Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.51, 517.588 № 1133, 2014, с.131–139

Неелементарні функції, породжені центральними факторіальними степенями

Т. П. Гой
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
вул. Шевченка, 57, 76018, м. Івано-Франківськ, Україна
tarasgoy@yahoo.com

Досліджені нові функції дійсної змінної, означені при допомозі центральних факторіальних степенів. Встановлений їх зв'язок з узагальненими гіпергеометричними функціями. Доведені деякі властивості нових функцій та формули, що їх пов'язують. Виведені звичайні диференціальні рівняння, розв'язками яких є запропоновані функції.
Ключові слова: факторіальний степінь, центральний факторіальний степінь, узагальнена гіпергеометрична функція, задача Коші.

Гой Т. П., **Неелементарные функции, порожденные центральными факториальными степенями.** Предложены новые функции действительного переменного, определенные с помощью центральных факториальных степеней. Показана их связь з обобщенными гипергеометрическими функциями. Установлены некоторые свойства новых функций и связывающие их формулы. Выведены обыкновенные дифференциальные уравнения, решениями которых есть предложенные функции.
Ключевые слова: факториальный степень, центральный факториальный степень, обобщенная гипергеометрическая функция, задача Коши.

T. P. Goy, **Non-elementary functions generated by central factorial powers.** We consider new functions generated by central factorials. Graphs of such functions are drawn and some of their properties are proved. We have established their relationship with the hypergeometric functions. It is shown, that constructed functions are solutions of ordinary differential equations, derived in the article.
Keywords: factorial powers, central factorial powers, generalized hypergeometric function, Cauchy problem.

2000 Mathematics Subject Classification: 33E20.

1. Вступ

Відомо, що математичні моделі багатьох технічних і природних процесів приводять до задач, точні розв'язки яких отримати класичними методами неможливо. Збільшення кількості неелементарних функцій приводить до суттєвого розширення кола задач, які можуть бути розв'язані у замкненому вигляді. При цьому особлива увага приділяється дослідженню нових функцій з метою їхнього подальшого застосування у теорії функцій, числових методах та у моделюванні конкретних практичних задач.

Класичні трансцендентні функції e^x, $\sin x$, $\cos x$ задаються при допомозі відповідних степеневих рядів з участю факторіалів, які можна подати у вигляді спадного факторіального степеня $n^{\underline{n}}$. Замінивши у цих степеневих рядах спадні факторіальні степені відповідними центральними факторіальними степенями, одержуємо нові неелементарні функції дійсної змінної $\tilde{E}\,(x)$, $\tilde{S}\,(x)$, $\tilde{C}\,(x)$ відповідно.

Метою статті є дослідження функцій $\tilde{E}\,(x)$, $\tilde{S}\,(x)$, $\tilde{C}\,(x)$, доведення формул, що їх пов'язують, встановлення зв'язку цих з відомими функціями, а також виведення звичайних диференціальних рівнянь, розв'язками яких є нові функції.

2. Основні означення й поняття

Означення 1. Для довільних $x \in \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}$ *факторіальним степенем* m *з кроком* $k \in \mathbb{R}$ називають вираз

$$x^{m\{k\}} = x(x+k)(x+2k)\cdot\ldots\cdot\bigl(x+(m-1)k\bigr).$$

Факторіальний степінь називають *зростаючим*, якщо $k > 0$, і *спадним*, якщо $k < 0$. Вважають, що $x^{0\{k\}} \equiv 1$. Для $k = 0$ маємо звичайний степінь, бо $x^{m\{0\}} = x^m$.

Зростаючі факторіальні степені m з кроком 1 і спадні факторіальні степені m з кроком (-1) позначимо через $x^{\overline{m}}$ і $x^{\underline{m}}$ відповідно, тобто

$$x^{\overline{m}} = x^{m\{1\}} = x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m-1),$$

$$x^{\underline{m}} = x^{m\{-1\}} = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-m+1).$$

Очевидно, що $n! = 1^{\overline{n}} = n^{\underline{n}}$.

Основні властивості зростаючих і спадних факторіальних степенів виражаються відповідно формулами

$$\overline{\Delta} x^{\overline{m}} = m x^{\overline{m-1}}, \quad \Delta x^{\underline{m}} = m x^{\underline{m-1}}, \tag{1}$$

де $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ — різниця, а $\overline{\Delta} f(x) = f(x) - f(x-1)$ — запізніла різниця функції $f(x)$.

Означення 2. Для довільних $x \in \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}$ *центральним факторіальним степенем* m *з кроком* $k > 0$ називають вираз

$$x^{m[k]} = x\left(x + \frac{mk}{2} - k\right)\left(x + \frac{mk}{2} - 2k\right)\cdot\ldots\cdot\left(x - \frac{mk}{2} + k\right),$$

причому $x^{0[k]} \equiv 1$.

Центральний факторіальний степінь m з кроком 1 позначатимемо через $x^{[m]}$, тобто $x^{[m]} = x^{m[1]}$. Наприклад,

$$x^{[5]} = (x - 3/2)\,(x - 1/2)\,x\,(x + 1/2)\,(x + 3/2)\,,$$

$$x^{[6]} = (x - 2)(x - 1)\,x^2\,(x + 1)(x + 2).$$

Якщо $\delta f(x) = f\,(x + 1/2) - f\,(x - 1/2)$ — центральна різниця функції $f(x)$, то для центральних факторіальних степенів з кроком 1 справджується формула, аналогічна до формул (1), тобто

$$\delta x^{[m]} = m x^{[m-1]}.$$

Очевидно, що

$$x^{[m]} = x\,(x + m/2 - 1)^{\underline{m}}\,.$$

Інші властивості та деякі застосування зростаючих, спадних і центральних факторіальних степенів вивчались, зокрема, у [1]–[5].

3. Аналіз останніх досліджень і публікацій

За аналогією з класичними степеневими розвиненнями

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1},$$

які можна розглядати як ряди, побудовані при допомозі спадних факторіальних степенів ($n! = n^{\underline{n}}$), у [6]–[8] означені й досліджені неелементарні функції дійсної змінної $\mathrm{Exp}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$, побудовані при допомозі зростаючих факторіальних степенів за формулами

$$\mathrm{Exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\overline{n}}}, \;\; \mathrm{Cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^{\overline{2n}}}\,x^{2n}, \;\; \mathrm{Sin}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{\overline{2n+1}}}\,x^{2n+1}.$$

Зокрема, у [6] встановлені деякі властивості цих функцій, виведені формули для їх аналітичного представлення, побудовані графіки та доведені формули, які пов'язують ці функції. Також показано, що кожна з функцій $\mathrm{Exp}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$ є розв'язком задачі Коші для звичайного лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами (першого порядку — для функції $\mathrm{Exp}(x)$ та другого порядку — для $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$).

Деякі результати цієї статті були анонсовані в [9].

4. Функція $\tilde{E}\,(x)$, побудована при допомозі центральних факторіальних степенів

Означення 3. Через $\tilde{E}\,(x)$ позначимо функцію, визначену при допомозі степеневого ряду

$$\tilde{E}\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{[n]}} = \tag{2}$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2 \cdot 2} + \frac{x^3}{\frac{5}{2} \cdot 3 \cdot \frac{7}{2}} + \frac{x^4}{3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^5}{\frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot 5 \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{13}{2}} + \ldots .$$

Очевидно, що

$$\tilde{E}\,(x) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(3n-1)!}\, x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\, 4^n}{(6n+1)!!}\, x^{2n+1}, \tag{3}$$

де $(-1)!! \equiv 1$, причому обидва ряди у (3) є збіжними на всій числовій осі.

Розглянемо окремо кожен ряд з (3). Для першого з них

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(3n-1)!}\, x^{2n} = \frac{x^2}{4} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{7}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{3n+1}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{3n+2}{3}\right)} \left(\frac{x^2}{27}\right)^n \right) =$$

$$= \frac{x^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^{\overline{n}}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{\overline{n}} \left(\frac{5}{3}\right)^{\overline{n}} n!} \left(\frac{x^2}{27}\right)^n = \frac{x^2}{4} \cdot {}_1F_2\!\left(1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^2}{27}\right),$$

де ${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; z)$ — узагальнена гіпергеометрична функція, визначена при допомозі узагальненого гіпергеометричного ряду [10]:

$${}_1F_2\,(a_1; b_1, b_2; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1^{\overline{n}}}{b_1^{\overline{n}}\, b_2^{\overline{n}}} \cdot \frac{z^n}{n!},$$

а $a_1^{\overline{n}}$, $b_1^{\overline{n}}$, $b_2^{\overline{n}}$ — зростаючі факторіальні степені.

Для другого ряду з (3) маємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n (2n-1)!!}{(6n+1)!!} x^{2n+1} = x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{5}{6} \cdot \frac{11}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{6n-1}{6}\right) \cdot \left(\frac{7}{6} \cdot \frac{13}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{6n+1}{6}\right)} \left(\frac{x^2}{27}\right)^n \right) =$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^{\overline{n}}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{\overline{n}} \left(\frac{7}{6}\right)^{\overline{n}} n!} \left(\frac{x^2}{27}\right)^n = x \cdot {}_1F_2\!\left(1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}; \frac{x^2}{27}\right).$$

Отже, для функції $\tilde{E}\,(x)$ остаточно маємо формулу

$$\tilde{E}\,(x) = 1 + \frac{x^2}{4} \cdot {}_1F_2\!\left(1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^2}{27}\right) + x \cdot {}_1F_2\!\left(1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}; \frac{x^2}{27}\right). \tag{4}$$

Єдиним нулем функції $\tilde{E}\,(x)$ є число $x_0 \approx -1{,}39945361$, а у точці $x_1 \approx$ $\approx -6{,}47065797$ вона досягає свого найменшого значення.

Графік функції $y = \tilde{E}\,(x)$ наведений на рис. 1.

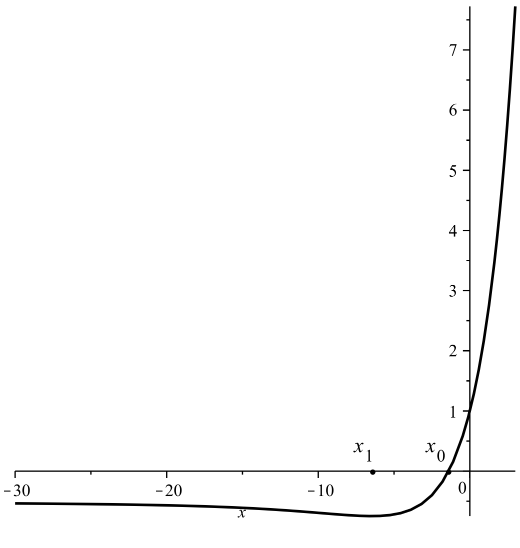

Рис. 1: Графік функції $y = \tilde{E}\,(x)$

5. Функції $\tilde{S}\,(x)$ і $\tilde{C}\,(x)$, побудовані при допомозі центральних факторіальних степенів

Означення 4. Через $\tilde{S}\,(x)$ і $\tilde{C}\,(x)$ позначимо функції, визначені при допомозі степеневих рядів

$$\tilde{S}\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)^{[2n+1]}}, \tag{5}$$

$$\tilde{C}\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{(2n)^{[2n]}}. \tag{6}$$

Аналогічно до доведення формули (4) одержуємо формули

$$\tilde{S}\,(x) = x \cdot {}_1F_2\left(1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}; -\frac{x^2}{27}\right), \tag{7}$$

$$\tilde{C}\,(x) = 1 - \frac{x^2}{4} \cdot {}_1F_2\left(1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; -\frac{x^2}{27}\right). \tag{8}$$

Очевидно, що функція $\tilde{S}\,(x)$ є непарною, а функція $\tilde{C}\,(x)$ — парною. Найменшими додатними нулями функцій $\tilde{S}\,(x)$, $\tilde{C}\,(x)$ є відповідно числа $s_0 \approx 6{,}12358366$, $c_0 \approx 2{,}07375071$.

Графіки функцій $y = \tilde{S}\,(x)$, $y = \tilde{C}\,(x)$ зображені на рисунках 2, 3. На них пунктиром проведені параболи $y^2 = \pm\dfrac{7\pi x}{12}$ і $\left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \pm\dfrac{7\pi x}{12}$ відповідно.

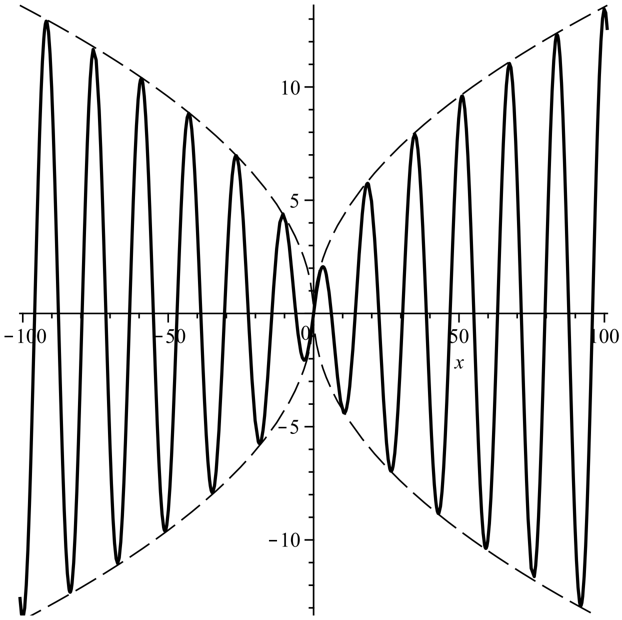

Рис. 2: Графік функції $y = \tilde{S}(x)$

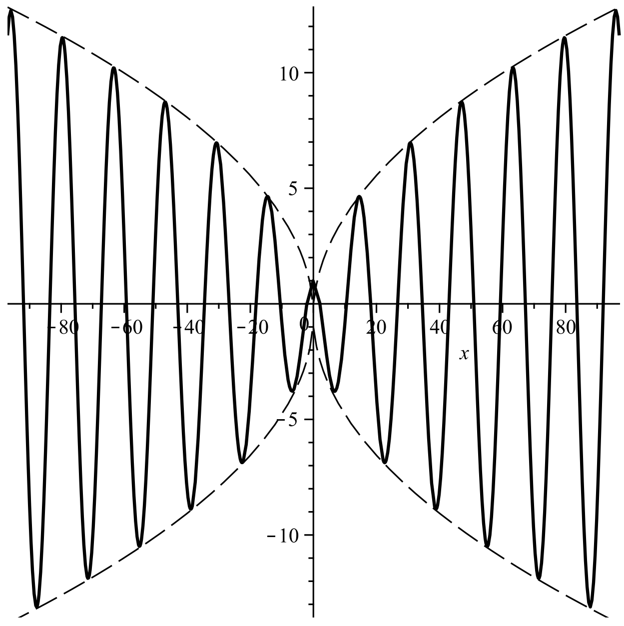

Рис. 3: Графік функції $y = \tilde{C}(x)$

Оскільки згідно з (4)

$$\tilde{E}(\pm ix) = 1 - \frac{x^2}{4} \cdot {}_1F_2\left(1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; -\frac{x^2}{27}\right) \pm ix \cdot {}_1F_2\left(1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}; -\frac{x^2}{27}\right),$$

то, враховуючи (7), (8), одержуємо формулу, аналогічну до формули Ейлера:

$$\tilde{E}\,(\pm\,x) = \tilde{C}\,(x) \pm i\tilde{S}\,(x).$$

Звідси

$$\tilde{C}\,(x) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{E}\,(ix) + \tilde{E}\,(-ix)\Big), \quad \tilde{S}\,(x) = \frac{1}{2i}\Big(\tilde{E}\,(ix) - \tilde{E}\,(-ix)\Big),$$

і, отже,

$$\tilde{C}^{\,2}(x) + \tilde{S}^{\,2}(x) = \tilde{E}\,(ix) \cdot \tilde{E}\,(-ix).$$

5. Диференціальні рівняння функцій $\tilde{S}\,(x), \tilde{C}\,(x)$

Покажемо, що функції $\tilde{S}\,(x), \tilde{C}\,(x)$, означені у п. 4, є розв'язками задач Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь третього порядку з неперервними коефіцієнтами.

Теорема 1. *Функції* $\tilde{S}\,(x), \tilde{C}\,(x)$ *є розв'язками відповідно таких задач Коші:*

$$\begin{gathered} 27x^3y''' + (4x^3 + 24x)y' + (4x^2 - 24)y = 0, \\ y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1, \;\; y''(0) = 0; \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} 27x^3y''' - 27x^2y'' + (4x^3 + 51x)y' - 48y = -48, \\ y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0, \;\; y''(0) = -\tfrac{1}{2}. \end{gathered} \tag{10}$$

Доведення. Покажемо спочатку, що функція $\tilde{S}\,(x)$ є розв'язком задачі Коші (9). Узагальнена гіпергеометрична функція ${}_1F_2\,(a_1; b_1, b_2; z)$, через яку, згідно з (7), виражається функція $\tilde{S}\,(x)$, є розв'язком лінійного диференціального рівняння третього порядку [10]

$$\big(\sigma\,(\sigma + b_1 - 1)\,(\sigma + b_2 - 1) - z\,(\sigma + a_1)\big)w(z) = 0,$$

де σ — диференціальний оператор $z\frac{d}{dz}$.

Отже, функція

$$w(z) = {}_1F_2\left(1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}; z\right) \tag{11}$$

є розв'язком звичайного диференціального рівняння

$$\big(\sigma\big(\sigma - \tfrac{1}{6}\big)\big(\sigma + \tfrac{1}{6}\big) - z\,(\sigma + 1)\big)w(z) = 0. \tag{12}$$

Оскільки

$$\sigma^1 = z\frac{d}{dz}, \quad \sigma^2 = z\frac{d}{dz} + z^2\frac{d^2}{dz^2}, \quad \sigma^3 = z\frac{d}{dz} + 3z^2\frac{d^2}{dz^2} + z^3\frac{d^3}{dz^3},$$

то з (12), виконавши нескладні перетворення, переконуємось, що функція (11) є розв'язком рівняння

$$z^2w''' + 3zw'' - \left(z - \frac{35}{36}\right)w' - w = 0. \tag{13}$$

Виконаємо у (13) заміну незалежної змінної за формулою $z=-\frac{x^2}{27}$. Тоді

$$w'_z=-\frac{27}{x}\,w'_x,\quad w''_{z^2}=\frac{27^2}{x^3}\left(xw''_{x^2}-w'_x\right),$$

$$w'''_{z^3}=-\frac{27^3}{x^5}\left(x^2w'''_{x^3}-3xw''_{x^2}+3w'_x\right)$$

і, підставляючи у (13), одержуємо, що функція $w(x)=F\Big(1;\,\frac{5}{6}\,,\frac{7}{6}\,;-\frac{x^2}{27}\Big)$ є частинним розв'язком рівняння

$$27x^2w'''+81xw''+(4x^2+24)w'+8xw=0. \tag{14}$$

Нарешті, виконуючи в (14) заміну $w(x)=\frac{\tilde{S}\,(x)}{x}$, одержуємо

$$27x^2\left(\frac{y'''}{x}-\frac{3y''}{x^2}+\frac{6y'}{x^3}-\frac{6y}{x^4}\right)+81x\left(\frac{y''}{x}-\frac{2y'}{x^2}+\frac{2y}{x^3}\right)+$$

$$+(4x^2+24)\left(\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}\right)+8x\frac{y}{x}=0,$$

тобто функція $y=\tilde{S}\,(x)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння з (9).

Те, що функція $\tilde{S}\,(x)$ задовольняє початкові умови $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=0$, випливає з (7).

Доведемо тепер, що функція $\tilde{C}\,(x)$ є розв'язком задачі Коші (10). З (8) випливає, що функція $\tilde{C}\,(x)$ задовольняє початкові умови з (10). Покажемо, що вона є частинним розв'язком відповідного диференціального рівняння.

Аналогічно, як це було зроблено для функції $\tilde{S}\,(x)$, переконуємося, що функція

$$w(z)=F\left(1;\,\frac{4}{3},\frac{5}{3};z\right)$$

з (8) є розв'язком рівняння

$$z^2w'''+4zw''+\left(\frac{20}{9}-z\right)w'-w=0,$$

а функція $w(x)=F\Big(1;\,\frac{4}{3},\frac{5}{3};-\frac{x^2}{27}\Big)$ — розв'язком рівняння

$$27x^2w'''+135xw''+(4x^2+105)w'+8xw=0. \tag{15}$$

Підставляючи тепер в (15)

$$w(x)=\frac{4}{x^2}\big(1-\tilde{C}\,(x)\big),$$

одержуємо, що функція $y=\tilde{C}\,(x)$ є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння з (10). *Теорему доведено.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основания математики. – М. : Мир, 1998. – 703 с.

2. Заторський Р. А. Числення трикутних матриць та його застосування. – Івано-Франківськ: Сімик, 2010. – 508 с.

3. Риордан Дж. Комбинаторные тождества. – М.: Наука, 1982. – 254 с.

4. Jordan C. Calculus of Finite Differences. – New York: Chelsea Publishing, 1939. – 652 p.

5. Roman S. The Umbral Calculus. – Orlando (USA): Academic Press, 1984. – 193 p.

6. Гой Т. П., Заторський Р. А. Нові функції, породжені зростаючими факторіалами, та їх властивості // Буковин. мат. журн. – 2013. – **1**, № 1-2. – С. 28–33.

7. Гой Т. П., Заторський Р. А. Диференціальні рівняння функцій, породжених зростаючими факторіальними степенями // Тези доп. Міжнар. матем. конф. "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування". – К.: Інститут математики НАН України, 2013. – С. 83–84.

8. Гой Т. П., Заторський Р. А. Про нові функції, породжені зростаючими факторіальними степенями, та їх властивості // Матеріали Міжнар. наук.-практ. інтернет-конф. "Математичне моделювання прикладних задач математики, фізики, механіки". – Харків: Екограф, 2013. – С. 103–106.

9. Гой Т. П. Про диференціальні рівняння функцій, породжених центральними факторіальними степенями // Тези Кримської міжнар. матем. конф. Том 2. – Сімферополь: Вид-во КНЦ НАНУ, 2013. – С. 4–5.

10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1973. – 294 с.

Стаття одержана: 24.03.2014; перероблений вариант: 10.11.2014; прийнята: 11.11.2014.