Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.938 № 1133, 2014, с.48–55

Метод расчета устойчивости нелинейных систем с запаздываниями

С. Ю. Пославский
*Институт транспортных систем и технологий НАН Украины,
ул. Писаржевского, 5, 49000, Днепропетровск, Украина
sergey.poslavskiy@gmail.com*

Предложен простой метод расчета экспоненциальной устойчивости некоторых классов нелинейных систем, содержащих переменные и распределенные запаздывания. Найдена верхняя оценка максимального показателя Ляпунова, характеризующая скорость убывания решений таких систем. Приведены примеры, иллюстрирующие применение разработанной методики.
Ключевые слова: экспоненциальная устойчивость, запаздывание, показатель Ляпунова.

Пославський С. Ю., **Метод розрахунку стійкості нелінійних систем з запізнюваннями.** Запропоновано простий метод розрахунку експоненційної стійкісті деяких класів нелінійних систем, що містять змінні та розподілені запізнювання. Знайдена верхня оцінка максимального показника Ляпунова, що характеризує швидкість спадання рішень таких систем. Наведені приклади, що ілюструють застосування розробленої методики.
Ключові слова: експоненційна стійкість, запізнювання, показник Ляпунова.

S. Yu. Poslavskii, **Method for calculating the stability of nonlinear systems with time-delays.** A simple method for calculating the exponential stability of some classes of nonlinear systems containing varying and distributed delays is proposed. An upper bound for the largest Lyapunov exponent is found. Examples, illustrating application of the developed technique, are given.
Keywords: exponential stability, time-delay, Lyapunov exponent.

2010 Mathematics Subject Classification: 70K20.

1. Введение

В прикладных задачах устойчивости различных систем зачастую нелинейная характеристика объекта точно не известна или меняется со временем в определенных пределах. Требуется найти условия, гарантирующие устойчивость системы для любых нелинейных характеристик, лежащих в допустимых пределах. Такая задача была впервые была поставлена А.И. Лурье и В.Н. Постниковым в [1], где была рассмотрена устойчивость системы автоматического регулирования при любых начальных возмущениях и любой нелинейности сервомотора, лежащей в заданном секторе. Эта статья привлекла внимание многих исследователей и положила начало новому направлению – теории абсолютной устойчивости, где рассматривается устойчивость не одной конкретной системы, а некоторого множества систем, принадлежащих определенному классу. Были рассмотрены новые виды динамических систем, в частности, системы с запаздыванием. В работе Б.С. Разумихина [2] достаточные условия устойчивости таких систем были получены методом функции Ляпунова. Работа В.М. Попова и А. Халаная [3] положила начало развитию частотных методов исследования устойчивости систем с запаздыванием.

Большинство исследований систем с запаздывающим аргументом направлены на поиск условий устойчивости таких систем. Оценкам показателя Ляпунова, характеризующего скорость убывания решений, посвящено значительно меньшее число исследований; классические результаты такого рода [4] относятся к системам с нелинейностью не содержащей запаздывания. В работе [5] для систем с запаздыванием такие оценки получены методом функций Ляпунова. В [6] были найдены условия экспоненциальной устойчивости и получены двусторонние оценки максимального показателя Ляпунова. В данной работе предлагается новый метод, существенно сокращающий вычислительную сложность исследования.

2. Постановка задачи

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau_B(t)) + f(x(t - \tau(t)), t) + C\int_{t-\mu}^{t} x(u)du, \qquad (1)$$

где A, B и C – заданные матрицы в $\mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Матрица A – гурвицева, т. е. все ее собственные значения β_i удовлетворяют неравенству $\mathrm{Re}\beta_i < 0$, $i = 1, ..., n$.

Функции $\tau(t)$, $\tau_B(t)$, $f(x,t)$ и $x_0(t)$ кусочно-непрерывны и удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} \tau(t) \in [0, h],\ \tau_B(t) \in [0, h_B], \\ x(t) = x_0(t) \text{ при } t \in [-H, 0],\ H = \max(h, h_B, \mu), \\ \|f(x,t)\| \le k\,\|x\|\,, f(0,t) = 0, \end{gathered} \qquad (2)$$

где $\|\cdot\|$ – норма (здесь и далее используется евклидова норма), k – заданная величина.

В силу $f(0,t) = 0$, система (1) имеет положение равновесия $x(t) \equiv 0$. В данной работе рассматривается устойчивость этого положения.

Функции $x_0(t)$, $f(x,t)$, $\tau_B(t)$ и $\tau(t)$ назовем допустимыми, если они удовлетворяют приведенным выше условиям. Пусть λ' – показатель Ляпунова решения $x(t)$ уравнения (1) при некоторых допустимых $x_0(t)$, $f(x,t)$, $\tau_B(t)$ и $\tau(t)$, т. е.

$$\lambda'(x_0, f, \tau_B, \tau) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln\|x(t)\|}{t}.$$

Максимальный показатель Ляпунова решений $x(t)$ системы (1) равен

$$\bar\lambda = \sup \lambda'(x_0, f, \tau_B, \tau),$$

где супремум вычисляется по всем допустимым функциям $x_0(t)$, $f(x,t)$, $\tau_B(t)$ и $\tau(t)$.

Определение 1. Система (1) экспоненциально устойчива, если $\bar\lambda < 0$. Тогда при любых $x_0(t)$, $f(x,t)$, $\tau_B(t)$ и $\tau(t)$, удовлетворяющих условиям (2), для соответствующих решений справедливо неравенство

$$\|x(t)\| \le N\,\|x_0(t)\| \exp(\bar\lambda t),\ t \in (0, +\infty),$$

где $N > 0$ – некоторая постоянная.

Цель данной работы – получить простые условия экспоненциальной устойчивости системы (1), выраженные непосредственно с помощью параметров системы, а также найти верхнюю оценку максимального показателя Ляпунова, характеризующую скорость убывания решений.

3. Условия экспоненциальной устойчивости

Будем считать, что матрица A имеет различные собственные значения $\beta_1, ..., \beta_n$ (этого можно достичь произвольно малым возмущением A [7]). Пусть $v_1, ..., v_n$ – соответствующие собственные векторы, нормированные условием

$$(v_i, v_i) = 1, \quad i = 1, ..., n.$$

Обозначим T матрицу, столбцами которой являются векторы v_i:

$$T = (v_1, ..., v_n).$$

Как известно [7],

$$T^{-1}AT = J = \mathrm{diag}(\beta_1, ..., \beta_n).$$

Положив в системе (1) $x = Ty$, получим

$$\begin{gathered}\dot y(t) = Jy(t) + T^{-1}BTy(t - \tau_B(t)) + \\ +T^{-1}f(Ty(t-\tau(t)),t) + T^{-1}C\int_{t-\mu}^{t} Ty(u)du.\end{gathered} \tag{3}$$

Следующая теорема дает условие экспоненциальной устойчивости системы (1).

Теорема 1 *При условии*

$$\frac{1}{\beta}\Big(\left\|T^{-1}BT\right\| + \left\|T^{-1}\right\| k \left\|T\right\| + \left\|T^{-1}C\right\| \mu \left\|T\right\| \Big) < 1 \tag{4}$$

система (1) экспоненциально устойчива, причем

$$\bar{\lambda} < \lambda,$$

где $\beta = \min |\mathrm{Re}\beta_i|$, λ *– корень уравнения*

$$\begin{gathered} V(\lambda) = \frac{1}{\beta+\lambda}\bigg(\exp[-\lambda h_B] \left\|T^{-1}BT\right\| + \exp[-\lambda h] \left\|T^{-1}\right\| k \left\|T\right\| + \\ + \frac{1-\exp[-\lambda\mu]}{\lambda} \left\|T^{-1}C\right\| \left\|T\right\| \bigg) = 1. \end{gathered} \tag{5}$$

Доказательство. Представим решение (3) в виде

$$\begin{gathered} y(t) = W(t,0)y(0) + \int_0^t W(t,s)\Big(T^{-1}BTy(s-\tau_B(s)) + \\ + T^{-1}f(Ty(s-\tau(s)),s) + T^{-1}C\int_{s-\mu}^{s} Ty(u)du\Big)ds \end{gathered} \tag{6}$$

где $W(t,s)$ – матрицант уравнения $\dot{y}(t) = Jy(t)$.

Покажем сначала, что при условии (4) $y(t)$ ограничено на $(0,+\infty)$. В противном случае найдется последовательность t_q ($t_q \to +\infty$ при $q \to +\infty$), такая, что

$$\|y(t_q)\| \geq \|y(t)\| \text{ при } t \leq t_q. \tag{7}$$

Из (6), с учетом (2) и (7), имеем

$$\begin{gathered} \|y(t_q)\| \leq \|W(t_q,0)y(0)\| + \int_0^{t_q} \|W(t_q,s)\| \bigg(\left\|T^{-1}BT\right\| \|y(t_q)\| + \\ + \left\|T^{-1}\right\| k \left\|T\right\| \|y(t_q)\| + \left\|T^{-1}C\right\| \int_{s-\mu}^{s} \|T\| \|y(t_q)\| \, du \bigg) ds. \end{gathered} \tag{8}$$

В рассматриваемом случае $W(t,s) = \exp[(t-s)J]$, поэтому собственные значения матрицы $W(t,s)$ равны $\exp[(t-s)\beta_i]$, $i = 1,...,n$. Матрица J – диагональная, следовательно, $W(t,s)$ также диагональная, поэтому $\|W(t,s)\| = \exp[-\beta(t-s)]$. Тогда

$$\lim_{t_q\to+\infty} \int_0^{t_q} \|W(t_q,s)\| \, ds = \lim_{t_q\to+\infty} \frac{1}{\beta}(1-\exp[-\beta t_q]) = \frac{1}{\beta}.$$

С учетом этого, неравенство (8) запишем в виде

$$\begin{gathered} \|y(t_q)\| \leq \|W(t_q,0)y(0)\| + \\ + \|y(t_q)\| \frac{1}{\beta}\Big(\left\|T^{-1}BT\right\| + \left\|T^{-1}\right\| k \left\|T\right\| + \left\|T^{-1}C\right\| \mu \left\|T\right\| \Big). \end{gathered} \tag{9}$$

Так как система $\dot{y}(t) = Jy(t)$ устойчива, то $\|W(t_q, 0)y(0)\| \to 0$ при $t_q \to +\infty$. Следовательно, при условии (4), неравенство (9) не выполняется. Полученное противоречие показывает, что решения системы ограничены.

Максимальный показатель Ляпунова решений системы $\dot{y}(t) = Jy(t)$ равен $\bar{\lambda} = -\beta$. Будем искать верхнюю оценку величины $\bar{\lambda}$ системы (1) в интервале

$$\lambda > -\beta.$$

Для доказательства экспоненциальной устойчивости положим в (3)

$$y(t) = \exp(\lambda t)z(t), \quad -\beta < \lambda < 0, \tag{10}$$

в результате получим

$$\begin{gathered}\dot{z}(t) = (J - \lambda I)z(t) + \exp[-\lambda\tau_B(t)]T^{-1}BTz(t - \tau_B(t)) + \\ + \exp[-\lambda t]T^{-1}f(T\exp[\lambda(t - \tau(t))]z(t - \tau(t)), t) + \\ + \exp[-\lambda t]T^{-1}C\int_{t-\mu}^{t} T\exp[\lambda u]z(u)du.\end{gathered} \tag{11}$$

Аналогично приведенному выше доказательству найдем, что решения (11) ограничены, если

$$\frac{1}{\beta+\lambda}\Bigg(\exp[-\lambda h_B]\left\|T^{-1}BT\right\| + \exp[-\lambda h]\left\|T^{-1}\right\|k\left\|T\right\| + \\ + \frac{1-\exp[-\lambda\mu]}{\lambda}\left\|T^{-1}C\right\|\left\|T\right\|\Bigg) < 1.$$

Функция $V(\lambda)$ убывает по λ; по условию (4) $V(\lambda) < 1$ при $\lambda = 0$, следовательно при $V(\lambda) = 1 \quad \lambda < 0$. Учитывая (10), найдем, что система (1) экспоненциально устойчива с показателем λ. *Теорема доказана.*

4. Примеры

Проиллюстрируем эффективность полученных условий устойчивости на модельных примерах.

Пример 1. Для проверки эффективности разработанной методики, рассмотрим уравнение, для которого условия устойчивости были получены ранее другими методами в [6] и [8]

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau_B(t)) + C\int_{t-\mu}^{t} x(u)du, \\ A = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 \end{bmatrix}.\end{gathered} \tag{12}$$

Матрица A – диагональная, следовательно $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Пусть a_1 – минимальное по модулю собственное значение матрицы A, тогда условие экспоненциальной устойчивости (4) для системы (12) принимает вид

$$a_1 > \sqrt{b_1^2 + b_2^2} + \mu\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \tag{13}$$

Заметим, что такое условие было получено ранее в [6] другим методом. В [8] для уравнения (12) с постоянным запаздыванием τ_B методом функций Ляпунова получено следующее условие устойчивости

$$a_1 > (1+\mu)^{1/2}[(b_1^2+b_2^2)+\mu(c_1^2+c_2^2)]^{1/2}. \tag{14}$$

Нетрудно проверить, что условие (13) менее консервативно, чем (14) (лишь при $b_1^2+b_2^2=\mu(c_1^2+c_2^2)$ они совпадают). При этом условие (13) является более общим, охватывая системы с произвольным переменным запаздыванием $\tau_B(t)$.

Пример 2. Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau_B(t)) + f(x(t-\tau(t)),t),$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0.1 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0.2 & 1 & -2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & -0.2 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

где $\tau(t) \in [0,\ h]$, $\tau_B(t) \in [0,\ h_B]$, $\|f(x,t)\| \le k\,\|x\|$.

Условие устойчивости (4) принимает вид

$$k < \frac{\beta - \left\|T^{-1}BT\right\|}{\|T^{-1}\|\,\|T\|} < 0.0829... \tag{16}$$

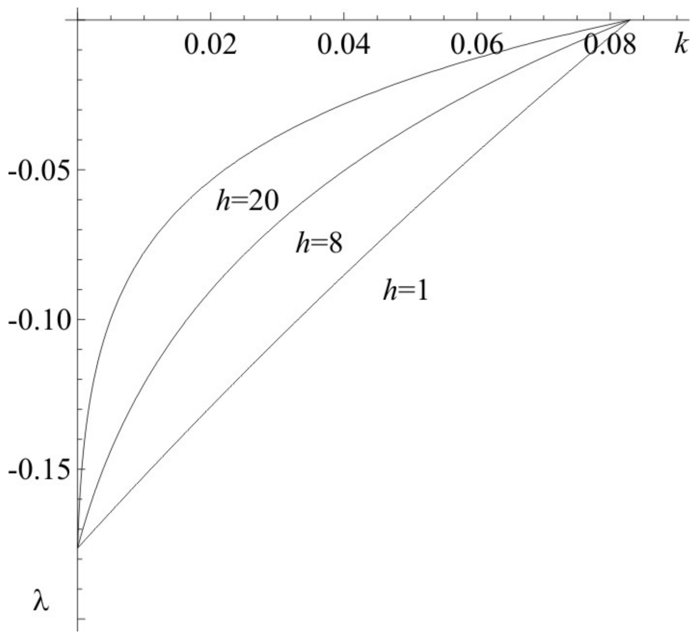

Рис. 1. Верхние оценки $\lambda(k)$ максимального показателя Ляпунова

На рисунке представлены графики верхней оценки максимального показателя Ляпунова $\lambda(k)$ при различных значениях максимальной величины запаздывания h и фиксированной $h_B = 0.5$.

Функции $\lambda(k, h)$ возрастают по k и h, однако $\lim k(\lambda, h) = 0.0829...$ при $\lambda \to 0$ не зависит от h. Поэтому условие $k < 0.0829...$ гарантирует экспоненциальную устойчивость системы при любом конечном h.

Используя метод, предложенный в [6], для системы (15) было получено условие устойчивости

$$k < 0.0483... \tag{17}$$

Очевидно, что условие (16) менее консервативно чем (17). Однако, если положить в (15) $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = 0$, теорема 1 дает условие устойчивости $k < 0.1458...$, в то время как в [6] получено условие $k < 0.5184...$ Таким образом, эти два подхода дополняют друг друга, однако, метод, предлагаемый в данной работе, существенно проще.

5. Выводы

В данной работе предложен простой метод расчета экспоненциальной устойчивости некоторых классов нелинейных систем, содержащих переменные и распределенные запаздывания. Вычислительная трудоемкость предложенного метода практически не зависит от порядка системы. Найдена верхняя оценка максимального показателя Ляпунова, которая позволила оценить скорость убывания решений рассмотренных систем. Эффективность разработанной методики проиллюстрирована на примерах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А.И., Постников В.Н. К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. – 1944. – Т.8. – Вып.3. – С. 246–248.

2. Разумихин Б.С. Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования с запаздыванием // Инженерный сборник. – 1960. – Т.19. – С. 21–29.

3. Попов В.М., Халанай А. Об устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования с запаздывающим аргументом // Автоматика и телемеханика. – 1962. – №7. – С. 849–851.

4. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.:Наука, 1970. — 536 с.

5. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функции Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – К.: Изд-во Киевского унивеситета, 1997. – 236 с.

6. Зевин А.А., Пославский С.Ю. Двусторонние оценки наибольшего показателя Ляпунова и критерии экспоненциальной устойчивости нелинейных систем с произвольным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №1. – С. 82–91.

7. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 367 с.

8. Kolmanovskii V.B., Richard J.-P. Stability of some linear systems with delay // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1999. – V. 44 (5). – P. 984–989.

Статья получена: 20.03.2014; окончательный вариант: 18.08.2014; принята: 25.09.2014.