

ISSN 2221-5646 (Print)
ISSN 2523-4641 (Online)

0

• •

« , »

1965 .

91



Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"

Vol. 91

2020

До Вісника включено статті з математичного аналізу, математичної фізики, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних наук, категорія «Б» за спеціальностями 111 - Математика та 113 - Прикладна математика (Наказ МОН України №1643 від 28.12.2019 р.).

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 10 від 23 червня 2020р.).

Головний редактор—Коробов В.І.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ ім. В.Н. Каразіна, Україна

Члени редакційної колегії:

Кадець В.М.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Пацегов М.Ф.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Фаворов С.Ю.—д-р ф.-м. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Єгорова І.Є.—д-р ф.-м. наук, проф., ФТІНТ НАН України

Пастур Л.А.—д-р ф.-м. наук, проф., акад. НАН України, ФТІНТ НАН України

Хруслов Є.Я.—д-р ф.-м. наук, проф., акад. НАН України, ФТІНТ НАН України

Шепельський Д.Г.—д-р ф.-м. наук, проф., ФТІНТ НАН України та

ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Когут П.І.—д-р ф.-м. наук, проф., Дніпровський національний університет

імені Олеса Гончара, м.Дніпро, Україна

Чуйко С.М.—д-р ф.-м. наук, проф., Інститут прикладної математики і

механіки НАН України, м.Слов'янськ, Україна

Домбровський А.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Щецина, Польща

Карлович Ю.І.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Морелос, Мехіко, Мексика

Корбич Йозеф—д-р ф.-м. наук, проф., чл.-кор. ПАН, Університет Зелона Гора, Польща

Нгуєн Хоа Шон—д-р ф.-м. наук, проф., Академія наук та технології В'єтнама,

Інститут математики, Ханой, В'єтнам

Поляков А.І.—д-р ф.-м. наук, проф., ІНРІА Національний дослідницький інститут

інформатики та автоматички, Ле-Шене, Франція

Скляр Г.М.—д-р ф.-м. наук, проф., Університет Щецина, Польща

Солдатов О.П.—д-р ф.-м. наук, проф., Белгородський університет, Росія

Відповідальний секретар — Резуєнко О.В., д-р ф.-м. наук

ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Editor-in-Chief — V.I. Korobov—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Associate Editors:

S.Yu. Favorov—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

V.M. Kadets—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

N.F. Patsegon—Dr. Sci., Prof., V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

I.E. Egorova—Dr. Sci., Prof., B.Verkin Institute for Low Temperature Physics

and Engineering, Ukraine

E.Ya. Khruslov—Dr. Sci., Prof., academician of NASU,

B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine

L.A. Pastur—Dr. Sci., Prof., academician of NASU,

B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Ukraine

D.G. Shepelsky—Dr. Sci., Prof., B.Verkin Institute for Low Temperature Physics

and Engineering, Ukraine

S.M. Chujko—Dr. Sci., Prof., Donbas State Pedagogical University, Ukraine

P.I. Kogut—Dr. Sci., Prof., Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine

Andrzej Dabrowski—Dr. Sci., Prof., University of Szczecin, Poland

Yu. Karlovich—Dr. Sci., Prof., Morelos University, Mexico

Jozef Korbicz—Dr. Sci., Prof., corresponding member of PAS, University of Zielona Gora, Poland

Nguyen Khoa Son—Dr. Sci., Prof., Vietnamese Academy of Science and Technology,

Institute of Mathematics, Hanoi, Vietnam

A.E. Polyakov—Dr. Sci., Prof., INRIA Institut National de Recherche

en Informatique et en Automatique, Le Chesnay, France

G.M. Sklyar—Dr. Sci., Prof., University of Szczecin, Poland

O.P. Soldatov—Dr. Sci., Prof., Belgorod University, Russia

Responsible Editor—A.V. Rezouencko, Dr. Sci., Associate Prof.,

V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Адреса редакційної колегії: 61022, Харків, майдан Свободи, 4, ХНУ імені В.Н. Каразіна,

ф-т математики і інформатики, к. 7-27, т. 7075240, 7075135, **e-mail:** vestnik-khnu@ukr.net

Інтернет: <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>; http://periodicals.karazin.ua/mech_math

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21568-11468 Р від 21.08.2015

©Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, оформлення, 2020

ЗМІСТ

Чоке-Ріверо А. Е., Гонзалес Грасіела А., Круз Муллісака Е. Метод функції керованості Коробова, застосований до стабілізації системи Росслера за обмежений час за допомогою обмежених керувань.	4
Лук'янов П. В. Генерація BVI-шуму крилоподібною лопаттю гелікоптера.	21
Карєва В. В., Львов С. В., Артюхова Л. П. Різні стратегії в процесах регенерації печінки. Чисельні експерименти на математичній моделі.	36
Гордевський В. Д. До 70 – річчя з дня народження.	45
Фаворов С. Ю. До 70 – річчя з дня народження.	47

CONTENTS

A. E. Choque-Rivero, Graciela A. González, E. Cruz Mullisaca. Korobov's controllability function method applied to finite-time stabilization of the Rössler system via bounded controls.	4
P. V. Lukianov. BVI-noise generation by wing-shaped helicopter blade.	21
V. V. Karieva, S. V. Lvov, L. P. Artyukhova. Different strategies in the liver regeneration processes. Numerical experiments on the mathematical model.	36
V. D. Gordevskyy. On his 70th birthday.	45
S. Yu. Favorov. On his 70th birthday.	47

СОДЕРЖАНИЕ

Чоке-Риверо А. Э., Гонзалес Грасиела А., Круз Муллисака Э. Подход функции управляемости Коробова приложенный к стабилизации системы Росслера за конечное время с помощью ограниченных управлений.	4
Лукьянов П. В. BVI-шум крыловидной лопасти ротора вертолѐта.	21
Карева В. В., Львов С. В., Артюхова Л. П. Различные стратегии в процессах регенерации печени. Численные эксперименты на математической модели.	36
Гордевский В. Д. К 70 – летию со дня рождения.	45
Фаворов С. Ю. К 70 – летию со дня рождения.	47

Korobov's controllability function method applied to finite-time stabilization of the Rössler system via bounded controls

Abdon E. Choque-Rivero¹, Graciela A. González^{2,3}, Efrain Cruz Mullisaca⁴

¹*Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Edificio C-3, C.U., CP 58060, Morelia, Mich., México*

²*Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ingeniería, Departamento de Matemática, Buenos Aires, Argentina*

³*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET, Buenos Aires, Argentina*

⁴*Carrera de Matemática, Facultad Ciencias Puras y Naturales, Universidad Mayor de San Andrés, Monoblock Central, CP 15000, La Paz, Bolivia
abdon.choque@umich.mx, ggonzal@fi.uba.ar, ecruz3@umsa.bo*

The problem of stabilizing the Rössler system in finite time by bounded control is considered. We employ V. I. Korobov's controllability function method, which involves a Lyapunov-type function. The controllability function is the solution of an implicit equation. A family of bounded controls which solve the problem is explicitly computed. Besides, the time that it takes the trajectory to reach the desired equilibrium is estimated.

Keywords: Rössler system; Korobov's controllability function; bounded control; finite time stabilization.

Чоке-Ріверо А. Е., Гонзалес Грасіела А., Круз Мулісака Е. **Метод функції керованості Коробова, застосований до стабілізації системи Росслера за обмежений час за допомогою обмежених керувань.** Розглянуто задачу стабілізації системи Росслера за скінченний час за допомогою обмежених керувань. Ми застосовуємо метод функції керованості В. І. Коробова, який використовує функцію типу Ляпунова. Функція керованості є розв'язком неявного рівняння. Запропоновано сім'ю явно обчислюваних обмежених керувань, які розв'язують задачу синтезу. Окрім того, оцінюється час руху, потрібний для досягнення точки рівноваги.

Ключові слова: Система Росслера; функція керованості Коробова; обмежене керування; стабілізація за скінченний час.

Чоке-Ріверо А. Э., Гонзалес Грасиела А., Круз Муллисака Э. **Подход функции управляемости Коробова примененный к стабилизации системы Росслера за конечное время с помощью ограниченных управлений.** Рассматривается задача стабилизации системы Росслера за конечное время при ограниченном управлении. Используем метод функций управляемости В. И. Коробова, являющийся функцией типа Ляпунова. Функция управляемости является решением неявного уравнения. Предлагается семейство явно вычисляемых ограниченных управлений, которые решают задачу синтеза. Кроме того, оценивается время движения, необходимое для достижения точки покоя.

Ключевые слова: Система Росслера; функция управляемости Коробова; ограниченное управление; стабилизации за конечное время.

2010 Mathematics Subject Classification: 93C15; 93B05; 34D20

1. Introduction

Rössler system has become one of the reference chaotic systems. Its novelty when introduced in [25], being that exhibits a chaotic attractor generated by a simpler set of nonlinear differential equations than Lorenz system. It is given by:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2, \\ \dot{x}_3 &= \beta + x_3(x_1 - \gamma),\end{aligned}\tag{1}$$

and it develops chaotic behaviour for certain values of the parameter triplet (α, β, γ) . The issue of controlling Rössler system by stabilizing one of its unstable equilibrium points has been previously dealt with in the literature. A feedback controller is designed in [12] stabilizing a chosen equilibrium point with exponential convergence and estimating the negative Lyapunov exponent. In [2], a sliding mode control is proposed by which global stabilization of an arbitrary given equilibrium point is achieved, In [23], an optimal control strategy that directs the chaotic motion to any desired equilibrium point is proposed. Both stability and optimality are obtained in [24] by applying linear feedback controllers to the chaotic Rössler system. A suboptimal feedback controller has been tested on the Rössler system in [27]. The synchronization approach and bifurcation diagram have been used in [18] to control the Rössler system. In this work, control of the Rössler system is stated by putting:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2, \\ \dot{x}_3 &= \beta + x_3(x_1 - \gamma) + u,\end{aligned}\tag{2}$$

and considering the synthesis problem. Let $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$. The synthesis problem consists in constructing a positional control $u = u(x)$ with $|u(x)| \leq u_1$ such that for any x^0 belonging to a certain neighborhood of the equilibrium point of the system (1), the trajectory $x(t)$ initiated in x^0 arrives at this equilibrium point in finite time. Namely, by using V. I. Korobov's method, also called the controllability function method, a family of bounded positional controls that solve the synthesis problem for the Rössler system is proposed. We mainly use two ingredients. The first one concerns the general theory of the controllability function [14]. The second ingredient is the family of bounded positional controls that was obtained in [7]. Note that the finite-time stabilization of control systems was studied in [8], [5], [6], [19], [20] and references therein. Different from previous works on finite-time stabilization [20], [21], we propose an explicit family of

bounded controls constructed by taking into account the only nonlinearity of the Rössler system, which is a quadratic function.

2. Dynamical features of the Rössler system

The equilibrium point of the system (1) for the triplet $(0, \beta, \gamma)$ with $\gamma \neq 0$ is $\bar{x} := \left(0, -\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right)^\top$. For the triplet (α, β, γ) with $\alpha \neq 0$ and $\gamma^2 - 4\alpha\beta = 0$, there is only one equilibrium point: $\bar{x} := \left(\frac{\gamma}{2}, -\frac{\gamma}{2\alpha}, \frac{\gamma}{2\alpha}\right)^\top$. While if $\gamma^2 - 4\alpha\beta > 0$, there are two equilibrium points:

$$\bar{x}_\pm := \left(\frac{\gamma \pm \Delta}{2}, -\frac{\gamma \pm \Delta}{2\alpha}, \frac{\gamma \pm \Delta}{2\alpha}\right)^\top, \quad (3)$$

where $\Delta := \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta}$. For any other case, system (1) has no equilibrium point. The typical chaotic Rössler system is determined by $\alpha = \beta = \frac{1}{5}$ and $\gamma = \frac{57}{10}$, resulting: $\bar{x}_- = \left(\frac{1}{20}(57 - \sqrt{3233}), \frac{1}{4}(\sqrt{3233} - 57), \frac{1}{4}(57 - \sqrt{3233})\right)$ and $\bar{x}_+ = \left(\frac{1}{20}(57 + \sqrt{3233}), \frac{1}{4}(-57 - \sqrt{3233}), \frac{1}{4}(57 + \sqrt{3233})\right)$.

The stability exponents of \bar{x}_- are $\{-5.686, 0.0970 \pm i0.9951\}$ so it is a saddle-focus with a two-dimensional unstable manifold. Besides, this point is placed in the nearness of the attractor. Instead, the stability exponents of \bar{x}_+ are $\{0.1929, -4.596 \times 10^{-6} \pm i5.428\}$. Hence, this equilibrium point has a two-dimensional stable manifold but it is outside the region of the chaotic attractor. For details, see [1], [22] or [10], where information about dynamical behavior of this system for other parameter values is provided.

3. Canonical controllable form

Let us consider the case $\alpha \neq 0$. Introducing $y = x - \bar{x}_\pm$, system (2) takes the following form:

$$\dot{y} = A_\pm y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_1 y_3 \end{pmatrix} + bu, \quad (4)$$

being $y := (y_1, y_2, y_3)^\top$, $b := (0, 0, 1)^\top$ and

$$A_\pm := \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ \frac{\gamma \pm \Delta}{2\alpha} & 0 & -\frac{\gamma \mp \Delta}{2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Let us note that the linear part of (4) results a completely controllable system. Then, there exists a coordinate change to transform it into its canonical controllable form [11], [13]. This coordinates change is given by $z = Fy$ with

$$F := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 1 - \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

and system (4) can be rewritten as follows:

$$\dot{z} = A_0 z + bp_{\pm}^T z + bu + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\alpha z_1 - z_2)(z_1 - \alpha z_2 + z_3) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

being $z := (z_1, z_2, z_3)^T$. Here

$$A_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

and

$$p_{\pm} := \begin{pmatrix} \pm\Delta \\ \frac{(\gamma \mp \Delta)\alpha^2 - 2\alpha - \gamma \mp \Delta}{2\alpha} \\ \alpha - \frac{\gamma}{2} \pm \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Remark 1.1. For the case $\alpha = 0$, the matrix (5) is given by

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\gamma} & 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

The matrix F of the transformation $z = Fy$ is equal to $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. The

nonlinear part of (7) is given by $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -z_2(z_1 + z_3) \end{pmatrix}$ and the vector (9) can be written as $\left(-\gamma, -\frac{\beta}{\gamma} - 1, -\gamma\right)^T$.

4. The controllability function method

Consider the canonical 3-dimensional control system

$$\dot{z} = f(z, u), \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}, \quad (10)$$

where Ω is a closed interval of \mathbb{R} .

Considering the synthesis problem for the system (10), in 1979, V. I. Korobov [14] created the controllability function (CF) $\theta(x)$. The CF is a Lyapunov-type function, i.e., $\theta(x) > 0$ for $x \neq 0$ and $\theta(0) = 0$. The CF satisfies the following inequality:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta(z)}{\partial z_i} f_i(z, u(z)) \leq -\varphi(\theta(z)), \quad (11)$$

where $\varphi(\theta) > 0$ for $\theta \neq 0$, $\varphi(0) = 0$ and

$$\int_0^{\bar{\theta}} \frac{d\theta}{\varphi(\theta)} < \infty, \quad \bar{\theta} > 0. \quad (12)$$

Let us consider the canonical control system

$$\dot{z} = A_0 z + bw, \quad |w| \leq w_1, \quad (13)$$

where A_0 is given in Equation (8). Following [7], a family of bounded positional controls $w(z)$ that stabilize the system (13) at finite time can be constructed. In particular, the value of the CF at the given initial position z^0 is exactly $T(z^0)$ the time that the trajectory from z^0 takes to arrive at the origin. As in previous works of V. I. Korobov and coauthors [15], [16], [17], the CF $\theta(z)$ is proposed in [7] as the solution of the following implicit equation

$$2a_0\theta = (K(\theta)z, z). \quad (14)$$

Here (\cdot, \cdot) is the canonical inner product while a_0 is a positive number to be determined and $K(\theta)$ is a 3×3 positive definite matrix for $\theta > 0$ defined as $K(\theta) := D(\theta)K_1D(\theta)$ where

$$D(\theta) := \begin{pmatrix} \theta^{-\frac{5}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \theta^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \theta^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

and

$$K_1 := \begin{pmatrix} \frac{40a_1}{a_1+30} & -\frac{240-12a_1}{a_1+30} & -\frac{120}{a_1+30} \\ -\frac{240-12a_1}{a_1+30} & -\frac{180-4a_1}{a_1+30} & -\frac{60}{a_1+30} \\ -\frac{120}{a_1+30} & -\frac{60}{a_1+30} & -\frac{12}{a_1+30} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

for

$$a_1 < -40. \quad (16)$$

Furthermore,

$$\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K = \frac{1}{\theta}D(\theta)K_2D(\theta),$$

$$K_2 := \begin{pmatrix} \frac{240a_1}{a_1+30} & -\frac{5(240-12a_1)}{a_1+30} & -\frac{480}{a_1+30} \\ -\frac{5(240-12a_1)}{a_1+30} & -\frac{4(180-4a_1)}{a_1+30} & -\frac{180}{a_1+30} \\ -\frac{480}{a_1+30} & -\frac{180}{a_1+30} & -\frac{24}{a_1+30} \end{pmatrix} \quad (17)$$

and

$$2a_0 \leq \frac{36}{a_1^2 + 12a_1 + 360} w_1^2. \quad (18)$$

The bounded positional control $w(z)$ that solves the synthesis problem for the system (13) is given by

$$w(z) = a^\top(\theta(z))z, \tag{19}$$

where

$$a(\theta) := \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\theta^3} \\ \left(\frac{a_1}{3} - 10\right) \frac{1}{\theta^2} \\ -\frac{6}{\theta} \end{pmatrix} \tag{20}$$

and $\theta(z)$ is the solution of the implicit equation (14).

The fact that the value $\theta(z^0)$ coincides with $T(z^0)$ is guaranteed by the equality

$$\dot{\theta} = -1, \tag{21}$$

which in turn is a special case of the inequality (11).

In terms of the matrices A_0 , $K = K(\theta)$, the vector b and $a = a(\theta)$, Equality (21) is equivalent to the following matrix equation

$$KA_0 + A_0^\top K + ab^\top K + Kba^\top + \frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K = 0_3.$$

Here 0_3 is the 3×3 null matrix.

5. The CF for nonlinear control systems

The controllability function method for nonlinear control systems with non controllable linear part was considered in [3], [4]. In the case when the linear part of the nonlinear control system is completely controllable, the general solution of the synthesis problem was proposed by V. I. Korobov in [14]. This is the case for the controlled Rössler system (2), so, we develop for it a rather specific family of bounded controls based on the control (19). We also focus on the specific form of the nonlinear part of the control system (2).

Note that the nonlinear part of the translated system (4)

$$g(y) := (0, 0, y_1 y_3)^\top$$

is a Lipschitz function in a neighborhood of the origin; consequently, a positive number C_1 exists such that

$$\|g(y)\| \leq C_1 \|y\|. \tag{22}$$

Let us introduce the positional control given by

$$u = w - p^\top z, \tag{23}$$

where w is defined as in (19). To deal with the linear control part of the system (7) as if it were the canonical control system (13), we look for the restriction on control w . Here we use the same idea as in [14]. We set

$$w_1 := u_1 - u_2 \sum_{j=1}^3 |p_j|. \tag{24}$$

We assume that $u_2 < \frac{u_1}{\sum_{j=1}^3 |p_j|}$. As in [14], we require that the system (7) is considered in the neighborhood

$$Q := \{z : |z_j| \leq u_2, \quad j = 1, 2, 3\}. \quad (25)$$

Note that the linear part of the system (2) at equilibrium points described in Section 2 is completely controllable.

In the following result, we calculate the time derivative of the CF θ with respect to the system (7). Our goal is to verify the inequality (11) for some function φ .

Notation. Let S be an $n \times n$ matrix. The norm of S is defined by

$$\|S\| := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |s_{ij}|.$$

The number $\lambda_{\min, S}$ is the smallest eigenvalue of matrix S . Here we suppose that S is a symmetric matrix.

Theorem 1. *Let K_1 , K_2 and C_1 be as in (15), (17) and (22). The following inequality is valid:*

$$\dot{\theta} \leq -1 + 2\theta \frac{C_1 \|K_1\|}{\lambda_{\min, K_2}}. \quad (26)$$

Proof. By taking the derivative of the equality (14) with respect to time t and the system (7), we have

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{((KA_0 + A_0^\top K + ab^\top K + Kba^\top)z, z)}{((\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K)z, z)} + 2 \frac{(Kz, Fg(F^{-1}z))}{((\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K)z, z)} \\ &= -1 + 2 \frac{(Kz, Fg(F^{-1}z))}{((\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K)z, z)} \\ &\leq -1 + 2\theta \frac{C_1 \|K_1\|}{\lambda_{\min, K_2}}. \end{aligned} \quad (27)$$

In the last inequality, we used the obvious inequality

$$\frac{(Kz, Fg(F^{-1}z))}{((\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K)z, z)} \leq \theta \frac{C_1 \|K_1\|}{\lambda_{\min, K_2}}.$$

□

Note that inequality (12) is satisfied if $\varphi(\theta) = 1 - M\theta$, for some positive M :

$$\int_0^{\bar{\theta}} \frac{1}{1 - M\theta} d\theta = -\frac{1}{M} \ln(1 - M\bar{\theta}), \quad 1 \geq \bar{\theta}M.$$

By employing inequality (26), the following remark yields. A similar remark appeared in [9].

Remark 1.2. Let $\hat{\theta} > 0$, $C_2 > 0$ such that for $\theta \leq \hat{\theta}$

$$-1 + \theta \frac{C_1 \|K_1\|}{\lambda_{\min, K_2}} \leq -C_2. \tag{28}$$

Then, the following inequality is valid:

$$\dot{\theta} \leq -C_2. \tag{29}$$

And the next bound on the arriving time is obtained

$$T(z) \leq \frac{\theta_0}{C_2}. \tag{30}$$

Proof. In view of (26), the inequality (29) readily follows. To prove (30), we integrate (29) on the trajectory $z = z(t)$. We attain $\theta(z(t)) - \theta_0 \leq -C_2 t$. By employing [14, page 552], we have that $z(T) = 0$. This implies $\theta(z(T)) = 0$; thus we obtain inequality (30).

Remark 1.3. The following optimization problem will be useful for improving the size of the neighborhood of the origin where initial conditions must be chosen to achieve the control objective:

$$\max_{\theta > 0} \chi(z, \theta)$$

for $\|z\| \leq C$ and such that $\chi < 0$, where

$$\chi(z, \theta) := -1 + 2 \frac{(Kz, Fg(F^{-1}z))}{((\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K)z, z)}.$$

Let $\hat{\theta}$ be the value at which the maximum of χ is achieved. This value of $\hat{\theta}$ can be employed instead of $\hat{\theta}$ of Remark 1.2. On the other hand, for applications, available software should be more adequate.

The existence of such $\hat{\theta}$ is verified by Remark 1.2. The proof of this remark can be carried out by using the Lagrange multipliers.

Remark 1.4. Considering the control system (10), in the case when the origin is an equilibrium point of (10), according to [14, Theorem 1], the state variables $z_k(t)$, for $k = 1, 2, 3$ do not leave a certain neighborhood of the origin and approach the equilibrium point as $t \rightarrow T$. For $t > T$ the trajectory $z(t)$ stays at the equilibrium point. Both these phenomena are explained by the fact that the control is a positional control that stabilizes the system at finite time.

Lemma 1. Let \bar{x} be one of the equilibrium points described in Section 2. Let $a := (a_1, (\frac{a_1}{3} - 10), -6)^T$, with $a_1 < -40$. Furthermore, let $(k_{j,\ell})_{j,\ell=1}^3 := K_1$, and let the parameter a_0 satisfy (18). Thus, $\theta(x - \bar{x})$ is the unique positive solution of

$$\mathcal{E}(x, \theta, \bar{x}) = 0 \tag{31}$$

with

$$\mathcal{E}(x, \theta, \bar{x}) := 2a_0\theta^6 - \sum_{j,\ell=1}^3 k_{j,\ell}\theta^{j+\ell-2}(c, A^{j-1}(x - \bar{x}))(c, A^{\ell-1}(x - \bar{x})), \quad (32)$$

where vector c is such that $(b, c) = 0$, $(Ab, c) = 0$ and $(A^2b, c) = 1$.

The proof of this lemma repeats the proof of the first part of [14, page 540].

Remark 1.5. Fixed θ , the set $E := \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{E}(x, \theta, \bar{x}) = 0\}$ is an ellipsoid. The trajectories of the system (2) starting from the volume embraced by E or on E do not escape from this set. For $t \rightarrow T$ the trajectory of the system approaches the equilibrium point \bar{x} .

Let Q_1 be the domain in \mathbb{R}^3 that corresponds to (25), i.e., after the transformation $y = F^{-1}z$ and the translation $y = x - \bar{x}$, that is, $Q_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x = F^{-1}z + \bar{x}, z \in Q\}$. Define

$$Q_2 := \{x \in \mathbb{R}^3 | \theta(x - \bar{x}) < \tilde{\theta}\} \quad (33)$$

where $\tilde{\theta} \leq \hat{\theta}$ and such that $Q_2 \subset Q_1$. The main result of our work is seen below.

Theorem 2. Let p be defined as in (9). Under the conditions of Lemma 1, let

$$u(x, \bar{x}) = \sum_{j=1}^3 a_j(\theta^{j-3}(x - \bar{x}))(c, A^{j-1}(x - \bar{x})) - \sum_{j=1}^3 p_j(x - \bar{x})(c, A^{j-1}(x - \bar{x})). \quad (34)$$

Suppose that $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ belongs to Q_2 .

Thus, a) the control (34) satisfies the condition $|u(x)| \leq u_1$ and solves the synthesis problem. b) The time taken by the trajectory from x^0 to the equilibrium point \bar{x} satisfies the following inequality:

$$T(x^0, \bar{x}) \leq \frac{\theta_0}{C_2}. \quad (35)$$

Proof. Part a) is proven by employing (13), (23) and (25). Part b) readily follows from (30), the transformation $z = Fy$ and the translation $y = x - \bar{x}$. Recall that u_1 is a number that indicates the boundaries of the control set.

Remark 1.6. The parameter a_1 determines the vector (20). For each $a_1 < -40$, a positional control which solves the synthesis problem is computed by (34). Besides, both the neighborhood Q_2 where the initial conditions must be taken to achieve control objective and an upper bound of the time to reach the equilibrium, are also obtained (formulae (33) and (35), respectively).

Remark 1.7. The value $\hat{\theta}$ as introduced in Remark 1.4, involves to solve an optimization problem but it provides a better optimization of Q_2 than if the value $\tilde{\theta}$ of Remark 1.6 is applied.

6. Graph of the trajectory and control

For a given initial point (x_1^0, x_2^0, x_3^0) , to plot the graph of the trajectory $x(t)$, the differential equation (27) is extended as follows:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2, \\ \dot{x}_3 &= \beta + x_3(x_1 - \gamma) + u(x, \theta, \bar{x}), \\ \dot{\theta} &= -1 + 2\psi(x, \theta, \bar{x}) \end{aligned}$$

with initial conditions $x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0, x_3(0) = x_3^0$ and $\theta(0) = \theta_0$. Here θ_0 is the root equation (31), and

$$\psi(x, \theta, \bar{x}) := \frac{(D(\theta)K_1D(\theta)(x - \bar{x}), Fg(F^{-1}(x - \bar{x})))}{\frac{1}{\theta}(D(\theta)K_2D(\theta)(x - \bar{x}), (x - \bar{x}))} \tag{36}$$

with $\theta = \theta(x - \bar{x})$.

Example 1. For $\alpha = \beta = 0.2$ and $\gamma = 5.7$, we have the Rössler chaotic system and $\bar{x}_+ = (5.69297, -28.4649, 28.4649)$ is one of the corresponding equilibrium points. Let $u_1 = 3.2$ and let $a_1 = -45$. The positional control has the form $u(x) = -\frac{6(0.2(5.69297 - x_1) + 0.96(x_2 + 28.4649) + x_3 - 28.4649)}{\theta} + \frac{45(x_2 + 28.4649)}{\theta^3} - \frac{-25x_1 - 5x_2 - 29.4249x_1 - 0.392x_2 - 0.192974x_3 + 161.85}{\theta^2}$. The graphs of $x_1(t) - \bar{x}_+^1, x_2(t) - \bar{x}_+^2$ and $x_3(t) - \bar{x}_+^3$ are shown in Fig. 1.

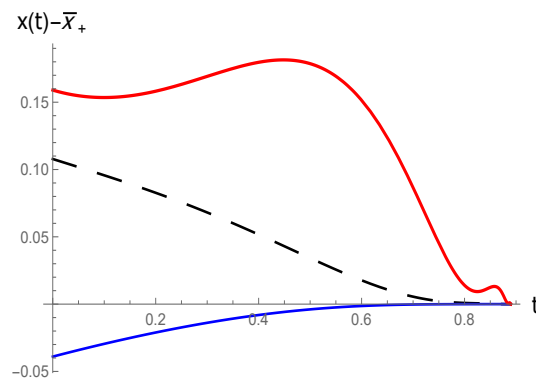


Fig. 1. Trajectories of $x_1(t) - \bar{x}_+^1, x_2(t) - \bar{x}_+^2$ and $x_3(t) - \bar{x}_+^3$.

The graph of the position control $u(x(t))$ is displayed in Fig. 2.

The controllability function on the trajectory $\theta(x(t))$ is shown in Fig. 3.

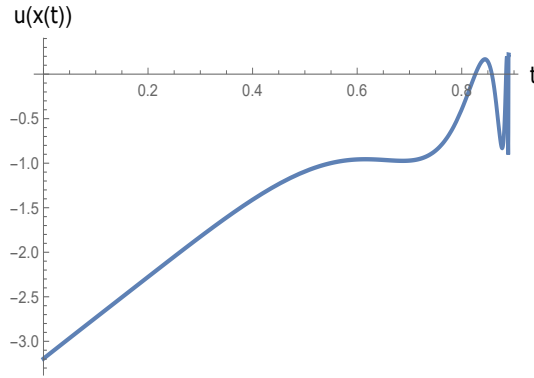


Fig. 2. The positional control $u(x(t))$.

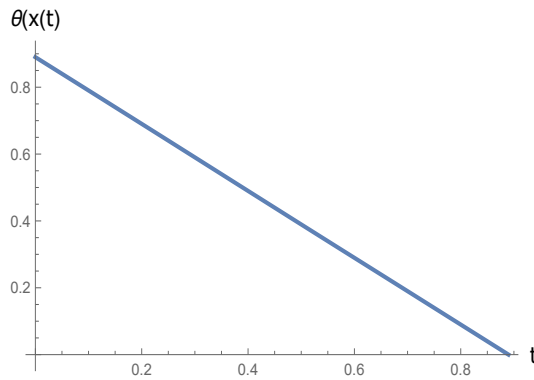


Fig. 3. The controllability function $\theta(x(t))$.

By using Wolfram Mathematica, we have calculated that the time of arriving from $x^0 = (5.80077379, -28.5038689, 28.6238689)$ to the equilibrium point \bar{x}_+ is $T(x^0, \bar{x}_+) = 0.8898539650858471$ and that $|x_1(T) - 5.69297| \leq 1.05197 * 10^{-9}$, $x_2(T) = -28.4649$ and $|x_3(T) - 28.6238689| \leq 1.177185658 * 10^{-5}$.

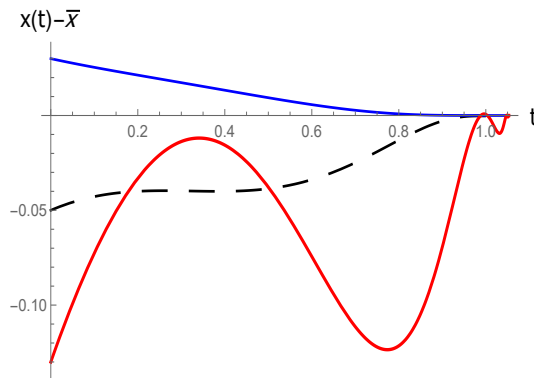


Fig. 4. Trajectories of $x_1(t) - \bar{x}^1$, $x_2(t) - \bar{x}^3$ and $x_3(t) - \bar{x}^3$.

Example 2. Let $\alpha = 0, \beta = 1/5$ and $\gamma = 1$. The corresponding equilibrium point is equal to $\bar{x} = (0, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$. Let $u_1 = 1.1$ and let $a_1 = -45$. The positional control has the form $u(x) = \frac{45(x_2 + \frac{1}{5})}{\theta^3} + \frac{25x_1}{\theta^2} - \frac{6(x_2 + x_3)}{\theta} - \frac{6x_1}{5} + x_3 - \frac{1}{5}$. The graphs of $x_1(t) - \bar{x}^1, x_2(t) - \bar{x}^2$ and $x_3(t) - \bar{x}^3$ are shown in Fig. 4.

The graph of the position control $u(x(t))$ is seen in Fig. 5.

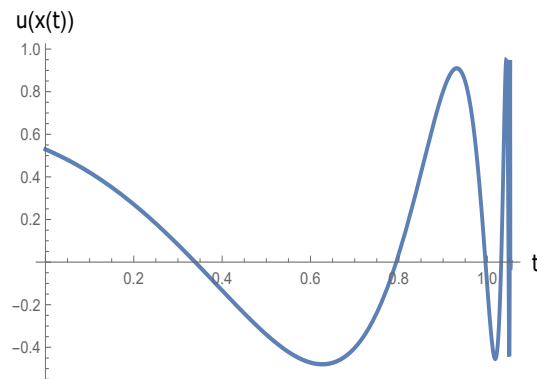


Fig. 5. The positional control $u(x(t))$.

The controllability function on the trajectory $\theta(x(t))$ is shown in Fig. 6.

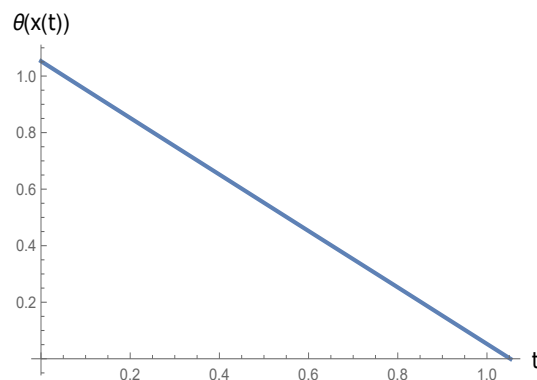


Fig. 6. The controllability function $\theta(x(t))$.

By using Wolfram Mathematica, we have calculated that the time of arriving from $x^0 = (-0.05, -0.17, 0.07)$ to the equilibrium point \bar{x} is $T(x^0, \bar{x}) = 1.0528937566$ and that $|x_1(T)| \leq 3.19427 * 10^{-11}, |x_2(T) + \frac{1}{5}| \leq 6.57807 * 10^{-15}$ and $|x_3(T) - \frac{1}{5}| \leq 3.48898 * 10^{-8}$.

7. Conclusion

In this paper, a family of bounded finite-time stabilizing positional controls for the Rössler system is built. By using the controllability function method, which is

a Lyapunov-type function, the finite time to reach the desired equilibrium point is estimated. This is obtained for an arbitrary given control bound and an adequate set Q_2 of initial conditions to achieve the control objective is computed. Let us note that this proposal may also be developed for any controlled system of the form:


$$\dot{x} = f(x) + bu$$


being $f(x) = A(x - \bar{x}) + g(x)$, \bar{x} an equilibrium point of f , A the jacobian matrix of f evaluated in \bar{x} and g the corresponding nonlinear part of f such that $\{A, b\}$ is completely controllable and g is a lipschitzian function in a neighborhood of \bar{x} . We claim that the smaller the constant bound is, the more reduced is the set of initial conditions for which stabilization is guaranteed; see (14), (18) and (23). Moreover, the smaller the bound is, the longer is the time to arrive at the equilibrium point from the the same initial point; see (14), (18).


For the cases in which the Rössler system is chaotic, this technique may be implemented as a tool for control chaos. Indeed, if the equilibrium point is embedded in the strange attractor, a trajectory initiated in the basin of attraction of the attractor can reach the region Q_2 and by this moment, this finite-time control strategy can be activated, so, the equilibrium point will be reached in finite time. The use of finite-time stabilizing control for control chaos or for chaos synchronization is not new (see for example [26]). Hence, the introduction of this control strategy in these scenarios promises interesting future research.

Acknowledgement. The research of the first author is supported by CONACYT Project A1-S-31524 and CIC-UMSNH, Mexico.

ORCID ID

A. E. Choque-Rivero  <https://orcid.org/0000-0003-0226-9612>

G. A. González  <https://orcid.org/0000-0002-9240-2132>

E. Cruz Mullisaca  <https://orcid.org/0000-0002-2044-6769>

REFERENCES

1. K. T. Alligood, T. Sauer, J. A. Yorke. Chaos: An Introduction to Dynamical systems, Springer, – 1996. DOI: 10.1007/b97589.
2. J.-F. Chang, M.-L. Hung, Y.-S. Yang, T.-L. Liao, J.-J. Yan. Controlling chaos of the family of Rössler systems using sliding mode control, Chaos, Solitons and Fractals, – 2008. – V. **37**. Issue 2. – P. 609–622. DOI: 10.1016/j.chaos.2006.09.051
3. A. E. Choque-Rivero. The controllability function method for the synthesis problem of a nonlinear control system, International Review of Automatic Control, – 2008. – V. **1**. no.4. – P. 441–445.

4. A. E. Choque-Rivero. Solution of a Synthesis Problem of a Nonlinear Control System, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2009. – **59(850)**. – P. 45–51. <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/Vestnik-Khnu-850-2009-choq.pdf>
5. A. E. Choque-Rivero, B. J. Gómez Orozco. Bounded finite-time stabilizing controls via orthogonal polynomials, 2018 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC), Ixtapa, Mexico, – 2018. – P. 1–4. DOI: 10.1109/ROPEC.2018.8661456.
6. A. E. Choque-Rivero, P. L. Cástulo Cruz. On Korobov's admissible maximum principle, 2016 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC), Ixtapa, Mexico, – 2016. – P. 1–6. DOI: 10.1109/ROPEC.2016.7830634.
7. A. E. Choque Rivero, V. I. Korobov, V. O. Skoryk. Controllability function as time of motion. I, Mat. Fiz. Anal. Geom., – 2004. – V. 11. no. 2. – P. 208–225 (in Russian); English translation in <https://arxiv.org/abs/1509.05127>.
8. A. E. Choque Rivero, V. I. Korobov, V. O. Skoryk. Controllability function as time of motion. II, Mat. Fiz. Anal. Geom., – 2004. – V. 11. no. 3. – P. 341–354. (in Russian).
9. A. E. Choque-Rivero, F. Ornelas-Tellez. Bounded finite-time stabilization of the prey-predator model via Korobov's controllability function, accepted to appear in Izv. Sarat. Univ. (N.S.) Ser. Mat. Mekh. Inform. – 2020.
10. V. Dobrushkin. Mathematica Tutorial for the Second Course in Differential Equations. Part III: Rossler attractor. 2015. <http://www.cfm.brown.edu/people/dobrush/am34/Mathematica/ch3/rossler.html>
11. B. C. Kuo. Sistemas de control automático (7ma. Edición). 1996. Prentice Hall Hispanoamericana, S. A., Mexiko, 930 p. (in Spanish) <https://dademuchconnection.files.wordpress.com/2017/07/sistemas-de-control-automatico-benjamin-c-kuo.pdf>.
12. X. Liao, P. Yu. Chaos control for the family of Rössler systems using feedback controllers, Chaos Solitons & Fractals, – 2006. – **29(1)**. – P. 91–107. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.12.046.
13. D. G. Luenberger. Observers for multivariable systems, IEEE Trans. Automat. Contr., V. **AC-11**. no. 2. – 1966. – P. 190–197. DOI: 10.1109/TAC.1966.1098323.
14. V. I. Korobov. A general approach to the solution of the problem of synthesizing bounded controls in a control problem, Mat. Sb. – 1979. – V. **109(151)**

- no. 4(8). – P. 582–606 (in Russian); Engls translation: Math. USSR Sb. 37 (1980), No. 4, 535–557. DOI: 10.1070/SM1980v037n04ABEH002094.
15. V. I. Korobov. Controllability function method. 2007. NITS, Inst. Comp. Research, M-Ighevsk
16. V. I. Korobov, G. M. Sklyar. Methods for constructing of positional controls and an admissible maximum principle, *Differ. Uravn.*, – 1990. – **26(11)**. – P. 1914–1924.
17. V. I. Korobov, V. O. Skoryk. Construction of restricted controls for a non-equilibrium point in global sense, *Vietnam Journal of Mathematics*. – 2015. – **43(2)**. – P. 459–469. DOI: 10.1007/s10013-015-0132-4.
18. H. F. Marj, R. Asgharian, N. Pariz. Controlling chaotic Rossler system via synchronization, using bifurcation parameter to choose desirable periodic orbit, *Journal of Applied Sciences*. – 2009. – **9(8)**. – P. 1450–1457. DOI: 10.3923/jas.2009.1450.1457.
19. A. Ovseevich. A local feedback control bringing a linear system to equilibrium, *J. Optim. Theory Appl.* – 2015. – V. **165** no. 2. – P. 532–544. DOI: 10.1007/s10957-014-0636-1.
20. A. Polyakov, D. Efimov and W. Perruquetti. Finite-time stabilization using implicit Lyapunov function technique, *Proceedings of the 9th IFAC Symposium "Nonlinear Control Systems"(NOLCOS)*, Toulouse, France – 2013. – **46(23)** P. 140–145. <hal-00844386>. DOI: 10.3182/20130904-3-FR-2041.00043.
21. A. S. Poznyak, A. Y. Polyakov, V. V. Strygin. Analysis of finite-time convergence by the method of Lyapunov functions in systems with second-order sliding modes, *J. Appl. Math. Mech.*, – 2011. – V. **75**. Issue 3. – P. 289–303. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2011.07.006.
22. M. Radford. A study of the Rössler system. 2007. School of Physics Jawja Institute of Technology, 12 p. <http://www.chaosbook.org/projects/Radford/radford.pdf>.
23. M. Rafikov, J. M. Balthazar. On an optimal control design for Rössler system, *Physics Letters A*, – 2004. – Issue 3-4. V. **333**. – P. 241–245. DOI: 10.1016/j.physleta.2004.10.032.
24. M. Rafikov, J. M. Balthazar. On control and synchronization in chaotic and hyperchaotic systems via linear feedback control, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, – 2008. – Issue 7. V. **13**. – P. 1246–1255. DOI: 10.1016/j.cnsns.2006.12.011.
25. O. E. Rössler. An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, – 1976. – Issue 5. V. **57**. – P. 397-398. DOI: 10.1016/0375-9601(76)90101-8.

26. H. Wang, Z. Han, Q. Xie, W. Zhang. Finite-time chaos synchronization of unified chaotic system with uncertain parameters, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, – 2009. – Issue 5. V. 14. – P. 2239–2247. DOI: 10.1016/j.cnsns.2008.04.015.
27. T. H. Yeap, N. U. Ahmed. Feedback control of chaotic systems, *Dynamics and Control*. – 1994. – V. 4. Issue 1. – P. 97–114. DOI: 10.1007/BF02115741.

Чоке-Ріверо А. Е., Гонзалес Грасіела А., Круз Муллісака Е. **Метод функції керованості Коробова, застосований до стабілізації системи Росслера за обмежений час за допомогою обмежених керувань.** Система Росслера стала однією з референтних хаотичних систем. Її новизна при введенні, була в тому, що вона демонструє хаотичний аттрактор, породжений більш простим набором нелінійних диференціальних рівнянь, ніж система Лоренца. Ця система за певних значень її триплета параметрів демонструє хаотичну поведінку. Питання керування системою Росслера шляхом стабілізації однієї з її нестійких точок рівноваги раніше розглядалося в літературі. У цій роботі запропоновано керування системою Росслера на основі задачі синтезу. Для заданої системи та однієї з її точок рівноваги, задача синтезу полягає у побудові обмеженого позиційного керування таким чином, що для будь-якого x^0 , що належить певному околу точки рівноваги, траєкторія $x(t)$, що починається в x^0 , дістається до цієї точки рівноваги за скінченний час. А саме, з використанням методу В. І. Коробова, який також називають методом функції керованості, пропонується сім'я обмежених позиційних керувань, які розв'язують задачу синтезу для системи Росслера. В основному ми використовуємо два компоненти. Перший стосується загальної теорії функції керованості. Другий компонент – це сім'я обмежених позиційних керувань, яка будується в цій роботі. На відміну від попередніх робіт щодо стабілізації за скінченний час, ми пропонуємо явну сім'ю обмежених керувань, побудовану з урахуванням лише нелінійності системи Росслера, яка є квадратичною функцією. За допомогою методу функції керованості, яка є функцією типу Ляпунова, оцінюється скінченний час, потрібний для досягнення бажаної точки рівноваги. Цю оцінку отримано для довільно заданої межі керування, а також наведено відповідну множину початкових умов для досягнення мети керування. Цей підхід може бути також розвинутий для будь-якої керованої системи, лінійна частина якої є повністю керованою, а її відповідна нелінійна частина – ліпшицевою функцією в околі точки рівноваги. У свою чергу, ця техніка може бути реалізована як інструмент керування хаосом.

Ключові слова: Система Росслера; функція керованості Коробова; обмежене керування; стабілізація за скінченний час.

A. E. Choque-Rivero, Graciela A. González, E. Cruz Mullisaca. **Korobov's controllability function method applied to finite-time stabilization of the Rössler system via bounded controls.** Rössler system has become one of the reference chaotic systems. Its novelty when introduced, being that exhibits a chaotic attractor generated by a simpler set of nonlinear differential equations than Lorenz system. It develops chaotic behaviour for certain values of its parameter triplet. The issue of controlling Rössler system by stabilizing one of its unstable equilibrium points has been previously dealt with in the literature. In this work, control of the Rössler system is stated by considering the synthesis problem. Given a system and one of its equilibrium points, the synthesis problem consists in constructing a bounded positional control such that for any x^0 belonging to a certain neighborhood of the equilibrium point, the trajectory $x(t)$ initi-

ated in x^0 arrives at this equilibrium point in finite time. Namely, by using V. I. Korobov's method, also called the controllability function method, a family of bounded positional controls that solve the synthesis problem for the Rössler system is proposed. We mainly use two ingredients. The first one concerns the general theory of the controllability function. The second ingredient is a family of bounded positional controls that was obtained in. Different from previous works on finite-time stabilization we propose an explicit family of bounded controls constructed by taking into account the only nonlinearity of the Rössler system, which is a quadratic function. By using the controllability function method, which is a Lyapunov-type function, the finite time to reach the desired equilibrium point is estimated. This is obtained for an arbitrary given control bound and an adequate set of initial conditions to achieve the control objective is computed. This proposal may also be developed for any controlled system for which its linear part is completely controllable and its corresponding nonlinear part is a Lipschitzian function in a neighborhood of the equilibrium point. In turn, this technique may be implemented as a tool for control chaos.

Keywords: Rössler system; Korobov's controllability function; bounded control; finite time stabilization.

Article history: Received: 15 February 2020; Final form: 15 May 2020;
Accepted: 18 May 2020.

BVI-noise generation by wing-shaped helicopter blade

P. V. Lukianov

*Institute of Hydromechanics NAS of Ukraine,
Kyiv, Zhelyabova 8/4, 03680, Ukraine
petr_lukianov@bigmir.net*

In this work, the problem of generation BVI-noise by wing-shaped rotor blade of a helicopter is posed and solved. Research completed for near and far sound fields. In particular, it was discovered dependence of the distribution of density pulsations on the longitudinal blade geometry, angle of attack and blade angle to counter flow. Air flux speed increase promotes the generation of transverse pulsations on the surface blade that dominate longitudinal pulsations in level. The level of generated noise is in the range of $50 \text{ dB} \leq L \leq 60 \text{ dB}$, which is 5-6 dB lower than the noise of the Blue Edge blades, and also rounded blade at its end.

Keywords: sound generation; wing-shaped helicopter blade; BVI-noise.

Лук'янов П.В. **Генерація BVI-шуму крилоподібною лопаттю гелікоптера.** В роботі поставлено та розв'язано задачу генерації BVI-шуму крилоподібною лопаттю ротора гелікоптера. Вивчена поведінка ближнього та дальнього звукових полів. Зокрема, виявлено залежність розподілу пульсацій густини від повздожньої геометрії лопаті, кута атаки та кута постановки лопаті до зустрічного потоку. Збільшення швидкості потоку, що налігає, сприяє зародженню поперечних пульсацій на поверхні лопаті, котрі за рівнем домінують над повздожніми пульсаціями. Рівень шуму, що генерується, знаходиться у діапазоні $50 \text{ Дб} \leq L \leq 60 \text{ Дб}$, що нижче на 5-6 Дб рівня Blue Edge лопаті, а також закругленої лопаті.

Ключові слова: генерація звуку; крилоподібна лопать гелікоптера; BVI-шум.

Лукьянов П.В. **BVI-шум крылоподібной лопасти ротора вертолѐта.** В работе поставлена и решена задача генерации BVI-шума крылоподібной лопастью ротора вертолѐта. Изучено поведение ближнего и дальнего звуковых полей. В частности, обнаружена зависимость распределения пульсаций плотности от продольной геометрии лопасти, угла атаки и угла постановки лопасти к встречному потоку. Увеличение скорости набегающего потока способствует зарождению поперечных пульсаций на поверхности лопасти, которые по уровню доминируют над продольными пульсациями. Уровень генерируемого шума находится в диапазоне $50 \text{ Дб} \leq L \leq 60 \text{ Дб}$, что ниже на 5-6 Дб шума Blue Edge лопасти, а также закругленной на конце лопасти.

Ключевые слова: генерация звука; крылообразная лопать вертолѐта; BVI-шум.

2010 Mathematics Subject Classification: 76Q05; 76G25.

1. Introduction

Current requirements of ICAO standards force us to search for new modifications of the rotor blade of the helicopter, which would allow reduce BVI noise. This type of noise is most expressed at moderate and low flight speeds (maneuvers) and dominates other noise of aerodynamic origin. As established in early studies, the vortex noise has a quadrupole character and substantially depends on the longitudinal geometry of the blade, the angle attack and the angle of the blade to the oncoming stream.

In earlier studies [1], [2], the main emphasis in modeling low noisy blades was given to variations in the shape of the end of the blade, starting from $z = 0.8R$, which made it possible to reduce the vortex noise for a number of blade tips. The end part of the blade is responsible for the formation of the attached vortex. Therefore, its variation allows, to one degree or another, to influence the interaction of this vortex with the blade, generating of BVI noise. However, the shape of the rest of the non-terminal part of the blade can also influence the process of the formation of vortex noise in general. Recently, a lot of attention has been paid to the study of this issue in the company "Eurocopter" - the world leader in helicopter manufacturing [3], [4]. The same research also involved in "Airbus". The noise of the blades of a modified shape along the span has been studied for today. The blade has up to the middle a straight shape, and then it is bent twice, more - closer to the outer end. The second modification of the blade is sin-shaped blade [5]. The noise of the sin-shaped rotor was 3-5 dB lower than that of the rectangular-shaped rotor. The third blade shape modification represents a wing of the bird that is not fully spread, that is, in its incomplete scope. This form of the blade is called wing-shaped blade. In particular, it was noted [3], [6] that the double swept blade is quieter by 6 dB than the blade without bending, has improved flight qualities.

Research in this direction is new, with a certain commercial interest, and in connection with this, the mathematical statements of the problems are not given in these works: all publications are limited only to indicating software packages developed earlier in well-known research centers ONERA, DLR, external demonstration of the shape of the blade.

In the present work, the problem of modeling noise with a wing-shaped type blade has been posed and solved. The blade has two expressed bends along its span, which give it the shape of an incompletely spread bird wing, that is, a pterygoid. The problem is solved in a three-dimensional non-stationary formulation. A comparative analysis of the results of numerical calculation of the near and far sound fields for a given blade and the calculated data for a rounded blade without double bending is presented. The comparison of the generated noise level of the pterygoid (wing shaped) blade with the blade rounded at the end, as well as the noise level data for Blue Edge blades are presented in [3].

2. Problem setting

Suppose we have a rigid double-swept blade along span, Fig.1, resembling the shape of an incompletely straightened bird wing. The distance from the butt to the outer end the blade remains equal to the length R of the unbent blade. If pass along the curve of the bend of the blade, then the length of the curved blade along this curve will exceed R .



Fig.1: Double-bent wing-shaped blade.

For the mathematical formulation of the problem, we use a rectangular Cartesian coordinate system $Oxyz$. Moreover, we assume that on the front edge of the blade runs a swirling stream with Taylor distribution:

$$V_{\theta} = V_{\theta max} \frac{r}{r_c} \exp^{1-(r/r_c)^2}, \quad (1)$$

and at the outer, with respect to the axis of rotation, end of the blade, the attached Scully vortex is induced:

$$V_{\theta} = 1.2 \cdot U_{\infty} \frac{\bar{r}_c}{1 + \bar{r}_c^2}, \quad \bar{r} = \frac{r}{r_c}, \quad (2)$$

where r , θ , r_c is the radial coordinate, azimuthal the coordinate and radius of the vortex core, respectively. Values $V_{\theta max}$, U_{∞} vary along the blade. The blade in the plane of rotation is rotated by an angle α relative to the direction of its

scope, and set at an angle of attack γ to the oncoming stream. Thus, the overall picture of the flow similar to the situation for a rectangular blade [7].

The whole problem is divided into aerodynamic and acoustic parts. The aerodynamic problem is a system of equations, simulating an ideal compressible flow around the blade. In dimensionless form it will be written [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial \tau} + u' \frac{\partial u'}{\partial \xi} + \lambda c v' \frac{\partial u'}{\partial \eta} + \frac{c}{R} w' \frac{\partial u'}{\partial \zeta} = \\ = -\frac{1}{M^2 \rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial \tau} + u' \frac{\partial v'}{\partial \xi} + \lambda c v' \frac{\partial v'}{\partial \eta} + \frac{1}{AR} w' \frac{\partial v'}{\partial \zeta} = \\ = -\frac{\lambda c}{M^2 \rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial \tau} + u' \frac{\partial w'}{\partial \xi} + \lambda c v' \frac{\partial w'}{\partial \eta} + \frac{1}{AR} w' \frac{\partial w'}{\partial \zeta} = \\ = -\frac{1}{ARM^2 \rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial \zeta}, \end{aligned} \quad (5)$$

where $AR = R/c$ is the "aspect ratio", that is the ratio of blade span and length chords of s cross section, and

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho' u')}{\partial \xi} + \lambda c \frac{\partial(\rho' v')}{\partial \eta} + \frac{1}{AR} \frac{\partial(\rho' w')}{\partial \zeta} = 0. \quad (6)$$

where

$$\begin{aligned} u' = \frac{u}{U_\infty}, \quad v' = \frac{v}{U_\infty}, \quad w' = \frac{w}{U_\infty}, \quad p' = \frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2}, \\ \rho' = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad \xi = \frac{x}{c}, \quad \eta = \lambda y, \quad \zeta = \frac{z}{R}, \quad \tau = kt. \end{aligned}$$

The first three equations (3)-(5) are the equations of motion in the form of Euler, and (6) is the continuity equation. Here c , R , λ , k is the length chords of the blade, radius of the blade, thickness parameter, time parameter, respectively, M is the Mach number, $AR = R/c$ is "aspect ratio". The oncoming stream runs at the blade at a speed U_∞ . Since the blade is rigid, then on its surface S normal velocity vector is zero:

$$\bar{v}_n|_S = \bar{0}. \quad (7)$$

Equations (3)-(7), together with the distributions of the Taylor and Skully vortices (1), (2), form an aerodynamic problem.

The acoustics problem is based on the following system of two equations [9], [10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\rho}'}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 \bar{\rho}' = & \operatorname{div}[\rho(\nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\varphi} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \\ & \times \nabla \bar{\varphi} + \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\varphi}) + \bar{\rho}'(\nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v})] \\ & + \operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot \operatorname{div}(\rho \nabla \bar{\varphi} + \bar{\rho}' \mathbf{v})) - \operatorname{div}(\bar{\rho}' \mathbf{F}) + \\ & + \operatorname{div}(\nabla \bar{\varphi} \cdot \operatorname{div} \rho \mathbf{v}) + \nabla a^2 \cdot \nabla \bar{\rho}' \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial t} + \rho \nabla^2 \bar{\varphi} + \nabla \bar{\varphi} \cdot \nabla \rho + \bar{\rho}' \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\rho}' = 0, \quad (9)$$

The first equation (8), in terms of density pulsation in sound wave, is an equation describing the generation of sound and its propagation. Equation (9) of the system is obtained from the continuity equation and closes the system with respect to two acoustic unknowns $\bar{\rho}'$, $\bar{\varphi}$. We consider that before the interaction of the blade with the flow and vortices, small pulsations of the flow are absent, i.e. $\bar{\rho}'|_{t=0} = 0$, $\bar{\varphi}|_{t=0} = 0$.

3. Method of problem solving

Since the above problem is similar to the problem for the blade without bending, then for it was taken as a basis a program using numerically-analytical method [11], [12]. This program has been modified taking into account variations in the geometry of the problem being solved. The change in the shape of the blade made the grid slightly thicker in the cross section of the blade: here on the dimensionless coordinate 85 points were set along the chord, and for a blade without double bend, recall, there were 80 of them. An increase in the number of points along the span of the blade was not necessary.

4. Near field

To determine the effect of double bending on the generation of BVI noise consider a wing-shaped blade along the span, section which $y = x(1 - x)$ and the relative thickness $\delta = 0.1$. Since this modification of the shape of the blade, it is assumed will have a certain effect on the BVI noise, then we choose the Mach number $M = 0.2$; 0.4 . For large Mach numbers ($M > 0.4$) the noise is not is predominantly vortex-type noise. Choose the following the angles of setting the blade to the oncoming flow α and angles of attack γ : $\alpha = 60^\circ$, 90° and $\gamma = 5^\circ$, $\gamma = 10^\circ$.

Figure 2a, $M = 0.2$, $\gamma = 5^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, shows the dimensionless pulsations of the density $\bar{\rho}'$, characteristic the feature of which is the presence of two clearly defined smooth peaks in front of the blade. These peaks prevail over the rest of the ripple field $\bar{\rho}'$. Their shape is associated with the shape of the envelope of the leading edge of the blade. Therefore they were not present for a rectangular

blade with a rounding at the end [13]. It should be noted that in some areas of the blade sharp local peaks appear, which indicates the existence of clearly defined zones of flow instability. All the above disturbance zones $\bar{\rho}'$ indicate intense sound in these areas of the blade. Behind the first two smooth peaks, a whole ridge of waves "crests" is observed. Its "crests" are 2-3 times lower than the first main highs. Behind the second series of peaks, closer to the center of the blade, several consecutive wave crests are observed that are lower the second of these longitudinal series of peaks. Thus, we have three series of longitudinal perturbations decreasing in amplitude and, in addition to of this, two locally expressed transverse, at $z = 0, 0.5R$, zones instability. For the angle $\alpha = 90^\circ$, Fig.2b, the wave picture not substantially changed on the leading edge of the blade. However, noticeable slight decrease in the level of the 2nd and 3rd series of peaks, as well as significant attenuation of transverse perturbations at $z = 0, 0.5R$.

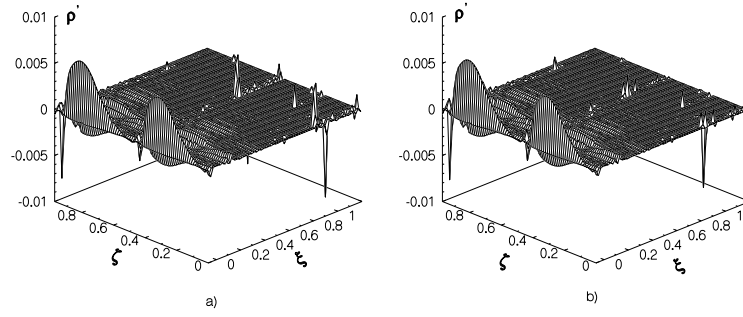


Fig.2: Dimensionless acoustical density, $M = 0.2$, $\gamma = 5^\circ$: a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\alpha = 90^\circ$.

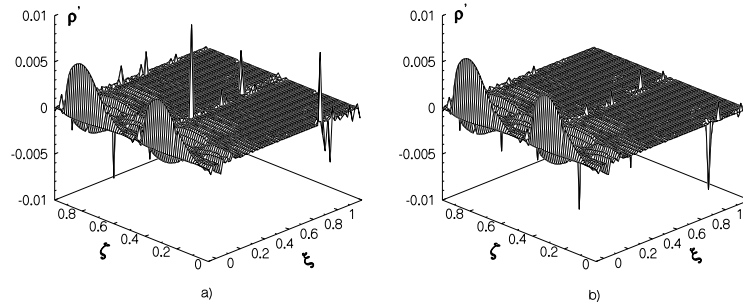


Fig.3: Dimensionless acoustical density, $M = 0.2$, $\gamma = 10^\circ$: a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\alpha = 90^\circ$.

With an increase in the angle of attack $\gamma = 10^\circ$, Fig.3a, two smooth peaks of the 1st series are practically unchanged, and the series following it ridges of a smaller size are no longer as smooth as in case $\gamma = 5^\circ$, which indicates the origin of zones instability. Indeed, we see three transverse zones instabilities, at

$z = 0, 0.5R, R$, with locally expressed bursts. For $\alpha = 90^\circ$, Fig.3b, these local disturbances fade out and the picture as a whole resembles the case $\gamma = 5^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ with only a few slight differences.

An increase in the Mach number $M = 0.4$, Fig.4-5, led to a sharp activation of transverse perturbations $\bar{\rho}'$, Fig.5a: they are in 1.5-3 times superior in amplitude to the maximum longitudinal disturbances. For the angle $\alpha = 90^\circ$, Fig.5b, the situation is next: there are two local transverse bursts disturbances, however the remaining smaller bursts are already less expressed. Thus, if the blade is not located perpendicular to the oncoming flow, $\alpha = 90^\circ$, and under some angle, for example $\alpha = 60^\circ$, then the transverse disturbances are realized of a larger magnitude. Increased angle of attack also contributes, Fig.5, to the formation of zones of transverse disturbances $\bar{\rho}'$. This is especially expressed in Fig.5a: a number of local bursts, the maximum of which is located in the center of the blade, $\xi = 0.5$, clearly shows two series of transverse perturbations of $\bar{\rho}'$. These perturbations for the case $\alpha = 90^\circ$, Fig.5b, as already set above, fade out.

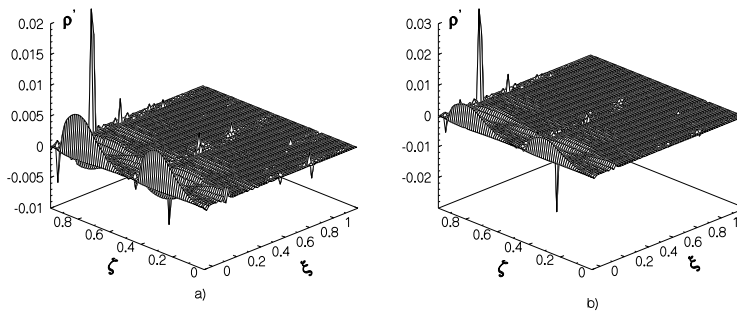


Fig.4: Dimensionless acoustical density, $M = 0.4$, $\gamma = 5^\circ$: a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\alpha = 90^\circ$.

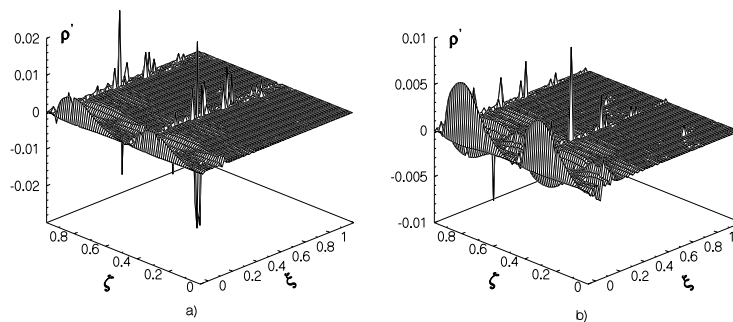


Fig.5: Dimensionless acoustical density, $M = 0.4$, $\gamma = 10^\circ$: a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\alpha = 90^\circ$.

5. Far field

To study the behavior of generated far-field noise we use the integral representation of the far field [8], [10]:

$$\int_S \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial n} + \frac{1}{Ra_\infty} \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \phi' \frac{\partial(1/R)}{\partial n} \right]_{t^*} dS - M_1^2 \int_S \left[\frac{F}{R} \right]_{t^*} dS = 4\pi \phi'(x, t_1), \quad (10)$$

where

$$F = \rho[(\nabla \phi \cdot \nabla) \bar{v} + (\bar{v} \cdot \nabla) \cdot \nabla \phi] + \rho'(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} + \bar{v} \cdot \text{div}(\rho \nabla \phi + \rho' \bar{v}) + \nabla \phi \text{div}(\rho \bar{v}).$$

However, the directly numerical values of ϕ are not interesting. The sound pressure level L is important, which is calculated from the received data of ϕ , its derivatives. It should be recalled that the integral representation of the far field 10 includes only those sound sources that contribute to the integral over a considerable distance from the surface of the blade, that is, in the far field. Secondly, this representation is derived from Kirchhoff's famous approach, the essence of which is that sound potential at a given fixed point integrally depends on the distribution of sound sources throughout the blade. In fact, it does not reflect a local disturbance, but the interference sound in general. Therefore, the graphs of sound pressure level L , which are given below, are not separate local perturbations, but nonlinear sound wave. Below are the graphs of sound pressure level L and their analysis.

Changing the shape of the blade along its wingspan in the form of a wing allowed distribute the energy of the generated sound wave more evenly throughout the entire blade, Fig.6a. In addition, it can be seen that along the span of the blade, the sound wave has a nonlinear shape with alternating maximums and

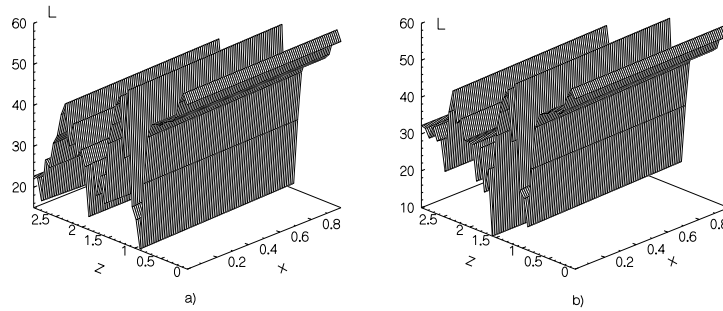


Fig.6: Standard pressure level, $M = 0.2$, $\gamma = 5^\circ$: a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\alpha = 90^\circ$.

minimums of L . The maximum value of L does not exceed 60 dB and is located not on the outer, with respect to the axis of rotation, end of the blade, but its central part. On the outside at the end of the blade there is a lower value of L . The same situation is also observed for $\alpha = 90^\circ$, Fig.6b, so the only difference is that for $0.5R \leq z \leq R$ the level of L is somewhat higher, and the maximum-minimum difference decreases.

For the angle of attack $\gamma = 10^\circ$, Fig.7a, the maximum of L at the end of the blade is close to the other two maxima, that is, a significant decrease in L at the end of the blade is not achieved. However, the overall picture of the distribution of the noise level is such that $50 \text{ dB} \leq L \leq 60 \text{ dB}$. This suggests that the wing-shaped blade is not noisy. Less noisy is the part of the blade in the region of $z = 0.3R$. For $\alpha = 90^\circ$, Fig.7b, the maximum of the noise level is lower by about 5 dB than for the case $\alpha = 60^\circ$, in the region of the outer end of the blade. Note that for the angle of attack $\gamma = 5^\circ$ the blade with a rounded edge generates noise at about the same level as the wing-shaped blade. And for the angle of attack $\gamma = 10^\circ$ the noise level of a blade rounded at the end higher, about 66-67 dB, than the wing-shaped blade.

For the Mach number $M = 0.4$, $\gamma = 5^\circ$, Fig.8, the noise level reaches values of 80 dB in the region of $z = 0.7R - 0.8R$, which indicates the dominance of rotation noise over vortex noise. According to Gutin [14] the maximum rotation noise should be located in this area. In the rest of the blade, closer to its ends, the behavior of L is similar to the case of $M = 0.2$. For the angle of attack $\gamma = 10^\circ$, Fig.9a, the pressure wave has a locally expressed maximum in the region of $z = 0.8R$ to 80 dB, which gradually decreases, to the butt, to 60 dB. The prevalence of rotational noise is clearly visible here. The same situation was observed for the blade with a rounding at the end. At the same time, for the angle $\alpha = 90^\circ$, Fig.9b, the vortex nature of noise reappears: the noise level is not exceeding 60 dB, more smoothly distributed along the blade than in case $M = 0.2$. It is noteworthy that for a fixed value of the coordinate z along the span of the blade the pressure level in the sound wave varies within 2 dB. However, on the L charts due to the significant difference in L this is practically not noticeable. In absolute terms, not in dB, this difference means a tangible, tens of percent, variation sound potential.

Let us compare the obtained pressure level data with the available data [3] for the Blue Edge blades. Recall that the Blue Edge blade generates noise in the range of $50 \text{ dB} \leq L \leq 65 \text{ dB}$. The wing-shaped blade considered in this work for most design situations showed a noise level of no higher than 60 dB. Only in certain design situations rotation noise exceeds vortex noise.

As for the spectrum of the generated noise, it should be noted following features. The envelope in the noise spectrum is more broken for lower values of Mach numbers, $M = 0.2$, and smaller angles of attack, $\gamma = 5^\circ$. For $M = 0.4$, $\gamma = 10^\circ$ envelope smoother. The envelope shape clearly shows the zones greatest sound generation along the blade. Also, judging by the level individual harmonics, it can be seen that the main noise energy in the frequency the spectrum is

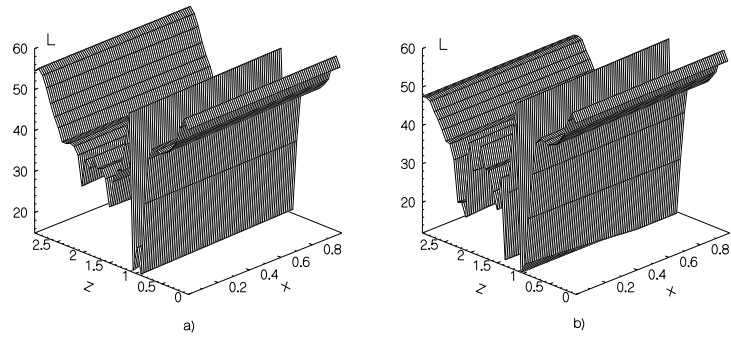


Fig.7: Standard pressure level, $M = 0.2$, $\gamma = 10^\circ$: a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\alpha = 90^\circ$.

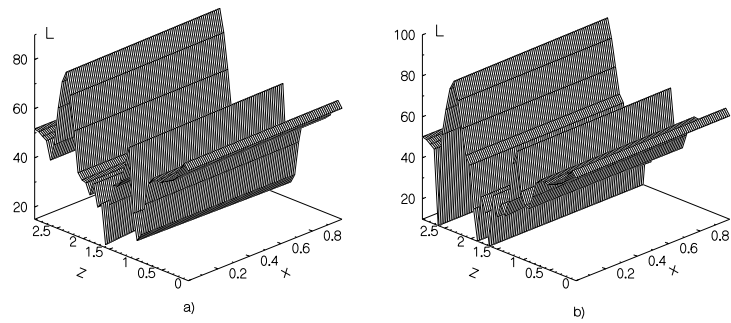


Fig.8: Standard pressure level, $M = 0.4$, $\gamma = 5^\circ$: a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\alpha = 90^\circ$.

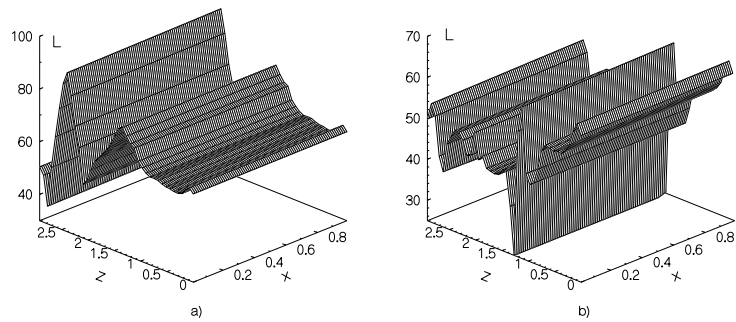


Fig.9: Standard pressure level, $M = 0.4$, $\gamma = 10^\circ$: a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\alpha = 90^\circ$.

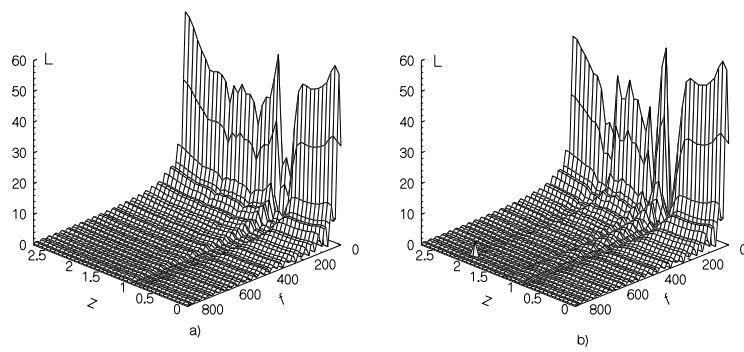


Fig.10: Spectral pressure level (dB), $M = 0.2$, $\gamma = 10^\circ$: a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\alpha = 90^\circ$.

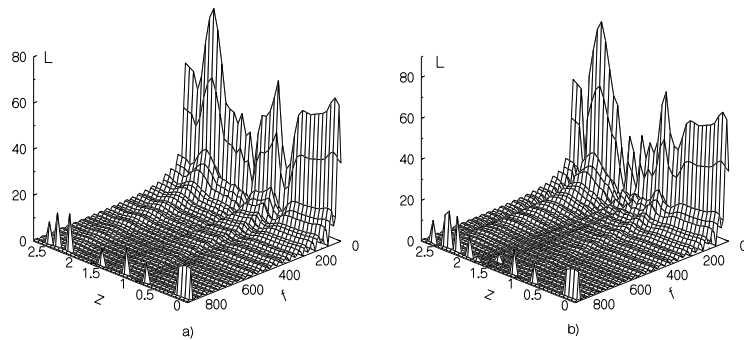


Fig.11: Spectral pressure level (dB), $M = 0.4$, $\gamma = 5^\circ$: a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\alpha = 90^\circ$.

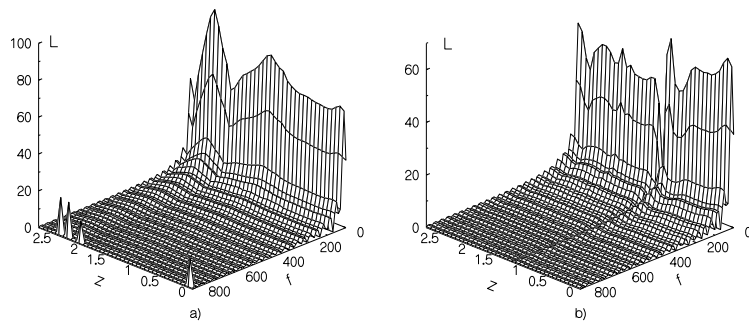


Fig.12: Spectral pressure level (dB), $M = 0.4$, $\gamma = 10^\circ$: a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\alpha = 90^\circ$.

concentrated in the first 5-7 harmonics, Fig.10-12. The angle of attack $\gamma = 5^\circ$ is characterized by the appearance high-frequency harmonics, $f \approx 840$ Hz, in the spectrum. Note that a similar situation has already been observed for the rectangular blade [15], but there the frequency was close to $f \approx 700$ Hz. Estimated in the work data are consistent with currently known estimates and experimental results: BVI noise is in the range close to 60 dB [3], and the rotation noise above it by 15-20 dB, i.e. varies in the range of 80 dB [16].

6. Conclusions


1. The problem of generating BVI noise is posed and numerically solved for double-bent wing-shaped blade, interacting with swirl flow.

2. The near field calculated data found the following interesting features. In the near sound field a longitudinal series of two smoothly distributed peaks is clearly visible, displaying the longitudinal bend geometry of the blade that are not previously observed for a rectangular blade. These peaks are present in all considered numerical situations. For this a series of two more longitudinal series of smooth peaks are observed. Each of these series of peaks is 1.5-3 times smaller in amplitude of the previous series. In addition to the longitudinal series of acoustic density disturbances the appearance of 2-3 transverse series of locally expressed peaks is fixed. These series dominate in amplitude with increasing Mach number and angle of attack of the blade.

3. The results of the calculation of the far field showed that the blade wing-shaped generates BVI noise in the region of 60 dB, which is 5-6 dB lower noise Blue Edge blade. This suggests that the wing-shaped blade can consider low noise: only in certain settlement situations it turned out that the generated noise is rotation noise, with elevated level, on a certain part of the blade.

4. The obtained calculation results are consistent with the available calculated and experimental data of other authors.

ORCID ID

P. V. Lukianov  <https://orcid.org/0000-0002-7584-1491>

REFERENCES

1. Robert M. Kufeld, Jeffrey L. Cross, William G. Bousman. A survey of Rotor Loads Distribution in Maneuvering Flight, American Helicopter Society Aeromechanics Specialists Conference, San Francisco, CA, – 1994. – January 19-21. – P. 2.4-1-2.4-15.
2. Brian D. Roth. Acoustic source and data acquisition system for a helicopter rotor blade-vortex Interaction (BVI) noise reduction experiment, Thesis, December, Monterey, California, – 1996. – P. 74.

3. P. Rauch, M. Geravais, P. Cranda, A. Baud, J., F. Hirsch, A. Walter, P. Beaumier. The Design, Development and Testing of a New Blade Concept, American Helicopter Society 67th Annual Forum, Virginia Beach, VA, – 2011.– May 3-5 – 14P.
4. Y. Delrieux. From design to flight testing: overview of rotocraft acoustic research at Onera for industrial application, Aerospace Lab.Journal, – 2014. – **7**. – P. 1-10. DOI: 10.12762/2014.AL07-02
5. P. V. Lukianov. BVI-noise simulation of two-blade helicopter's rotor sin shape, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, – 2019. – **89**. – P. 59-75. DOI: 10.26565/2221-5646-2019-89-05
6. B. S. Mattos. Overview of Rotorcraft Technology and Market. 2011, 109 p.
7. P. V. Lukianov. Influence of the helicopter's rotor blade tip bound vortex on BVI-noise generation, Bulletin of Chercassy University, Ser.: applied mathematics, informatics, – 2014. – **311, 18**. – P. 46-58.
8. P. V. Lukianov. Sound generation by Taylor and Scully Vortexes and the the Blade of the Varing Cross Section, "Naukovy Visty" - Research Bulletin of National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnical Institute", – 2014. – **96, 4**. – P. 139–145. DOI: 10.20535/1810-0546.2014.4.28305
9. P. V. Lukianov. On one model for aeroacousics of viscous compressible gas. Part I. Analysis of existing models, dedusing of resolving system of equations, Acoustic bulletin, – 2013-2014. – **16, 2**. – P. 18–30.
10. P. V. Lukianov. On one model for aeroacousics of viscous compressible gas. Part I. Analysis of existing models, dedusing of resolving system of equations, Acoustic bulletin, – 2013-2014. – **16, 3**. – P. 31–40.
11. P. V. Lukianov. On one numerically-analytical approach to solving of a problem on sound generation by a thin wing. Part I. General schematic of application to planer stationary problem, Acoustic bulletin, – 2011 – **14, 3**. – P. 46-52.
12. P. V. Lukianov. On one numerically-analytical approach to solving of a problem on sound generation by a thin wing. Part II. A schematic of application to non-stationary problems, Acoustic bulletin, – 2012 – **15, 3**. – P. 45-52.
13. P. V. Lukianov. Influence of blade tip rounding on level of BVI-noise, Acoustic bulletin, – 2015 – **17, 2**. – P. 23-37.
14. L. Gutin. On sound field of rotating propeller, Journal of Technical Physics, – 1936. – **5(6)**. – P. 899–906.

15. P. V. Lukianov. Sound generation by blade and vortex near interaction at oblique angle of flow streamlining, Bulletin of Kyiv National University named after T. G. Shevchenko, Ser.: phys.- math. Sciences, – 2014. – 4. – P. 81-86.
16. M. E. Goldstein. Aeroacoustics. 1981. McGrawHill Int. Company, New York, 296 p.

Лук'янов П. В. **BVI-шум криловидної лопаті ротора гелікоптера**. Шум аеродинамічного походження складається з ряду компонент, серед яких шум обертання та вихровий шум, BVI-noise, дають найбільший внесок у загальний рівень шуму, що генерується. Шум обертання залежить від величини швидкості потоку, що набігає на лопать, та превалує над іншими складовими шуму при значних числах Маху обтікання лопаті. На відміну від шуму обертання, вихровий шум проявляється при невеликих швидкостях польоту гелікоптеру, помірних числах Маху. У його формуванні важливу роль відіграє повздожня геометрія лопаті. Тому у останній час форму лопаті гелікоптера вибирають близької до існуючих природних форм, які максимально збалансовані. Однією з таких форми може бути криловидна лопать - "wing-shaped blade". В даній роботі поставлено та розв'язано задачу генерації BVI-шуму криловидною лопаттю ротора гелікоптера. Математична модель задачі побудована на запропонованій раніше автором та успішно перевіреній системи рівнянь аероакустики для загального випадку. Розрахунковими функціями у даній системі є пульсації звукового тиску та звуковий потенціал. Отримані розрахункові дані цих величин, а також їх похідних, використано для дослідження ближнього та дальнього звукових полів, вивчена поведінка ближнього та дальнього звукових полів. Зокрема, виявлено залежність розподілу пульсацій густини від повздожньої геометрії лопаті, кута атаки та кута постановки лопаті до зустрічного потоку. Збільшення швидкості потоку, що набігає, сприяє зародженню поперечних пульсацій на поверхні лопаті, котрі за рівнем домінують над повздожніми пульсаціями. Цікавою особливістю, поміченою під час розрахунків, є те що, що для помірних значень числа Маху $M = 0.2, 0.3$ існують розрахункові ситуації, при певних кутах постановки лопаті до потоку та кутах атаки, де шум обертання домінує над вихровим шумом. Для значень числа Маху $M > 0.4$ шум обертання відіграє основну роль у генерації шуму лопаттю. Рівень шуму, що генерується, знаходиться у діапазоні $50 \text{ Дб} \leq L \leq 60 \text{ Дб}$, що нижче на 5-6 Дб рівня Blue Edge лопаті, а також закругленої лопаті. Крім того, підмічено активізацію високочастотної області у спектрі шуму на частоті $f \approx 840 \text{ Гц}$. Результати розрахунків кажуть про те, що лопать криловидної форми є малошумною у режимі маневрів при малих швидкостях польоту.

Ключові слова: генерація звуку; криловидна лопать гелікоптера; BVI-шум.

P. V. Lukianov. **BVI-noise of wing-shaped helicopter's rotor blade**. Aerodynamic noise includes a number of noise components, among which rotational noise and vortex noise (BVI-noise) make the largest contribution to the overall noise generated. Rotation noise depends on the magnitude of the velocity of the incoming blade and prevails over other noise components at significant Mach numbers. Unlike rotation noise, vortex noise is evident at low helicopter flight speeds, moderate Mach numbers. In the formation of this type of noise, an important role is played by the longitudinal geometry. Therefore, recently the shape of the helicopter blade is chosen close to existing natural forms, which are as balanced as possible. One of these may be a wing-shaped blade. In this work, the problem of generating BVI noise by the wing shaped blade of a helicopter is posed and solved. The mathematical model of the problem is constructed on the previously

proposed by the author and successfully tested system of aeroacoustic equations for the general case. Estimated features in this system are pulsations of sound pressure and sound potential. The calculated data of these quantities, as well as their derivatives, were used to study near and far sound fields. In particular, the dependence of the density ripple distribution is revealed from the blade geometry, the angle of attack and the blade angle to the oncoming flow. Increasing flow velocity contributes to the emergence of transverse ripples on the surface blades that dominate the longitudinal ripples by level. An interesting feature noticed in the calculations is that there are calculations for moderate Mach numbers $M = 0.2, 0.3$ situations, at certain angles of blade placement to the stream and angles of attack where rotation noise dominates eddy noise. For values Mach numbers $M > 0.4$ rotation noise plays a major role in blade noise generation. The noise level generated is in the range $50 \text{ dB} \leq L \leq 60 \text{ dB}$, which is lower by 5-6 dB for the Blue Edge blade, as well as the rounded blade. In addition, activation of the high-frequency region in the frequency spectrum of noise was observed $f \approx 840 \text{ Hz}$. The results of the calculations show that the blade of the wing-shaped is low-noise in the mode of maneuvers at small flight speeds.

Keywords: sound generation; wing-shaped helicopter blade; BVI-noise.

Article history: Received: 18 January 2020; Final form: 28 March 2020;
Accepted: 31 March 2020.

Different strategies in the liver regeneration processes. Numerical experiments on the mathematical model

V. V. Karieva¹, S. V. Lvov¹, L. P. Artyukhova²

¹ V. N. Karazin Kharkiv National University
Svobody sq., 4, 61022, Kharkiv, Ukraine

² Kharkiv college of State University of Telecommunications
str. Kooperativna, 7, 61003, Kharkiv, Ukraine

valerija.kareva@gmail.com, lvovser@gmail.com, lp.artyukhova@gmail.com

It is considered the mathematical model which describes the processes of liver regeneration with homogeneous approximation. Numerical calculations revealed that the mathematical model corresponds to biological processes for different strategies of liver regeneration. Based on the calculations in the case of partial hepatectomy it is concluded that the mixed strategy of regeneration should be used for regeneration process.

Keywords: mathematical model; liver regeneration; numerical experiment.

Карєва В. В., Львов С. В., Артюхова Л. П. **Різні стратегії в процесах регенерації печінки. Чисельні експерименти на математичній моделі.** У роботі розглянуто математична модель, яка описує процеси регенерації печінки в однорідному наближенні. Показано, що дана модель при різних стратегіях регенерації печінки відповідає біологічним процесам. На основі виконаних обчислень у випадку часткової гепатектомії зроблено висновки, що при регенерації печінки повинна використовуватися змішана стратегія регенерації.

Ключові слова: математична модель; регенерація печінки; чисельний експеримент.

Карєва В. В., Львов С. В., Артюхова Л. П. **Различные стратегии в процессах регенерации печени. Численные эксперименты на математической модели.** В работе рассмотрена математическая модель, описывающая процессы регенерации печени в однородном приближении. Показано, что данная математическая модель при различных стратегиях регенерации печени соответствует биологическим процессам. Проведенные вычисления в случае частичной гепатэктомии демонстрируют, что при регенерации печени должна использоваться смешанная стратегия регенерации.

Ключевые слова: математическая модель; регенерация печени; численный эксперимент.

2010 Mathematics Subject Classification: 92C37, 65Y99.

1. Introduction

In biology and medicine mathematical methods and models are emerging as one of the main tools for obtaining new data on biological systems, their analysis and explanation of the phenomena observed in the experiment. In some cases mathematical methods and models make it possible to find new functions and new phenomena in biological systems as well as to predict their behavior.

Liver regeneration is one of the most captivating phenomena in medicine that has fascinated clinicians, surgeons, and scientists who have observed this apparently supernatural process and studied its mechanisms for many years. The liver is a large, meaty organ and possesses multiple substantial functions in the human body. The identification of the main dependencies and relationships that determine the strategy of liver regeneration is one of the main problems in the regenerative medicine. One way to solve this problem is to develop adequate mathematical models that describe the processes of liver regeneration [1, 2, 3].

The article deals with the mathematical model that qualitatively describes the processes of liver regeneration in explicit dependence on the control parameters [4]. Developed "toy model" represents the processes of replication, polyploidization and the formation of binuclear cells, hyperplasia, and effects of toxic factors, apoptosis, cell death and the effects of secondary toxicity, the protective reaction of cells and process of detoxification for cells of a generalized parenchymal type. Numerical calculations confirm that the mathematical model corresponds to biological processes for different strategies of liver regeneration.

2. Review of mathematical model

There are two events in which the liver has the capability to regenerate, one being a partial hepatectomy and the other being damage to the liver by toxins or infection [10]. Earlier, we have developed a "toy model" of controlled liver regeneration processes in the homogeneous approximation under conditions of mild toxicity or partial hepatectomy [4].

The model is a system of discrete controlled equations of the Lotka – Volterra type with transitions. These equations describe the controlled competitive dynamics of liver cell populations' (hepatic lobules) various types in their various states and controlled competitive transitions between types and states.

The liver regeneration occurs due to hyperplasia, replication, polyploidy processes and division of binuclear hepatocytes into mononuclear.

Let us consider:

1) The dynamics of populations of liver cells is given by the equation:

$$\bar{x}(t+1) = f(\bar{x}(t), \tau(t), \bar{\lambda}(t)), \quad (1)$$

$$Tox(t) = DP(t) + \tau(t), \quad (2)$$

where $\bar{x}(t)$ - types of functional liver cells at moment t , $\tau(t)$ - given function of external toxicity, $\bar{\lambda}(t)$ - control parameters, $DP(t)$ - internal toxicity due to the toxicity of the decay products as a result of necrosis.

The generalized liver function index is $\Phi(t) = \sum_{i=0}^m c_i(x_i(t), \tau(t))$, where c_i - own index of functionality for cell type $x_i(t)$. $0 \leq \Phi(t) \leq 1$, where 0 denotes a dead organism and 1 is the most functional organism.

2) The change of the organism's functional state is described by the equation:

$$\tilde{\Phi}(t+1) = \Psi(\tau(t), \Phi(t)). \quad (3)$$

As the main functional cells we consider only various types of hepatocytes. The functionality of the liver increases with replication, binuclear division, hyperplasia and under the influence of toxic factors it falls.

In the proposed model the liver structure is described by the following parameters: normal hepatocytes; diploid hepatocytes; tetraploid hepatocytes; binuclear hepatocytes; hepatocytes in a state of hyperplasia, apoptosis and necrosis. Toxic factors are also given: the external toxicity and the secondary toxicity due to decay products of necrosis.

The dynamics of the system is determined by the following control parameters: $a(t)$ - the number of hepatocytes which proceed to the replication; $b(t)$ - the number of hepatocytes which proceed to polyploidy; $b_{2j}(t)$ - the number of hepatocytes which are initiated into binuclear cells; $a_{2j}(t)$ - the number of hepatocytes which pass from binuclear hepatocytes per division; $g(t)$ - the number of hepatocytes which proceed to hyperplasia; $\omega(t)$ - the number of hepatocytes which proceed to controlled apoptosis.

A distinctive feature of this model is that in controlled competitive dynamics it explicitly takes into account significantly different characteristic times of the key processes depending on the current level of toxicity. For example, the replication time is 24-36 hours, the transition to polyploidy - 12-18 hours, hyperplasia - 6-8 hours, the division of binuclear hepatocytes - 1-2 hours. The toxic factors can significantly increase process times.

3. Numerical results and discussion

The liver has the capability to regenerate after a toxic injury. The pharmacological model is easier to be executed with a greater clinical relevance as it induces a necrotic injury that simulates certain liver diseases. These properties made this model an acceptable option to study liver regeneration. However, raising the toxin concentration can induce acute liver injury while repeated administration of the toxin can lead to liver cirrhosis. Moreover, the systemic and local effects of the toxin depend on doses, animal species, etc [5, 6].

In the proposed mathematical model the process of liver regeneration occurs due to replication process, hyperplasia, polyploidy, division of binuclear cells and controlled apoptosis. All these processes are necessary for adequate modeling of liver regeneration.

For example, single and constant toxic functions show that the above processes are not able to cope with the toxic factors that are accumulated in the body. The process of the body's functional state restoring requires the non-trivial strategy of liver regeneration.

Firstly consider the replication process of hepatocytes for such cases:

$$(A) \text{Tox}(0) = \text{Const}, \text{Tox}(t) = 0, t = 1, 2, \dots$$

$$(B) \text{Tox}(t) = \text{Const}, t = 0, 1, 2, \dots$$

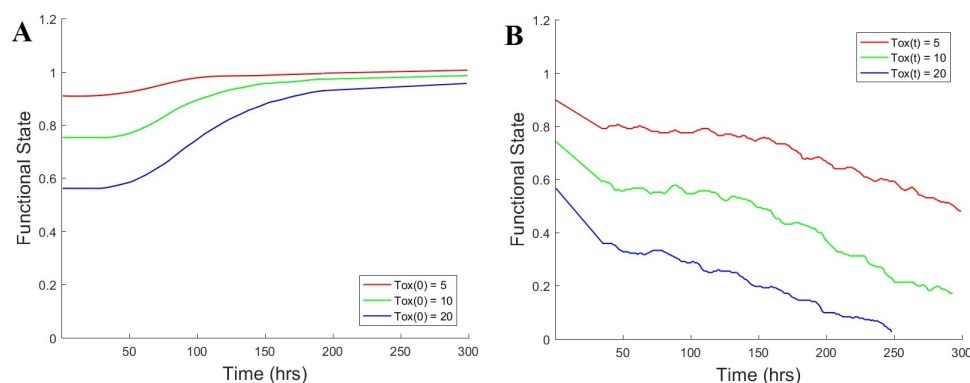


Fig. 1. The body's functionality restoring due to the replication process in the case of single (A) and constant (B) toxic functions.

As shown in Figure 1.A, the time of the body's functionality restoring due to the replication of liver cells is between 32 and 48 hrs. In Figure 1.B it is shown that the body's functionality is gradually reduced due to toxic factors. Note that after 30-40 hours the body's functionality slows down when hepatocytes end the replication cycle. However, as illustrated in Figure 1.B, the replication of liver cells is not able to cope with the growing effect of toxins. In addition to external toxic factors, the decay products of necrosis also have a negative effect on liver cells.

Figures 2.A and 2.B display how the hyperplasia process copes with single and constant toxic functions. Since hyperplasia lasts about 1 hour, the functionality restoring in case (A) occurs almost instantly. But Figure 2.B shows that the hyperplasia process does not cope with prolonged toxicity. It is based on the fact that the cell is unable to grow indefinitely. Therefore, after the liver cells have exhausted their growth resource, it will begin to die gradually.

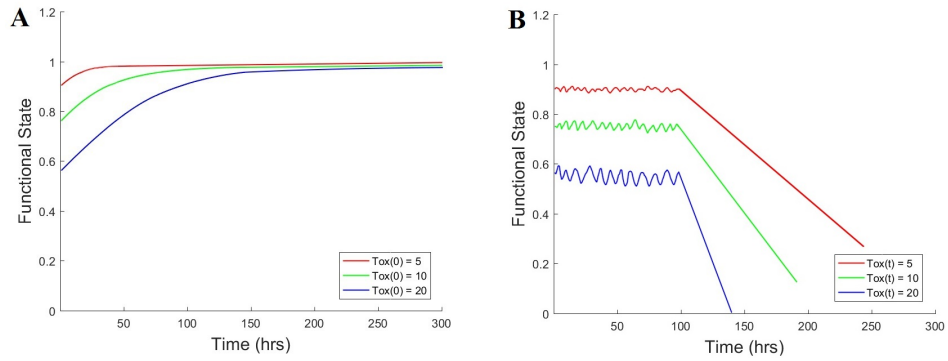


Fig. 2. The body's functionality restoring due to the hyperplasia process in the case of single (A) and constant (B) toxic functions.

Next consider the liver regeneration process due to the division of binuclear cells. Figure 3.A shows that after 6-10 hours the body's functionality is restoring. However the number of binuclear cells in the liver is limited; once all the binuclear cells have separated, the liver will not be able to regenerate. Thus, the liver is destroyed by toxins.

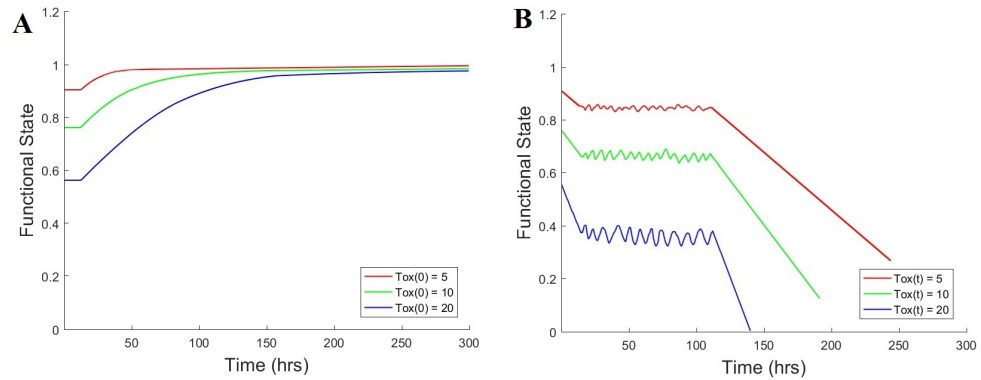


Fig. 3. The body's functionality restoring due to the division of binuclear cells in the case of single (A) and constant (B) toxic functions.

The polyploidia process is similar to the replication process. So that conclusions can be made similar. The functionality restoring due to the polyploidia process is in Figures 4.A and 4.B.

Thus, it is shown that the process of liver regeneration is a complex component process.

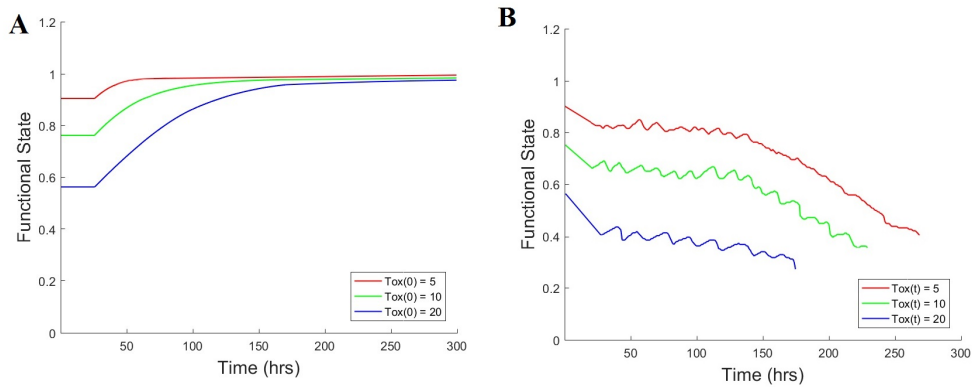


Fig. 4. The body’s functionality restoring due to the polyploidia process in the case of single (A) and constant (B) toxic functions.

Induction of liver regeneration by two-third hepatectomy is the most common experimental rodent model used to study this outstanding phenomenon [7]. In order to build a mathematical model for regulation of the regenerating liver after partial hepatectomy, some basic specifications and abstractions of the biological scenario are required.

Following resection, the remaining hepatic tissue proliferates and expands in size to retain the original mass of five lobes within 5–7 days. The peak proliferation time is after 24 hrs in rat whereas, in mice, it is between 36 and 48 hrs [9, 11]. The latter study indicates that liver growth is driven by lobule growth rather than by change of lobule number [8]. At a later remodeling phase liver lobes reorganize into lobules of normal size via restructuring [12].

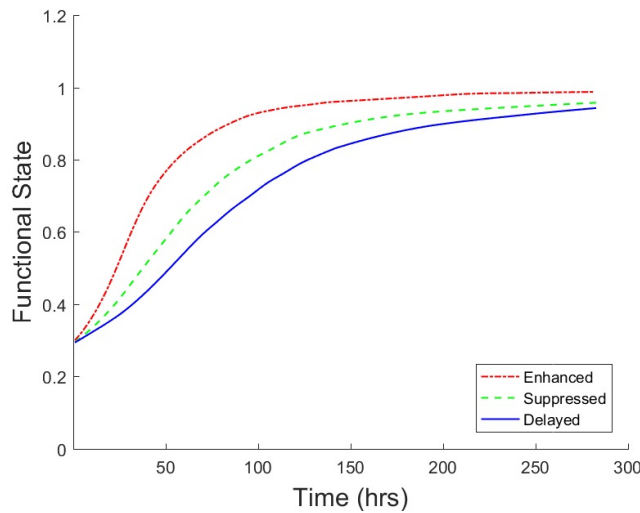


Fig. 5. The body’s functionality restoring after partial hepatectomy.

We simulated the liver regeneration following 70 % hepatectomy. We modeled three regenerating modes of response to hepatectomy (Fig. 5): delayed, suppressed and enhanced. The obtaining calculations correspond to the biological regeneration process [14].

4. Conclusion


The results of the performed numerical experiments showed that individually regeneration processes are not able to cope with the toxic factors that are accumulated in the body. The process of the body's functional state restoring requires the non-trivial strategy of liver regeneration. Numerical calculations revealed that the mathematical model corresponds to biological processes for different strategies of liver regeneration. Based on the calculations in the case of partial hepatectomy it is concluded that the mixed strategy of regeneration should be used for regeneration process.


Currently we are assume to expand and clarify this model. In particular, to expand the nomenclature of the main cells types and their states, taking into account zoning; add the processes of ductal reaction, development of fibrosis and cirrhosis; clarify the processes leading to damage the liver cells and etc. This model is the basis for the verification of the principles and criteria for optimal regulation of liver regeneration processes.

Acknowledgement. This research was partially supported by Akhiezer Foundation.

ORCID ID

V. V. Karieva  <https://orcid.org/0000-0003-2121-5214>

S. V. Lvov  <https://orcid.org/0000-0003-4055-7172>

L. P. Artyukhova  <https://orcid.org/0000-0001-9724-9360>

REFERENCES

1. B. Christ, U. Dahmen, K-H. Herrmann, M. Konig, JR. Reichenbach, T. Ricken, J. Schleicher, L. Ole Schwen, S. Vlaic, N. Waschinsky. Computational Modeling in Liver Surgery, *Frontiers in Physiology*. – 2017. – Vol. 8. Article 906. – P. 1–26. DOI: 10.3389/fphys.2017.00906
2. Ye. Dayong, Zh. Minjie, V. Athanasios. A survey of self-organization mechanisms in multiagent systems, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*. –2017. – Vol. 47. No. 3. – P. 441–462. DOI: 10.1109/TSMC.2015.2504350
3. M. Hwang, M. Garbey, S. A. Bercali, R. Tran-Son-Tay. Rule-Based Simulation of Multi-Cellular Biological Systems—A Review of Modeling Techniques, *Cellular and Molecular Bioengineering*. – 2009. – Vol. 2(3). – P. 285–294. DOI: 10.1007/s12195-009-0078-2

4. V. V. Karieva, S. V. Lvov. Mathematical model of liver regeneration processes: homogeneous approximation, *Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University. Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"*. – 2018. – Vol. 87. – P. 29–41. DOI: 10.26565/2221-5646-2018-87-03
5. D. Palmes, H. U. Spiegel. Animal models of liver regeneration, *Biomaterials*. – 2004. – Vol. 25(9). – P. 1601–1611. DOI: 10.1016/s0142-9612(03)00508-8
6. M. T. Pritchard, U. Apte. Models to study liver regeneration In Apte U (Ed.), *Liver regeneration: Basic mechanisms, relevant models and clinical applications*, Cambridge, MA: Academic press. – 2015. – P. 15–40.
7. G. M. Higgins, R. M. Anderson. Experimental pathology of the liver. Restoration of the liver of the white rat following partial surgical removal, *Archives of Pathology*. – 1931. – Vol. 12. – P. 186–202.
8. V. Papp, K. Dezso, V. Laszlo, P. Nagy, S. Paku. Architectural changes during regenerative and ontogenic liver growth in the rat, *Liver Transplant*. – 2009. – Vol. 15. – P. 177–183 DOI: 10.1002/lt.21665
9. S. A. Mao, J. M. Glorioso, S. L. Nyberg. Liver regeneration, *Translational Research*. – 2014. – Vol. 163(4). – P. 352–362. DOI: 10.1016/j.trsl.2014.01.005
10. G. K. Michalopoulos. Principles of Liver Regeneration and Growth Homeostasis, *Comprehensive Physiology*. – 2013. – Vol. 3. – P. 485–513. DOI: 10.1002/cphy.c120014
11. G. K. Michalopoulos. Liver regeneration, *Journal of Cellular Physiology*. – 2007. – Vol. 213(2). – P. 286–300. DOI: 10.1002/jcp.21172
12. G. Michalopoulos, Marie C. DeFrances. Liver regeneration, *Science*. – 1997. – Vol. 276. – P. 60–66. DOI: 10.1126/science.276.5309.60
13. A. Abu Rmilah, W. Zhou, E. Nelson, L. Lin, B. Amiot, S. L. Nyberg. Understanding the marvels behind liver regeneration, *Wiley Interdiscip Rev Dev Biol*. – 2019. – Vol.8(3):e340. DOI: 10.1002/wdev.340
14. D. Cook, B. A. Ogunnaike, R. Vadigepalli. Systems analysis of non-parenchymal cell modulation of liver repair across multiple regeneration modes, *BMC Syst Biol*. – 2015. – Vol. 9(71). – P. 1–24. DOI: 10.1186/s12918-015-0220-9

Карєва В. В., Львов С. В., Артюхова Л. П. **Різні стратегії в процесах регенерації печінки. Чисельні експерименти на математичній моделі.** У статті розглядається узагальнена математична модель, яка описує процеси підтримки/відновлення (регенерації) динамічного гомеостазу печінки й явно залежить від керуючих параметрів. Запропонована математична модель процесів регенерації печінки є узагальненням таких відомих моделей популяційної динаміки, як узагальнені рівняння

Лотки-Вольтерра, рівняння Лотки-Вольтерра з запізнілими аргументами, інтегродиференціальні рівняння Вольтерра. Під час розробки цієї моделі було зроблено наступні припущення: однорідне наближення, незалежність біологічних процесів, помірний токсичний вплив. У заданій математичній моделі процес регенерації печінки здійснюється за рахунок процесів реплікації, гіперплазії, поліплодії, ділення двоядерних клітин і контрольованого апоптозу. Всі ці процеси необхідні для адекватного моделювання регенерації печінки. На прикладі одиничного і постійного токсичного впливу показано, що окремо вищевказані процеси не в змозі впоратися з токсичними факторами, які накопичуються в організмі. Процес відновлення функціонального стану організму вимагає завдання нетривіальної стратегії регенерації печінки, яка буде враховувати усі можливі шляхи підтримки/відновлення динамічного гомеостазу печінки. Чисельні розрахунки виявили, що задана математична модель при різних стратегіях регенерації печінки відповідає біологічним процесам. На основі виконаних обчислень у випадку часткової гепатектомії зроблено висновок, що при регенерації печінки повинна використовуватися змішана стратегія регенерації. Надалі передбачається поширити математичну модель, щоб вона враховувала процеси підтримки/відновлення динамічного гомеостазу печінки, які відбуваються під впливом сильних токсинів, тобто за допомогою стоволових клітин і фіброзу. А також планується обґрунтувати принципи і критерії оптимальності регуляції процесів підтримки/відновлення динамічного гомеостазу печінки.

Ключові слова: математична модель; регенерація печінки; чисельний експеримент.

V. V. Karieva, S. V. Lvov, L. P. Artyukhova. **Different strategies in the liver regeneration processes. Numerical experiments on the mathematical model.**

It is considered the generalized mathematical model which describes the processes of maintaining / restoring dynamic homeostasis (regeneration) of the liver and obviously depends on the control parameters. The model is a system of discrete controlled equations of the Lotka – Volterra type with transitions. These equations describe the controlled competitive dynamics of liver cell populations' (hepatic lobules) various types in their various states and controlled competitive transitions between types and states. To develop this model there were accepted such assumptions: homogeneous approximation; independence of biological processes; small toxic factors. In the mathematical model the process of the liver regeneration occurs due to hyperplasia processes, replication, polyploidy and division of binuclear hepatocytes into mononuclear and controlled apoptosis. All these processes are necessary for adequate modeling of the liver regeneration. For example, single and constant toxic functions show that the above processes are not able to cope with the toxic factors that are accumulated in the body. The process of restoring the body's functional state requires the non-trivial strategy of the liver regeneration. Numerical calculations revealed that the mathematical model corresponds to biological processes for different strategies of the liver regeneration. Based on the calculations in the case of partial hepatectomy it is concluded that the mixed strategy of regeneration should be used for the regeneration process. Henceforward it is planned to extend the mathematical model in the case of the liver regeneration, which occurs under the influence of strong toxins, that is, using the stem cells and fibrosis. It is also supposed to justify the principles and criteria for optimal regulation of the processes of maintaining / restoring liver's dynamic homeostasis.

Keywords: mathematical model; liver regeneration; numerical experiment.

Article history: Received: 25 February 2020; Final form: 10 June 2020;

Accepted: 15 June 2020.

ГОРДЕВСЬКИЙ ВЯЧЕСЛАВ ДМИТРОВИЧ

до 70 – річчя з дня народження



В. Д. Гордевський народився 4-го листопада 1949 року в м. Харкові, в сім'ї математика Гордевського Дмитра Захаровича та географа Гордевської Раїси Петрівни.

В 1966 році закінчив середню фізико-математичну школу № 27 м. Харкова та вступив до механіко-математичного факультету Харківського університету. Після його закінчення з відзнакою продовжив навчання в аспірантурі відділу математичної фізики Фізико-технічного інституту низьких температур АН України (зав. відділом – академік АН СРСР В. О. Марченко). З 1974 року по нинішній час працює на кафедрі математичного аналізу (з 2015 року – фундаментальної математики) Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

Наукова діяльність Вячеслава Дмитровича почалася на старших курсах

університету під керівництвом професора Володимира Олександровича Щербини й була пов'язана з математичними проблемами квантової теорії поля. В 1978 році він захистив кандидатську дисертацію, присвячену системам рівнянь для вершинних функцій Т-експоненти, що описують процеси мезон-нуклонної взаємодії. В подальшому він займався деякими прикладними питаннями, зокрема, теорією вимірювань та обробки сигналів, методами розпізнавання зображень тощо.

В 90-ті роки минулого сторіччя В. Д. Гордевський почав розробляти новий підхід до розв'язання математичних задач кінетичної теорії, якими займається й понині. Основним об'єктом цих досліджень стало нелінійне інтегродиференціальне кінетичне рівняння Л. Больцмана та деякі його модифікації (рівняння Брайана-Піддака тощо). Такі рівняння описують взаємодію великої кількості молекул різної природи (тверді або пружні кулі, шорсткуваті кулі і т. ін.). Для них в роботах Вячеслава Дмитровича та в дисертаціях його учнів побудовано цілу низку точних (максвелівських) розв'язків, які відповідають таким складним рухам газу як гвинти, смерчі (торнадо), прискорення-ущільнення і т. д., а також наближених в строгому сенсі (бімодальних або багатомодальних) розв'язків.

Результати опубліковані в багатьох вітчизняних і зарубіжних виданнях, та дозволили йому в 2004 році захистити докторську дисертацію на тему: «Бімодальні наближені розв'язки рівняння Больцмана». В 2011 році він здобув звання професора. Свою наукову діяльність Вячеслав Дмитрович успішно поєднує з педагогічною, пройшовши протягом 46-ти років всі викладацькі позиції на мехматі ХНУ: асистент, старший викладач, доцент, професор, завідувач кафедри математичного аналізу. В даний момент займає посаду професора кафедри фундаментальної математики ХНУ та є членом двох спеціалізованих вчених рад по захисту дисертацій з математики.

Під керівництвом В. Д. Гордевського успішно захистили кандидатські дисертації Гукалов О. О., Лемешева Н. В., Сазонова О. С.

ORCID ID: V. D. Gordevsky  <https://orcid.org/0000-0003-3642-8036>

Article history: Received: 15 May 2020.

ФАВОРОВ СЕРГЕЙ ЮРЬЕВИЧ

К семидесятилетию со дня рождения

3 декабря 2019 года исполнилось 70 лет профессору кафедры фундаментальной математики, тонкому аналитику, известному специалисту в области теории функций комплексных переменных, теории потенциала и гармонического анализа Сергею Юрьевичу Фаворову.



С. Ю. родился в Харькове в семье преподавателей. В харьковской физико-математической школе № 27 ему повезло учиться в необычном классе: пять учеников из него впоследствии стали докторами физико-математических наук. В 1966 году С. Ю. поступил на механико-математический факультет Харьковского университета. На 4 курсе он начал посещать знаменитый Харьковский городской семинар по теории функций под руководством Б. Я. Левина. С тех пор и до настоящего времени С. Ю. является постоянным участником этого семинара, а с 1999 года - одним из его руководителей.

После окончания университета С. Ю. поступил в аспирантуру и в 1975 году защитил кандидатскую диссертацию «Емкостные характеристики множеств и их применение в теории целых функций и целых кривых» под руководством Льва Исааковича Ронкина. В 1993 году С. Ю. защитил докторскую диссертацию «Исключительные множества и асимптотические свойства голоморфных отображений в конечномерное и банахово пространство».

Первые его работы были посвящены вопросам роста некоторых классов плюрисубгармонических функций. В 1978 году он доказал теорему о сложении индикаторов целых функций многих переменных. В 80-е годы С. Ю. начал исследования голоморфных отображений в банаховы пространства, получает бесконечномерные аналоги теорем Неванлинны. Он также находит новое неравенство типа Хинчина и совместно с Е. А. Гориным обобщает его на суммы случайных векторов. В начале 90-х, совместно с В. Н. Логвиненко, С. Ю. получил ряд результатов типа Картрайт о нормирующих множествах для целых функций экспоненциального типа. С. Ю. также получил неожиданно простое полное описание нулей целых функций экспоненциального ти-

па, ограниченных на вещественной оси.

В середине 90-х в совместных работах Л. И. Ронкина, А. Ю. Рашковского и С. Ю. была разработана теория почти периодических дивизоров, голоморфных цепей. В частности, С. Ю. в терминах когомологий получает полное описание нулей голоморфных почти периодических функций. Далее, он вместе со своими аспирантами изучает мероморфные почти периодические функции, субгармонические почти периодические функции, голоморфные почти периодические функции в метриках Вейля, Безиковича, почти периодические дискретные множества, почти эллиптические функции.

В последние годы С. Ю. совместно с Л. Б. Голинским в серии работ доказывает теоремы типа Бляшке о свойствах множеств нулей аналитических функций, растущих при приближении к компактным множествам на границе области голоморфности и находит их приложения в теории несамосопряженных возмущений классических операторов математической физики. Одновременно С. Ю. получает новые результаты в активно развивающейся области гармонического анализа - теории квазикристаллов. В частности, он использует доказанный им локальный вариант теоремы Н. Винера о тригонометрических рядах для того, чтобы существенно усилить классическую теорему И. Мейера о представлениях квазикристалла Фурье в виде конечной суммы «чистых» кристаллов. Сергей Юрьевич Фаворов - автор более 70 научных работ, участник около 70 научных конференций в разных странах мира. Под руководством Сергея Юрьевича защитили кандидатские диссертации В. Бритик, Н. Парфенова, О. Удодова, А. Рахнин, Н. Гиря, Е. Мильская и Л. Радченко. В последние годы Сергей Юрьевич преподает основной курс комплексного анализа и многие курсы по выбору: «Почти периодические функции», «Функции нескольких комплексных переменных», «Субгармонические функции», «Гармонический анализ на группах» и другие.

Сергей Юрьевич многие годы занимался горным туризмом, побывал в горах Кавказа, Алтая и даже Анд. Любознательность и страсть к открытию новых для себя мест, помноженные на прозрачность границ в современном мире, привели к впечатляющей географии его путешествий: от Байкала до尼亚гары, от Рейкьявика до Сантьяго, от седловины Эльбруса (+5000) до Мертвого моря (-400). И новые планы столь же грандиозны: как минимум посетить оба мыса Южного полушария. Сергей Юрьевич также увлекается горными лыжами, он каждую зиму бывает на горнолыжных курортах в Карпатах или на Кавказе, в Альпах, Пиренеях.

Мы поздравляем Сергея Юрьевича с юбилеем и желаем ему здоровья, энергии, новых научных успехов и сохранения присущих ему замечательных оптимизма и жизнелюбия.

*Вишнякова А. М., Голинский Л. Б., Коробов В. И., Рашковский А. Ю.,
Хейфец А. Я., Ямпольский А. Л.*

ORCID ID: S. Yu. Favorov:  <https://orcid.org/0000-0001-5135-0279>

Article history: Received: 15 May 2020.

Правила для авторів
«Вісника Харківського національного університету
імені В.Н.Каразіна»,
Серія «Математика, прикладна математика і механіка»

Редакція просить авторів при направленні статей керуватися наступними правилами.

1. В журналі публікуються статті, що мають результати математичних досліджень (англійською, українською або російською мовами).

2. Поданням статті вважається отримання редакцією файлів статті оформлених у редакторі LATEX (версія 2e), анотацій, відомостей про авторів та архіва, що включає LATEX файли статті та файли малюнків. Файл-зразок оформлення статті можна знайти в редакції журналу та на веб-сторінці (<http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>).

3. Стаття повинна починатися з анотацій, в яких повинні бути чітко сформульовані мета та результати роботи. Анотації повинні бути трьома мовами (англійською, українською та російською): першою повинна стояти анотація тією мовою, якою є основний текст статті. В анотації повинні бути прізвища, ініціали авторів, назва роботи, ключові слова та номер за міжнародною математичною класифікацією (Mathematics Subject Classification 2010). Анотація не повинна мати посилань на літературу чи малюнки. На першій сторінці вказується номер УДК класифікації. В кінці статті треба додати розширені (обсягом не менш як 1800 знаків кожна) анотації англійською та українською мовами.

4. Список літератури повинен бути оформлений латинським шрифтом. Приклади оформлення списку літератури:

1. А.М. Lyapunov. A new case of integrability of differential equations of motion of a solid body in liquid, Rep. Kharkov Math. Soc., – 1893. – 2. V.4. – P. 81-85.

2. А.М. Lyapunov. The general problem of the stability of motion. 1892. Kharkov Mathematical Society, Kharkov, 251 p.

5. Кожний малюнок повинен бути пронумерований та представлений окремим файлом в одному з форматів: EPS, BMP, JPG. В файлі статті малюнок повинен бути вставлений автором. Під малюнком повинен бути підпис. Назви файлів малюнків повинні починатись з прізвища першого автора.

6. Відомості про авторів повинні містити: прізвища, імена, по батькові, службові адреси та номери телефонів, адреси електронних пошт та інформацію про наукові профайли авторів (orcid.org, www.researcherid.com, www.scopus.com) з відповідними посиланнями. Прохання також повідомити прізвище автора, з яким треба вести листування.

7. Рекомендуємо використовувати в якості зразка оформлення останні випуски журналу (vestnik-math.univer.kharkov.ua/currentv.htm).

8. У випадку порушення правил оформлення редакція не буде розглядати статтю.

Електронна скринька: vestnik-khnu@ukr.net

Електронна адреса в Інтернеті: <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
серія “Математика, прикладна математика і механіка”, Том 91

Збірник наукових праць

Англійською, українською, російською мовами

Підписано до друку 25.06.2020 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк цифровий.

Ум. друк. арк. 3,5

Обл.– вид. арк. 4,1

Наклад 100 пр. Зам. № 16/2020

Безкоштовно.

61022, м. Харків, майдан Свободи, 4, Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна. Видавництво.

Надруковано: ХНУ імені В. Н. Каразіна

61022, м. Харків, майдан Свободи, 4, тел. 705-24-32

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09