Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 533.72 Том 82, 2015, с.4–18

Бімодальний розподіл з деякими максвелівськими модами для рівняння Брайана-Піддака

В. Д. Гордевський, О. О. Гукалов

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, 61022, Харків, Україна
gordevskyy2006@yandex.ru,
Фізико-технічний інститут низьких температур імені Б. І. Вєркіна
проспект Леніна, 47, 61103, Харків, Україна
hukalov@ilt.kharkov.ua

Побудовано наближений розв'язок рівняння Брайана-Піддака у вигляді бімодального розподілу з максвелівськими модами, що описують рух газу типу "прискорення-ущільнення". Отримані різні достатні умови мінімізації відхилу з неоднорідною вагою для моделі шорсткуватих куль.
Ключові слова: рівняння Брайана-Піддака, шорсткуваті кулі, "прискорення-ущільнення", відхил з неоднорідною вагою.

Гордевский В. Д., Гукалов А. А. **Бимодальное распределение с некоторыми максвелловскими модами для уравнения Брайана-Пиддака.** Построено приближенное решение уравнения Брайана-Пиддака в виде бимодального распределения с максвелловскими модами, которые описывают движение газа типа "ускорение-уплотнение". Получены разные достаточные условия минимизации невязки с неоднородным весом для модели шероховатых сфер.
Ключевые слова: уравнение Брайана-Пиддака, шероховатые сферы, "ускорение-уплотнение", невязка с неоднородным весом.

V. D. Gordevskyy, O. O. Hukalov, **The bimodal distribution with some Maxwell modes for the Bryan-Piddack equation.** The approximate solution of Bryan-Piddack equation in the form of a bimodal distribution with the Maxwell modes that describe the motion of the gas type "Accelerating-Packing" is constructed . The sufficient conditions for minimization of inhomogeneous weighted residual for the model of rough spheres are obtained.
Keywords: Bryan-Piddack equation,rough spheres, "Accelerating-Packing", non-uniform weight.
2010 Mathematics Subject Classification 76P05, 45K05, 82C40, 35Q55.

Вступ

У цій статті розглядається модель шорсткуватих куль [1], яка вперше була введена у 1894р. Брайаном (Bryan). Методи, що були розвинуті для загальних сферичних молекул, які не обертаються, у 1922 р. були розповсюджені на модель Брайана Піддаком (Piddack), де було враховано обертання молекул. Перевага цієї моделі перед усіма іншими моделями, що припускають зміну стану обертання молекул, полягає у тому, що тут не потрібно ніяких додаткових змінних, які визначають орієнтацію молекули у просторі.

Вказані молекули є абсолютно пружними та абсолютно шорсткуватими, що означає наступне. В момент зіткнення двох молекул, точки, якими безпосередньо торкаються поверхні сфер, не мають у загальному випадку однакової швидкості. Передбачається, що дві сфери зачіпляють одна одну без ковзання. У початковий момент сфери деформують одна одну, а потім енергія деформації повертається назад у кінетичну енергію поступального та обертального руху без жодних втрат. У результаті відносна швидкість сфер у точці їх зіткнення змінюється при ударі на обернену.

Модель застосовується для одноатомних молекул та, враховуючи можливість обертання, є більш фізичною, ніж модель твердих куль та цікавою для вивчення.

Рівняння Больцмана для моделі шорсткуватих куль(або рівняння Брайана-Піддака) має вигляд [1-4]:

$$D(f) = Q(f,f); \tag{1}$$

$$D(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial f}{\partial x}\right); \tag{2}$$

$$Q(f,f) \equiv \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \cdot$$

$$\cdot \Big[f(t, V_1^*, x, \omega_1^*) f(t, V^*, x, \omega^*) - f(t, V, x, \omega) f(t, V_1, x, \omega_1) \Big]. \tag{3}$$

Тут d – діаметр молекули, який пов'язаний з моментом інерції I наступним співвідношенням:

$$I = \frac{bd^2}{4}, \tag{4}$$

де b – параметр, $b \in \left(0, \frac{2}{3}\right]$, який характеризує ізотропний розподіл речовини всередині молекули; t – час; $x = (x^1, x^2, x^3) \in R^3$ – просторова координата; $V = (V^1, V^2, V^3)$ та $\omega = (\omega^1, \omega^2, \omega^3) \in R^3$ – лінійна та кутова швидкості молекули відповідно; $\frac{\partial f}{\partial x}$ — градієнт функції f по змінній x; Σ – одинична сфера у просторі R^3; α — одиничний вектор із R^3, що спрямований вздовж лінії, яка з'єднує центри молекул, які зіштовхуються;

$$B\left(V - V_1, \alpha\right) = |(V - V_1, \alpha)| - (V - V_1, \alpha) \tag{5}$$

— член зіткнення у виразі для інтеграла зіткнень (3).

Лінійні (V^*, V_1^*) та кутові (ω^*, ω_1^*) швидкості молекул після зіткнення виражаються через відповідні швидкості до зіткнення наступним чином [1]:

$$\begin{aligned}
V^* &= V - \frac{1}{b+1}\left(b(V_1 - V) - \frac{bd}{2}\alpha \times (\omega + \omega_1) + \alpha(\alpha, V_1 - V)\right),\\
V_1^* &= V_1 + \frac{1}{b+1}\left(b(V_1 - V) - \frac{bd}{2}\alpha \times (\omega + \omega_1) + \alpha(\alpha, V_1 - V)\right),\\
\omega^* &= \omega + \frac{2}{d(b+1)}\left\{\alpha \times (V - V_1) + \frac{d}{2}\left[\alpha(\omega + \omega_1, \alpha) - \omega - \omega_1\right]\right\},\\
\omega_1^* &= \omega_1 + \frac{2}{d(b+1)}\left\{\alpha \times (V - V_1) + \frac{d}{2}\left[\alpha(\omega + \omega_1, \alpha) - \omega - \omega_1\right]\right\},
\end{aligned} \tag{6}$$

де через символ $\times$ позначено векторний добуток. Ці формули можна отримати, користуючись законами збереження імпульсу, сумарної енергії поступального та обертального руху (вперше вони наведені у роботі [5]).

Як відомо, загальний вигляд максвелівських розв'язків рівняння Больцмана для моделі твердих куль був отриманий в роботах [6-8], їх опис та дослідження можна також знайти у [9-11]. Аналогічна задача для моделі Брайана-Піддака була остаточно розв'язана тільки у роботі [12].

Зокрема, там отримано явний вигляд максвелівського розподілу, що описує рух газу типу "прискорення-ущільнення" для цієї моделі. Такий розподіл фізично представляє рух газу, при якому він летить з прискоренням та ущільнюється у всьому просторі. Він має наступне представлення:

$$M_i = \rho_i I^{3/2}\left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^3 e^{-\beta_i\left(\left(V - \overline{V}_i\right)^2 + I\omega^2\right)}, \tag{7}$$

де густина газу ρ_i (тут та усюди далі індекс i приймає значення 1 та 2) аналітично має вигляд:

$$\rho_i = \rho_{0i} e^{\beta_i\left(\overline{V}_i^2 + 2\overline{u}_i x\right)}, \tag{8}$$

ρ_{0i} – довільна додатня константа, $\beta_i = \frac{1}{2T_i}$ – величина, обернена до температури, $\overline{V}_i$ – масова швидкість, що виражається наступним чином:

$$\overline{V}_i = \widehat{V}_i - \overline{u}_i t, \tag{9}$$

$\widehat{V}_i, \overline{u}_i$ – довільні вектори у просторі R^3.

Наближений розв'язок рівняння (1) ми будемо шукати у вигляді бімодального розподілу:

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \tag{10}$$

де M_i – максвеліани з виглядом (7), а функції $\varphi_i = \varphi_i(t, x)$ – невід'ємні, гладкі та обираються таким чином, щоб відхил між частинами рівняння (1) був скіль завгодно малим.

У цій роботі у якості відхилу між лівою та правою частинами рівняння Брайана-Піддака буде розглянуто аналог відхилу з неоднорідною вагою для твердих куль, що був уперше введений у роботі [13]. У випадку моделі шорсткуватих куль він виглядає наступним чином:

$$\widetilde{\Delta}_q = \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \left| D(f) - Q(f,f) \right|, \tag{11}$$

функція $q(x)$ – невід'ємна та обмежена у всьому просторі R^3 та відображає неоднорідність у відхилі з вагою [14].

Мета роботи полягає у знаходженні для моделі шорсткуватих куль, яка досліджується, вигляду функцій $\varphi_i(t,x)$ та таких достатніх умов на гідродинамічні параметри максвелівських розподілів (7), функцій $\varphi_i(t,x)$, щоб відхил (11) можна було зробити скіль завгодно малим.

Основні результати

Теорема 1. *Нехай коефіцієнтні функції у розподілі (10) мають наступний вигляд:*

$$\varphi_i(t,x) = C_i \left(x + \overline{u}_i \frac{\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)^2}{2\overline{u}_i^2} \right), \tag{12}$$

де C_i – невід'ємні, гладкі та обмежені у просторі R^4 зі своєю похідною функції.

Також нехай мають місце наступні припущення:

$$\overline{u}_i = \frac{\overline{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}}, \tag{13}$$

$$\widehat{V}_i = \frac{\widehat{V}_{0i}}{\beta_i^{k_i}}, \tag{14}$$

де $\overline{u}_{0i}, \widehat{V}_{0i}$ – довільні тривимірні вектори, а показники n_i, k_i такі, що:

$$n_i \geqslant 1, \quad k_i \geqslant \frac{1}{2}, \quad k_i \geqslant \frac{1}{2} n_i. \tag{15}$$

Також будемо вимагати, щоб функція $q(x) \cdot e^{2\overline{u}_{0i}x}$ була обмежена у просторі R^3.

Тоді має місце наступне твердження:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \widetilde{\Delta}_q = 0. \tag{16}$$

Доведення. Для доведення твердження (16), спочатку покажемо, що існує така величина $\widetilde{\Delta}'_q$, що:

$$\widetilde{\Delta}_q \leqslant \widetilde{\Delta}'_q. \tag{17}$$

Для цього зробимо підстановку (10) у вираз (2):

$$
\begin{aligned}
D(f) &= M_1 D(\varphi_1) + \varphi_1 D(M_1) + M_2 D(\varphi_2) + \varphi_2 D(M_2) \\
&= M_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \right) + M_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right),
\end{aligned}
$$

а підставляючи до інтеграла зіткнень (3) та перетворюючи, здобудемо:

$$Q(f,f) = \varphi_1 \varphi_2 \Big(Q(M_1, M_2) + Q(M_2, M_1) \Big).$$

Як відомо [10]-[11], інтеграл зіткнень можна подати у наступному вигляді:

$$Q(f,g) = G(f,g) - fL(g), \tag{18}$$

де прибутковий член:

$$
\begin{aligned}
G(f,g) = \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\sum} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \\
\times f(t, x, V_1^*, \omega_1^*) g(t, x, V^*, \omega^*),
\end{aligned}
$$

а витратний член має вигляд:

$$L(g) = \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\sum} d\alpha B(V - V_1, \alpha) g(t, x, V_1, \omega_1).$$

У роботі [15] було продемонстровано, що:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega Q\left(M_i, M_j\right) = 0, \tag{19}$$

тоді, враховуючи (18), отримуємо:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega G(M_i, M_j) = \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega M_i L(M_j). \tag{20}$$

Використовуючи рівності (18) та (20), а також вигляд лівої частини рівняння Брайана-Піддака (2) для функції (10) зробимо оцінку:

$$
\begin{gathered}
|D(f) - Q(f,f)| \\
\leqslant M_1(|D(\varphi_1)| + \varphi_1\varphi_2 L(M_2)) + M_2(|D(\varphi_2)| + \varphi_1\varphi_2 L(M_1)) \\
+ \varphi_1\varphi_2(G(M_1, M_2) + G(M_2, M_1)).
\end{gathered}
$$

Проінтегруючи останню нерівність по простору лінійних та кутових швидкостей, отримуємо:

$$
\begin{gathered}
\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(f) - Q(f,f)| \\
\leqslant \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{2} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \left(|D(\varphi_i)| + \varphi_i \varphi_j L(M_j)\right) M_i + 2\varphi_1\varphi_2 \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega G(M_1, M_2) \\
= \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(\varphi_i)| M_i + 4\varphi_1\varphi_2 \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega G(M_1, M_2).
\end{gathered}
$$

Далі, використаємо доведену у роботі [4] наступну формулу:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega G(M_1, M_2)$$
$$= \frac{d^2\rho_1\rho_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|. \tag{21}$$

Тепер, використовуючи вигляд максвеліанів (7) та останню рівність (21), продовжимо оцінку:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(f) - Q(f,f)|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right) \right| \rho_i I^{3/2} \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^3 e^{-\beta_i\left((V-\overline{V}_i)^2 + I\omega^2\right)}$$
$$+ \frac{4d^2\rho_1\rho_2\varphi_1\varphi_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|.$$

Обчислюючи потрійний інтеграл по кутовим швидкостям ω та використовуючи вигляд масової швидкості (9), отримуємо:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(f) - Q(f,f)|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dV \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right) \right| \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta_i(V-\overline{V}_i)^2}$$
$$+ \frac{4d^2\rho_1\rho_2\varphi_1\varphi_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \left(\widehat{V}_1 - \widehat{V}_2\right) + (\overline{u}_1 - \overline{u}_2)\, t \right|,$$

зробимо заміну змінних:

$$V = \frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i,$$

та помножуючи на $\frac{q(x)}{1+|t|}$, а далі переходячи до супремуму по усьому простору часу і просторової координати будемо мати:

$$\widetilde{\Delta}_q \leqslant \widetilde{\Delta}'_q$$
$$= \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dV \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \overline{u}_i t, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \right| e^{-p^2}$$
$$+ \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \cdot \frac{4d^2\rho_1\rho_2\varphi_1\varphi_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2}$$
$$\times \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \left(\widehat{V}_1 - \widehat{V}_2\right) + (\overline{u}_1 - \overline{u}_2)\, t \right|, \tag{22}$$

де густина газу ρ_i з врахуванням масової швидкості (9) набуває вигляду:

$$\rho_i = \rho_{0i} e^{\beta_i\left(\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)^2 + 2\overline{u}_i x\right)}. \tag{23}$$

Для коректної визначеності правої частини нерівності (22) достатньо, щоб добуток множника $\frac{q(x)}{1+|t|}$ на кожну із наступних функцій:

$$t\varphi_i\rho_i, \quad \frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\rho_i, \quad \left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right|\rho_i, \quad t\rho_i\left(\overline{u}_i, \frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)$$

був обмежений на R^4, що випливає з вигляду коефіцієнтної функції (12), густини (23) та накладених умов на функцію C_i, її похідну і добуток $q(x)\cdot e^{2\overline{u}_{0i}x}$. Значення добутків $\sqrt{|t|}\varphi_i\rho_i$ та $|t|\varphi_1\varphi_2\rho_1\rho_2$ у зв'язку з гладкістю функцій φ_i обмежені у R^4.

Далі знаходимо похідні функції φ_i, які містяться у правій частині нерівності (22):

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = \left(C_i^{'}, \overline{u}_i\right)\frac{\left(\widehat{V}_i, \overline{u}_i\right) - t\overline{u}_i^2}{\overline{u}_i^2}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = C_i^{'}\left(x + \overline{u}_i\frac{\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)^2}{2\overline{u}_i^2}\right), \tag{25}$$

де через $C_i^{'}$ позначено градієнт функції C_i за її векторним аргументом. Тепер переходимо до низькотемпературної границі у нерівності (22), для чого знайдемо границю густини газу з врахуванням (23) в залежності від значень коефіцієнтів n_i, k_i :

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\rho_i = \left[\begin{array}{ll} \rho_{0i}, & n_i > 1, \quad k_i > \frac{1}{2}; \\ \rho_{0i}e^{2\overline{u}_{0i}x}, & n_i = 1, \quad k_i > \frac{1}{2}; \\ \rho_{0i}e^{\widehat{V}_{0i}^2 + 2\overline{u}_{0i}x}, & n_i = 1, \quad k_i = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Крім того, з врахуванням умов (13), (14) маємо:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\left|\frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \left(\widehat{V}_1 - \widehat{V}_2\right) + \left(\overline{u}_1 - \overline{u}_2\right)t\right| = 0,$$

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = 0.$$

І на останок знаходимо границю коефіцієнтної функції φ_i та її градієнта:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \varphi_i$$

$$= \lim_{\beta_i \to +\infty} C_i \left(x + \overline{u}_{0i} \beta^{-n_i} \frac{\left(\widehat{V}_{0i} \beta_i^{-k_i} - \overline{u}_{0i} \beta_i^{-n_i} t \right)^2}{2\overline{u}_{0i}^2 \beta^{-2n_i}} \right)$$

$$= \left[\begin{array}{ll} C_i(x), & k_i > \frac{1}{2} n_i; \\ C_i \left(x + \overline{u}_{0i} \frac{\widehat{V}_{0i}^2}{2\overline{u}_{0i}^2} \right), & k_i = \frac{1}{2} n_i; \end{array} \right.$$

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \left[\begin{array}{ll} C_i'(x), & k_i > \frac{1}{2} n_i; \\ C_i' \left(x + \overline{u}_{0i} \frac{\widehat{V}_{0i}^2}{2\overline{u}_{0i}^2} \right), & k_i = \frac{1}{2} n_i, \end{array} \right.$$

звідки ми отримуємо, що границя при $\beta_i \to +\infty$ правої частини нерівності (22) дорівнює нулю, що і стверджує рівність (16). **Теорема доведена.**

Зауваження 1. Функція $q(x)$ може бути не тільки обмеженою, но і фінітною або швидкоспадаючей, хоча би за напрямками, що паралельні $\overline{u}_{0i}$.

Зауваження 2. Умови (13), (14) необхідні для існування низькотемпературної границі величини $\widetilde{\Delta}_q'$. Крім того, далі у роботі буде розглянуто і інші можливі значення показника n_i.

Теорема 2. *Припустимо, що функції φ_i у бімодальному розподілі (10) наступного вигляду:*

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x) \cdot e^{-\beta_i \left(\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t \right)^2 + 2\overline{u}_i x \right)}, \tag{26}$$

та функції:

$$t\psi_1\psi_2, \quad t\psi_i, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial t}, \quad \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right|, \quad t\left(\overline{u}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \tag{27}$$

після помноження на $\frac{q(x)}{1+|t|}$ обмежені по $(t,x) \in R^4$. Крім того залишимо у силі розклад (13), змінивши значення показника n_i на наступні:

$$n_i > \frac{1}{2}. \tag{28}$$

Тоді, якщо розглянути функції $\psi_i(t,x)$ у вигляді:

$$\psi_i = C_i \left(x - \widehat{V}_i t \right) \tag{29}$$

або

$$\psi_i = C_i \left(\left[x \times \widehat{V}_i \right] \right), \tag{30}$$

де C_i – невід'ємні, гладкі та обмежені функції на R^4 та, крім цього, добутки $q(x) \cdot C_i$ та $q(x) \cdot C_i'$ обмежені, а

$$\widehat{V}_1 = \widehat{V}_2, \tag{31}$$

то залишається в силі рівність (16).

Доведення. Спочатку знову побудуємо оцінку (17) та покажемо, що:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\beta_i \to +\infty} \widetilde{\Delta}'_q \\
&= \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\widehat{V}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \right| \\
&+ 4\pi d^2 \rho_{01}\rho_{02} \left| \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 \right| \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} (\psi_1\psi_2).
\end{aligned} \tag{32}$$

При доведенні теореми 1 була отримана оцінка (22), у якій похідні коефіцієнтних функцій у випадку (26) мають вигляд:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = e^{-\beta_i \left(\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t \right)^2 + 2\overline{u}_i x \right)} \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \left(\left(\widehat{V}_i, \overline{u}_i \right) - \overline{u}_i^2 t \right) \right\}, \tag{33}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = e^{-\beta_i \left(\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t \right)^2 + 2\overline{u}_i x \right)} \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} - 2\beta_i \overline{u}_i \psi_i \right\}. \tag{34}$$

Тепер підставимо тільки що знайдені похідні у праву частину нерівності (22), отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Delta}_q \leqslant \widetilde{\Delta}'_q \\
&= \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \left| e^{-\beta_i \left(\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t \right)^2 + 2\overline{u}_i x \right)} \right. \\
&\times \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \left(\left(\widehat{V}_i, \overline{u}_i \right) - t\overline{u}_i^2 \right) \right\} \\
&+ \left. \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \overline{u}_i t, e^{-\beta_i \left(\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t \right)^2 + 2\overline{u}_i x \right)} \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} - 2\beta_i \overline{u}_i \psi_i \right\} \right) \right| e^{-p^2} \\
&+ \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \cdot \frac{4d^2 \rho_1\rho_2\varphi_1\varphi_2}{\pi^2} \\
&\times \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \left(\widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 \right) + (\overline{u}_2 - \overline{u}_1)t \right|.
\end{aligned}$$

Далі враховуючи вираз (23) для густини ρ_i та вигляд коефіцієнтної функції (26), що перетворить вираз для $\widetilde{\Delta}'_q$ до наступного вигляду:

$$\sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \overline{u}_i t, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) - 2\sqrt{\beta_i}\overline{u}_i \psi_i p \right| e^{-p^2}$$
$$+ \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \cdot \frac{4d^2 \rho_{01}\rho_{02}\psi_1\psi_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2}$$
$$\times \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \left(\widehat{V}_1 - \widehat{V}_2\right) - \left(\overline{u}_1 - \overline{u}_2\right) t \right|,$$

та, використовуючи умову теореми (28), отримаємо наступне представлення для $\widetilde{\Delta}'_q$:

$$\sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \frac{\overline{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}} t, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \right.$$
$$\left. -2\sqrt{\beta_i}\psi_i p \frac{\overline{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}} \right| e^{-p^2} + \frac{4d^2\rho_{01}\rho_{02}}{\pi^2} \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \cdot (\psi_1\psi_2) \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2}$$
$$\times \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \left(\widehat{V}_1 - \widehat{V}_2\right) - \left(\frac{\overline{u}_{01}}{\beta_1^{n_1}} - \frac{\overline{u}_{02}}{\beta_2^{n_2}} \right) t \right|,$$

і, виконуючи граничний перехід ($\beta_i \to +\infty$) в останьому виразі, отримуємо, що:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \widetilde{\Delta}'_q$$
$$= \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\widehat{V}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \right| e^{-p^2}$$
$$+ \frac{4d^2\rho_{01}\rho_{02}}{\pi^2} \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \cdot (\psi_1\psi_2) \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 \left| \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 \right| e^{-q^2-q_1^2},$$

та, обчислюючи інтеграл за зміною p, отримуємо рівність (32).

Далі обчислюємо похідні функції ψ_i у вигляді (29), тобто:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = -\left(\widehat{V}_i, C'_i\right), \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = C'_i, \tag{35}$$

а для випадка (30):

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = -\left[C'_i \times \widehat{V}_i\right], \tag{36}$$

Тобто, знайдені похідні (35) та (36) занулюють перший доданок (32), а другий доданок зникає завдяки рівності (31). Таким чином, у припущеннях теореми 2 виконується рівність (16). **Теорема доведена.**

Розглянемо ще один результат для досліджуваного відхила з неоднорідною вагою (11).

Теорема 3. *Нехай функції φ_i в шуканому розв'язку (10) мають наступний вигляд:*

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x) \cdot e^{-\beta_i\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)^2}, \tag{37}$$

де добуток функцій (27) на множник $e^{2\beta_i \overline{u}_i x}$ обмежений з вагою $\frac{q(x)}{1+|t|}$.

Також нехай має місце представлення (13) з показником степеня $n_i \geqslant 1$. Тоді твердження (16) залишається вірним, якщо:

a) *у випадку $n_i > 1$ функції $\psi_i(t,x)$ мають вигляд (29) або (30), крім того, виконується умова (31) або:*

$$suppC_1 \cap suppC_2 = \emptyset, \tag{38}$$

де C_i та *C_i' – обмежені функції. Функція $q(x)$ повина бути фінітною або швидкоспадаючою на нескінченості.*

b) *якщо $n_i = 1$ необхідно до умов попереднього пункта додати наступну вимогу:*

$$\left(\overline{u}_i, \widehat{V}_i\right) = 0. \tag{39}$$

Доведення. Знову покажемо, що при вигляді коефіцієнтних функцій (37) у випадку $n_i > 1$ залишається вірною рівність (32), а коли має місце $n_i = 1$, то:

$$\begin{gathered}\lim_{\beta_i \to +\infty} \widetilde{\Delta}_q' \\ = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} e^{2\overline{u}_{0i}} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\widehat{V}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right) \right| \\ +4\pi d^2 \rho_{01}\rho_{02} \left|\widehat{V}_1 - \widehat{V}_2\right| \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} e^{2(u_{01}x + u_{02}x)} \psi_1(t,x)\psi_2(t,x) \\ +2\sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \left|\left(\overline{u}_{0i}, \widehat{V}_i\right)\right| \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} e^{2\overline{u}_{0i}x} \psi_i(t,x).\end{gathered} \tag{40}$$

Як і раніше, залишається вірною нерівність (22). Обчислимо похідні коефіцієнтних функцій (37). За зміною t будемо мати:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = e^{-\beta_i\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)^2} \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \left(\left(\overline{u}_i, \widehat{V}_i\right) - \overline{u}_i^2 t \right) \right\}, \tag{41}$$

а по просторовій координаті:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = e^{-\beta_i\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)^2} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}. \tag{42}$$

Знайдені похідні (41), (42) підставимо до правої частини нерівності (22) та використаємо вираз для густини (23), що дозволяє подати вираз для $\widetilde{\Delta}'_q$ наступним чином:

$$\sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_{0i} e^{2\beta_i \overline{u}_i x}}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \left(\left(\overline{u}_i, \widehat{V}_i \right) - \overline{u}_i^2 t \right) \right.$$
$$\left. + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \overline{u}_i t, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \right| e^{-p^2} + \frac{4d^2 \rho_{01}\rho_{02}}{\pi^2} \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \psi_1 \psi_2 e^{2(\beta_1 \overline{u}_1 x + \beta_2 \overline{u}_2 x)}$$
$$\times \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 + (\overline{u}_2 - \overline{u}_1)t \right|,$$

та, користуючись представленням (13), отримуємо:

$$\sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_{0i} e^{2\beta_i \overline{u}_{0i} \beta_i^{-n_i} x}}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \left(\left(\overline{u}_{0i}, \widehat{V}_i \right) \beta_i^{-n_i} - \overline{u}_{0i}^2 t \beta_i^{-2n_i} \right) \right.$$
$$\left. + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \overline{u}_{0i} t \beta_i^{-n_i}, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \right| e^{-p^2}$$
$$+ \frac{4d^2 \rho_{01}\rho_{02}}{\pi^2} \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \psi_1 \psi_2 e^{2\left(\beta_1^{1-n_1} \overline{u}_{01} x + \beta_2^{1-n_2} \overline{u}_{02} x\right)}$$
$$\times \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 + (\overline{u}_{02}\beta_2^{-n_2} - \overline{u}_{01}\beta_1^{-n_1})t \right|, \quad (43)$$

Виконуючи низькотемпературний граничний перехід у останьому виразі у випадку $n_i > 1$ та, інтегруючи за зміною p, ми отримаємо саме вираз (32), а якщо $n_i = 1$, то границя величини $\widetilde{\Delta}'_q$ складе:

$$\sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_{0i} e^{2\overline{u}_{0i} x}}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i \left(\overline{u}_{0i}, \widehat{V}_i \right) + \left(\widehat{V}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \right| e^{-p^2}$$
$$+ \frac{4d^2 \rho_{01}\rho_{02}}{\pi^2} \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \psi_1 \psi_2 e^{2(\overline{u}_{01} x + \overline{u}_{02} x)} \times \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 \right|,$$

що після елементарних перетворень і дає (40).

Далі, якщо $n_i > 1$, перевіримо, що функції вигляду (29), (30) з урахуванням (31), (38) та обмеженості функцій C_i та C'_i задовільняє умовам теореми 3.

Для цього перевіримо обмеженість наступних функцій:

$$\frac{q(x)}{1+|t|} t\psi_1\psi_2 e^{2(\beta_1\overline{u}_1 x+\beta_2\overline{u}_2 x)}, \tag{44}$$

$$\frac{q(x)}{1+|t|}\frac{\partial\psi_i}{\partial t} e^{2\beta_i\overline{u}_i x}, \tag{45}$$

$$\frac{q(x)}{1+|t|} t\psi_i e^{2\beta_i\overline{u}_i x}, \tag{46}$$

$$\frac{q(x)}{1+|t|}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right| e^{2\beta_i\overline{u}_i x}, \tag{47}$$

$$\frac{q(x)}{1+|t|} t\left(\overline{u}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right) e^{2\beta_i\overline{u}_i x}. \tag{48}$$

Вираз (48) для функцій (29) та (30) в силу того, що носії не перетинаються, тотожньо дорівнює нулю. Якщо використовувати умову (31), то враховуючи обмеженість функцій C_i та фінітність або швидке спадання $q(x)$ вираз (48) все одно залишається обмеженим.

Також вираз (49) обертається на нуль для випадка (30), а для (29) він буде обмежений завдяки накладених умов на C_i' та функцію $q(x)$. Усі інші вирази (50), (47) та (48) можна оцінити аналогічним чином, використовуючі значення похідних (35), (36).

Тепер, спираючись на (31) або (38) та формули для похідних (35) і (36), отримаємо твердження (16)для випадку $n_i > 1$.

Коли $n_i = 1$ використаємо значення границі (40). Фінітність або достатньо швидке спадання функції $q(x)$ забезпечує обмеженість усіх виразів, що входять до (40) та поглинає зростання $e^{2\overline{u}_{0i}x}$.

У підсумку, використовуючи (31) або (38), (35) та (36), а також умову перпендикулярності векторів $\overline{u}_i$ та $\widehat{V}_i$ (39) отримуємо твердження (16) у випадку $n_i = 1$. **Теорема доведена.**

Висновки

Розглянуте відхилення з неоднорідною вагою (11) дозволило отримати для моделі Брайана-Піддака низку нових наближених розв'язків у вигляді бімодального розподілу з коефіцієнтними фіункціями від просторової координати та часу з максвелівськими модами, що описують рух газу типу "прискорення-ущільнення". Слід зазначити, що вдається отримати явний вигляд цих розв'язків, а не тільки встановити їх існування. Отримані результати можуть бути використані при подальшому вивчені рівняння Брайана-Піддака.

Таким чином, результати, що були раніше отримані для більш простої фізично моделі твердих куль, вдається поширити і на модель шорсткуватих куль.

Подяка. Роботу виконано за часткової підтримки НАН України, Проект "Лінійні еволюційні рівняння у гільбертовому просторі та рівняння Больцмана".

Література

1. С.Чепмен, Т.Каулинг. Математическая теория неоднородных газов, пер. с англ. Е. В. Малиновской; под ред. Н.Н. Боголюбова М. : Изд-во иностр. лит., 1960г. — 510 с.

2. Cercignani C., Lampis M. On the kinetic theory of a dense gas of rough spheres. J. Statist. Phys., 1988. — **53**, — P. 655–672.

3. Gordevsky V.D. Explicit approximate solutions of the Boltzmann equation for the model of rough spheres // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine (2000), **4**, P. 10–13, (Ukrainian).

4. Gordevskyy V.D. Approximate Billow Solutions of the Kinetic Bryan-Pidduck Equation – Math. Meth. Appl. Sci., 2000. – **23**. – P. 1121–1137.

5. Bryan G.H. On the Application of the Determinantal Relation to the Kinetic Theory of Polyatomic Gases // Rep. British Ass. Adv. Sci., 1894. — Vol. **64**. — P.102–106.

6. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. М. : ИИЛ, (пер. с франц.), 1960. — 118 с.

7. Grad H. On the kinetic theory of racefied gases //Comm. Pure and Appl. Math., 1949. — **2**. — №4 — P. 331–407.

8. Фридлендер О.Г. Локально-максвелловские решения уравнения Больцмана //Прикладная математика и механика, 1965. — **29**. — №5. — С. 973 – 977.

9. Gordevskyy V.D. On the non-stationary Maxwellians // Math. Meth. Appl. Sci. – 2004. – **27**. – P.231–247.

10. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. — М. : Мир, 1978. — 495 с.

11. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. – М. : Наука, 1967. — 440 с.

12. Гордевский В.Д., Гукалов А.А. Максвелловские распределения в модели шероховатых сфер // Укр. мат. журн., 2011. — **63**. — №5. – С. 629–639.

13. Lemesheva N.V. Bimodal Distributions in the Space of a Non-Uniform Weight// Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 2015. — **11**. — № 3. — P. 267–278.

14. Гордевский В.Д., Гукалов А.А. "Взаимодействие локально-максвелловских потоков в модели шероховатых сфер" // ТМФ – 176:2, 2013. — С. 322–336.

15. Гордевский В.Д., Гукалов А.А. Взаимодействие смерчевых потоков в модели Бриана-Пиддака // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка 2011. — №990, Випуск 64, С. 27–41.

Стаття одержана: 20.10.2015; перероблений вариант: 28.10.2015; прийнята: 5.11.2015.