Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.518.88 № 1133, 2014, с.76–94

Пошаговое решение матричной задачи Каратеодори в классе $\mathcal{S}[a,\ b]$

И. Ю. Серикова

Харьковский национальный университет,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина.
Irina.Serikova@karazin.ua

Получено разложение резольвентной матрицы задачи Каратеодори в произведение множителей Бляшке-Потапова. Эти множители выражены через обобщенные параметры Шура, для которых указаны явные формулы. Дано пошаговое решение задачи Каратеодори в классе $\mathcal{S}[a,\ b]$.
Ключевые слова: матричная задача Каратеодори, множители Бляшке-Потапова, обобщенные параметры Шура, пошаговый процесс Шура.

Сєрікова І. Ю., **Покроковий розв'язок матричної задачі Каратеодорі в класі $\mathcal{S}[a,\ b]$.** У статті факторизовано резольвентну матрицю задачі Каратеодорі в класі $\mathcal{S}[a,\ b]$, завдяки чому отримано аналог шуровського покрокового процесу розв'язку матричної задачі Каратеодорі. Наведено явні формули для узагальнених параметрів Шура для задачі Каратеодорі в класі $\mathcal{S}[a,\ b]$.
Ключові слова: матрична задача Каратеодорі, множники Бляшке-Потапова, узагальнені параметри Шура, покроковий процес Шура.

I. Yu. Serikova, **Step by step solution of the matrix Caratheodory problem in the class** $\mathcal{S}[a,\ b]$. Decomposition of the resolvent matrix of Caratheodory problem in terms of Blaschke-Potapov factors is obtained. Each such factor is expressed via generalized Schur parameters. Explicit relations between Blaschke-Potapov factors and Schur parameters are given. Step by step process solution matrix Caratheodory problem in the class $\mathcal{S}[a,\ b]$ is given.
Keywords: the matrix Caratheodory problem, Blaschke-Potapov product, generalized Schur parameters, step by step Shur process.

2000 Mathematics Subject Classification: 42A82, 44A60, 47A57.

1. Введение

В статьях И. Шура [1]–[2] впервые была предложена пошаговая схема решения интерполяционных задач. В дальнейшем эти исследования были продолжены и обобщены в работах многих авторов. Особо отметим статьи [3]–[4], выполненные в рамках подхода В.П. Потапова к решению интерполяционных задач для аналитических матриц-функций (далее по тексту - МФ). Аналогичные результаты для случая стилтьесовских МФ были получены в статьях [5]–[7]. Интерполяционные задачи в классах $\mathcal{R}[a,\ b]$ и $\mathcal{S}[a,\ b]$ были рассмотрены в статьях [8]–[12]. Проблема моментов на компактном интервале была решена пошаговым методом в статье [13].

Сформулируем известные определения и теоремы, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Определение 1. ([8]) *Классом $\mathcal{S}[a,\ b]$ называется множество голоморфных МФ $s : \mathbb{C} \setminus [a,\ b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$ таких, что*

$$\frac{s(z) - s^*(z)}{z - \bar{z}} \geq 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}_\pm,$$
$$s(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus [a,\ b].$$

Пусть дана последовательность комплексных $(m \times m)$-матриц $\{s_j\}_{j=0}^n$ и фиксированная точка $z_0 \in \mathbb{C}_+$. В матричной задаче Каратеодори требуется описать все МФ класса $\mathcal{S}[a,\ b]$, такие, что

$$s(z) = s_0(z) + s_1(z)(z - z_0) + \cdots + s_n(z - z_0)^n + \cdots . \tag{1}$$

Множество решений s этой задачи обозначим через $\mathcal{L}_n$. С задачей (1) свяжем следующие блочные матрицы

$$T_{(n)} = \begin{bmatrix} z_0 I_m & \cdots & 0_m & 0_m \\ I_m & \cdots & 0_m & 0_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_m & \cdots & I_m & z_0 I_m \end{bmatrix},\ v_{(n)} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0_m \\ \vdots \\ 0_m \end{bmatrix}, u_{1,(n)} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix},$$

$$R_{T,(n)}(z) = (T_{(n)} - zI_{m(n+1)})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{I_m}{z_0 - z} & 0_m & \cdots & 0_m \\ \frac{-I_m}{(z_0-z)^2} & \frac{I_m}{z_0-z} & \cdots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(-1)^n I_m}{(z_0-z)^{n+1}} & \frac{(-1)^{n-1} I_m}{(z_0-z)^n} & \cdots & \frac{I_m}{z_0-z} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$u_{2,(n)} = -R^{-1}_{T,(n)}(a) R_{T,(n)}(b) u_{1,(n)} = \begin{bmatrix} \tilde{s}_0 \\ \tilde{s}_1 \\ \vdots \\ \tilde{s}_n \end{bmatrix},$$
$$K_{1,(n)} = \{P_{ij}\}_{i,j=0}^n, \quad K_{2,(n)} = \{Q_{ij}\}_{i,j=0}^n.$$

Здесь

$$P_{00}=\frac{s_0-s_0^*}{z_0-\bar z_0},\quad P_{0j}=\frac{P_{0j-1}-s_j^*}{z_0-\bar z_0},\qquad 1\le j\le n,$$
$$P_{i0}=\frac{s_i-P_{i-10}}{z_0-\bar z_0},\qquad 1\le i\le n,\qquad P_{ij}=\frac{P_{ij-1}-P_{i-1j}}{z_0-\bar z_0},\qquad 1\le i,j\le n.$$

Аналогичным образом определяются матрицы Q_{ij} с заменой матриц s_j на $\tilde s_j$.

Имеет место *тождество сплетения* (см. [10])

$$(b-a)R_{T,(n)}(b)v_{(n)}u_{1,(n)}^*R_{T,(n)}^*(b)=R_{T,(n)}^{-1}(a)R_{T,(n)}(b)K_{1,(n)}+K_{2,(n)}. \tag{3}$$

Определение 2. *Задача Каратеодори (1) называется вполне неопределенной, если* $K_{1,(n)}>0,\ K_{2,(n)}>0$.

Мы будем рассматривать вполне неопределённую задачу Каратеодори.

Определение 3. *Матрица-функция*

$$U_{(n)}(z)=\left[\begin{array}{c|c}\alpha_{(n)}(z)&\beta_{(n)}(z)\\\hline\gamma_{(n)}(z)&\delta_{(n)}(z)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}I_m+(b-z)u_{2,(n)}^*R_{T,(n)}^*(\bar z)K_{2,(n)}^{-1}R_{T,(n)}(b)v_{(n)} & -(b-z)u_{1,(n)}^*R_{T,(n)}^*(\bar z)K_{1,(n)}^{-1}R_{T,(n)}(b)u_{1,(n)}\\\hline (z-a)v_{(n)}^*R_{T,(n)}^*(\bar z)K_{2,(n)}^{-1}R_{T,(n)}(b)v_{(n)} & I_m-(b-z)v_{(n)}^*R_{T,(n)}^*(\bar z)K_{1,(n)}^{-1}R_{T,(n)}(b)u_{1,(n)}\end{array}\right] \tag{4}$$

называется резольвентной матрицей задачи Каратеодори (1).

Определение 4. *Пара мероморфных в* $\mathbb{C}\setminus[a,\ b]$ *МФ* $\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$ *называется* $\mathcal{S}[a,\ b]$ – *парой, если существует дискретное в* $\mathbb{C}\setminus[a,\ b]$ *множество* $\mathcal{D}_{pq}$, *такое, что*

(i) *МФ* p *и* q *голоморфны в* $\mathbb{C}\setminus\{\mathcal{D}_{pq}\cup[a,\ b]\}$,

(ii) $[p^*(z),\ q^*(z)]\begin{bmatrix}p(z)\\q(z)\end{bmatrix}>0_m,\ z\in\mathbb{C}\setminus\{\mathcal{D}_{pq}\cup[a,\ b]\}$,

(iii) $[p^*(z),\ q^*(z)]\dfrac{J}{\imath(\bar z-z)}\begin{bmatrix}p(z)\\q(z)\end{bmatrix}\ge 0_m,\qquad z\in\mathbb{C}_\pm\setminus\mathcal{D}_{pq}$,

(iv) $\left[\dfrac{\bar z-a}{b-\bar z}p^*(z),\ q^*(z)\right]\dfrac{J}{\imath(\bar z-z)}\begin{bmatrix}\dfrac{z-a}{b-z}p(z)\\q(z)\end{bmatrix}\ge 0_m,\ z\in\mathbb{C}_\pm\setminus\mathcal{D}_{pq}$.

Пусть $(m\times m)$-МФ Q мероморфна и мероморфно обратима в $\mathbb{C}\setminus[a,\ b]$. Обозначим через $\mathcal{D}_Q$ дискретное в $\mathbb{C}\setminus[a,\ b]$ множество особых точек МФ Q и Q^{-1}. Две $\mathcal{S}[a,\ b]$-пары $\begin{bmatrix}p_1(z)\\q_1(z)\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}p_2(z)\\q_2(z)\end{bmatrix}$ назовем эквивалентными, если для всех $z\in\mathbb{C}\setminus\{[a,\ b]\cup\mathcal{D}_{p_1q_1}\cup\mathcal{D}_{p_2q_2}\cup\mathcal{D}_Q\}$ выполнены равенства $p_2(z)=p_1(z)Q(z)$, $q_2(z)=q_1(z)Q(z)$. Множество классов эквивалентности $\mathcal{S}[a,\ b]$-пар обозначим через $\mathcal{S}_\infty[a,\ b]$.

Теорема 1 ([10]). *Пусть МФ* $\alpha_{(n)}$, $\beta_{(n)}$, $\gamma_{(n)}$, $\delta_{(n)}$ *определены в (4). Тогда дробно-линейное преобразование*

$$\begin{aligned} s(z) &= U_{(n)}(z)\left\{\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}\right\} \\ &= \left\{\alpha_{(n)}(z)p(z)+\beta_{(n)}(z)q(z)\right\}\left\{\gamma_{(n)}(z)p(z)+\delta_{(n)}(z)q(z)\right\}^{-1} \end{aligned} \tag{5}$$

задает взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{L}_n$ *и* $\mathcal{S}_\infty[a,\ b]$.

2. Мультипликативная структура резольвентной матрицы.

Рассмотрим блочное представление матриц $K_{r,(n)}$

$$\begin{aligned} K_{r,(n)} &= \begin{bmatrix} K_{r,(n-1)} & B_{r,(n)} \\ B^*_{r,(n)} & C_{r,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ B^*_{r,(n)}K^{-1}_{r,(n-1)} & I_m \end{bmatrix}\times \\ &\times \begin{bmatrix} K_{r,(n-1)} & 0_{nm\times m} \\ 0_{m\times nm} & \hat{K}_{r,n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{nm} & K^{-1}_{r,(n-1)}B_{r,(n)} \\ 0_{m\times nm} & I_m \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{6}$$

здесь

$$\hat{K}_{r,n} = C_{r,n} - B^*_{r,(n)}K^{-1}_{r,(n-1)}B_{r,(n)}, \quad r=1,2. \tag{7}$$

Отсюда и из определения 2 следуют неравенства $\hat{K}_{r,n} > 0_m$, $r=1,2$. Поэтому

$$K^{-1}_{r,(n)}=\begin{bmatrix} I_{nm} & -K^{-1}_{r,(n-1)}B_{r,(n)} \\ 0_{m\times nm} & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K^{-1}_{r,(n-1)} & 0_{nm\times m} \\ 0_{m\times nm} & \hat{K}^{-1}_{r,n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B^*_{r,(n)}K^{-1}_{r,(n-1)} & I_m \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Имеют место очевидные равенства

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)} \\ \frac{w_{1,n}}{z_0-b} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B^*_{1,(n)}K^{-1}_{1,(n-1)} & I_m \end{bmatrix} R_{T,(n)}(b)u_{1,(n)}, \\ \begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)} \\ \frac{\hat{v}_n}{z_0-b} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B^*_{2,(n)}K^{-1}_{2,(n-1)} & I_m \end{bmatrix} R_{T,(n)}(b)v_{(n)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь

$$\begin{aligned} w_{1,n} &= s_n-(z_0-b)B^*_{1,(n)}K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}+\left(\frac{(-1)^nI_m}{(z_0-b)^n},\cdots,\frac{-I_m}{(z_0-b)}\right)u_{1,(n-1)}, \\ \hat{v}_n &= \frac{(-1)^nI_m}{(z_0-b)^n}-(z_0-b)B^*_{2,(n)}K^{-1}_{2,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Теорема 2. *Пусть задана вполне неопределенная задача Каратеодори (1). Тогда имеют место равенства*

$$(b-a)R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)}w^*_{1,n}\frac{1}{\bar{z}_0-b} = B_{2,(n)} - K_{2,(n-1)}K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}, \tag{11}$$

$$\frac{b-a}{z_0-b}\hat{v}_n u^*_{1,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) = -B^*_{2,(n)} K^{-1}_{2,(n-1)} R^{-1}_{T,(n-1)}(a) R_{T,(n-1)}(b) K_{1,(n-1)} -$$

$$-\frac{b-a}{z_0-b}\left(\frac{(-1)^{n-1} I_m}{(z_0-b)^n}, \cdots, \frac{I_m}{z_0-b}\right) K_{1,(n-1)} + \frac{z_0-a}{z_0-b} B^*_{1,(n)}, \qquad (12)$$

$$\frac{b-a}{\bar{z}_0-b}\hat{v}_n w^*_{1,n} = (z_0-a)\hat{K}_{1,n} + (z_0-b)\hat{K}_{2,n}. \qquad (13)$$

Здесь $w_{1,n}$ и $\hat{v}_n$ определены в (10).

Доказательство. Домножим тождество сплетения (3) слева и справа на матрицы

$$\begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B^*_{2,(n)} K^{-1}_{2,(n-1)} & I_m \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} I_{nm} & -K^{-1}_{1,(n-1)} B_{1,(n)} \\ 0_{m\times nm} & I_m \end{bmatrix},$$

соответственно. Отсюда (9) следует, что

$$(b-a)\begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}(b) v_{(n-1)} \\ \frac{1}{z_0-b}\hat{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^*_{1,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b), & \frac{w^*_{1,n}}{\bar{z}_0-b} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} K_{2,(n-1)} & B_{2,(n)} \\ 0_{m\times nm} & \hat{K}_{2,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{nm} & -K^{-1}_{1,(n-1)} B_{1,(n)} \\ 0_{m\times nm} & I_m \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B^*_{2,(n)} K^{-1}_{2,(n-1)} & I_m \end{bmatrix} R^{-1}_{T,(n)}(a) R_{T,(n)}(b) \begin{bmatrix} K_{1,(n-1)} & 0_{nm\times m} \\ B^*_{1,(n)} & \hat{K}_{1,n} \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$(b-a)\begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}(b) v_{(n-1)} u^*_{1,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) & R_{T,(n-1)}(b) v_{(n-1)} w^*_{1,n} \frac{1}{\bar{z}_0-b} \\ \frac{1}{z_0-b}\hat{v}_n u^*_{1,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) & \frac{1}{|z_0-b|^2}\hat{v}_n w^*_{1,n} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} K_{2,(n-1)} & -K_{2,(n-1)} K^{-1}_{1,(n-1)} B_{1,(n)} + B_{2,(n)} \\ 0_{m\times nm} & \hat{K}_{2,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B^*_{2,(n)} K^{-1}_{2,(n-1)} & I_m \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} R^{-1}_{T,(n-1)}(a) R_{T,(n-1)}(b) K^{-1}_{1,(n-1)} & 0_{nm\times m} \\ (b-a)\left(\frac{(-1)^n I_m}{(z_0-b)^{n+1}}, \cdots, \frac{-I_m}{(z_0-b)^2}\right) K^{-1}_{1,(n-1)} + \frac{z_0-a}{z_0-b} B^*_{1,(n)} & \frac{z_0-a}{z_0-b}\hat{K}_{1,n} \end{bmatrix}.$$

Сравнивая блоки в этих равенствах, получаем тождества (11)–(13). Теорема 2 доказана.

Пусть матрицы $w_{1,p}$ и $\hat{v}_p$, $0 < p \le n$ определены в (10), $w_{1,0} = s_0$, $\hat{v}_0 = I_m$, $w_{2,p} = -\frac{z_0-a}{z_0-b} w_{1,p}$.

Определение 5. *Матрицы-функции*

$$b_0(z) = U_{(0)}(z), \qquad b_p(z) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\alpha}_p(z) & \hat{\beta}_p(z) \\ \hline \hat{\gamma}_p(z) & \hat{\delta}_p(z) \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} I_m + (b-z)\frac{w^*_{2,p}}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,p}\frac{\hat{v}_p}{z_0-b} & -(b-z)\frac{w^*_{1,p}}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{1,p}\frac{w_{1,p}}{z_0-b} \\ \hline (z-a)\frac{\hat{v}^*_p}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,p}\frac{\hat{v}_p}{z_0-b} & I_m - (b-z)\frac{\hat{v}^*_p}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{1,p}\frac{w_{1,p}}{z_0-b} \end{array}\right], \ (1 \le p \le n) \qquad (14)$$

называются множителями Бляшке-Потапова задачи Каратеодори (1).

Теорема 3. *Резольвентная матрица $U_{(n)}(z)$ вполне неопределенной задачи Каратеодори (1) допускает представление вида*

$$U_{(n)}(z) = U_{(n-1)}(z) b_n(z), \tag{15}$$

здесь множитель Бляшке-Потапова $b_n(z)$ задается формулой (14).

Доказательство. Для доказательства формулы (15) достаточно убедиться в справедливости равенств

$$\alpha_{(n)}(z) = \alpha_{(n-1)}(z)\hat{\alpha}_n(z) + \beta_{(n-1)}(z)\hat{\gamma}_n(z), \tag{16}$$

$$\beta_{(n)}(z) = \alpha_{(n-1)}(z)\hat{\beta}_n(z) + \beta_{(n-1)}(z)\hat{\delta}_n(z), \tag{17}$$

$$\gamma_{(n)}(z) = \gamma_{(n-1)}(z)\hat{\alpha}_n(z) + \delta_{(n-1)}(z)\hat{\gamma}_n(z), \tag{18}$$

$$\delta_{(n)}(z) = \gamma_{(n-1)}(z)\hat{\beta}_n(z) + \delta_{(n-1)}(z)\hat{\delta}_n(z). \tag{19}$$

Докажем равенство (16). Имеем

$$\alpha_{(n)}(z) = I_m + (b-z) u^*_{2,(n)} R^*_{T,(n)}(\bar{z}) K^{-1}_{2,(n)} R_{T,(n)}(b) v_{(n)} = I_m + (b-z) u^*_{2,(n)} \times$$
$$\times R^*_{T,(n)}(\bar{z}) \begin{bmatrix} K^{-1}_{2,(n-1)} & -K^{-1}_{2,(n-1)} B_{2,(n)} \hat{K}^{-1}_{2,n} \\ 0_{m\times nm} & \hat{K}^{-1}_{2,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B^*_{2,(n)} K^{-1}_{2,(n-1)} & I_m \end{bmatrix} R_{T,(n)}(b) v_{(n)}.$$

Из (9) и аналогичного равенства

$$\begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}(a) u_{2,(n-1)} \\ \frac{w_{2,n}}{z_0 - a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B^*_{1,(n)} K^{-1}_{1,(n-1)} & I_m \end{bmatrix} R_{T,(n)}(a) u_{2,(n)}$$

получим

$$\alpha_{(n)}(z) = I_m + (b-z) \begin{bmatrix} u^*_{2,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(a) & \frac{w^*_{2,n}}{\bar{z}_0 - a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{nm} & K^{-1}_{1,(n-1)} B_{1,(n)} \\ 0_{m\times nm} & I_m \end{bmatrix} \times$$
$$\times R^{-1^*}_{T,(n)}(a) R^*_{T,(n)}(\bar{z}) \begin{bmatrix} K^{-1}_{2,(n-1)} & -K^{-1}_{2,(n-1)} B_{2,(n)} \hat{K}^{-1}_{2,n} \\ 0_{m\times nm} & \hat{K}^{-1}_{2,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}(b) v_{(n-1)} \\ \frac{\hat{v}_n}{z_0 - b} \end{bmatrix} =$$
$$= I_m + (b-z) \left[u^*_{2,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(a) \quad u^*_{2,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(a) K^{-1}_{1,(n-1)} B_{1,(n)} + \frac{w^*_{2,n}}{\bar{z}_0 - a} \right] \times$$
$$\times \left[\begin{array}{c|c} R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a) R^*_{T,(n-1)}(\bar{z}) & \begin{matrix} \frac{(-1)^n (z-a)}{(\bar{z}_0 - z)^{n+1}} I_m \\ \vdots \\ \frac{-(z-a)}{(\bar{z}_0 - z)^2} I_m \end{matrix} \\ \hline 0_{m\times nm} & \frac{\bar{z}_0 - a}{\bar{z}_0 - z} I_m \end{array} \right] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} K_{2,(n-1)}^{-1} R_{T,(n-1)}(b) v_{(n-1)} - K_{2,(n-1)}^{-1} B_{2,(n)} \hat{K}_{2,n}^{-1} \frac{\hat{v}_n}{z_0-b} \\ \hat{K}_{2,n}^{-1} \frac{\hat{v}_n}{z_0-b} \end{bmatrix} = I_m + (b-z) \times$$
$$\times \left[u_{2,(n-1)}^{*} R_{T,(n-1)}^{*}(\bar{z}) \qquad (z-a) u_{2,(n-1)}^{*} R_{T,(n-1)}^{*}(a) \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n}{(\bar{z}_0-z)^{n+1}} I_m \\ \vdots \\ \frac{-1}{(\bar{z}_0-z)^2} I_m \end{bmatrix} + \right.$$
$$\left. + \frac{\bar{z}_0 - a}{\bar{z}_0 - z} u_{2,(n-1)}^{*} R_{T,(n-1)}^{*}(a) K_{1,(n-1)}^{-1} B_{1,(n)} + \frac{1}{\bar{z}_0 - z} w_{2,n}^{*} \right] \times$$
$$\times \begin{bmatrix} K_{2,(n-1)}^{-1} R_{T,(n-1)}(b) v_{(n-1)} - K_{2,(n-1)}^{-1} B_{2,(n)} \hat{K}_{2,n}^{-1} \frac{\hat{v}_n}{z_0-b} \\ \hat{K}_{2,n}^{-1} \frac{\hat{v}_n}{z_0-b} \end{bmatrix}.$$

Здесь мы воспользовались очевидным равенством

$$R_{T,(n)}^{-1^*}(a) R_{T,(n)}^{*}(\bar{z}) = \left[\begin{array}{c|c} R_{T,(n-1)}^{-1^*}(a) & \begin{matrix} 0_m \\ \vdots \\ I_m \end{matrix} \\ \hline 0_{m\times nm} & (\bar{z}_0 - a) I_m \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} R_{T,(n-1)}^{*}(\bar{z}) & \begin{matrix} \frac{(-1)^n}{(\bar{z}_0-z)^{n+1}} I_m \\ \vdots \\ \frac{-1}{(\bar{z}_0-z)^2} I_m \end{matrix} \\ \hline 0_{m\times nm} & \frac{1}{\bar{z}_0-z} I_m \end{array} \right] =$$
$$= \left[\begin{array}{c|c} R_{T,(n-1)}^{-1^*}(a) R_{T,(n-1)}^{*}(\bar{z}) & \begin{matrix} \frac{(-1)^n (z-a)}{(\bar{z}_0-z)^{n+1}} I_m \\ \vdots \\ \frac{-(z-a)}{(\bar{z}_0-z)^2} I_m \end{matrix} \\ \hline 0_{m\times nm} & \frac{\bar{z}_0-a}{\bar{z}_0-z} I_m \end{array} \right].$$

Окончательно получим

$$\alpha_{(n)}(z) = \alpha_{(n-1)}(z) - (b-z) u_{2,(n-1)}^{*} R_{T,(n-1)}^{*}(\bar{z}) K_{2,(n-1)}^{-1} B_{2,(n)} \hat{K}_{2,n}^{-1} \frac{\hat{v}_n}{z_0 - b} +$$
$$+ (b-z) \left((z-a) u_{2,(n-1)}^{*} R_{T,(n-1)}^{*}(a) \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{(\bar{z}_0-z)^{n+1}} I_m \\ \vdots \\ \frac{-1}{(\bar{z}_0-z)^2} I_m \end{pmatrix} + \right. \tag{20}$$
$$\left. + \frac{\bar{z}_0 - a}{\bar{z}_0 - z} u_{2,(n-1)}^{*} R_{T,(n-1)}^{*}(a) K_{1,(n-1)}^{-1} B_{1,(n)} + \frac{1}{\bar{z}_0 - z} w_{2,n}^{*} \right) \hat{K}_{2,n}^{-1} \frac{\hat{v}_n}{z_0 - b}.$$

Вычислим теперь правую часть равенства (16). Пусть

$$X_{11} = \alpha_{(n-1)}(z) \hat{\alpha}_n(z) + \beta_{(n-1)}(z) \hat{\gamma}_n(z).$$

Имеем

$$X_{11} = \Big(I_m + (b-z) u_{2,(n-1)}^{*} R_{T,(n-1)}^{*}(\bar{z}) K_{2,(n-1)}^{-1} R_{T,(n-1)}(b) v_{(n-1)} \Big) \times$$
$$\times \left(I_m + (b-z) \frac{w_{2,n}^{*}}{\bar{z}_0 - z} \hat{K}_{2,n}^{-1} \frac{\hat{v}_n}{z_0 - b} \right) - (b-z)(z-a) u_{1,(n-1)}^{*} \times$$

$$\times R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}\frac{\hat{v}^*_n}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}=$$
$$=\alpha_{(n-1)}(z)+(b-z)\frac{w^*_{2,n}}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}+(b-z)^2u^*_{2,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})\times$$
$$\times K^{-1}_{2,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)}\frac{w^*_{2,n}}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}-(b-z)(z-a)\times$$
$$\times u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}\frac{\hat{v}^*_n}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}.$$

Из равенств (11), (12) и $w_{2,n}=-\frac{z_0-a}{z_0-b}w_{1,n}$ получим

$$X_{11}=\alpha_{(n-1)}(z)+(b-z)\frac{w^*_{2,n}}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}+(b-z)^2u^*_{2,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})\times$$
$$\times K^{-1}_{2,(n-1)}\Big\{-B_{2,(n)}+K_{2,(n-1)}K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\Big\}\frac{\bar{z}_0-a}{(b-a)(\bar{z}_0-z)}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}-$$
$$-(b-z)(z-a)u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})K^{-1}_{1,(n-1)}\left\{\frac{\bar{z}_0-a}{b-a}B_{1,(n)}-\frac{\bar{z}_0-b}{b-a}\times\right.$$
$$\left.\times K_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}-K_{1,(n-1)}\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}}{(\bar{z}_0-b)^n}I_m\\ \vdots\\ \frac{-1}{\bar{z}_0-b}I_m\end{pmatrix}\right\}\times$$
$$\times\frac{1}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}=\alpha_{(n-1)}(z)+(b-z)\frac{w^*_{2,n}}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}+$$
$$+\frac{(\bar{z}_0-a)(b-z)^2}{(b-a)(\bar{z}_0-z)(z_0-b)}u^*_{2,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})\times$$
$$\times\left\{-K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}+K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\right\}\hat{K}^{-1}_{2,n}\hat{v}_n-$$
$$-\frac{(b-z)(z-a)}{(\bar{z}_0-z)(z_0-b)}u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})\left\{\frac{\bar{z}_0-a}{b-a}K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}-\frac{\bar{z}_0-b}{b-a}\times\right.$$
$$\left.\times R^*_{T,(n-1)}(b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}-\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}}{(\bar{z}_0-b)^n}I_m\\ \vdots\\ \frac{-1}{\bar{z}_0-b}I_m\end{pmatrix}\right\}\hat{K}^{-1}_{2,n}\hat{v}_n=$$
$$=\alpha_{(n-1)}(z)+(b-z)\frac{w^*_{2,n}}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}+\frac{(b-z)(\bar{z}_0-a)}{(b-a)(\bar{z}_0-z)(z_0-b)}u^*_{2,(n-1)}\times$$
$$\times R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})R^*_{T,(n-1)}(a)\Big\{(b-z)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)+(z-a)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(b)\Big\}K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\times$$
$$\times\hat{K}^{-1}_{2,n}\hat{v}_n-\frac{b-z}{(\bar{z}_0-z)(z_0-b)(b-a)}u^*_{2,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})\left\{(\bar{z}_0-a)(b-z)+\right.$$
$$\left.+(\bar{z}_0-b)(z-a)\right\}K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\hat{K}^{-1}_{2,n}\hat{v}_n+\frac{(b-z)(z-a)}{(\bar{z}_0-z)(z_0-b)}u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}}{(\bar z_0-b)^n}I_m\\ \vdots\\ \frac{-1}{\bar z_0-b}I_m\end{pmatrix}\hat K_{2,n}^{-1}\hat v_n=\alpha_{(n-1)}(z)+(b-z)\frac{w_{2,n}^*}{\bar z_0-z}\hat K_{2,n}^{-1}\frac{\hat v_n}{z_0-b}+$$
$$+\frac{(b-z)(\bar z_0-a)}{(\bar z_0-z)(z_0-b)}u_{2,(n-1)}^*R_{T,(n-1)}^*(a)K_{1,(n-1)}^{-1}B_{1,(n)}\hat K_{2,n}^{-1}\hat v_n-$$
$$-\frac{b-z}{z_0-b}u_{2,(n-1)}^*R_{T,(n-1)}^*(\bar z)K_{2,(n-1)}^{-1}B_{2,(n)}\hat K_{2,n}^{-1}\hat v_n+$$
$$+\frac{(b-z)(z-a)}{(\bar z_0-z)(z_0-b)}u_{1,(n-1)}^*R_{T,(n-1)}^*(\bar z)\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}}{(\bar z_0-b)^n}I_m\\ \vdots\\ \frac{-1}{\bar z_0-b}I_m\end{pmatrix}\hat K_{2,n}^{-1}\hat v_n.$$

Окончательно, из равенства

$$R_{T,(n-1)}^*(\bar z)\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}}{(\bar z_0-b)^n}I_m\\ \vdots\\ \frac{-1}{\bar z_0-b}I_m\end{pmatrix}=R_{T,(n-1)}^*(b)\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}}{(\bar z_0-z)^n}I_m\\ \vdots\\ \frac{-1}{\bar z_0-z}I_m\end{pmatrix}\tag{21}$$

следует, что

$$X_{11}(z)=\alpha_{(n-1)}(z)+(b-z)\frac{w_{2,n}^*}{\bar z_0-z}\hat K_{2,n}^{-1}\frac{\hat v_n}{z_0-b}+\frac{(b-z)(\bar z_0-a)}{(\bar z_0-z)(z_0-b)}u_{2,(n-1)}^*R_{T,(n-1)}^*(a)\times$$
$$\times K_{1,(n-1)}^{-1}B_{1,(n)}\hat K_{2,n}^{-1}\hat v_n-\frac{b-z}{z_0-b}u_{2,(n-1)}^*R_{T,(n-1)}^*(\bar z)K_{2,(n-1)}^{-1}B_{2,(n)}\hat K_{2,n}^{-1}\hat v_n+$$
$$-\frac{(b-z)(z-a)}{(z_0-b)}u_{2,(n-1)}^*R_{T,(n-1)}^*(a)\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}}{(\bar z_0-z)^{n+1}}I_m\\ \vdots\\ \frac{-1}{(\bar z_0-z)^2}I_m\end{pmatrix}\hat K_{2,n}^{-1}\hat v_n.\tag{22}$$

Из (20) и (22) получаем (16).

Докажем равенство (17). Имеем

$$\beta_{(n)}(z)=-(b-z)u_{1,(n)}^*R_{T,(n)}^*(\bar z)K_{1,(n)}^{-1}R_{T,(n)}(b)u_{1,(n)}=-(b-z)\times$$
$$\times\begin{pmatrix}u_{1,(n-1)}^*R_{T,(n-1)}^*(b) & \frac{w_{1,n}^*}{\bar z_0-b}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}I_{nm} & K_{1,(n-1)}^{-1}B_{1,(n)}\\ 0_{m\times nm} & I_m\end{bmatrix}R_{T,(n)}^{-1^*}(b)R_{T,(n)}^*(\bar z)\times$$
$$\times\begin{bmatrix}K_{1,(n-1)}^{-1} & -K_{1,(n-1)}^{-1}B_{1,(n)}\hat K_{1,n}^{-1}\\ 0_{m\times nm} & \hat K_{1,n}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}\\ \frac{w_{1,n}}{z_0-b}\end{bmatrix}=-(b-z)\times$$
$$\times\begin{pmatrix}u_{1,(n-1)}^*R_{T,(n-1)}^*(b) & u_{1,(n-1)}^*R_{T,(n-1)}^*(b)K_{1,(n-1)}^{-1}B_{1,(n)}+\frac{w_{1,n}^*}{\bar z_0-b}\end{pmatrix}\times$$

$$\times\left[\begin{array}{c|c} R^{-1^*}_{T,(n-1)}(b)R^*_{T,(n-1)}(\bar z) & \begin{array}{c}\frac{(-1)^n(z-b)}{(\bar z_0-z)^{n+1}}I_m\\ \vdots\\ \frac{-(z-b)}{(\bar z_0-z)^2}I_m\end{array}\\ \hline 0_{m\times nm} & \frac{\bar z_0-b}{\bar z_0-z}I_m\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}K_1^{-1}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}-K_1^{-1}B_1\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}\\ \hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}\end{array}\right]=$$

$$=-(b-z)\left(u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\quad (z-b)u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)\begin{pmatrix}\frac{(-1)^n}{(\bar z_0-z)^{n+1}}I_m\\ \vdots\\ \frac{-1}{(\bar z_0-z)^2}I_m\end{pmatrix}+\right.$$

$$\left.+u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\frac{\bar z_0-b}{\bar z_0-z}+\frac{w^*_{1,n}}{\bar z_0-z}\right)\times$$

$$\times\left[\begin{array}{c}K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}-K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}\\ \hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}\end{array}\right]=$$

$$=\beta_{(n-1)}(z)+(z-b)^2u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)\begin{pmatrix}\frac{(-1)^n}{(\bar z_0-z)^{n+1}}I_m\\ \vdots\\ \frac{-1}{(\bar z_0-z)^2}I_m\end{pmatrix}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}-$$

$$-(b-z)u^*_{1,(n-1)}\left(-(\bar z_0-z)R^*_{T,(n-1)}(\bar z)+R^*_{T,(n-1)}(b)(\bar z_0-b)\right)K^{-1}_{1,(n-1)}\times$$

$$\times B_{1,(n)}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}+\hat\beta_n(z).$$

Из очевидного тождества

$$-(\bar z_0-z)R^*_{T,(n-1)}(\bar z)+R^*_{T,(n-1)}(b)(\bar z_0-b)=(z-b)R^*_{T,(n-1)}(\bar z)R^*_{T,(n-1)}(b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(z_0)$$

получим

$$\beta_{(n)}(z)=\beta_{(n-1)}(z)+(z-b)^2u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)\begin{pmatrix}\frac{(-1)^n}{(\bar z_0-z)^{n+1}}I_m\\ \vdots\\ \frac{-1}{(\bar z_0-z)^2}I_m\end{pmatrix}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}+$$

$$+(z-b)^2u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)R^*_{T,(n-1)}(b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(z_0)K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\hat K^{-1}_{1,n}\times$$

$$\times\frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}+\hat\beta_n(z). \tag{23}$$

А теперь вычислим правую часть равенства (17). Имеем

$$X_{12}=\alpha_{(n-1)}(z)\hat\beta_n(z)+\beta_{(n-1)}(z)\hat\delta_n(z)=\hat\beta_n(z)+\beta_{(n-1)}(z)+(b-z)^2\times$$

$$\times u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\left[R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)R^*_{T,(n-1)}(b)K^{-1}_{2,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)}w^*_{1,n}+\right.$$

$$\left.+K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}\hat v^*_n\right]\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}=\hat\beta_n(z)+\beta_{(n-1)}(z)+$$

$$+(b-z)^2u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\Big[R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)R^*_{T,(n-1)}(b)K^{-1}_{2,(n-1)}\big(B_{2,(n)}-K_{2,(n-1)}\times$$

$$\times K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\Big)\frac{\bar z_0-b}{b-a}+K^{-1}_{1,(n-1)}\Big(-K_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}-$$

$$-\frac{b-a}{\bar z_0-b}K_{1,(n-1)}\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}I_m}{(\bar z_0-b)^n}\\ \vdots\\ \frac{I_m}{\bar z_0-b}\end{pmatrix}+\frac{\bar z_0-a}{\bar z_0-b}B_{1,(n)}\Big)\Big]\frac{\bar z_0-b}{b-a}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}.$$

Последнее равенство следует из (11) и (12). Далее имеем

$$X_{12}=\hat\beta_n(z)+\beta_{(n-1)}(z)+(b-z)^2u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\Big[R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)R^*_{T,(n-1)}(b)\times$$

$$\times\left(K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}-K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\right)\left(-R^*_{T,(n-1)}(b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}-\right.$$

$$\left.-\frac{b-a}{\bar z_0-b}\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}I_m}{(\bar z_0-b)^n}\\ \vdots\\ \frac{I_m}{\bar z_0-b}\end{pmatrix}+\frac{\bar z_0-a}{\bar z_0-b}K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\right)\Big]\frac{\bar z_0-b}{b-a}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}=$$

$$=\hat\beta_n(z)+\beta_{(n-1)}(z)+(b-z)^2u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\Bigg[-R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)R^*_{T,(n-1)}(b)K^{-1}_{1,(n-1)}\times$$

$$\times B_{1,(n)}\frac{\bar z_0-b}{b-a}-\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}I_m}{(\bar z_0-b)^n}\\ \vdots\\ \frac{I_m}{\bar z_0-b}\end{pmatrix}+\frac{\bar z_0-a}{b-a}K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\Bigg]\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}.$$

Из (21) следует, что

$$X_{12}=\hat\beta_n(z)+\beta_{(n-1)}(z)+(b-z)^2u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)\begin{pmatrix}\frac{(-1)^nI_m}{(\bar z_0-z)^{n+1}}\\ \vdots\\ \frac{-I_m}{(\bar z_0-z)^2}\end{pmatrix}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}+$$

$$+(b-z)^2u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)R^*_{T,(n-1)}(b)\left[-R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)(\bar z_0-b)+\right.$$

$$\left.+(\bar z_0-a)R^{-1*}_{T,(n-1)}(b)\right]K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{(b-a)(z_0-b)(\bar z_0-z)}.$$

Из равенства

$$-(\bar z_0-b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)+(\bar z_0-a)R^{-1*}_{T,(n-1)}(b)=(b-a)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(z_0)$$

получим

$$X_{12}=\hat\beta_n(z)+\beta_{(n-1)}(z)+(b-z)^2u^*_{1,(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)\begin{pmatrix}\frac{(-1)^nI_m}{(\bar z_0-z)^{n+1}}\\ \vdots\\ \frac{-I_m}{(\bar z_0-z)^2}\end{pmatrix}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}+$$

$$+(b-z)^2 u^*_{1,(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(\bar z) R^*_{T,(n-1)}(b) R^{-1^*}_{T,(n-1)}(z_0) K^{-1}_{1,(n-1)} B_1 \hat K^{-1}_{1,n} \frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0 - z)}.$$

Отсюда и из (23) следует равенство (17).

Докажем равенство (18). Имеем

$$\gamma_{(n)}(z) = (z-a) v^*_{(n)} R^*_{T,(n)}(\bar z) K^{-1}_{2,(n)} R_{T,(n)}(b) v_{(n)} = (z-a) v^*_{(n)} R^*_{T,(n)}(\bar z) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} K^{-1}_{2,(n-1)} & -K^{-1}_{2,(n-1)} B_{2,(n)} \hat K^{-1}_{2,n} \\ 0_{m\times nm} & \hat K^{-1}_{2,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B^*_{2,(n)} K^{-1}_{2,(n-1)} & I_m \end{bmatrix} R_{T,(n)}(b) v_{(n)} =$$

$$= (z-a) \begin{pmatrix} v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) & \dfrac{\hat v^*_n}{\bar z_0 - b} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_{nm} & K^{-1}_{2,(n-1)} B_{2,(n)} \\ 0_{m\times nm} & I_m \end{bmatrix} R^{-1^*}_{T,(n)}(b) \times$$

$$\times R^*_{T,(n)}(\bar z) \begin{bmatrix} K^{-1}_{2,(n-1)} & -K^{-1}_{2,(n-1)} B_{2,(n)} \hat K^{-1}_{2,n} \\ 0_{m\times nm} & \hat K^{-1}_{2,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}(b) v_{(n-1)} \\ \frac{\hat v_n}{z_0 - b} \end{bmatrix} =$$

$$= (z-a) \left(v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) \quad v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) K^{-1}_{2,(n-1)} B_{2,(n)} + \frac{\hat v^*_n}{\bar z_0 - b} \right) \times$$

$$\times \left[\begin{array}{c|c} R^{-1^*}_{T,(n-1)}(b) R^*_{T,(n-1)}(\bar z) & \begin{matrix} \frac{(-1)^n (z-b)}{(\bar z_0 - z)^{n+1}} I_m \\ \vdots \\ \frac{-(z-b)}{(\bar z_0 - z)^2} I_m \end{matrix} \\ \hline 0_{m\times nm} & \frac{\bar z_0 - b}{\bar z_0 - z} I_m \end{array} \right] \begin{pmatrix} K_2^{-1} R_{T,(n-1)}(b) v_{(n-1)} - K_2^{-1} B_2 \hat K^{-1}_{2,n} \frac{\hat v_n}{z_0 - b} \\ \hat K^{-1}_{2,n} \frac{\hat v_n}{z_0 - b} \end{pmatrix} =$$

$$= (z-a) \left(v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(\bar z) \quad v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n (z-b)}{(\bar z_0 - z)^{n+1}} I_m \\ \vdots \\ \frac{-(z-b)}{(\bar z_0 - z)^2} I_m \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) K^{-1}_{2,(n-1)} B_{2,(n)} \frac{\bar z_0 - b}{\bar z_0 - z} + \frac{\hat v^*_n}{\bar z_0 - z} \right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} K^{-1}_{2,(n-1)} R_{T,(n-1)}(b) v_{(n-1)} - K^{-1}_{2,(n-1)} B_{2,(n)} \hat K^{-1}_{2,n} \frac{\hat v_n}{z_0 - b} \\ \hat K^{-1}_{2,n} \frac{\hat v_n}{z_0 - b} \end{pmatrix} =$$

$$= \gamma_{(n-1)}(z) + \hat\gamma_n(z) + (z-a) v^*_{(n-1)} R^*_{T,(n-1)}(b) \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n (z-b)}{(\bar z_0 - z)^{n+1}} I_m \\ \vdots \\ \frac{-(z-b)}{(\bar z_0 - z)^2} I_m \end{bmatrix} \hat K^{-1}_{2,n} \frac{\hat v_n}{z_0 - b} +$$

$$+ (z-a) v^*_{(n-1)} \left(-(\bar z_0 - z) R^*_{T,(n-1)}(\bar z) + (\bar z_0 - b) R^*_{T,(n-1)}(b) \right) K^{-1}_{2,(n-1)} \times$$

$$\times B_{2,(n)} \hat K^{-1}_{2,n} \frac{\hat v_n}{(z_0 - b)(\bar z_0 - z)}.$$

Из равенства

$$-(\bar z_0 - z) R^*_{T,(n-1)}(\bar z) + (\bar z_0 - b) R^*_{T,(n-1)}(b) = (z-b) R^*_{T,(n-1)}(\bar z) R^*_{T,(n-1)}(b) R^{-1^*}_{T,(n-1)}(z_0)$$

получим

$$\gamma_{(n)}(z)=\gamma_{(n-1)}(z)+\hat{\gamma}_n(z)+(z-a)(z-b)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)\begin{bmatrix}\frac{(-1)^n}{(\bar{z}_0-z)^{n+1}}I_m\\ \vdots\\ \frac{-1}{(\bar{z}_0-z)^2}I_m\end{bmatrix}\times$$

$$\times\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}+(z-b)(z-a)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})R^*_{T,(n-1)}(b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(z_0)K^{-1}_{2,(n-1)}\times$$

$$\times B_{2,(n)}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{(z_0-b)(\bar{z}_0-z)}. \tag{24}$$

Вычислим теперь правую часть равенства (18). Имеем

$$X_{21}=\gamma_{(n-1)}(z)\hat{\alpha}_n(z)+\delta_{(n-1)}(z)\hat{\gamma}_n(z)=(z-a)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})K^{-1}_{2,(n-1)}\times$$

$$\times R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)}\left(I_m+(b-z)\frac{w^*_{2,n}}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}\right)+\Big(I_m-(b-z)v^*_{(n-1)}\times$$

$$\times R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}\Big)(z-a)\frac{\hat{v}^*_n}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}=$$

$$=\gamma_{(n-1)}(z)+\hat{\gamma}_n(z)+(b-z)(z-a)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})K^{-1}_{2,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)\times$$

$$\times v_{(n-1)}\frac{w^*_{2,n}}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}-(z-a)(b-z)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)\times$$

$$\times u_{1,(n-1)}\frac{\hat{v}^*_n}{\bar{z}_0-z}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}=\gamma_{(n-1)}(z)+\hat{\gamma}_n(z)+(b-z)(z-a)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})\times$$

$$\times\frac{\bar{z}_0-a}{a-b}\Big(K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}-K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\Big)\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{(z_0-b)(\bar{z}_0-z)}-(z-a)(b-z)\times$$

$$\times v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})\frac{\bar{z}_0-b}{b-a}\Big(-R^*_{T,(n-1)}(b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}-$$

$$\left.-\frac{b-a}{\bar{z}_0-b}\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}I_m}{(\bar{z}_0-b)^n}\\ \vdots\\ \frac{I_m}{\bar{z}_0-b}\end{pmatrix}+\frac{\bar{z}_0-a}{\bar{z}_0-b}K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\right)\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{(z_0-b)(\bar{z}_0-z)}.$$

Здесь мы воспользовались равенствами (11) и (12). Далее имеем

$$X_{21}=\gamma_{(n-1)}(z)+\hat{\gamma}_n(z)-(z-a)(z-b)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}I_m}{(\bar{z}_0-b)^n}\\ \vdots\\ \frac{I_m}{\bar{z}_0-b}\end{pmatrix}\hat{K}^{-1}_{2,n}\times$$

$$\times\frac{\hat{v}_n}{(z_0-b)(\bar{z}_0-z)}+\frac{(b-z)(z-a)}{a-b}v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})\times$$

$$\times\left(-(\bar{z}_0-a)K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}+(\bar{z}_0-a)K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\right)\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{(z_0-b)(\bar{z}_0-z)}+$$

$$+\frac{(b-z)(z-a)}{a-b}v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})R^*_{T,(n-1)}(b)\times$$

$$\times\Big((\bar{z}_0-a)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(b)-(\bar{z}_0-b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)\Big)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{(z_0-b)(\bar{z}_0-z)}=$$

$$=\gamma_{(n-1)}(z)+\hat{\gamma}_n(z)-(z-a)(z-b)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}I_m}{(\bar{z}_0-b)^n}\\ \vdots\\ \frac{I_m}{\bar{z}_0-b}\end{pmatrix}\hat{K}^{-1}_{2,n}\times$$

$$\times\frac{\hat{v}_n}{(z_0-b)(\bar{z}_0-z)}+(z-b)(z-a)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})R^*_{T,(n-1)}(b)\times$$

$$\times R^{-1^*}_{T,(n-1)}(z_0)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{(z_0-b)(\bar{z}_0-z)}.$$

Последнее равенство получено из

$$(\bar{z}_0-a)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(b)-(\bar{z}_0-b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)=(b-a)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(z_0).$$

Из (21) имеем

$$X_{21}=\gamma_{(n-1)}(z)+\hat{\gamma}_n(z)+(z-a)(z-b)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)\begin{pmatrix}\frac{(-1)^nI_m}{(\bar{z}_0-z)^{n+1}}\\ \vdots\\ \frac{-I_m}{(\bar{z}_0-z)^2}\end{pmatrix}\hat{K}^{-1}_{2,n}\times$$

$$\times\frac{\hat{v}_n}{z_0-b}+(z-b)(z-a)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})R^*_{T,(n-1)}(b)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(z_0)K^{-1}_{2,(n-1)}\times$$

$$\times B_{2,(n)}\hat{K}^{-1}_{2,n}\frac{\hat{v}_n}{(z_0-b)(\bar{z}_0-z)}.$$

Отсюда и из (24) следует равенство (18).

Докажем равенство (19). Имеем

$$\delta_{(n)}(z)=I_m-(b-z)v^*_{(n)}R^*_{T,(n)}(\bar{z})K^{-1}_{1,(n)}R_{T,(n)}(b)u_{1,(n)}=$$

$$=I_m-(b-z)\begin{pmatrix}v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b) & \frac{\hat{v}^*_n}{\bar{z}_0-b}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}I_{nm} & K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\\ 0_{m\times nm} & I_m\end{bmatrix}\times$$

$$\times\left[\begin{array}{c|c} R^{-1^*}_{T,(n-1)}(b)R^*_{T,(n-1)}(\bar{z}) & \begin{matrix}\frac{(-1)^n(z-b)}{(\bar{z}_0-z)^{n+1}}I_m\\ \vdots\\ \frac{-(z-b)}{(\bar{z}_0-z)^2}I_m\end{matrix}\\ \hline 0_{m\times nm} & \frac{\bar{z}_0-b}{\bar{z}_0-z}I_m\end{array}\right]\begin{bmatrix}K^{-1}_{1,(n-1)} & -K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\hat{K}^{-1}_{1,n}\\ 0_{m\times nm} & \hat{K}^{-1}_{1,n}\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}\\ \frac{w_{1,n}}{z_0-b}\end{bmatrix}=I_m-(b-z)\times$$

$$\times\left(v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar{z})\quad v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)\begin{bmatrix}\frac{(-1)^n(z-b)}{(\bar{z}_0-z)^{n+1}}I_m\\ \vdots\\ \frac{-(z-b)}{(\bar{z}_0-z)^2}I_m\end{bmatrix}+\right.$$

$$+v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\frac{\bar z_0-b}{\bar z_0-z}+\frac{\hat v^*_n}{\bar z_0-z}\Bigg)\times$$

$$\times\left[\begin{array}{c} K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}-K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}\\ \hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}\end{array}\right]=\delta_{(n-1)}(z)-$$

$$-(b-z)\frac{\hat v^*_n}{\bar z_0-z}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}-(b-z)v^*_{(n-1)}\Big(-R^*_{T,(n-1)}(\bar z)K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}+$$

$$+R^*_{T,(n-1)}(b)\left[\begin{array}{c}\frac{(-1)^n(z-b)}{(\bar z_0-z)^{n+1}}I_m\\ \vdots\\ \frac{-(z-b)}{(\bar z_0-z)^2}I_m\end{array}\right]+R^*_{T,(n-1)}(b)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\frac{\bar z_0-b}{\bar z_0-z}\Bigg)\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}.$$

Из (21) получим

$$\delta_{(n)}(z)=\delta_{(n-1)}(z)-(b-z)\frac{\hat v^*_n}{\bar z_0-z}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}-(b-z)v^*_{(n-1)}\Big(-R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\times$$

$$\times K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}-R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\frac{z-b}{\bar z_0-z}\left[\begin{array}{c}\frac{(-1)^{n-1}}{(\bar z_0-b)^n}I_m\\ \vdots\\ \frac{1}{(\bar z_0-b)}I_m\end{array}\right]+$$

$$+R^*_{T,(n-1)}(b)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\frac{\bar z_0-b}{\bar z_0-z}\Bigg)\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}. \qquad (25)$$

Вычислим теперь правую часть равенства (19). Имеем

$$X_{22}=\gamma_{(n-1)}(z)\hat\beta_n(z)+\delta_{(n-1)}(z)\hat\delta_n(z)=-(z-a)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)K^{-1}_{2,(n-1)}\times$$

$$\times R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)}(b-z)\frac{w^*_{1,n}}{\bar z_0-z}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}+\Big(I_m-(b-z)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\times$$

$$\times K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}\Big)\left(I_m-(b-z)\frac{\hat v^*_n}{\bar z_0-z}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}\right)=$$

$$=\delta_{(n-1)}(z)-(z-a)(b-z)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)K^{-1}_{2,(n-1)}\times$$

$$\times R_{T,(n-1)}(b)v_{(n-1)}\frac{w^*_{1,n}}{\bar z_0-z}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}+(b-z)^2v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\times$$

$$\times K^{-1}_{1,(n-1)}R_{T,(n-1)}(b)u_{1,(n-1)}\frac{\hat v^*_n}{\bar z_0-z}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}-(b-z)\frac{\hat v^*_n}{\bar z_0-z}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}=$$

$$=\delta_{(n-1)}(z)-(z-a)(b-z)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\left(K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}-K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\right)\times$$

$$\times\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}\frac{\bar z_0-b}{b-a}+(b-z)^2v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\times$$

$$\times\left(-R^*_{T,(n-1)}(b)R^{-1*}_{T,(n-1)}(a)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}-\frac{b-a}{\bar z_0-b}\left(\begin{array}{c}\frac{(-1)^{n-1}I_m}{(\bar z_0-b)^n}\\ \vdots\\ \frac{I_m}{\bar z_0-b}\end{array}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\bar z_0-a}{\bar z_0-b}K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\right)\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}\frac{\bar z_0-b}{b-a}-(b-z)\frac{\hat v^*_n}{\bar z_0-z}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}.$$

Последнее равенство получено с использованием (11) и (12). Далее имеем

$$X_{22}=\delta_{(n-1)}(z)-(b-z)^2v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}I_m}{(\bar z_0-b)^n}\\ \vdots\\ \frac{I_m}{\bar z_0-b}\end{pmatrix}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}+$$

$$+(b-z)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\left((z-a)(\bar z_0-b)+(b-z)(\bar z_0-a)\right)K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\hat K^{-1}_{1,n}\times$$

$$\times\frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0-z)(b-a)}-(b-z)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)R^*_{T,(n-1)}(b)\Big((z-a)R^{-1*}_{T,(n-1)}(b)+$$

$$+(b-z)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)\Big)\frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}\frac{\bar z_0-b}{b-a}-(b-z)\frac{\hat v^*_n}{\bar z_0-z}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}.$$

Из

$$(z-a)R^{-1*}_{T,(n-1)}(b)+(b-z)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(a)=(b-a)R^{-1^*}_{T,(n-1)}(\bar z)$$

получим

$$X_{22}=\delta_{(n-1)}(z)-(b-z)^2v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)\begin{pmatrix}\frac{(-1)^{n-1}I_m}{(\bar z_0-b)^n}\\ \vdots\\ \frac{I_m}{\bar z_0-b}\end{pmatrix}\hat K^{-1}_{1,n}\times$$

$$\times\frac{w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}+(b-z)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(\bar z)K^{-1}_{1,(n-1)}B_{1,(n)}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}-$$

$$-(b-z)v^*_{(n-1)}R^*_{T,(n-1)}(b)K^{-1}_{2,(n-1)}B_{2,(n)}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{(\bar z_0-b)w_{1,n}}{(z_0-b)(\bar z_0-z)}-$$

$$-(b-z)\frac{\hat v^*_n}{\bar z_0-z}\hat K^{-1}_{1,n}\frac{w_{1,n}}{z_0-b}.$$

Отсюда и из (25) следует (19). Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 непосредственно следует

Теорема 4. *Резольвентная матрица $U_{(n)}(z)$ вполне неопределенной задачи Каратеодори (1) допускает мультипликативное представление*

$$U_{(n)}(z)=b_0(z)\times b_1(z)\times\cdots\times b_n(z). \tag{26}$$

2. Обобщенные параметры Шура.

Из равенства (13)

$$\frac{b-a}{\bar z_0-b}\hat v_p w^*_{1,p}=(z_0-a)\hat K_{1,p}+(z_0-b)\hat K_{2,p}>0_m$$

следует обратимость матриц $\hat v_p$.

Определение 6. *Обобщенными параметрами Шура для вполне неопределенной задачи Каратеодори (1) называются матрицы*

$$\hat s_0=s_0,\ \hat s_p=\frac{z_0-b}{b-a}\hat v_p^{-1}\left((\bar z_0-a)\hat K_{1,p}+(\bar z_0-b)\hat K_{2,p}\right)\hat v_p^{-1*},\ p>0. \tag{27}$$

Здесь $\hat K_{1,p}$, $\hat K_{2,p}$, $\hat v_p$ определяются формулами (7) и (10).

Лемма 1. *Имеют место следующие представления*

$$w_{1,p} = \hat{v}_p \hat{s}_p, \tag{28}$$

$$w_{2,p} = -\frac{z_0 - a}{z_0 - b} \hat{v}_p \hat{s}_p, \tag{29}$$

$$\hat{K}_{1,p} = \hat{v}_p \frac{\hat{s}_p - \hat{s}_p^*}{z_0 - \bar{z}_0} \hat{v}_p^*, \tag{30}$$

$$\hat{K}_{2,p} = \hat{v}_p \frac{-\frac{z_0-a}{z_0-b}\hat{s}_p + \frac{\bar{z}_0-a}{\bar{z}_0-b}\hat{s}_p^*}{z_0 - \bar{z}_0} \hat{v}_p^*. \tag{31}$$

Доказательство. Равенство (28) следует из (13). Отсюда и из равенства $w_{2,p} = -\frac{z_0-a}{z_0-b} w_{1,p}$ получим (29).

Докажем равенство (30). В силу (27), имеем

$$\hat{v}_p \frac{\hat{s}_p - \hat{s}_p^*}{z_0 - \bar{z}_0} \hat{v}_p^* = \frac{1}{(z_0 - \bar{z}_0)(b-a)} \Big[(z_0 - b) \Big((\bar{z}_0 - a)\hat{K}_{1,p} + (\bar{z}_0 - b)\hat{K}_{2,p} \Big) -$$
$$-(\bar{z}_0 - b) \Big((z_0 - a)\hat{K}_{1,p} + (z_0 - b)\hat{K}_{2,p} \Big) \Big] = \frac{1}{(z_0 - \bar{z}_0)(b-a)} \times$$
$$\times \left[(z_0 - b)(\bar{z}_0 - a) - (\bar{z}_0 - b)(z_0 - a) \right] \hat{K}_{1,p} = \hat{K}_{1,p}.$$

Докажем равенство (31). Из (27) получим

$$\hat{v}_p \frac{-\frac{z_0-a}{z_0-b}\hat{s}_p + \frac{\bar{z}_0-a}{\bar{z}_0-b}\hat{s}_p^*}{z_0 - \bar{z}_0} \hat{v}_p^* = \frac{1}{(z_0 - \bar{z}_0)(b-a)} \Big[-\frac{z_0 - a}{z_0 - b}(z_0 - b) \Big((\bar{z}_0 - a)\hat{K}_{1,p} +$$
$$+ \ (\bar{z}_0 - b)\hat{K}_{2,p} \Big) + \frac{\bar{z}_0 - a}{\bar{z}_0 - b}(\bar{z}_0 - b) \Big((z_0 - a)\hat{K}_{1,p} + (z_0 - b)\hat{K}_{2,p} \Big) \Big] =$$
$$= \frac{1}{(z_0 - \bar{z}_0)(b-a)} \left[-(z_0 - a)(\bar{z}_0 - b) + (\bar{z}_0 - a)(z_0 - b) \right] \hat{K}_{2,p} = \hat{K}_{2,p}.$$

Лемма 1 доказана.

Теорема 5. *Множители Бляшке–Потапова (14) представимы в виде*

$$b_p(z) = \left[\begin{array}{c|c} I_m - \frac{(b-z)(\bar{z}_0-a)(z_0-\bar{z}_0)}{|z_0-b|^2(\bar{z}_0-z)} \hat{s}_p^* \left(-\frac{z_0-a}{z_0-b}\hat{s}_p + \frac{\bar{z}_0-a}{\bar{z}_0-b}\hat{s}_p^* \right)^{-1} & -\frac{(b-z)(z_0-\bar{z}_0)}{(\bar{z}_0-z)(z_0-b)} \hat{s}_p^* \left(\hat{s}_p - \hat{s}_p^* \right)^{-1} \hat{s}_p \\ \hline \frac{(z-a)(z_0-\bar{z}_0)}{(\bar{z}_0-z)(z_0-b)} \left(-\frac{z_0-a}{z_0-b}\hat{s}_p + \frac{\bar{z}_0-a}{\bar{z}_0-b}\hat{s}_p^* \right)^{-1} & I_m - \frac{(b-z)(z_0-\bar{z}_0)}{(\bar{z}_0-z)(z_0-b)} \left(\hat{s}_p - \hat{s}_p^* \right)^{-1} \hat{s}_p \end{array} \right], \tag{32}$$

здесь $\hat{s}_p$ – обобщенные параметры Шура (27).

Теорема 5 получается прямой подстановкой формул (28)–(31) в равенство (14).

3. Пошаговый процесс Шура.

Теорема 6. *Пусть дана вполне неопределенная задача Каратеодори (1) и множители Бляшке-Потапова* b_p $(0 \le p \le n)$ *определены формулой (14). Тогда множество всех решений* $\mathcal{L}_n$ *описывается суперпозиций дробно-линейных преобразований*

$$s(z) = b_0(z)\left\{\cdots b_{n-1}(z)\left\{b_n(z)\left\{\left[\begin{array}{c} p(z) \\ q(z) \end{array}\right]\right\}\right\}\cdots\right\}, \qquad \left[\begin{array}{c} p(z) \\ q(z) \end{array}\right] \in \mathcal{S}_\infty[a,\ b].$$

Здесь

$$b_p(z)\left\{\left[\begin{array}{c} p(z) \\ q(z) \end{array}\right]\right\} := \left[\hat{\alpha}_p(z)p(z) + \hat{\beta}_p(z)q(z)\right]\left[\hat{\gamma}_p(z)p(z) + \hat{\delta}_p(z)q(z)\right]^{-1}, \quad (33)$$

а $\hat{\alpha}_p$, $\hat{\beta}_p$, $\hat{\gamma}_p$, $\hat{\delta}_p$ *определены в (14).*

Доказательство. При $p = 0$ корректность дробно-линейного преобразования (33) следует из равенства $b_0(z) = U_0(z)$ и теоремы 1. Из формулы (32) следует, что все множители Бляшке–Потапова $b_p(z)$ имеют структуру аналогичную структуре резольвентной матрицы $U_0(z)$. Таким образом, преобразование (33) определено корректно для всех $p \ge 0$. В частности, определены дробно-линейные преобразования над парой $\mathrm{col}[s(z),\ I_m] \in \mathcal{S}_\infty[a,\ b]$, здесь $s(z) \in \mathcal{S}[a,\ b]$, которые обозначим

$$b_p(z)\{s(z)\} := b_p(z)\left\{\left[\begin{array}{c} s(z) \\ I_m \end{array}\right]\right\}.$$

Таким образом, корректно определена суперпозиция дробно-линейных преобразований

$$b_0(z)\left\{\cdots b_{p-1}(z)\left\{b_p(z)\left\{\left[\begin{array}{c} p(z) \\ q(z) \end{array}\right]\right\}\right\}\cdots\right\}$$

для $\mathrm{col}[p(z),\ q(z)] \in \mathcal{S}_\infty[a,\ b]$, $p \ge 0$. Эта суперпозиция является дробно-линейным преобразованием, матрица которого равна произведению

$$b_0(z) \times b_1(z) \times \cdots \times b_n(z).$$

Далее имеем

$$b_0(z)\left\{\cdots b_{n-1}(z)\left\{b_n(z)\left\{\left[\begin{array}{c} p(z) \\ q(z) \end{array}\right]\right\}\right\}\cdots\right\} =$$
$$= (b_0(z) \times b_1(z) \times \cdots \times b_n(z))\left\{\left[\begin{array}{c} p(z) \\ q(z) \end{array}\right]\right\} = U_{(n)}(z)\left\{\left[\begin{array}{c} p(z) \\ q(z) \end{array}\right]\right\} = s(z).$$

Здесь второе равенство следует из (26), а третье – из (5).

Теорема 6 доказана.

Список литературы

1. Schur I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind / Schur I. // J. reine u. angew. Math., 1917. – Vol. 147. – P. 205-232.

2. Schur I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind / Schur I. // J. reine u. angew. Math., 1918. – Vol. 148. – P. 122-145.

3. Ковалишина И.В. Метод триады в теории продолжения эрмитово-положительных функций / Ковалишина И.В., Потапов В.П. // Известия Акад. Наук Армян. ССР, 1989. – Т. 23, № 4. – С. 269-292.

4. Ковалишина И.В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач / Ковалишина И.В. // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1983. – Т. 47, № 3. – С. 455–497.

5. Дюкарев Ю.М. Мультипликативные и аддитивные классы Стилтьеса аналитических матриц-функций и связанные с ними интерполяционные задачи / Дюкарев Ю.М., Кацнельсон В.Э. // Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1981. – Вып.36. – С.13-27.

6. Дюкарев Ю.М. Общая схема решения интерполяционных задач в классе Стилтьеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов. 1 / Дюкарев Ю.М. // Математическая физика, анализ, геометрия, 1999. – Т. 6. – № 1/2. – С. 30-54.

7. Дюкарев Ю.М. Мультипликативная структура резольвентных матриц интерполяционных задач в классе Стилтьеса / Дюкарев Ю.М. // Вісник Харківського національного університету, серія «Математика, прикладна математика і механіка», 1999. – № 458. – С. 143-153.

8. Дюкарев Ю.М. Интерполяционная задача в классе $\mathcal{R}[a, b]$ / Ю.М. Дюкарев, А.Е. Чоке Риверо // Український математичний журнал, 2003. – Т. 55, № 8. – С. 1044–1057.

9. Дюкарев Ю.М. Задача Неванлинны-Пика в классе $S[a, b]$ / Ю.М. Дюкарев, А.Е. Чоке Риверо // Известия высших учебных заведений, математика, 2003. – №2. – С. 36–45.

10. Чоке Риверо А. Е. Задача Каратеодори в классе $S[a, b]$ / А.Е. Чоке Риверо // Известия высших учебных заведений, математика, 2006. – №11. – С. 61 – 76.

11. Дюкарев Ю. М. О вполне неопределенности задачи Неванлинны-Пика в классе $\mathcal{S}[a, b]$ / Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова // Известия высших учебных заведений, математика, 2007. – № 11. – С. 19–30.

12. Choque Rivero A.E. Multiplicative Structure of the Resolvent Matrix for the Truncated Hausdorff Matrix Moment Problem / A.E. Choque Rivero // Operator Theory: Advanced and Application, 2012. – Vol. 226. – P. 193–210.

13. Серикова И.Ю. Пошаговое решение матричной проблемы моментов на компактном интервале. 1 / И.Ю. Серикова // Вісник Харківського національного університету, серія «Математика, прикладна математика і механіка», 2012. – № 1030. – С. 71–78.

Статья получена: 24.03.2014; окончательный вариант: 3.10.2014; принята: 20.10.2014.