

Идентификация жестких включений в тонкой пластине

Н. А. Гук, Н. И. Степанова

*Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара
пр. Гагарина, 72, 49000, Днепропетровск, Украина
nataly-guk@rambler.ru, nist66@mail.ru*

Рассматривается задача идентификации местоположения жестких включений в тонкой пластине. Для дискретизации неизвестных функций математической модели используется метод конечных элементов. Геометрическая обратная задача формулируется в условно-корректной постановке с учетом ограничений на множество решений. Идентификация параметров включений выполняется путем минимизации функции Лагранжа.

Ключевые слова: жесткое включение, геометрическая обратная задача, метод конечных элементов, функция Лагранжа.

Гук Н. А., Степанова Н. И., **Идентифікація жорстких включень у тонкій пластині.** Розглядається задача ідентифікації розташування жорстких включень у тонкій пластині. Для дискретизації невідомих функцій математичної моделі використовується метод скінченних елементів. Геометрична обернена задача формулюється в умовно-коректній постановці з урахуванням обмежень на множину розв'язків. Ідентифікація параметрів включень виконується шляхом мінімізації функції Лагранжа.

Ключові слова: жорстке включення, геометрична обернена задача, метод скінченних елементів, функція Лагранжа.

N. A. Guk, N. I. Stepanova, **Identification of rigid inclusions in the thin plate.** The problem of identifying the location of the rigid inclusions in thin plate is considered. The finite element method is being used for discretization the unknown functions of the mathematical model. Geometric inverse problem is formulated in the conditional-correct statement, taking into account restrictions on the number of solutions. Parameters identification is performed via minimization of the Lagrangian. *Keywords:* rigid inclusion, geometric inverse problem, finite element method, the Lagrangian.

2000 Mathematics Subject Classification 74G75.

Введение

Для прогнозирования ресурса конструкций, находящихся в процессе эксплуатации под воздействием механических и температурных полей и содержащих внутренние неоднородности – дефекты типа трещин, пустот, включений, необходима разработка эффективных методов обнаружения таких дефектов и определения их параметров. В частности, задачи идентификации жестких включений возникают при выполнении расчетов инженерных конструкций, при проектировании фундаментов зданий в строительной механике, при разработке методик прочностных расчетов композиционных материалов, при решении проблем предотвращения развития трещин в конструкциях.

Для обнаружения указанных дефектов могут быть использованы как методы неразрушающего контроля, основанные на различных физических эффектах, возникающих при взаимодействии внешних полей с исследуемым объектом [1], [2], так и аналитические методы.

Задача диагностики включений рассматривается в работах [3]–[7], [9]. В [3] предложен метод идентификации дефектов по измеренным значениям перемещений и усилий на внешней границе упругого тела, основанный на применении функционала взаимности. Применение такого подхода позволяет выразить неизвестные параметры дефекта (координаты центра, ориентацию и линейный размер дефекта) через отличные от нуля значения функционала взаимности в виде явных аналитических выражений.

В работе [4] приводятся результаты определения формы отслоившегося тонкого жесткого включения в однородной изотропной пластине Киргхофа-Лява по дополнительной информации о решении задачи равновесия на внешней границе тела. Сформулированная обратная задача сводится к задаче оптимального управления, где в качестве функции управления выступает форма включения.

Использование аналитических методов не дает возможность получить решение задачи в общем виде, возможна идентификация дефектов только для случаев, когда исследуемая область и включение имеют каноническую форму.

Для устранения указанных недостатков и организации процесса идентификации в режиме «on-line» весьма эффективным является использование аппарата обратных задач, позволяющего в автоматическом режиме выполнять процедуру идентификации параметров дефектов реальной тонкостенной системы по измеренным в эксперименте характеристикам напряженно-деформированного состояния. При этом обратная задача может быть сформулирована как коэффициентная (неизвестными являются коэффициенты дифференциальных операторов) [5], либо как геометрическая обратная задача (неизвестными являются геометрические параметры повреждения) [6], [7]. Указанные постановки пригодны для решения задач с непрерывной изменчивостью свойств.

Для устранения проблем, вызванных некорректностью обратных задач,

предлагается использование условно-корректной постановки, основанной на идее сужения класса возможных решений до некоторого множества, на котором ее решение будет устойчиво [8].

Для поиска минимума функционала качества обратной задачи в случаях, когда число неизвестных параметров велико, функционал имеет несколько локальных минимумов или является сильно овражистым, используются перспективные вычислительные алгоритмы [9].

В настоящей работе предлагается моделировать жесткое включение с использованием функций, характеризующих местоположение дефекта, а для устранения некорректности задачи сформулировать ограничения на решение, которые при формировании функционала качества обратной задачи присоединяются с использованием множителей Лагранжа.

Постановка задачи

Рассматривается задача деформирования неоднородной упругой пластины толщиной $2h$, занимающей конечную односвязную область $\tilde{G} = \{X \mid X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b\}$ с границей Γ , где $X = \{(x, y)\}$ — вектор координат точки области \tilde{G} ; a, b — линейные размеры пластины. Пластина находится под действием нормального к поверхности внешнего давления.

Внутри области \tilde{G} имеется несколько непересекающихся подобластей $G_m, m = \overline{1, M}$ с тензорами упругих модулей C_{ijkl}^m , отличными от свойств основного тела и возможно разными для каждой подобласти. Полость и жесткие включения рассматриваются как частные случаи упругого включения с тензорами упругих модулей $C_{ijkl}^m = 0$ и $C_{ijkl}^m = \infty$ соответственно.

Линейно упругое тело с тензором упругих модулей C_{ijkl} занимает область $G = \tilde{G} \setminus \bigcup_m G_m$. Упругие свойства области G предполагаются известными. На границах внутренних подобластей и области G предполагается полное сцепление, непрерывность векторов перемещений и напряжений.

Решение задачи предполагает определение в пластине местоположения включений. Указанная задача может быть сведена к задаче идентификации параметров модели деформирования пластины, описываемой соответствующей краевой задачей, а именно координат точек $X_k, k = \overline{1, K}$, в которых расположены включения.

Задача идентификации может быть сформулирована как обратная задача [8]. В качестве неизвестных выступает вектор $H(X) = \{X_k\}$, компонентами которого являются координаты точек пластины, где расположены жесткие включения.

Информацией для определения вектора неизвестных $H(X)$ служат измерения на поверхности тела в конечном числе точек наблюдений $X_p, p = \overline{1, P}$, значения функции деформации $\varepsilon(X, H) = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}\}$

$$\varepsilon(X, H)|_{X=X_p} = \varepsilon^*, p = \overline{1, P}.$$

Обратная задача формулируется в вариационной постановке и сводится к задаче минимизации функционала $I(H)$, характеризующего среднеквадра-

тичное уклонение между измеренными ε^* и вычисленными значениями компонент функции деформаций $\varepsilon(X_p, H)$ в точках X_p :

$$H(X) = \arg \min_{H \in \bar{H}} I(H), \quad (1)$$

$$I(H) = \int_{\tilde{G}} \sum_p (\varepsilon(X_p, H) - \varepsilon^*)^2 d\tilde{G} \quad H \in \bar{H}; \quad \varepsilon(X_p, H) \in \bar{U},$$

где \bar{U}, \bar{H} —области определения неизвестных функций прямой и обратной задачи.

Деформации $\varepsilon(X_p, H)$ в точках X_p вычисляются с использованием математической модели прямой задачи при заданном векторе $H(X)$.

Сужение класса возможных решений прямой и обратной задачи до некоторого множества, на котором решение будет устойчиво, позволяет сформулировать обратную задачу в условно-корректной постановке.

Математическая модель прямой и обратной задачи

Рассматриваемая тонкая пластина находится в равновесии под действием внешней нагрузки q . Задача об определении напряженно-деформированного состояния пластины при известном местоположении включений является прямой задачей и формулируется как задача минимизации функционала потенциальной энергии на множестве допустимых нормальных перемещений $w(X, H)$ в виде:

$$\delta \mathcal{E}_0 = \delta A, \quad (2)$$

где \mathcal{E}_0, A — работа внутренних и внешних сил.

За основные неизвестные прямой задачи принимаются значения функции нормальных перемещений $w(X, H)$. Тогда потенциальную энергию деформации можно выразить через потенциальную энергию деформации срединной поверхности пластины и потенциальную энергию изгиба в виде:

$$\mathcal{E}_0 = \int_{\tilde{G}} (M_{11}\chi_{11} + M_{22}\chi_{22} + 2M_{12}\chi_{12}) d\tilde{G},$$

где $\chi_{ij}, i, j = 1, 2$ определяются из геометрических соотношений, связывающих кривизны срединной поверхности и функцию нормальных перемещений

$$\chi_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{12} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

Работа внешних сил представляется в виде:

$$A = \int_G qw(X, H) dG.$$

Выражения для изгибающих моментов M_{11}, M_{22}, M_{12} с учетом закона Гука принимают вид:

$$M_{11} = -D(\chi_{11} + \nu\chi_{22}); \quad M_{22} = -D(\chi_{22} + \nu\chi_{11}); \quad M_{12} = -(1 - \nu)D\chi_{12},$$

где D — цилиндрическая жесткость пластины.

Цилиндрическая жесткость пластины при наличии в ней включений является переменной и может быть представлена в виде:

$$D = D_0 + \sum_k D^* \delta(X - X_k),$$

где $D_0 = \frac{E_0 h^3}{12(1 - \nu^2)}$, D^* — цилиндрическая жесткость пластины и включения соответственно; E_0 — модуль Юнга материала пластин; ν — коэффициент Пуассона; $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака; X_k — координаты точек пластины, в которых расположены жесткие включения, $k = \overline{1, N}$.

Компоненты вектор-функции деформации на поверхности пластины, где производится измерение, образуют вектор $\varepsilon(X, H) = \{h\chi_{11}, h\chi_{12}, h\chi_{22}\}^T$.

Для представления компонент вектора неизвестных обратной задачи $H(X) = \{X_k\}$, $k = \overline{1, N}$, составленного из координат точек пластины, в которых расположены жесткие включения, введем функцию

$$u_k(X) = \begin{cases} 1, & \text{если в точке } X_k \text{ есть включение,} \\ 0, & \text{если в точке } X_k \text{ нет включения.} \end{cases}$$

С учетом введенной функции изгибная жесткость пластины с включением (включениями) может быть представлена в виде:

$$D = D_0 + \sum_k D^* u_k.$$

Тогда неизвестными обратной задачи являются компоненты вектора $H(X) = \{u_k\}$, которые определяются из условия (1).

Граничные условия жесткого защемления на краях пластины $x = 0$, $x = a$ формулируются в виде:

$$w(0, H) = w'_x(0, H) = 0; \quad w(a, H) = w'_x(a, H) = 0. \quad (4)$$

Граничные условия для свободных кромок $y = 0$, $y = b$ являются естественными для уравнения (2).

Метод решения

Для построения решения прямой задачи (2), (4) и обратной задачи (1) осуществляется переход к дискретной модели пластины с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Использование МКЭ для определения напряженно-деформированного состояния конструкции требует представления неизвестных функций задачи и искомых геометрических характеристик системы в параметрическом виде. Для этого на области \tilde{G} вводятся следующие сетки:

- сетка с узлами X_n для описания неизвестных функций прямой задачи, где $X = \{X_n\}$, $X_n = (x_n, y_n)$, $n = \overline{1, N}$, тогда функция, характеризующая нормальные перемещения пластины, представляется в виде вектора $w(X, H) = \{w_n\}$;

- сетка с узлами X_p для описания координат точек измерений (все узлы X_p выбираются из числа узлов X_n), где $X = \{X_p\}$, $X_p = (x_p, y_p)$, $p = \overline{1, P}$; тогда функция, характеризующая деформации пластины в точках X_n представляется в виде вектора $\varepsilon(X, H) = \{\varepsilon_p(H)\}$, результаты наблюдений описываются вектором измеренных значений деформаций $\{\varepsilon_p^*\}$ в точках X_p ;
- сетка с узлами X_k для описания координат точек пластины, в которых имеется включение (все узлы X_k выбираются из числа X_n и находятся внутри области \tilde{G}), где $X = \{X_k\}$, $X_k = (x_k, y_k)$, $k = \overline{1, N}$, тогда функция $H(X)$, описывающая местоположение включения, представляется в виде вектора $H(X) = \{u_k\}$.

С использованием введенной дискретизации неизвестные функции прямой и обратной задач на элементе задаются для локальной системы координат при помощи аппроксимаций через узловые значения.

Вариационное уравнение (2) принимает вид:

$$\int_{\tilde{G}} \{\delta\chi_{ij}\}^T \{M_{ij}\} d\tilde{G} - \int_{\tilde{G}} \{\delta w\}^T \{R\} d\tilde{G} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (5)$$

$\{R\}$ — вектор объемной нагрузки.

Связь между кривизнами срединной поверхности и перемещениями на элементе устанавливается соотношениями (3), которые в векторной форме представим следующим образом:

$$\{\chi_{ijn}\} = [L]\{w_n\}, \quad n = \overline{1, N},$$

где $[L]$ —матрица дифференцирования.

После выполнения соответствующей процедуры интегрирования соотношения (5) при заданной аппроксимации неизвестных функций, и суммировании матриц элементов, получаем разрешающую систему линейных алгебраических уравнений для определения узловых перемещений в виде:

$$A(u)w = R, \quad (6)$$

или в развернутом виде:

$$\sum_{j=1}^N (a_{ij} + b_{ij}u_j)w_j - R_i = 0, \quad i = \overline{1, N}$$

где $w = \{w_j\}$ — вектор нормальных перемещений в узлах пластины; $R = \{R_i\}$ — вектор нагрузки; $A(u) = [\tilde{a}_{ij}]$ — матрица жесткости ансамбля конечных элементов с компонентами $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}u_j)$, $i, j = \overline{1, N}$; $\{u_j\}$ —

вектор, характеризуючий наличие включений в узлах пластины; a_{ij} , b_{ij} — коэффициенты, определяемые путем интегрирования соотношений (5) с помощью метода конечных элементов, причем компоненты a_{ij} характеризуют жесткость пластины без включения, b_{ij} — наличие жестких включений в соответствующих узлах пластины.

Предполагается, что количество точек пластины, в которых имеется включение, ограничено, и справедливо условие:

$$\sum_{j=1}^N u_j = K, \quad (7)$$

где K — общее число точек области, занятой включением (включениями).

С использованием введенной дискретизации решение обратной задачи описывается вектором $H = \{u_j\}$. Определим множество $Q = \{q_m\}$, $m = \overline{1, M}$, $M = C_N^K$ n -мерных векторов q_m , $q_m = \{q_{1m} q_{2m} \dots q_{km} 0 \dots 0\}$, в которых компоненты q_{km} , $k = \overline{1, K}$ соответствуют номерам узлов, в которых есть включения, значения этих компонент равны единицам, на остальных $(N - K)$ позициях располагаются нули.

Задача определения местоположения дефекта сводится к задаче определения вектора $H = \{u_j\}$ из условия (1), при этом функционал в (1) после подстановки конечноэлементной аппроксимации функций задачи приобретает вид:

$$I(H) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P (\varepsilon_p(H) - \varepsilon_p^*)^T (\varepsilon_p(H) - \varepsilon_p^*). \quad (8)$$

Так как компоненты вектора $\{\varepsilon_p(H)\}$ определяются из соотношений (3) путем подстановки в них решений задачи (6), то к функции (8) необходимо присоединить условия, обеспечивающие решение прямой задачи. Условия (6) и (7) присоединяются к функции (8) с помощью множителей Лагранжа:

$$I(H) = \frac{1}{2} (B_p w_p - \varepsilon_p^*)^T (B_p w_p - \varepsilon_p^*) + \sum_{i=1}^N \varphi_i \left(\sum_{j=1}^N (a_{ij} + b_{ij} u_j) w_j - R_i \right) + \varphi_0 \sum_{j=1}^N (u_j - K), \quad (9)$$

где w_p — нормальные перемещения в узлах X_p ; B_p — коэффициенты, определяемые из условия аппроксимации функции $w(X)$ внутри конечного элемента и соотношений (3); $\psi = (\varphi_0, \varphi_i)$, $i = \overline{1, N}$ — вектор множителей Лагранжа.

Из условий экстремума функции $I(H)$ получим систему алгебраических

уравнений:

$$\begin{aligned}
 \forall i, j = p \quad & (B_p w_p - \varepsilon_p^*) + \varphi_i \sum_{j=1}^N (a_{ij} + b_{ij} u_j) - R_i = 0 \\
 \forall i, j \neq p \quad & \varphi_i \sum_{j=1}^N (a_{ij} + b_{ij} u_j) - R_i = 0 \\
 \forall i, j \quad & \sum_{i=1}^N \varphi_i \sum_{j=1}^N b_{ij} w_j + \varphi_0 = 0 \\
 & \sum_{j=1}^N u_j = K
 \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда значения компонент вектора $\{u_j^*\}$ могут быть определены из условия (11)

$$u_j^* = \begin{cases} 1, \text{ если } \varphi_i \sum_{j=1}^N b_{ij} w_j + \varphi_0 < 0 \\ 0, \text{ если } \varphi_i \sum_{j=1}^N b_{ij} w_j + \varphi_0 > 0 \\ \text{любое число, } \in [0, 1], \text{ если } \varphi_i \sum_{j=1}^N b_{ij} w_j + \varphi_0 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Если упорядочить значения $\varphi_i \sum_{j=1}^N b_{ij} w_j$, $i = \overline{1, N}$ по возрастанию, то можно построить последовательность компонент $\{q_{1m}^* q_{2m}^* \dots q_{km}^*\}$ в векторе $q_m = \{q_{1m} q_{2m} \dots q_{km} 0 \dots 0\}$, при которой

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i \sum_{j=1}^N b_{ij} w_j = \min \sum_{i=1}^N \varphi_i \sum_{j=1}^N b_{ij} w_j, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Значения φ_0 определяются из условия (7) с учетом (11) в виде:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \left(\varphi_k \sum_{j=1}^N b_{kj} w_j + \varphi_{k+1} \sum_{j=1}^N b_{k+1j} w_j \right). \tag{12}$$

Алгоритм определения местоположения включения

Описанный подход к решению обратной задачи может быть реализован следующим алгоритмом:

1. Инициализировать переменные: l — номер шага итерационного процесса; K — число точек, в которых есть включение; $H^l = \{u_j^l\}$, $j = \overline{1, N}$ — вектор решения обратной задачи.
2. Задать начальные значения: $l = 0$; K ; $H^0 = \{u_j^0\}$, $j = \overline{1, N}$.
3. Решить прямую задачу (6) при известном векторе H^l , получить вектор $\{w_n\}$, матрицу $A(u) = [\tilde{a}_{ij}]$, сформировать функционал (9).
4. Сформировать систему (10), из решения первого и второго уравнений системы (10) определить значения φ_i^l , $i = \overline{1, N}$.
5. Сформировать $\varphi_i^l \sum_{j=1}^N b_{ij} w_j$, $i = \overline{1, N}$ упорядочить значения по возрастанию, выбрать первые K значений.
6. Определить значение $\varphi_0^{(l)}$ из условия (12).
7. $l = l + 1$.
8. Определить значения компонент вектора $H^l = \{u_j^l\}$, $j = \overline{1, N}$ из условия (11).
9. Проверить выполнение условия $I^l(H) > \delta$, где δ — малое наперед заданное число; если условие выполняется, то перейти к шагу 3, иначе перейти к следующему шагу.
10. Конец.

Результаты численного эксперимента

Представленный алгоритм был применен для определения местоположения включений ($E_1 = 2 \cdot 10^{15}$ Н/м²) в тонкой прямоугольной пластине ($a/b = 1$, $a/2h = 100$, $E_0 = 2 \cdot 10^6$ Н/м², a , b , $2h$ — длина, ширина, толщина пластины) по измеренным значениям деформаций, которые фиксируются датчиками, установленными на поверхностях пластины.

Решение прямой задачи (2),(4), моделирующее процесс измерения деформаций пластины, выполнялось с использованием пакета прикладных программ, реализующих метод конечных элементов. В результате решения прямой задачи при заданном местоположении включения получены значения деформаций, которые в дальнейшем использовались в качестве результата наблюдений ε^* .

С использованием предложенного подхода была выполнена идентификация местоположения включений для случаев, когда в пластине имелось одно и несколько включений. Модель пластины с двумя включениями представлена на рис. 1, местоположение включений отмечено темным фоном, площадь включения 1 составляет 0.5% от площади пластины, площадь включения 2 — 1%.

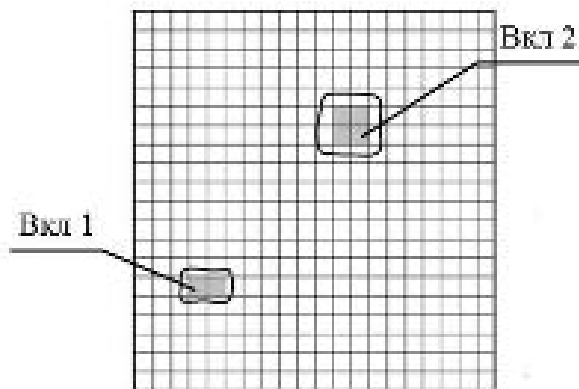


Рис. 1: Модель пластины с включениями

Для организации итерационной процедуры определения местоположения включения был сформирован вектор $\{u_j\}$, $j = \overline{1, N}$. Номера компонент вектора $\{u_j\}$ соответствуют номерам узлов пластины и принимают значения равные 1 там, где наблюдаются наибольшие отклонения значений деформаций пластины с включением от значений деформаций в соответствующих точках пластины без включения (на рис. 1 эти области выделены линиями). В остальных узлах сетки пластины значения компонент вектора $\{u_j\}$ выбирались равными 0.

Далее значения компонент вектора $\{u_j\}$, $j = \overline{1, N}$ определяются в итерационном процессе из условия (11) и характеризуют местоположение включения (включений).

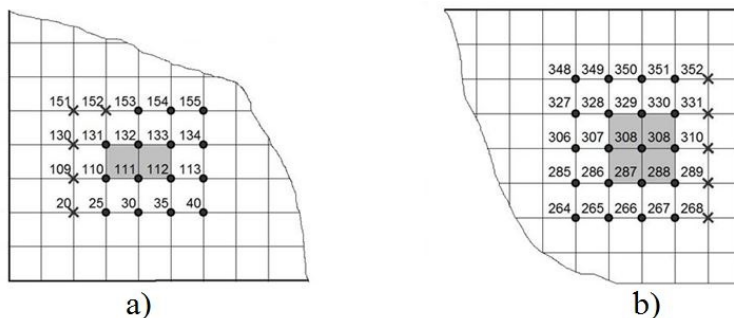


Рис. 2: Результат первой итерации для каждого из включений

На рис. 2 а,б показан результат выполнения первой итерации алгоритма идентификации первого (соответствует рис. 2а) и второго (соответствует рис. 2б) включений. Темным фоном на рисунке выделены области, в которых расположены действительные включения, точками с номерами обозначены узлы, для которых значения компонент вектора $\{u_j\}$ в соответствии с условием (11) приняли значения равные 1. Эти узлы являются начальным

приближением для выполнения следующей итерации. Крестиками помечены узлы, которые исключаются при выполнении следующей итерации, соответствующие им компоненты вектора $\{u_j\}$ принимают значения равные 0.

Видно, что уже на первом шаге итерационного процесса определяются области пластины, в которых расположены действительные включения.

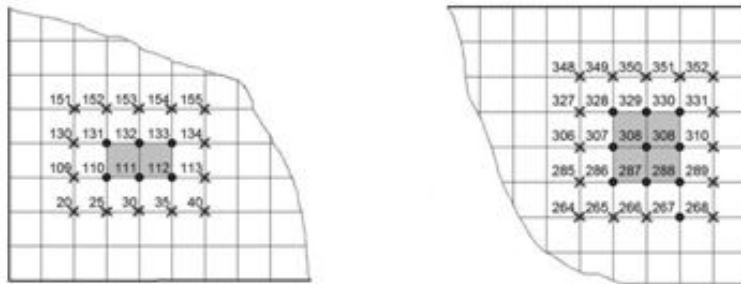


Рис. 3: Результат идентификации включений

На рис. 3 представлен результат идентификации включений, полученный на 4 итерации.

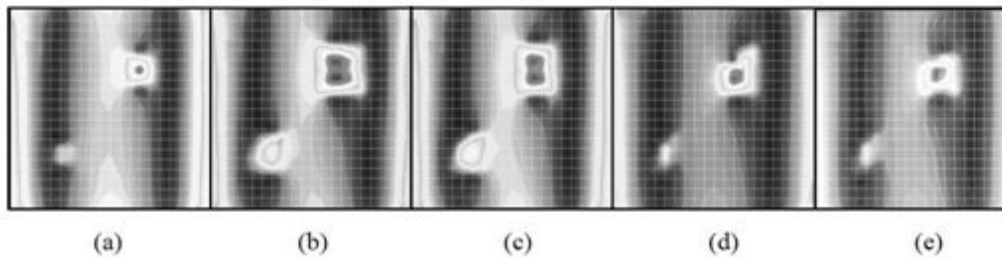


Рис. 4: Визуализация итерационного процесса идентификации включений: а – действительное включение; б – начальное приближение; с – результат первой итерации; d – результат второй итерации; e – результат идентификации.

На рис. 4 показаны картины напряженно-деформированного состояния пластины с включением, полученные на итерациях процедуры идентификации, рис. 4а соответствует действительному расположению включений, рис. 4е – результату идентификации.

Анализ проведенных вычислительных экспериментов показывает, что предложенный алгоритм позволяет идентифицировать как мелкие включения, имеющие размер порядка 1% от характерного размера пластины, так и включения, линейный размер которых составляет 5 – 7 % от характерного размера пластины, при этом погрешность восстановления не превышает 3%.

Можно отметить, что в результате выполнения предложенной процедуры определяются геометрические параметры всех имеющихся в пластине включений, если они размещены на удалении друг от друга. Для группы близко

расположенных мелких включений (расстояние между включениями меньше линейного размера включения) возможна идентификация только границ области местоположения включений.

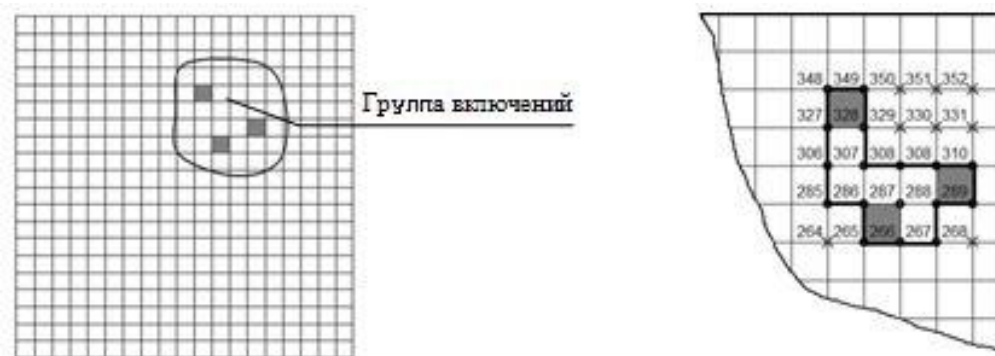


Рис. 5: Идентификация группы включений

На рис. 5 представлена модель пластины с группой мелких близкорасположенных включений и результат идентификации (область включений выделена жирной линией).

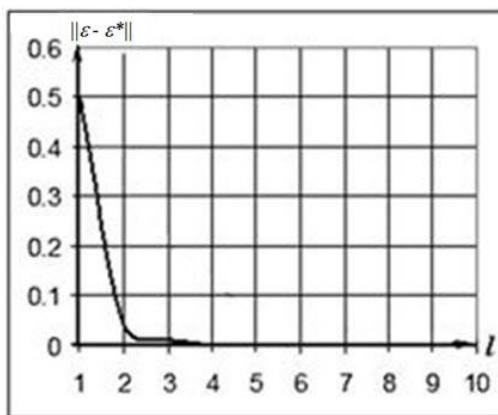


Рис. 6: Зависимость $\|\varepsilon - \varepsilon^*\|$ от количества итераций

На рис. 6 представлен характер поведения нормы невязки $\|\varepsilon - \varepsilon^*\|$ на итерациях предложенного алгоритма (соответствующая кривая обозначена сплошной жирной линией). Из анализа рисунка видно, что с увеличением номера итерации значения $\|\varepsilon - \varepsilon^*\|$ быстро уменьшаются.

Следует отметить, что использование предложенного подхода для получения результата идентификации требует выполнения только матричных операций и решения систем линейных алгебраических уравнений.

Выводы

Предложенный подход позволяет идентифицировать местоположение включений в тонкой прямоугольной пластине по результатам измерений значений деформаций; ограничения, накладываемые на множество решений прямой и обратной задачи, обеспечивают условно-корректную постановку обратной задачи; предложенный способ описания области дефекта и разработанный алгоритм идентификации существенно сокращают количество операций для получения удовлетворительного результата идентификации; сравнительный анализ результатов вычислительного эксперимента показывает, что с использованием предложенного подхода возможна идентификация местоположения жестких включений различных размеров. В перспективе предложенный подход может быть применен для идентификации жестких включений не только в тонких прямоугольных пластинах, но и в других тонкостенных системах – круглых пластинах, тонких оболочках и т.п.

Список литературы

1. Адаменко А. А. Современные методы радиационной дефектоскопии. — К. : Наукова думка, 1984. — 202 с.
2. Радько В. И., Заплотинский И. А., Галаненко Д. В. Выявление, идентификация и измерение размеров плоскостных дефектов с применением технологии TOFD в ручных дефектоскопах. // Неразрушающий контроль, 2012. — №1. — С. 45–50.
3. Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of a spheroidal defect in an elastic solid using a reciprocity gap functional. // Inv. Probl., 2010. — V.26.— N.5. 055001.
4. Щербаков В. В., Существование оптимальной формы тонких жестких включений в пластине Кирхгофа–Лява. // Сиб. журн. индустр. матем., 2013. — Т. 16. — № 4. — С. 142–151.
5. Ватульян А. О. Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел. // Вестник СамГУ - Естественнонаучная серия, 2007. — №4(54). — С. 93–104.
6. Ободан Н.И., Макаренко Н.Б. Идентификационно-инверсный метод диагностики повреждений // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла. — Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2006. — №7. — С. 81–88.
7. Ободан Н.И., Шульга А.С. Идентификация дефектов в деформируемых телах. // Проблемы машиностроения, 2005. — 1. — С. 33–37.

8. Тихонов А. Н., Кальнер В. Д., Гласко В. Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. — М.: Машиностроение, 1990. — 264 с.
9. Баранов И. В., Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Об одном генетическом алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих сред. // Вычислительные технологии, 2006. — №3. — С. 14–26.
10. Киселева Е. М. Математические методы оптимального разбиения множеств и их приложения/ Е. М. Киселева. — Днепропетровск: ДГУ, 1982. — 107 с.

Статья получена: 3.09.2015; окончательный вариант: 15.12.2015;
принята: 16.12.2015.