresses on the planar wall with the fixed edges  $z = 0$  and  $z = l$  under the temperature field with the linear distribution along the thickness.

The requirement (9), (10) on the transients will be reduced in this example to one of interesting particular cases corresponding to the high speed performance problem:

$$t_{tr} \rightarrow \min. \quad (37)$$

Thus, we have the enough correspondence between the generalized formulation (1)-(10) and the considered particular example (30)-(37).

Following the proposed approach, we will introduce the grid with  $n$  nodes inside the interval  $0 < z < l$  as show on pic. 3b; this grid will have the  $n+2$  nodes with the coordinates which will allow introducing the temperature nodes values:

$$z_k = k \cdot \Delta z, \quad T_k(t) = T(z_k, t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, n+1, \quad (38)$$

where  $z_k$  is the coordinate of the grid node and  $T_k$  is the nodal value of the temperature all corresponded with the grid node number  $k$ ;  $\Delta z = \frac{l}{n+1}$  is the step of the grid.

We will use the follows well-known formulas for approximate differentiating:

$$\frac{\partial^2 T_k}{\partial z^2} = \frac{T_{k-1} - 2T_k + T_{k+1}}{\Delta z^2}, \quad \frac{\partial T_k}{\partial z} = \frac{3T_k - 4T_{k-1} + T_{k-2}}{2\Delta z}. \quad (39)$$

The boundary condition (33) and second formula (39) with the boundary condition (34) allows to write:

$$T_0 = u, \quad T_{n+1} = \frac{4}{3}T_n - \frac{1}{3}T_{n-1}. \quad (40)$$

First formula (39) can be used for the "internal" nodes  $k = 1, 2, \dots, n$  only, but and formula (17) is used to exclude the temperature  $T_{n+1}$  in the equation for the  $k = n$  node. As the result, we will obtain the discrete approximation of the heat conduction problem (30)-(34) in the form (13) in which we will have [12]

$$\mathbf{x}_n(t) = (T_1(t) \ T_2(t) \ \dots \ T_n(t))^T, \quad \mathbf{u} = (u), \quad (41)$$

$$\mathbf{A}_n = \frac{a}{\Delta z^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

$$\mathbf{B}_n = \frac{a}{\Delta z^2} (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \quad (43)$$

$$\mathbf{x}_{n(\text{cur})} = ( T_{\text{cur}} \ T_{\text{cur}} \ \dots \ T_{\text{cur}} )^T. \quad (44)$$

Thus, we have the discrete approximation (38)-(44) of the considered heat conduction process (30)-(34) and this discrete approximation (38)-(44) is the similar to the general representation was discussed previously in the proposed approach. Using the discrete approximation (38)-(44) of the considered heat conduction process, we can reduce the conditions (35), (36) regarding the general approach as follows:

$$\mathbf{x}_{n(\text{req})} = ( T_{\text{req}} \ T_{\text{req}} \ \dots \ T_{\text{req}} )^T, \quad (45)$$

$$|u(t) - (\frac{4}{3}T_n(t) - \frac{1}{3}T_{n-1}(t))| \leq \frac{2[\sigma]}{E\beta} \quad \forall t \geq 0. \quad (46)$$

It seems, the condition (46) is not same kinds than the considered above relation (18), but we show that the condition (46) will be reduced to the view (18). Really, from the physical sense of the considered particular problem we have  $u(t) \geq (\frac{4}{3}T_n(t) - \frac{1}{3}T_{n-1}(t))$ . Besides, corresponding to the high speed performance problem (37), we can to reduce the inequality in the relation (46) to the equality. As the results of all these, we can reducing the relation (46) to the follows view:

$$u(t) - (\frac{4}{3}T_n(t) - \frac{1}{3}T_{n-1}(t)) = \frac{2[\sigma]}{E\beta} \quad \forall t \geq 0. \quad (47)$$

The condition (47) is the same kind that the condition (18). Defining the required control  $\mathbf{u}_{\text{req}}$  is significantly simpler in this considering example comparing the general case (24):

$$u_{\text{req}} = T_{\text{req}}. \quad (48)$$

Using the condition (47) with the relation (48), and we can beginning to build the resolving Cauchy problem generally represented above as (26). In this considering example, the resolving Cauchy problem generally represented as (26) will be reduced to one ordinary first order differential equation with the initial condition:

$$\frac{du}{dt} = \begin{cases} \mathbf{w}_n^T \frac{d\mathbf{x}_n}{dt}, & 0 \leq t \leq t_{\text{sw}}, \\ -\gamma (u(t_{\text{sw}}) - u_{\text{req}}) e^{\gamma(t_{\text{sw}}-t)}, & t > t_{\text{sw}} \end{cases}, \quad u(0) = \frac{2[\sigma]}{E\beta} + T_{\text{cur}}, \quad (49)$$

where  $\mathbf{w}_n^T = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ -1/3 \ 4/3)$ ;  $\gamma = 10$  is some numerical parameter used for the exponential approximating of the Dirac function.

The Cauchy problem (49) in this considered example is principally similar to the Cauchy problem (26) in the general case. At the same time, it is necessary to define the switching time  $t = t_{\text{sw}}$  in the Cauchy problem (49). To do this, we will use the analogue of the relation (25) which in this particular example can having the follows view:

$$T(z_m, t_{\text{sw}}) = T_{\text{req}}, \quad (50)$$

where  $m$  is the integer number can be chosen as  $m = 0, 1, 2, \dots, n, n + 1$ .

The correspondence between the particular relation (50) and its general representation (25) is really not clear at once, but it can be understood that the relation (50) will satisfy the general formulated relation like (50) from the physical meaning of the considered problem and it will be shown on the computational results. In any case, we can use any of the relation (50) corresponding to any value  $m = 0, 1, 2, \dots, n, n + 1$  and to have the numerical solution of the Cauchy problem defined through the relations (13), (41)-(44), (49), (50). As a result of having such numerical solutions, we can find the transient time  $t_{tr}$  for any values  $m = 0, 1, 2, \dots, n, n + 1$ :

$$t_{tr} = t_{tr}(m), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n, n + 1. \quad (51)$$

Thus, to solve the problem about the optimal control in this particular case of the high speed performance problem (37) it is necessary to minimize the numerically built function (51).

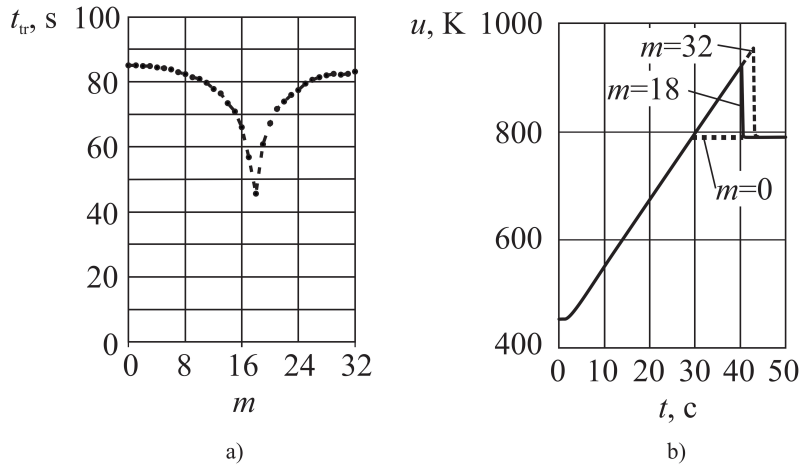
Further, we will consider some results of computer simulations for the following input data:

$$\begin{aligned} a &= 15 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}, l = 0,02 \text{ m}, T_{cur} = 290 \text{ K}, T_{req} = 790 \text{ K}, \\ \beta &= 10^{-5} \text{ 1/K}, E = 195 \text{ GPa}, [\sigma] = 160 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad (52)$$

To make the computer simulations we will use the well-known and widely used 4 order Runge-Kutta method. All further shown and discussed results are corresponded to the count  $n$  internal grid nodes (see pic. 3b) and to the fixed time integrating step  $\Delta t$  which are defined as follows:

$$n = 31, \quad \Delta t = 0,01 \text{ s}. \quad (53)$$

Some results of computer simulations using the proposed numerical approach are presented on the pic. 4. The fastest heating up of the planar wall is provided for the optimal control  $u$  corresponding to the value  $m = 18$  as shown on the pic. 4a. We can see (pic. 4a) that the minimal value  $t_{tr}$  corresponding to the optimal control  $u$  with the value  $m = 18$  is approximately twice smaller than the worse results, corresponded to the controls with the values  $m = 0$  and  $m = 32$ , and this circumstance illustrates the possible effect of optimization the control for industries applications. The differences between the optimal control  $u$  corresponded to the value  $m = 18$  and the worse controls  $u$  with the values  $m = 0$  and  $m = 32$  can be imagined from the pic. 4b. We can see that the control  $u$  corresponding to the value  $m = 0$  is worse due to premature stopping of increasing the temperature on the edge  $z = 0$ , but the control  $u$  corresponding to the value  $m = 32$  is worse due to latecomer stopping of increasing the temperature on the edge  $z = 0$ ; the optimality of the control  $u$  corresponded to the value  $m = 18$  is due to choosing the optimal moment of stopping of increasing the temperature on the edge  $z = 0$ . It is obviously, the optimization result is significantly depended on the value  $n$  of the grid's nodes, but the values (53) are seemed as sufficient in this research to show the technique of using the proposed generalized approaches.



Pic. 4. The optimizing process (a) and some of possible controls (b)

## 5. Conclusions

This research allow to represent and to generalize the results obtained during last three years, including the previous published results [12].

- It was proposed the generalized mathematical formulation of the problem about the optimal control for the heat conduction processes represented by the partial differential equation. At the same time, the proposed formulation not includes the necessary clarifications about the conditions which must be satisfied by the current and the required temperature fields, because it was difficult to imagine the possible origin of such conditions. Nevertheless, during the further generalized solving the formulated problem, it was established that the current and required temperature fields must be agreed with the mathematical model of the heat conduction processes so that to have possibilities to provide uniquely these temperature fields by means the control vector. It is necessary to carefully research this further.


- To solve the problem about the optimal control for the heat conduction processes it was developed the numerical approaches based on reducing to the especially built ordinary differential equations and minimization problem. This reducing is based on discretisation the heat conduction problem and on defining the unknown control vector as the numerical solution of the especially built Cauchy problem. To satisfy all limitations it is proposed to build the permissible velocity of the unknown control vector considering with the requirements of necessary switching in some moments of the time. The proposed approach includes some particulars which cannot be discussed for the generalized formulations and must be resolved for each particular case. Considering these circumstances, it is necessary to clarify further the proposed numerical approach to provide the most universal satisfying the current and required temperature fields as well as the restrictions on the transients.


• The particular example of using the developed approaches will be considered to illustrate the application technique. It was shown that the proposed generalized mathematical formulation is fully corresponded with the considered particular example. It seems that uniform temperature fields used to define the current and required states allow having the possibilities in providing uniquely these temperature fields by means the control vector in most particular cases. It is shown that the resolving Cauchy problem can be built and the switching time can be found in the depending on the grid node choosing in this considered example. The minimization of the optimum defining parameter was reduce to finding the minimum element of the array built by numerical integrating the resolving Cauchy problems corresponded to the different possible switching times of the control. It was shown that the transient time can be decrease almost twice due to optimizing the control in the particular example at least.

All these results will allow to give the clear representation of the proposed approaches and the technique of their using to solve the engineering problems about the optimal control of the heat conduction processes in different industrial systems.

**Acknowledgement.** Authors thank to docent Yevhen Druzhinin from the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute" for his interest to this research at the beginning state was three years ago, because some his comments were significantly helpful to understand how to solve the particular example and how to formulate further the general approach.

#### ORCID ID

I. Sh. Nevliudov  <https://orcid.org/0000-0002-9837-2309>

Yu. V. Romashov  <https://orcid.org/0000-0001-8376-3510>

#### REFERENCES

1. M. Hultgren, E. Ikonen, J. Kovacs. Integrated control and process design in CFB boiler design and control - application possibilities, IFAC-PapersOnLine, – 2017. – **50**, **1**. – P. 1997-2004. DOI: 10.1016/j.ifacol.2017.08.180
2. R. Seeber, M. Golles, N. Dourdoumas, M. Horn. Reference shaping for model-based control of biomass grate boilers, Control Engineering Practice, – 2019. – **82**. – P. 173-184. DOI: 10.1016/j.conengprac.2018.10.006
3. I. Cabeza-Gil, B. Calvo, J. Grasa, C. Franco, S. Llorente, M. A. Martinez. Thermal analysis of a cooking pan with a power control induction system, Applied Thermal Engineering, – 2020. – **180**. – 115789. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2020.115789

4. M. Pondini, A. Signorini, V. Colla, S. Barsali. Analysis of a simplified Steam Turbine governor model for power system stability studies, *Energy Procedia*, – 2019. – **158**. – P. 2928-2933. DOI: 10.1016/j.egypro.2019.01.953
5. K. Kalimeris, T. Ozsari. An elementary proof of the lack of null controllability for the heat equation on the half line, *Applied Mathematics Letters*, – 2020. – **104**. – 106241. DOI: 10.1016/j.aml.2020.106241
6. C. Letrouit. From internal to pointwise control for the 1D heat equation and minimal control time, *Systems & Control Letters*, – 2019. – **133**. – 104549. DOI: 10.1016/j.sysconle.2019.104549
7. L. Berrahmoune. A variational approach to constrained null controllability for the heat equation, *European Journal of Control*. – 2020. – **52**. – P. 42-48. DOI: 10.1016/j.ejcon.2019.09.006
8. C. Laurent, L. Rosier. Exact controllability of semilinear heat equations in spaces of analytic functions, *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non lineaire*, – 2020. – **37**, **4**. – P. 1047-1073. DOI: 10.1016/j.anihpc.2020.03.001
9. A. Schaum, T. Meurer. Dissipativity-based output-feedback control for a class of semilinear unstable heat equations, *IFAC-PapersOnLine*, – 2019. – **52**, **16**. – P. 316-321. DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.11.798
10. P. Lissy. The cost of the control in the case of a minimal time of control: The example of the one-dimensional heat equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, – 2017. – **541**, **1**. – P. 497-507. DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.01.096
11. V. I. Korobov. Time Optimality for Systems with Multidimensional Control and Vector Moment Min-Problem, *Journal of Dynamical and Control Systems*, – 2020. – **26**. – P. 525-550. DOI: 10.1007/s10883-019-09465-2
12. I. Sh. Nevliudov, Yu. V. Romashov. The semi-discretisation method for optimizing the program control of distributed parameters systems, *Bulletin of Zaporizhzhia National University. Physical and Mathematical Sciences*, – 2020. – **1**. – P. 64-71. DOI: 10.26661/2413-6549-2020-1-08 (in Ukrainian).

**Обчислювальний підхід щодо оптимального управління процесами лінійної теплопровідності**

Невлюдов І. Ш.<sup>1</sup>, Ромашов Ю. В.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Харківський Національний Університет Радіоелектроніки  
проспект Науки, 14, Харків, Україна, 61166*

<sup>2</sup>*Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна  
пл. Свободи, 4, Харків, Україна, 61022*

Запропоновано узагальнене математичне формулювання задачі про оптимальне управління процесами теплопровідності, що визначаються диференціальним рівнянням у частинних похідних. Запропоноване формулювання не включає необхідних

роз'яснень щодо умов, яким повинні відповідати поточні та необхідні температурні поля. Але, в процесі узагальненого розв'язування сформульованої задачі, встановлено, що поточне та необхідне температурні поля повинні бути узгодженими із математичною моделлю теплопровідності таким чином, щоб мати можливість однозначно забезпечити ці температурні поля за допомогою належного вибору вектору управління. Для розв'язування сформульованої задачі про оптимальне управління процесами теплопровідності розроблено обчислювальні підходи, що засновані на зведенні до спеціально побудованих звичайних диференціальних рівнянь та задачі мінімізації. Це зведення засноване на дискретизації проблеми теплопровідності із застосуванням методу сіток та на визначенні невідомого вектора управління шляхом обчислювального розв'язування спеціально побудованої для цього задачі Коші. Для задоволення всіх потрібних обмежень пропонується побудувати допустиму швидкість невідомого вектора управління з урахуванням необхідності перемикання управління в деякі моменти часу. Приклад використання запропонованих узагальнених підходів розглянуто для ілюстрації техніки їхнього застосування. Показано, що запропонована узагальнена математична постановка повністю відповідає розглянутому прикладу. У цьому розглянутому прикладі можна побудувати розв'язувальну задачу Коші, а час перемикання можна знайти у залежності від вибору вузла сітки. Показано, що в розглянутому прикладі перехідний час може зменшуватися майже вдвічі за рахунок оптимізації управління. Усі ці результати дозволяють чітко уявити запропоновані підходи та техніку їхнього використання для розв'язування інженерних задач щодо оптимального управління процесами теплопровідності в різних промислових системах.

*Ключові слова:* управління; моделювання; оптимізація; методи; теплопровідність.

#### **One numerical approach to optimal control the linear heat conduction processes**

I. Sh. Nevliudov<sup>1</sup>, Yu. V. Romashov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Kharkiv National University of Radio Electronics*

*14 Nauky Ave., Kharkiv, 61166, Ukraine*

<sup>2</sup>*V. N. Karazin Kharkiv National University*

*4 Svobody sqr., Kharkiv, 61022, Ukraine*

It is proposed the generalized mathematical formulation of the problem about the optimal control for the heat conduction processes representing by the partial differential equation. The proposed formulation not includes the necessary clarifications about the conditions which must be satisfied by the current and required temperature fields. But, during the generalized solving of the formulated problem, it is established that the current and required temperature fields must be agreed with the mathematical model of the heat conduction so that to have possibilities to provide uniquely these temperature fields by means the control vector. To solve the problem about the optimal control for the heat conduction processes it is developed the numerical approaches based on reducing to the especially built ordinary differential equations and minimization problem. This reducing is based on discretisation the heat conduction by using the grid method and on defining the unknown control vector as the numerical solution of the especially built Cauchy problem. To satisfy the all limitations it is proposed to build the permissible velocity of the unknown control vector considering with the requirements of necessary switching in some moments of the time. The particular example of using the proposed generalized approaches is considered to illustrate their application technique. It is shown that the proposed generalized mathematical formulation is fully corresponded with the considered particular example. In this considered particular example, the resolving Cauchy problem

can be built and the switching time can be found in the depending on the grid node choosing. It is shown that the transient time can be decrease almost twice due to optimizing the control in the particular example at least. All these results will allow giving the clear representation of the proposed approaches and the technique of their using to solve the engineering problems about the optimal control of the heat conduction processes in different industrial systems.

*Keywords:* control; modeling; optimization; methods; heat conduction.

Article history: Received: 16 November 2020; Final form: 19 December 2020;

Accepted: 21 December 2020.



## A study of a quasilinear model of the particles of a suspension that are aggregated and settled in an inhomogeneous field

N. N. Kizilova<sup>1</sup>, S. A. Poslavskiy<sup>1</sup>, V. A. Baranets<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *V. N. Karazin Kharkiv National University  
Svobody sq., 4, 61022, Kharkiv, Ukraine  
s.poslavsky@gmail.com, n.kizilova@gmail.com, cherevko.vita@gmail.com*

A quasilinear system of three differential equations of hyperbolic type, which describes the settling of aggregating particles of a suspension placed in a thin long tube in a field of external forces inhomogeneous along the tube, is studied. The system of equations for mass and volume concentrations and the average size of aggregates in a one-dimensional formulation allows discontinuous solutions. The characteristics of the system correspond to the surfaces of discontinuities, of which the outer one describes the subsidence rate, and the inner one can have a different structure from a simple concentration jump to a jump accompanied by a rarefaction wave and a fan of characteristics at the moving boundary. A detailed study of the conditions for the existence of different types of solutions is carried out. The application of the results for different applied problems is discussed.

*Key words:* differential equations; hyperbolic systems; characteristics; sedimentation; aggregation.

Кізілова Н. М., Пославський С. О., Баранець В. О. **Дослідження квазілінійної моделі осідання частинок суспензії, що агрегують, в неоднорідному полі сил.** Досліджується квазілінійна система трьох диференціальних рівнянь гіперболічного типу, яка описує осідання частинок суспензії, що агрегують. Суспензія поміщена в тонку довгу трубку в неоднорідному уздовж трубки полі зовнішніх сил. Система рівнянь для масових і об'ємних концентрацій і середнього розміру агрегатів в одновимірній постановці допускає розривні розв'язки. Характеристики системи відповідають поверхням розривів концентрацій агрегатів, з яких зовнішня поверхня визначає швидкість осідання, яка може вимірюватися в експериментах, а внутрішня може мати різну структуру від простого стрибка концентрацій до стрибка, який супроводжується хвилею розрідження або віялом характеристик на рухомий нижній границі. Проведено детальне дослідження умов існування різних типів розв'язків. Обговорюється застосування результатів для розв'язання різних прикладних задач.

*Ключові слова:* гіперболічні системи; характеристики; седиментація; агрегація.

Кизилова Н. Н., Пославский С. А., Баранец В. А. **Исследование квазилинейной модели оседания агрегирующих частиц суспензии в неоднородном поле сил.** Исследуется квазилинейная система трех дифференциальных уравнений гиперболического типа, которая описывает оседание агрегирующих частиц суспензии, помещенной в тонкую длинную трубку в неоднородном вдоль трубки поле внешних сил. Система уравнений для массовых и объемных концентраций и среднего размера агрегатов в одномерной постановке допускает разрывные решения. Характеристики системы соответствуют поверхностям разрывов концентраций агрегатов, из которых внешняя поверхность определяет измеряемую в экспериментах скорость оседания, а внутренняя может иметь разную структуру от простого скачка концентраций до скачка, сопровождающегося волной разрежения или веером характеристик на подвижной нижней границе. Проведено детальное исследование условий существования разных типов решений. Обсуждается применение полученных результатов для решения различных прикладных задач.

*Ключевые слова:* гиперболические системы; характеристики; седиментация; агрегация.

*2010 Mathematics Subject Classification:* 35L57, 76T20

## 1. Introduction

As is known, in contrast to solutions of systems of linear differential equations, quasilinear equations of hyperbolic type

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} = B_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

where  $A_{ij}(t, x, u_1, \dots, u_n)$  and  $B_i(t, x, u_1, \dots, u_n)$  is the matrix of coefficients and the vector of the right-hand sides of the system, and the equation  $\det |A_{ij} - \lambda I_{ij}| = 0$ , where  $I_{ij}$  is the unit matrix, has different real roots (characteristic values), with smooth initial data admit discontinuous solutions [1]. Such systems of equations describe wave propagation in multiphase [2] and non-Newtonian fluids [3], filtration in porous media with suffusion [4], kinematic waves in channels and cavities [5], as well as sedimentation of particles in polydisperse suspensions [6, 7, 8]. Investigations of sedimentation models for particles of dilute suspensions go back to the works of Batchelor [9, 10]. For concentrated suspensions, it was shown that in the one-dimensional case the system of equations describing the distribution of concentrations and volumes of settling aggregating (coagulating) particles [6, 7], as well as particles of a polydisperse suspension [8] remains hyperbolic if the Stokes drag coefficient depends on the size and shape of the aggregate, when settling in a field of inhomogeneous force, and with a number of other complications of the original one-dimensional model. Studies of the solvability of problems in the theory of coagulation are of great interest for the theory of differential equations [11], as well as for modern nanosciences, bio and nanotechnologies [12].

In most works, instantaneous stratification of settling particles into a compressible sediment layer (zone III) at the bottom of the sedimentation tube, a zone of settling particles (hindered settling layer, zone II) above it, and an area of a stationary carrier fluid in the upper part of the tube (clear layer, zone I) for both technical [13] and biological [14] suspensions. In this case, the formulation of problem (1) in these cases includes the balance equations for the mass of particles with a mass concentration  $C$  and a carrier liquid with concentrations  $1 - C$  in the form [8, 13, 14]

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C u^1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(1-C)}{\partial t} + \frac{\partial(1-C)u^2}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

where  $u^1$  and  $u^2$  are velocities of the particles and fluid.

The sum of equations (2) with flow impermeability through the bottom of the tube gives the relation

$$u^1 = -(1-C)u_s, \quad (3)$$

where  $u_s = u^1 - u^2$  is the fluid velocity relatively to the aggregate [15].

The velocities  $u^1$  and  $u^2$  can be found from the momentum equations of particles and liquid [14], discrete equations of particle dynamics [16], or by introducing approximations for the coefficient  $u_s(C)$  accounting for the difficulty of flow around settling particles in the zone II. Taking into account the known power-law approximation for the viscosity of the concentrated suspension [17]

$$\mu_{eff} = \mu_0 (1-C)^{1-n}, \quad (4)$$

where  $\mu_0$  is the viscosity of the basic fluid,  $n$  is the empirical coefficient, it was accepted for  $u_s(C)$  [15]

$$u_s(C) = \begin{cases} -u_{s0}(1-C)^n, & C \leq C^*, \\ 0, & C > C^*, \end{cases} \quad (5)$$

where  $u_{s0} = 2(\rho_s - \rho_f)gR^2/9\mu_0$  is the sedimentation rate of spherical particles of radius  $R$  in the basic fluid,  $\rho_s$ ,  $\rho_f$  are the densities of the particles and liquid, respectively,  $g$  is the gravitational acceleration,  $C^*$  is the critical concentration at which the particles form a quasi-solid viscoelastic framework and cannot settle ( $u_s = 0$ , and zone II transforms into zone III); i.e. at the boundary between zones II and III, the condition  $C = C^*$  is satisfied, and it is often assumed for simplicity that  $C^* = 1$ , so that in zone III there is also no movement of the basic fluid [15].

In this simple case, both characteristics are discontinuity lines of particle concentrations [18]

$$\frac{dC}{dT} = 0 \quad \text{along} \quad \frac{dZ}{dT} = \gamma(C) = \frac{\partial F}{\partial C}, \quad (6)$$

where  $\gamma(C)$  is the characteristic equation,  $F = Cv^1(C)$  is the mass flow of the particles,  $Z = z/L$  and  $T = Lu_{s0}/h$  are dimensionless longitudinal coordinate and

time,  $L$  is the height of the sedimentation tube, and the speed of the discontinuity line (Rankine–Hugoniot condition) is

$$c = \frac{F(C^+) - F(C^-)}{C^+ - C^-}, \quad (7)$$

where  $C^+$ ,  $C^-$  are the particle concentrations above and below the discontinuity line.

The first characteristic separates zones I and II; it has a negative slope ( $z = 0$  and  $z = 1$  correspond to the bottom and top of the tube, respectively) and determines the sedimentation rate measured in experiments [2, 3, 5, 6, 8, 14]. The second characteristic is usually called internal [18]; it has a positive slope and can correspond (Fig. 1) either to a jump to maximum packing with the disappearance of zone II and the subsequent cessation of movement in zones I and III ( $C^- = C^*$ , case 1), or a jump  $C^- \neq C^*$  with a subsequent rarefaction wave up to  $C^- = C^*$  (case 2) or a jump with a fan of rarefaction waves (rarefaction fan, case 3). The upper of the characteristics always has the highest speed  $c$  (7), otherwise there will be an intersection of the number of constitutive relations and conditions for the evolutionary character of the discontinuity [1]. As a result, different types of sedimentation curves are obtained (upper dashed lines in Fig. 1a-d).

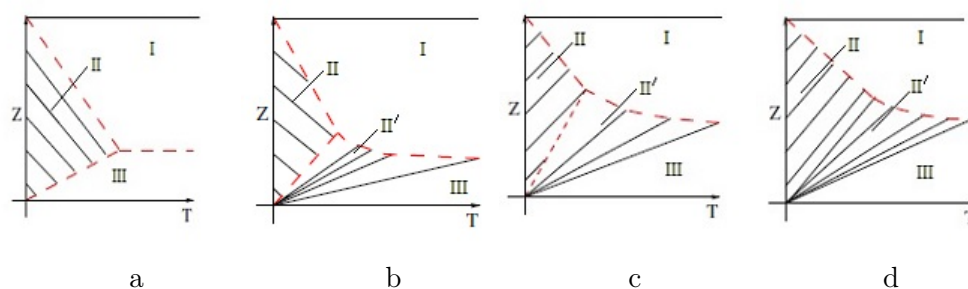


Fig. 1. Different options for internal concentration jump: case 1 (a), case 2 (b, c), case 3 (d) (adapted from [18])

Similar versions of families of characteristics were obtained for a bidisperse suspension [17]. As shown in a recently published article [16], discrete equations of particle dynamics, taking into account all possible forces of interactions between them, after averaging, give the Navier-Stokes equations of a two-phase suspension. Similar calculations on discrete models of a suspension of settling aggregating particles [19] showed good agreement with continual models [6, 8, 14].

In more complex cases, when the particles of the suspension during aggregation can capture a part of the basic fluid, which is then gradually percolate through the porous surface of the aggregate as it settles, the problem is reduced to a hyperbolic system of three differential equations for the mass  $C$  and volume  $H$

concentrations and the average volume  $w$  of the aggregates (Fig. 2a). Many biological microparticles exhibit similar properties, for example, blood erythrocytes (Fig. 2b), polymers, nanoparticles [3, 5], etc.

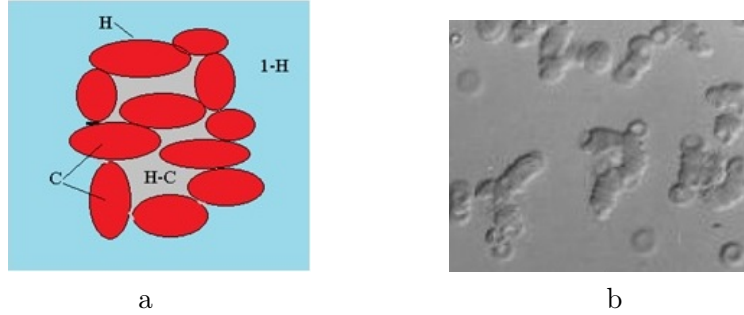


Fig. 2. Structure of the aggregates in a three-phase liquid (a) and in human blood (b).

In this case, in the hyperbolic systems of the form (1), (2) for the variables  $\{C, H, w\}$ , a third family of characteristics appear, the slope of which can be either positive or negative, depending on the parameters of the model [8]. For the case of the aggregating particles in inclined tubes in an inhomogeneous external field, it was shown that other variants of the arrangement of families of characteristics can be added to the possible patterns of characteristics (Figs. 1a-d), which is also confirmed by numerical calculations based on the initial hyperbolic system of the continuum model [8, 20] by the finite volume method [21]. Since the settling of the particles in inclined tubes at certain angles of inclination leads to a significant acceleration of settling and separation of mixtures (Boycotte effect) and is widely used in oil and gas industry [22], biological [14, 23, 24] and nanotechnology [3, 5], the study of such sort of problems is of interest not only for the theory of hyperbolic differential equations, but also for many applied problems. Particle sedimentation in the inhomogeneous field of centrifugal forces makes it possible to accelerate the sedimentation process with the formation of sediments of different variable density, which can be used for additional medical diagnostics in biomedical applications or for the manufacturing of various nanostructured samples of particle-based materials in nanotechnology.

In this paper, a detailed analysis of the mathematical formulation of the sedimentation for a three-phase suspension of aggregating particles [8] in an inhomogeneous field is carried out. The difference of the studied model with similar already known formulations is that the hyperbolic system of differential equations is solved in the region (zone II), which has variable boundaries (characteristics of the 1st and 2nd families), moving at the speeds  $c_1, c_2$ , respectively.

## 2. Description of the mathematical model

The model of the three-phase suspension composed of a free fluid (phase 1), particles (phase 2) and fluid captured inside the aggregates (phase 3) is considered.

The main system of equations has a form [8]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u^2 \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi \frac{w^2}{C},$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \gamma_{11} \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma_{12} \frac{\partial C}{\partial x} + \gamma_{13} \frac{\partial w}{\partial x} = \theta + (1 - H) \frac{\partial u^1}{\partial x}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \gamma_{21} \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma_{22} \frac{\partial C}{\partial x} + \gamma_{23} \frac{\partial w}{\partial x} = -C \frac{\partial u^2}{\partial x},$$

$$\gamma_{11} = u^1 - (1 - H) \frac{\partial u^1}{\partial H}, \quad \gamma_{12} = -(1 - H) \frac{\partial u^1}{\partial C}, \quad \gamma_{13} = -(1 - H) \frac{\partial u^1}{\partial w}, \quad (9)$$

$$\gamma_{21} = C \frac{\partial u^2}{\partial H}, \quad \gamma_{22} = u^2 + C \frac{\partial u^2}{\partial C}, \quad \gamma_{23} = C \frac{\partial u^2}{\partial w},$$

where  $C$  and  $H$  are mass and volumetric concentrations of aggregates,  $w$  is an average volume of aggregate,  $\varphi$  is the aggregation rate,  $u^1, u^2$ , are the phase velocities,  $\theta = \theta^3 / \rho_f$ ,  $\theta^3$  is the rate of the fluid capture during the aggregation.

In the matrix form the system (8)-(9) is:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w \\ H \\ C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u^2 & 0 & 0 \\ \gamma_{13} & \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{23} & \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w \\ H \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\varphi w^2}{C} \\ \theta + (1 - H)k_1 \\ -Ck_2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

where  $k_1 = \frac{\partial u^1}{\partial x}$ ,  $k_2 = \frac{\partial u^2}{\partial x}$ .

The phase velocities are expressed explicitly through the variables  $x, w, H, C$ :

$$u^1 = \left[ -\frac{H(1 - H)}{F} + \frac{(H - C)^2}{D} \right] C(\rho_s - \rho_f)4\pi^2\nu^2(x + a),$$

$$u^2 = \left[ \frac{(1 - H)^2}{F} + \frac{(H - C)^2}{D} \right] C(\rho_s - \rho_f)4\pi^2\nu^2(x + a), \quad (11)$$

$$u^3 = \left[ \frac{(1 - H)^2}{F} + \frac{(H - C)(1 - H + C)}{D} \right] C(\rho_s - \rho_f)4\pi^2\nu^2(x + a),$$

where  $\rho_s, \rho_f$  are physical densities of particles and free fluid,  $\nu$  is a centrifuge rotation frequency,  $a$  is a distance from a disc center to tubes.

Thermodynamic coefficients  $F, D$  are [6]:

$$F = \alpha\eta_f H(1 - H)^{-\eta_1} \left( \frac{H}{C} \right)^{2/3} w^{-2/3},$$

$$D = \beta\eta_f C \left( 1 - \frac{C}{H} \right)^{-\eta_2} w_0^{-2/3}, \quad (12)$$

where  $\alpha, \beta, \eta_1, \eta_2$  are positive constants,  $w_0$  is a volume of one particle,  $\eta_f$  is a fluid viscosity.

This system is hyperbolic with characteristic values of the defining parameters. Therefore, for its analysis and solution the method of characteristics is effective. The characteristic values  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  are:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= u^2 \\ \lambda_{2,3} &= \frac{(\gamma_{11} + \gamma_{22}) \pm \sqrt{(\gamma_{11} - \gamma_{22})^2 + 4\gamma_{12}\gamma_{21}}}{2}\end{aligned}\quad (13)$$

The families of characteristics and corresponding conditions at them are:

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 &= u_s + u_f, \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{2,3} &= u_s + u_f + \frac{1}{2}A \left(1 \pm \sqrt{1 - B/A^2}\right),\end{aligned}\quad (14)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{dw}{dt}\right)_1 &= \varphi \frac{w^2}{C}, \\ \frac{1}{2} \left[ A_1 \left(1 \pm \sqrt{1 - B/A^2}\right) - A_2 \left(1 \mp \sqrt{1 - B/A^2}\right) \right] \times \\ \times \left( \left(\frac{dH}{dt}\right)_{2,3} - \theta - (1 - H)k_1 \right) + \gamma_{12} \left( Ck_2 + \left(\frac{dC}{dt}\right)_{2,3} \right) &= 0,\end{aligned}\quad (15)$$

where

$$u_s = \frac{(1 - H)^2 C (\rho_s - \rho_f) 4\pi^2 \nu^2 (x + a)}{F}, \quad u_f = \frac{(H - C)^2 C (\rho_s - \rho_f) 4\pi^2 \nu^2 (x + a)}{D},$$

$$A_1 = H \frac{\partial u_s}{\partial H} - (1 - H) \frac{\partial u_f}{\partial H}, \quad A_2 = C \frac{\partial u_s}{\partial C} + \frac{\partial u_f}{\partial C}, \quad A = A_1 + A_2,$$

$$B = 4C \left( \frac{\partial u_s}{\partial H} \cdot \frac{\partial u_f}{\partial C} - \frac{\partial u_s}{\partial C} \cdot \frac{\partial u_f}{\partial H} \right).$$

The equations of the first family of characteristics coincide with the equations for the trajectories of solid phase particles (similar to contact characteristics in gas dynamics). Therefore, the boundary separating the area of settling particles from the area occupied by a stationary fluid moves at the speed  $u^2$  of those particles (aggregates) that are on it. In this case, the effective densities and velocities of the phases at this boundary are discontinuous. There is no need to set special jump conditions here, because in the area occupied by the suspension, all parameters are determined by integrating the characteristic equations (by the method of characteristics).

The situation is quite different with the setting of boundary conditions at the boundary of the compact zone. Depending on the relationship between the characteristic speeds and the speed of this boundary, different regimes can be realized.

If this boundary is a strong discontinuity, then corresponding conditions for the limit values must be performed on it when approaching the jump from one side and from the other:

$$\begin{aligned} w_{II} = w_{III}, \quad (1 - H_{III})Z_{II-III} &= (1 - H_{II}) (Z_{II-III} - u_{II}^1), \\ Z_{II-III}C_{III} &= (Z_{II-III} - u_{II}^2) C_{II}, \end{aligned} \quad (16)$$

where  $Z_{II-III}$  is a velocity of the discontinuity.

### 3. Analysis of possible cases

According to the general theory of discontinuous (or generalized, or weak) solutions of systems of quasilinear equations [25, 26], existence of an evolutionary (not decaying into a system of waves) discontinuity is ensured by the following condition. The number of characteristic lines arriving to the same point at the discontinuity surface should be such that, in the problem of small perturbations, the perturbations of all the quantities are uniquely determined from the conditions along these characteristics and the constitutive relations at the discontinuity. For example, if the same hyperbolic system of  $n$  quasilinear equations is satisfied in regions on both sides of the discontinuity, then the number of arriving characteristics from one side and from the opposite should be exactly  $n + 1$ . Indeed, in this case, the number of unknowns is equal to  $2n + 1$  ( $n$  unknown functions on each side of the discontinuity and an unknown speed of it), which means that there should be the same number of equations for their determination. If, however, some additional conditions are fulfilled at the jump, then the number of characteristic lines arriving to the jump should be reduced by the number of conditions.

In the problem under consideration, the situation is somewhat different. The main system of equations (8)-(9) is satisfied only on one side of the discontinuity, and on the other, the state of all phases is considered to be specified (we mean the packing density of aggregates and the volumetric content of fluid in the compact zone, i.e., the values of  $H_{III}$  and  $C_{III}$ ). Only the quantity  $w_{III}$  remains unknown in the compact zone, but it satisfies the condition  $w_{III} = w_{II}$ .

Therefore, for the stability of the discontinuity, it is necessary that the characteristics of two families enter the jump, and only the characteristics of one family are outgoing (Fig. 3). Accordingly, the characteristic velocities and the discontinuity velocity  $Z_{II-III}$  must satisfy the following inequalities:

$$\left( Z_{II-III} - \left( \frac{dx}{dt} \right)_2 \right) \cdot \left( Z_{II-III} - \left( \frac{dx}{dt} \right)_3 \right) < 0. \quad (17)$$



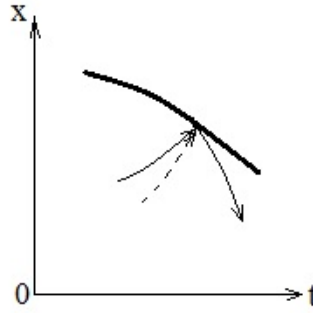


Fig.3. Location of characteristics relative to the strong discontinuity line.


If this condition is not satisfied, then there is no strong discontinuity on the boundary of the compact zone, since it does not satisfy the evolutionary condition and cannot be stable.


But then the structure of the solution should be different. Instead of a strong discontinuity, the transition from zone *II* to zone *III* should be carried out in a more complicated manner. Apparently, in this case, the mathematical model of the studied process of particle sedimentation needs to be revised. At a sufficiently high concentration of aggregates, the relationship between the phase velocities and concentrations described by relations (11) is no longer sufficiently adequate.


#### 4. Conclusions

In this paper, we consider the properties of solutions of a quasilinear hyperbolic system of partial differential equations describing the process of settling and aggregation of particles under conditions of an inhomogeneous field of external forces. We study the conditions for the existence of different types of solutions. The results obtained make it possible to analyze various modes and the influence of model parameters on the sedimentation process. The estimation of the number of incoming and outgoing characteristics for the strong discontinuity between the zone of settling aggregates and the compact zone is carried out. The obtained condition determines the existence and stability of this discontinuity. If it is not satisfied, the mathematical model describing the process of settling and aggregation of suspension particles requires correction. The results obtained can be used to solve various applied problems, in particular, in the field of medicine.

#### ORCID ID

N. N. Kizilova  <https://orcid.org/0000-0001-9981-7616>

S. A. Poslavskiy  <https://orcid.org/0000-0002-1049-9947>

V. A. Baranets  <https://orcid.org/0000-0001-6386-3207>

REFERENCES

1. B. L. Rozhdestvensky. Discontinuous solutions of quasilinear equations systems of hyperbolic type, *Uspekhi of Mathematical Sciences*, – 1960. – V. **15**, **6**(96). – P. 59-117.
2. S.-J. Lee, K.-S. Chang, K. Kim. Pressure wave speeds from the characteristics of two fluids, two-phase hyperbolic equation system, *International Journal of Multiphase Flow*, – 1998. – Vol. **24**. – P. 855-866. doi:10.1016/S0301-9322(97)00089-X
3. A. Farina, L. Fusi, A. Mikelić, G. Saccomandi, et al. *Non-Newtonian Fluid Mechanics and Complex Flows*. 2018. Springer, Cham, 330 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-74796-5>
4. A. Yu. Kuznetsov, S. A. Poslavskiy. Investigation of a mathematical model of the mechanical suffusion, *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, – 2009. – № **875**. – P. 57-68 (in Russian). <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/Vestnik-KhNU-875-2009-kuznietsov.pdf>
5. V. P. Singh. *Kinematic wave modeling in water resources: Surface-water hydrology*. 1996. Wiley, New York, 1424 p.
6. E. S. Losev. Modelling of the aggregating particles sedimentation, *Izvestiya of AN SSSR, Ser. MZhG*, – 1983. – № **3**. – P. 71-78.
7. D. K. Basson, S. Berres, R. Bürger. On models of polydisperse sedimentation with particle-size-specific hindered-settling factors, *Applied Mathematical Modelling*, – 2009. – Vol. **33**. – P. 1815-1835. doi:10.1016/j.apm.2008.03.021
8. V. Baranets, N. Kizilova. Mathematical modeling of particle aggregation and sedimentation in the inclined tubes, *Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, – 2019. – Vol. **90**. – P. 42-59. doi:10.26565/2221-5646-2019-90-03
9. G. K. Batchelor. Sedimentation in a dilute polydisperse system of interacting spheres, Part 1. General theory, *Journal of Fluid Mechanics*, – 1982. – Vol. **119**. – P. 379-408. doi:10.1017/S0022112082001402
10. G. K. Batchelor, C.S. Wen. Sedimentation in a dilute polydisperse system of interacting spheres, Part 2. Numerical results, *Journal of Fluid Mechanics*, – 1982. – Vol. **124**. – P. 495-528. doi:10.1017/S0022112082002602
11. F. P. da Costa, R. Sasportes, Dynamics of a Non-Autonomous ODE System Occurring in Coagulation Theory, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, – 2008. – Vol. **20**. – P. 55-85. doi:10.1007/s10884-006-9067-5

12. E. M. Hotze, T. Phenrat, G. V. Lowry. Nanoparticle Aggregation: Challenges to Understanding Transport and Reactivity in the Environment, *Journal of Environmental Quality*, – 2010. – Vol. **39**. – P. 1909-1924. doi:10.2134/jeq2009.0462
13. R. Bürger. Phenomenological foundation and mathematical theory of sedimentation–consolidation processes, *Chemical Engineering Journal*, – 2000. – Vol. **80**. – P. 177-188. doi:10.1016/S1383-5866(00)00089-7
14. V. A. Levto, S. A. Regirer, N. Kh. Shadrina. Rheology of blood. 1982. Medicine, M., 270 p.
15. R. Dorrell, A. J. Hogg. Sedimentation of bidisperse suspensions, *International Journal of Multiphase Flow*, – 2010. – Vol. **36**. – P. 481-490. doi:10.1016/j.ijmultiphaseflow.2010.02.001
16. J. Zhang, W. Ma. Data-driven discovery of governing equations for fluid dynamics based on molecular simulation, *J. Fluid Mech.*, – 2020. – Vol. **892**, **A5**. – P. 1-15. doi:10.1017/jfm.2020.184
17. J. F. Richardson, W. N. Zaki. The sedimentation of a suspension of uniform spheres under conditions of viscous flow, *Chemical Engineering*, – 1954. – Vol. **3**. – P. 65-78. doi:10.1016/0009-2509(54)85015-9
18. G. J. Kynch. A theory of sedimentation, *Transactions of Faraday Society*, – 1952. – Vol. **48**. – P. 166-176. doi:10.1039/TF9524800166
19. V. A. Baranets, N. N. Kizilova. The discrete simulation and sedimentation of micro- and nanoparticles in suspensions, *Ser. Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems*, – 2018. – V. **40**. – P. 4-14 (in Russian). doi:10.26565/2304-6201-2018-40-01
20. V. Baranets, N. Kizilova. On hyperbolicity and solution properties of the continual models of micro/nanoparticle aggregation and sedimentation in concentrated suspensions, *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Ser. Physics & Mathematics*, – 2019. – N. **4**, – P. 60-64. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/4.7>
21. R. Ruiz-Baiera, H. Torres. Numerical solution of a multidimensional sedimentation problem using finite volume-element methods, *Applied Numerical Mathematics*, – 2015, V. **95**, – P. 280-291. doi:10.1016/j.apnum.2013.12.006
22. T. Peacock, F. Blanchette, J. W. M. Bush. The stratified Boycott effect, *Journal of Fluid Mechanics*, – 2005. – V. **529**. – P. 33-49. doi:10.1017/S002211200500337X
23. L. Derbel. The set of concentration for some hyperbolic models of chemotaxis, *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, – 2007. – V. **4**, N. **2**. – P. 331-349. doi:10.1142/S021989160700115X

24. H. Yan, W.-A. Yong. Stability of steady solutions to reaction-hyperbolic systems for axonal transport, *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, – 2012. – Vol. 9, N. 2. – P. 325-37. doi:10.1142/S0219891612500105
25. I. M. Gelfand. Some problems of the quasilinear equations theory, *UMN*, – 1959. – V. 14, 2 (86). – P. 87-158.
26. G. G. Cherniy. *Gas dynamics*. 1988. Nauka, M., 424 p.

**Дослідження квазілінійної моделі осідання частинок суспензії,  
які агрегують, в неоднорідному полі сил**

Кізілова, Н. М., Пославський, С. О., Баранець, В. О.

*Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна  
пл. Свободи, 4, Харків, Україна, 61022*

Математична модель процесу осідання частинок суспензії зазвичай являє собою квазілінійну гіперболічну систему диференціальних рівнянь, доповнену початковими і крайовими умовами. В даній статті досліджується ускладнена модель, що враховує агрегування частинок і неоднорідність поля зовнішніх масових сил. Розглянуто випадок однорідних початкових умов, коли всі параметри руху, що виникає, залежать тільки від однієї просторової декартової координати  $x$  і від часу  $t$ . На відміну від відомих постановок задач для квазілінійних систем рівнянь (наприклад, в газовій динаміці), розв'язки яких містять сильні розриви, у досліджуваній постановці основна система рівнянь виконується тільки по один бік від лінії розриву в площині змінних  $(t; x)$ . По інший бік від лінії розриву рівняння, взагалі кажучи, мають принципово інший вигляд. Ми обмежуємося вивченням випадку, коли в компактній зоні, зайнятій осілими частинками, ніякого руху немає, тобто усі швидкості дорівнюють нулю і об'ємні частки всіх фаз не змінюються з часом. Розглянуто задачу про седиментацію еритроцитів в полі відцентрових сил в центрифугі, при її рівномірному обертанні з кутовою швидкістю  $\omega = const$ . Проведено дослідження умов існування різних типів розв'язків. Однією з основних є проблема еволюційності (стійкості) виникаючих сильних розривів. Розв'язання цієї проблеми пов'язано з аналізом співвідношень для характеристичних швидкостей і швидкості переміщення поверхні розриву. Відповідь залежить від числа характеристик, що приходять до розриву, і від кількості додаткових умов, що задаються на поверхні розділу. Розрив на нижній межі області, зайнятої чистою плазмою, завжди стійкий. Але для поверхні розриву, що розділяє зони осілих і рухомих частинок, умова еволюційності може порушуватися. В цьому випадку необхідне коригування вихідної математичної моделі. *Ключові слова:* гіперболічні системи; характеристики; седиментація; агрегація.

**A study of a quasilinear model of the particles of a suspension  
that are aggregated and settled in an inhomogeneous field**

N. N. Kizilova, S. A. Poslavskiy, V. A. Baranets

*V. N. Karazin Kharkiv National University,  
4 Svobody sqr., Kharkiv, 61022, Ukraine*

The mathematical model of the sedimentation process of suspension particles is usually a quasilinear hyperbolic system of partial differential equations, supplemented by initial and boundary conditions. In this work, we study a complex model that takes into account the aggregation of particles and the inhomogeneity of the field of external mass forces. The case of homogeneous initial conditions is considered, when all the parameters of the arising motion depend on only one spatial Cartesian coordinate  $x$  and on time  $t$ . In

contrast to the known formulations for quasilinear systems of equations (for example, as in gas dynamics), the solutions of which contain discontinuities, in the studied formulation the basic system of equations occurs only on one side of the discontinuity line in the plane of variables  $(t; x)$ . On the opposite side of the discontinuity surface, the equations have a different form in general. We will restrict ourselves to considering the case when there is no motion in a compact zone occupied by settled particles, i.e. all velocities are equal to zero and the volumetric contents of all phases do not change over time. The problem of erythrocyte sedimentation in the field of centrifugal forces in a centrifuge, with its uniform rotation with angular velocity  $\omega = const$  is considered. We have studied the conditions for the existence of various types of solutions. One of the main problems is the evolution (stability) problem of the emerging discontinuities. The solution of this problem is related to the analysis of the relationships for the characteristic velocities and the velocity of the discontinuity surface. The answer depends on the number of characteristics that come to the jump, and the number of additional conditions set on the interface. The discontinuity at the lower boundary of the area occupied by pure plasma is always stable. But for the surface separating the zones of settled and of moving particles, the condition of evolution may be violated. In this case, it is necessary to adjust the original mathematical model.

*Keywords:* hyperbolic systems; characteristics; sedimentation; aggregation.

Article history: Received: 5 October 2020; Final form: 10 November 2020;  
Accepted: 15 November 2020.

## VLADIMIR MIKHAILOVICH KADETS

*To 60th anniversary*

Vladimir Kadets (Володимир Михайлович Кадець), a Professor of the Department of Pure Mathematics in V. N. Karazin Kharkiv National University, a well-known expert on Banach space theory and a brilliant lecturer, turned 60 on November 15, 2020.



Vladimir was born on November 15, 1960 in Kharkiv. His mother, Diamara Lazarevna, was a researcher at the Institute for Medical Radiology; father, Mikhail Iosifovich, was a mathematician, famous for his outstanding results in Banach space theory, which surely influenced Vladimir's choice of career.

After graduating of V. N. Karazin Kharkiv University in 1982 Vladimir became a PhD student of Naum Samoilovich Landkof in Rostov Civil Engineering Institute. Shortly after defending in 1985 his PhD Thesis, Vladimir obtained an elegant result by constructing a conditionally convergent series with non-convex set of sums in any infinite dimensional Banach space, and hereby obtained a complete solution for Problem 106 from the "Scottish Book". Since then, during some years, rearrangements of series in Banach spaces were one of the favorite topics for Vladimir. The first monograph by V. M. Kadets co-authored with his father was devoted to this topic.

Vladimir traveled a lot collaborating with mathematicians from other countries: Poland, Israel, USA, Italy, Germany, France, Spain, Turkey, South Korea. As a result, the majority of his papers were co-authored with colleagues from the institutions visited by Vladimir. At the end of 20th century V. M. Kadets became interested in the Daugavet equation in Banach spaces. One of the most important papers by Vladimir was published in 2000, co-authored with Roman Shvidkoy, Gleb Sirotkin and Dirk Werner. This paper had radically changed the approach of specialists to investigation of the Daugavet property. Soon afterwards Vladimir started a fruitful long-term cooperation with Spanish mathematicians (Bernardo

---

© S. Ju. Favorov, V. P. Fonf, V. I. Korobov, M. I. Ostrovskii, M. M. Popov,  
A. M. Vishnyakova, A. L. Yampolsky, G. N Zholtkevych., 2020

Cascales, Miguel Martín, Javier Merí and others). Among others, Vladimir jointly with Maria Acosta (Spain) proved a Namioka's hypothesis asserting that, every nonreflexive Banach space admits an equivalent norm with respect to which the set of all norm attaining functionals has empty interior. The second monograph by V. M. Kadets "Spear operators between Banach spaces" co-authored with Spanish colleagues was published in 2018.

Vladimir always enjoyed teaching activities. Since his student years, he liked explaining mathematics to other people. When he became a teacher, this interest was transformed into the exceptional clarity and rigor of his lectures. These qualities attracted students to him, and many of Kharkiv's students in mathematics made their first steps in research under the supervision of V. M. Kadets. He was an advisor of 8 PhD students. The situation in Ukraine in the late 20th century contributed to the fact that some of his students finished their PhD programs in other countries (e.g. D. Bilik, R. Vershynin, R. Shvidkoy).

From 1990 till nowadays V. M. Kadets works in V.N.Karazin Kharkiv National University. In 1992 he passed habilitation in Warsaw "Conditional convergence in infinite-dimensional spaces", and in 2014 – another habilitation in Kharkiv "Banach spaces with the Daugavet property and Banach spaces with numerical index one". During his scientific and pedagogical career Vladimir has got a Kharkiv mathematical society Prize for young researchers (1989), Soros' grants (1995, 1996), Humboldt Research Fellowship (Germany, 1999), State Award of Ukraine in Science and Technology (2005), Séneca Foundation Grant (Spain, 2010), and currently leads a group of mathematicians of his Department which was awarded a grant of the National research foundation of Ukraine.

We congratulate Vladimir with the jubilee, wish him health, creative inspiration for many years and success in his scientific and pedagogical activities.

*S. Ju. Favorov*<sup>1</sup>, *V. P. Fonf*<sup>2</sup>, *V. I. Korobov*<sup>1</sup>, *M. I. Ostrovskii*<sup>3</sup>,  
*M. M. Popov*<sup>4</sup>, *A. M. Vishnyakova*<sup>1</sup>, *A. L. Yampolsky*<sup>1</sup>, *G. N. Zholtkevych*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody sqr., Kharkiv, 61022, Ukraine


<sup>2</sup>Ben Gurion University, Beer Sheva, Israel

<sup>3</sup>St. John's University, 11439, New York, USA


<sup>4</sup>Pomeranian University in Slupsk, 76-200, Slupsk, Poland

**ORCID ID:** S. Ju. Favorov  0000-0001-5135-0279

V. P. Fonf  0000-0002-5335-3278

V. I. Korobov  0000-0001-8421-1718

M. I. Ostrovskii  0000-0002-7164-196X

M. M. Popov  0000-0002-3165-5822

A. M. Vishnyakova  0000-0002-3854-253X

A. L. Yampolsky  0000-0002-7215-3669

G. N. Zholtkevych  0000-0002-7515-2143

## ЙОСИП ВОЛОДИМИРОВИЧ ОСТРОВСЬКИЙ (некролог)

6.04.1934 – 29.11.2020



29 листопада 2020 року після важкої тривалої хвороби пішов з життя видатний математик, член-кореспондент Національної академії наук України Йосип Володимирович Островський.

Йосип Володимирович народився у 1934 році в Дніпропетровську. У 1951 році він вступив до фізико-математичного факультету Харківського університету, де працювали такі відомі математики і педагоги, як Н. І. Ахієзер, Я. П. Бланк, Г. І. Дрінфельд, Б. Я. Левін, В. О. Марченко, О. Я. Повзнер, О. В. Погорелов, А. К. Сушкевич.

У 1956 році Йосип Володимирович вступає до аспірантури до одного з провідних у світі фахівців з комплексного аналізу Б.Я. Левіна, у 1959 захищає кандидатську дисертацію «Зв'язок між зростанням мероморфної функції та розподілом її значень за аргументами».

У 1958 році Й. В. Островський починає працювати в Харківському університеті, з 1963 року він завідує кафедрою теорії функцій цього університету, а у 1965, у віці 31 року, захищає докторську дисертацію «Асимптотичні властивості цілих і мероморфних функцій і деякі їх застосування».

У 1956 році в Харкові почав роботу легендарний семінар Б. Я. Левіна з теорії функцій. Й. В. Островський був активним учасником семінару, а пізніше



разом з Б. Я. Левіним керував його роботою. У 70-х роках Й. В. Островський створив семінар з аналітичних питань теорії ймовірностей.

У 1968 році Йосип Володимирович стає співробітником відділу теорії функцій Фізико-технічного інституту низьких температур АН СРСР, а з 1986 року очолює цей відділ, одночасно працюючи за сумісництвом в Харківському університеті. З 1994 року Йосип Володимирович – професор університету Бількент (Туреччина).

У 1978 році Йосипа Володимировича Островського обирають членом-кореспондентом Академії наук Української РСР (зараз Національна академія наук України).

Опишемо стисло деякі напрямки наукової роботи Й. В. Островського.

На початку наукової діяльності Йосип Володимирович отримав тонкі результати щодо зв'язку зростання мероморфної функції з розподілом її значень по аргументах, які посилили класичні теореми Л. Бібербаха, Р. Неванлінни, М. Г. Крейна, А. Едрея. Сумісно з Б. Я. Левіним Й. В. Островський займався проблемою Поліа-Вімана опису класу цілих дійсних функцій, для яких усі нулі самих функцій і їх похідних є дійсними.

У 60-х роках Йосип Володимирович розпочав дослідження аналітичних питань теорії ймовірностей. Він довів гіпотезу Ю. В. Лінника, тим самим посиливши класичну теорему Марцинкевича. Йосип Володимирович також розробив нові аналітичні методи і отримав вагомні результати в арифметиці ймовірнісних розподілів.

Класикою стали роботи Й. В. Островського і В. О. Марченка з дослідження спектру оператора Хілла. Вони ґрунтуються на параметризації класу дійсних цілих функцій з дійсними  $\pm 1$ -точками конформними відображеннями верхньої півплощини на верхню півплощину з вертикальними розрізами. Ця параметризація відіграє важливу роль в теорії операторів Штурма-Ліувілля і у дослідженнях екстремальних властивостей цілих функцій експоненціального типу.

У 80-х роках Й. В. Островський спільно з А. А. Гольдбергом описали асимптотичну поведінку і розподіл коренів цілих характеристичних функцій скінченного порядку.

Ще один цикл робіт Й. В. Островського був присвячений вивченню класів комплекснозначних борелевих мір на осі, у яких має місце однозначна визначеність звуженнями на піввісь. Ці роботи пов'язані з класичними задачами теорії функцій: теоремою Тітчмарша про згортку, другою основною теоремою Неванлінни-Картана для аналітичних вектор-функцій, факторизацією у класах Гарді та іншими.

У 90-х роках Йосип Володимирович отримує серію результатів у теорії крайової задачі Рімана з нескінченим індексом.

В останні роки Й. В. Островський займався задачами зростання аналітичних функцій і розподілу значень відрізків та лишків їхніх степеневих рядів, питанням зображуваності гармонічних функцій інтегралами типу Пуассона,

зв'язком частоти осциляції функції із гладкістю її перетворення Фур'є, проблемами тотальної і кратної додатності.

Й. В. Островський опублікував більше 150 наукових робіт, він є співавтором двох широко відомих монографій «Распределение значений мероморфных функций» (з А. А. Гольдбергом) та «Разложения случайных величин и векторов» (з Ю. В. Лінником). Його роботи і книги мали істотний вплив на подальший розвиток теорії цілих і мероморфних функцій, аналітичних питань теорії ймовірностей, знайшли застосування в теорії операторів, гармонічному аналізі та інших областях математики.

У 1992 році Й. В. Островський разом з А. А. Гольдбергом і Б. Я. Левіним отримав Державну премію України за роботи з теорії функцій.

Протягом багатьох років Й. В. Островський був Президентом Харківського математичного товариства. З 1966 по 1993 роки він був відповідальним секретарем редколегії журналу «Теорія функцій, функціональний аналіз і їх застосування», пізніше, з 2000 по 2005 роки – головним редактором «Журналу математичної фізики, аналізу, геометрії».

Більш як сорок років Й. В. Островський викладав у Харківському університеті. Багатьом поколінням студентів його лекції запам'яталися дивовижною чіткістю викладу, глибиною проникнення у тему. Для майбутніх викладачів він був блискучим зразком для наслідування. Під керівництвом Й. В. Островського захистили кандидатські дисертації понад 25 його учнів, п'ятеро з них стали докторами наук.

Світла пам'ять про Йосипа Володимировича Островського назавжди залишиться в серцях його вдячних учнів, колег і друзів.

*Вишнякова Г. М., Жолткевич Г. М., Ільїнський О. І., Ільїнська І. П., Каткова О. М., Коробов В. І., Фаворов С. Ю., Ямпольський О. Л.*

**ORCID ID:** A. M. Vishnyakova<sup>1</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-3854-253X>

<sup>1</sup>V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody sqr., Kharkiv, 61022, Ukraine

Article history: Received: 15 December 2020

**Правила для авторів**  
**«Вісника Харківського національного університету**  
**імені В.Н.Каразіна»,**  
**Серія «Математика, прикладна математика і механіка»**

Редакція просить авторів при направленні статей керуватися наступними правилами.

**1.** В журналі публікуються статті, що мають результати математичних досліджень (англійською, українською або російською мовами).

**2.** Поданням статті вважається отримання редакцією файлів статті оформлених у редакторі LATEX (версія 2e), анотацій, відомостей про авторів та архіва, що включає LATEX файли статті та файли малюнків. Файл-зразок оформлення статті можна знайти в редакції журналу та на веб-сторінці (<http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>).

**3.** Стаття повинна починатися з анотацій, в яких повинні бути чітко сформульовані мета та результати роботи. Анотації повинні бути трьома мовами (англійською, українською та російською): першою повинна стояти анотація тією мовою, якою є основний текст статті. В анотації повинні бути прізвища, ініціали авторів, назва роботи, ключові слова та номер за міжнародною математичною класифікацією (Mathematics Subject Classification 2010). Анотація не повинна мати посилань на літературу чи малюнки. На першій сторінці вказується номер УДК класифікації. В кінці статті треба додати розширені (обсягом не менш як 1800 знаків кожна) анотації англійською та українською мовами.

**4.** Список літератури повинен бути оформлений латинським шрифтом. Приклади оформлення списку літератури:

1. А.М. Ляпунов. A new case of integrability of differential equations of motion of a solid body in liquid, Rep. Kharkov Math. Soc., – 1893. – 2. V.4. – P. 81-85.

2. А.М. Ляпунов. The general problem of the stability of motion. 1892. Kharkov Mathematical Society, Kharkov, 251 p.

**5.** Кожний малюнок повинен бути пронумерований та представлений окремим файлом в одному з форматів: EPS, BMP, JPG. В файлі статті малюнок повинен бути вставлений автором. Під малюнком повинен бути підпис. Назви файлів малюнків повинні починатись з прізвища першого автора.

**6.** Відомості про авторів повинні містити: прізвища, імена, по батькові, службові адреси та номери телефонів, адреси електронних пошт та інформацію про наукові профайли авторів ([orcid.org](http://orcid.org), [www.researcherid.com](http://www.researcherid.com), [www.scopus.com](http://www.scopus.com)) з відповідними посиланнями. Прохання також повідомити прізвище автора, з яким треба вести листування.

**7.** Рекомендуємо використовувати в якості зразка оформлення останні випуски журналу ([vestnik-math.univer.kharkov.ua/currentv.htm](http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/currentv.htm)).

**8.** У випадку порушення правил оформлення редакція не буде розглядати статтю.

Електронна скринька: [vestnik-khnu@ukr.net](mailto:vestnik-khnu@ukr.net)

Електронна адреса в Інтернеті: <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>



*Наукове видання*

Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна,  
Серія “Математика, прикладна математика і механіка”, Том 92

Збірник наукових праць

Англійською, українською, російською мовами

Підписано до друку 29.12.2020 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк цифровий.

Ум. друк. арк. 4,5

Обл.– вид. арк. 5,2

Наклад 100 пр.      Зам. № 61/2020

Безкоштовно.

Видавець і виготовлювач Харківський національний університет  
імені В. Н. Каразіна, 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

Видавництво Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна  
тел. 705-24-32