Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9 Том 82, 2015, с.27–33

О решении линейных матричных уравнений

С. М. Чуйко

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, 84 116 Донецкая обл., ул. Генерала Батюка, 19, Украина
chujko-slav@inbox.ru

Линейные матричные уравнения широко используются в теории устойчивости движения, теории управления, а также в задачах восстановления изображений. В статье предложены оригинальные условия разрешимости, а также схема нахождения решений неоднородного обобщенного матричного уравнения и, в частности, уравнения Сильвестра, в общем случае, когда линейный матричный оператор L, соответствующий однородной части обобщенного матричного уравнения не имеет обратного.
Ключевые слова: матричное уравнение Сильвестра, матричное уравнение Ляпунова, псевдообратные матрицы.

Чуйко С. М., **Про розв'язання лінійних матричних рівнянь.** Лінійні матричні рівняння широко використовуються в теорії стійкості руху, теорії управління, а також у задачах про відновлення зображень. У статті запропоновані оригінальні умови розв'язності, а також схема знаходження розв'язків неоднорідного узагальненого матричного рівняння і, зокрема, рівняння Сільвестра, у випадку, коли лінійний матричний оператор L, відповідний до однорідної частини узагальненого матричного рівняння не має оберненого.
Ключові слова: матричне рівняння Сильвестра, матричне рівняння Ляпунова, псевдообернена матриця.

S.M. Chuiko. **The solution of the linear matrix equations.** Linear matrix equations widely used in the theory of stability of motion, control theory and signal processing. We suggest an algorithm for finding solutions of the inhomogeneous generalized matrix equation and, in particular, the Sylvester equation in general case when the linear matrix operator L, corresponding to the homogeneous part of the linear generalized matrix equation, has no inverse.
Keywords: Lyapunov matrix equation, Sylvester matrix equation, pseudoinverse matrix.

2000 Mathematics Subject Classification 15A24, 34B15, 34C25.

Матричные уравнения Ляпунова, а также их обобщения — матричные уравнения Сильвестра [1, 2, 3, 4, 6] широко используются в теории устойчивости движения [3, с. 245], а также при решении дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли [7]. Если структура общего решения однородной части уравнения Ляпунова хорошо изучены [1, 6], то решение неоднородного уравнения Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова достаточно громоздко. В статье [7] предложены условия разрешимости, а также схема построения частного решения уравнения Ляпунова на основе псевдообращения [9] оператора L, соответствующего однородной части уравнения Ляпунова.

Используя технику псевдообратных (по Муру-Пенроузу) матриц и проекторов, в данной статье предложены оригинальные условия разрешимости, а также схема нахождения семейства линейно независимых решений неоднородного обобщенного матричного уравнения и, в частности, уравнения Сильвестра, в общем случае, когда линейный матричный оператор L, соответствующий однородной части обобщенного матричного уравнения не имеет обратного. Найдено выражение для семейства линейно независимых решений неоднородного обобщенного матричного уравнения и, в частности, уравнений Сильвестра и Ляпунова с использованием проекторов и псевдообратных (по Муру-Пенроузу) матриц [3, 8, 10].

Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решений линейного матричного уравнения

$$\mathcal{L}X = \mathcal{A}. \tag{1}$$

Здесь $\mathcal{L}:\ \mathbb{R}^{\beta\times\gamma} \to \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}$ — линейный ограниченный матричный функционал, $X \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$ — неизвестная матрица, $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}$ — заданная матрица. Обозначим

$$\Big\{\Theta_j\Big\}_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$$

естественный базис [11] пространства $\mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$. Общее решение уравнения (1) ищем в виде суммы

$$X = \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta_j c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1.$$

Последнее выражение приводит уравнение (1) к виду

$$\sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Big[\mathcal{L}\Theta_j\Big] c_j = \mathcal{A}.$$

Определим оператор $\mathcal{M}[A]:\ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$, как оператор, который ставит в соответствие матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-столбец $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы A, а также обратный оператор [8]

$$\mathcal{M}^{-1}\Big[\mathcal{B}\Big]:\ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

который ставит в соответствие вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Заметим, что оператор $\mathcal{M}[A]$, как и обратный оператор $\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}]$, могут быть представлены в явном виде. Определим матрицы

$$\Upsilon_1 := (\ 1\ ) \in \mathbb{R}^{1\times 1}, \quad \Upsilon_2 := (\ 1\ 0\ 0\ 1\ )^* \in \mathbb{R}^{4\times 1},$$

$$\Upsilon_3 := (\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ )^* \in \mathbb{R}^{9\times 1},\ \dots .$$

Вектор Υ_m состоит из $m-1$ цепочки вида $(\ 1\ 0\ 0\ \dots\ 0\ )^* \in \mathbb{R}^{(m-1)\times 1}$ и заканчивается единицей:

$$\Upsilon_m := \Big(\ 1\ 0\ 0\ \dots\ 0 \quad 1\ 0\ 0\ \dots\ 0 \quad \dots \quad 1\ 0\ 0\ \dots\ 0 \quad 1\ \Big)^* \in \mathbb{R}^{m^2\times 1}.$$

В новых обозначениях оператор $\mathcal{M}[A]$ представим в явном виде:

$$\mathcal{M}[A] = \ \Big(I_n \otimes A\Big)\cdot \Upsilon_n \in \mathbb{R}^{m\cdot n}.$$

Определим также матрицы [8]

$$\Big[E_n^m\Big]_j := \Big[E_1^m\Big]_j \otimes I_n \in \mathbb{R}^{n\times m\cdot n}, \ \Big[E_1^m\Big]_j := \Big\{\delta_{ij}\Big\}_{i=1}^m \in \mathbb{R}^{1\times m};$$

здесь δ_{ij} — символ Кронеккера [11]. Таким образом, обратный оператор $\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}]$ представим в явном виде:

$$\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}] = \sum_{k=1}^{n} \Big[E_n^m\Big]_k \cdot \mathcal{B} \cdot \Big[E_1^m\Big]_k.$$

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Обозначим матрицы $\Xi_j := \mathcal{L}\Theta_j \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}$. Таким образом, уравнение (1) равносильно следующему уравнению

$$\mathcal{Q}\ c = \mathcal{M}[\mathcal{A}] \tag{2}$$

относительно вектора $c \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma}$; здесь

$$\mathcal{Q} := \Big\{\ \mathcal{M}[\Xi_1]\ \ \mathcal{M}[\Xi_2]\ \dots\ \mathcal{M}[\Xi_{\beta\cdot\gamma}]\ \Big\} = \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Big\{\Big[E_1^{\alpha\beta}\Big]_j \otimes \mathcal{M}[\Xi_j]\Big\} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\beta\cdot\gamma}.$$

При условии

$$P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[\mathcal{A}] = 0. \tag{3}$$

и только при нем уравнение (2) разрешимо

$$c = \mathcal{Q}^+\mathcal{M}[\mathcal{A}] + P_{\mathcal{Q}_r}c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

при этом уравнение (1) имеет r-параметрическое семейство решений

$$X = \Phi[\mathcal{A}] + \Psi[c_r],$$

где

$$\Phi[\mathcal{A}] := \mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B]\Big\}, \quad \Psi[c_r] := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r}c_r\Big].$$

Здесь $\mathcal{Q}^+$ — псевдообратная (по Муру-Пенроузу) матрица [1, 11],

$$P_{\mathcal{Q}} : \ \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma\times\beta\cdot\gamma} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}), \quad P_{\mathcal{Q}^*} : \ \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\alpha\cdot\delta} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$$

— ортопроекторы матриц $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}^*$. Матрица $P_{\mathcal{Q}_r}$ составлена из r линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$. Условия существования и вид общего решения матричного уравнения (1) определяет следующая теорема.

Теорема. *Матричное уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие (3). При условии (3) и только при нем, уравнение (1) имеет r-параметрическое семейство решений*

$$X = \Phi[\mathcal{A}] + \Psi[c_r], \quad \Phi[\mathcal{A}] := \mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B]\Big\}, \quad \Psi[c_r] := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r}c_r\Big].$$

При условии $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ будем говорить, что для матричного уравнения (1) имеет место критический случай, при этом уравнение (1) разрешимо лишь для тех неоднородностей $\mathcal{A}$, для которых выполнено условие (3).

Пример 1. *Матричное уравнение общего вида*

$$\mathcal{L}X = \mathcal{A} \tag{4}$$

разрешимо при

$$\mathcal{L}X := \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} S_iXR_j + \int_0^1\int_0^1 U(t,s)XV(t,s)\ dtds;$$

здесь

$$S_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U(t,s) := \begin{pmatrix} t & 0 \\ t & s \\ 0 & s \end{pmatrix}, \quad V(t,s) := \begin{pmatrix} s & s & 0 & 0 \\ 0 & s & t & 0 \\ 0 & 0 & t & t \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 84\ 905\ 350 & 3\ 018\ 490 & 14\ 616\ 420 & -5\ 670\ 300 \\ 42\ 288\ 650 & 1\ 673\ 270 & 8\ 255\ 910 & -3\ 126\ 750 \\ -42\ 616\ 700 & -1\ 345\ 220 & -6\ 360\ 510 & 2\ 543\ 550 \end{pmatrix}.$$

Естественный базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$ составляют матрицы

$$\Theta_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Theta_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \dots,\ \Theta_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ключевая при исследовании уравнения (4) матрица

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 15 & 16 & 0 & 0 & 12 & 12 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 15 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 16 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 12 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

определяет матрицу-ортопроектор $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$, при этом для уравнения (4) имеет место критический случай. Поскольку выполнено условие (3), постольку, поставленная задача разрешима. Единственное ($P_{\mathcal{Q}} = 0$) решение уравнения (4) представимо в виде

$$X = \Phi[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} 8\ 500\ 808 & -30\ 430\ 080 & 74\ 279\ 340 \\ -3\ 976\ 935 & 11\ 872\ 080 & -37\ 314\ 120 \end{pmatrix}.$$

При условии $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ будем говорить, что для матричного уравнения (1) имеет место некритический случай, при этом уравнение (1) разрешимо для любой неоднородности $\mathcal{A}$.

Следствие. *Матричное уравнение (1) в некритическом случае* ($P_{\mathcal{Q}^*}{=}0$) *разрешимо для любой неоднородности* $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}$. *В этом случае уравнение (1) имеет* r*-параметрическое семейство решений* $C = \Phi[\mathcal{A}] + \Psi[c_r]$.

Пример 2. *Матричное уравнение общего вида*

$$\mathcal{L}X = \mathcal{A} \tag{5}$$

разрешимо при

$$\mathcal{L} := \int_0^{2\pi} U(t)XV(t)dt,\ V(t) := \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix};$$

здесь
$$U(t) := \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Ключевая при исследовании уравнения (5) матрица
$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
определяет ортопроекторы $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ и
$$P_{\mathcal{Q}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Поскольку $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$, постольку для уравнения (5) имеет место некритический случай, следовательно, поставленная задача разрешима. Общее решение уравнения (5)
$$X = \Phi[\mathcal{A}] + \Psi[c_r]$$
определяют матрицы
$$\Phi[\mathcal{A}] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi[c_r] = \begin{pmatrix} 0 & -c_1 & -c_2 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказанная теорема и следствие обобщают соответствующие условия разрешимости, а также схему построения решения уравнений Ляпунова [7, 10] и Сильвестра [8] на случай линейного матричного уравнения (1) общего вида и могут быть использованы в теории устойчивости движения [3, 4, 5, 15], при решении дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли [7, 13], а также при решении линейных краевых задач для матричных дифференциальных уравнений [12]. Полученные результаты аналогично [14] могут быть перенесены на обобщенные уравнения типа Сильвестра, содержащие неизвестные матрицы различных размерностей.

Acknowledgement. Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0115U003182.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
2. Беллман Р., Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 367 с.

3. Ланкастер П., Теория матриц. — М.: Наука, 1978. — 280 с.
4. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
5. Коробов В.И., Бебия М.О., Стабилизация одного класса нелинейных систем, неуправляемых по первому приближению // Доп. НАН України, 2014. — № 2. — С. 20–25.
6. Boichuk A.A., Krivosheya S.A., Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal, 1998. — **50**, № 8. — P. 1162–1169.
7. Boichuk A.A., Krivosheya S.A., A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation // Differential Equations, 2001. — **37**, № 4. — P. 464–471.
8. Чуйко С.М., О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика, 2014. — **19**, Вип. 1 (21), С. 49–57.
9. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М., Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.
10. Чуйко С.М. О решении матричных уравнений Ляпунова // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка», 2014. — № 1120. Випуск 69. — С. 85 – 94.
11. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А., Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 318 с.
12. Chuiko S.M., The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Siberian Mathematical Journal, 2015. — **56**, № 4. — P. 752–760.
13. Деревенский В.П., Матричные уравнения Бернулли // Известия вузов. Математика, 2008. — № 2. – P. 14–23.
14. Чуйко С.М., О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра // Чебышевский сборник, 2015. — **16**, Вып. 1. — С. 52–66.
15. Бебия М. О., Стабилизация систем со степенной нелинейностью // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка», 2014. — 1120, Випуск 69. — С. 75–84.

Статья получена: 22.04.2015; окончательный вариант: 2.11.2015;
принята: 3.11.2015.