

М. В. Генералов

аспірант

кафедра фундаментальної математики

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

майдан Свободи, 4, Харків, 61022, Україна

mykola.heneralov@karazin.ua  <http://orcid.org/0009-0001-4855-6337>

О. Л. Півень

кандидат фіз.-мат. наук

доцент кафедри прикладної математики

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

майдан Свободи, 4, Харків, 61022, Україна

aleksei.piven@karazin.ua  <http://orcid.org/0000-0002-7977-7255>

Неявне лінійне різницеве рівняння першого порядку над скінченними комутативними кільцями з одиноцею

У статті досліджується неявне лінійне різницеве рівняння першого порядку $BX_{n+1} = AX_n + F_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ над скінченним комутативним кільцем R з одиницею, тобто рівняння з необоротним елементом B кільця R . На відміну від класичного (явного) лінійного різничевого рівняння, неявне лінійне різницеве рівняння над скінченним кільцем R може не мати розв'язків, а також може мати нескінченну кількість розв'язків. Оскільки будь-яке скінченне комутативне кільце з одиницею ізоморфне скінченній прямій сумі локальних комутативних кілець з одиницею, то рівняння розпадається на систему рівнянь над локальними скінченними комутативними кільцями з одиницею. Показано, що умова співпадіння з R ідеалу (A, B) , який породжено елементами $A, B \in R$, є необхідною і достатньою для існування скінченного числа розв'язків цього рівняння, підраховано кількість розв'язків в разі їх існування та надано формулу для загального розв'язку. Умова $(A, B) \neq R$ є необхідною і достатньою умовою існування нескінченного числа розв'язків відповідного однорідного рівняння $BX_{n+1} = AX_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Також встановлено, що у випадку $(A, B) \neq R$ умова $F_n \in (A, B)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ є необхідною для розв'язності неоднорідного неявного лінійного різничевого рівняння, але не є достатньою, як показують приклади. При додатковому обмеженні, що (A, B) є власним головним ідеалом кільця R , ця умова буде також достатньою умовою для існування розв'язку розглянутого неоднорідного рівняння, в цій ситуації рівняння має нескінченно багато розв'язків. За умови, що (A, B) є головним ідеалом, спочатку доводиться критерій існування розв'язку у випадку локального комутативного скінченного кільця з одиницею, а потім у випадку довільного скінченного комутативного кільця з одиницею. Як і в теорії Фредгольма, показано наступне: якщо відповідне однорідне рівняння має тільки тривіальний розв'язок, то досліджуване неоднорідне рівняння має

© Генералов М. В., Півень О. Л., 2026; CC BY 4.0 license

єдиний розв'язок. На конкретних прикладах продемонстровано роботу доведених теорем.

Ключові слова: неявне лінійне різницеве рівняння; скінченне кільце; локальне кільце, ідеал.

2020 Mathematics Subject Classification: 39A06; 11B37; 16P10.

1. Вступ

У зв'язку із багаточисленними застосуваннями у 80-хх та 90-хх роках ХХ століття виникла теорія неявних лінійних різницевих рівнянь в векторних просторах з необоротними операторними коефіцієнтами (див. наприклад [1, 2]). Ця теорія продовжує свій розвиток і у ХХІ-му столітті (див. наприклад [3, 4, 5]) паралельно з теорією неявних лінійних різницевих рівнянь над комутативними кільцями [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

Нехай $R \neq \{0\}$ – скінченне комутативне кільце з одиницею, $A, B \in R$ і $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовність елементів кільця R . В даній роботі досліджується неявне лінійне різницеве рівняння першого порядку над R :

$$BX_{n+1} = AX_n + F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (1)$$

Як і в [8, 9, 10], рівняння (1) називається *неявним*, якщо B є необоротним елементом кільця R , і *явним* в протилежному випадку. Неявні лінійні різницеві рівняння вигляду (1) над цілісними кільцями досліджувались в [8, 9], зокрема над кільцем цілих чисел – в [6, 10]. Неявне лінійне різницеве рівняння (1) над скінченим кільцем досліджувалось раніше лише у випадку кільця лишків $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ за модулем m в [11], і у випадку кільця $\mathbb{Z}_p[t]/(t^2)$ (p – просте число) у [12]. Дана робота є продовженням досліджень, які було започатковано в роботах [11, 12].

У розділі 2 наведено попередні відомості щодо розв'язності рівняння (1) над довільним комутативним кільцем з одиницею, не обов'язково скінченим. Оскільки скінченне кільце R ізоморфне скінченній прямій сумі скінчених локальних комутативних кілець з одиницею [13], то проблема існування та єдиності розв'язку рівняння (1) зводиться до проблеми розв'язності цього рівняння над локальним кільцем R (див. наслідок 1 з теореми 1). Проблемі класифікації локальних скінчених кілець присвячено багато робіт (див. наприклад [14, 15] і бібліографію в цих роботах). Цікаво зауважити (див. [16]), що кожний елемент локального скінченного комутативного кільця є оборотним або нільпотентним.

Основні результати даної роботи містяться у розділах 3 та 4. При дослідженні рівняння (1) суттєву роль грає ідеал (A, B) , який породжено коефіцієнтами цього рівняння (див. теореми 2–5). Так, умова $(A, B) = R$ є необхідною і достатньою для існування скінченного числа розв'язків рівняння (1) (див. теорему 3, де наведено також загальний розв'язок рівняння (1) в цій ситуації). Умова

$$F_n \in (A, B), \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad (2)$$

є необхідною умовою існування розв'язку рівняння (1) (третє твердження леми 1), але не є достатньою умовою (див. приклад 1). Якщо додатково ідеал (A, B) є головним ідеалом кільця R , то умова (2) є достатньою для існування розв'язку рівняння (1), більш того, в цьому випадку існує нескінченно багато розв'язків цього рівняння (див. теорему 5, де також описано загальний розв'язок рівняння (1) в цій ситуації). Умова $(A, B) \neq R$ є необхідною і достатньою умовою існування нескінченної кількості розв'язків відповідного до (1) однорідного рівняння (див. теорему 2). Відмітимо, що ідеал (A, B) буде головним у будь-якому кільці R головних ідеалів, зокрема, в кільцях $\mathbb{Z}_m$ та $\mathbb{Z}_p[t]/(t^2)$, над якими досліджувалось раніше рівняння (1) відповідно в [11] та [12]. Отже, якщо ідеал (A, B) є власним ідеалом кільця R і не є головним, то при виконанні умови (2) неоднорідне рівняння (1) або не має розв'язків, або має нескінченно багато розв'язків (див. теореми 3–5 і зауваження 1).

В розділі 5 даної роботи наведено приклади, які ілюструють роботу теорем розділів 3 та 4.

2. Попередні твердження

Протягом цього розділу наводяться попередні відомості про розв'язність рівняння (1) над ненульовим комутативним кільцем R з одиницею (необов'язково скінченним).

Через $R^\times$ позначимо множину оборотних елементів кільця R . Для нільпотентного елемента $u \in R$ через $\text{ind } u$ позначатимемо його індекс нільпотентності, тобто таке найменше число $k \in \mathbb{N}$, що $B^k = 0$. Через $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ позначаємо ідеал кільця R , породжений елементами $a_1, \dots, a_k \in R$.

Наступна лема дає загальний розв'язок явного рівняння (1) і неявного рівняння (1) з нільпотентним B та $A \in R^\times$. Також наводяться достатні умови відсутності розв'язків цього рівняння.

Лема 1. *Справедливі наступні твердження.*

1. Якщо $B \in R^\times$, то загальний розв'язок рівняння (1) визначено рівністю

$$X_n = B^{-n} A^n X_0 + \sum_{s=0}^{n-1} B^{-s-1} A^s F_{n-s-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

де X_0 — довільний елемент кільця R .

2. Якщо B — нільпотент і $A \in R^\times$, то існує єдиний розв'язок рівняння (1). Цей розв'язок визначено рівністю

$$X_n = - \sum_{s=0}^{\text{ind } B - 1} A^{-s-1} B^s F_{n+s}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4)$$

3. Якщо $F_n \notin (A, B)$ при деякому $n \in \mathbb{Z}_+$, то рівняння (1) не має розв'язків.

Доведення. Перше твердження леми випливає з відомої формули загального розв'язку явного рівняння (1) (див. наприклад [17, с. 4, формула (1.2.6)]).

Доведемо друге твердження леми. Нехай B є нільпотентним елементом кільця R , $\nu = \text{ind } B$, а $A \in R^\times$. Рівняння (1) можна переписати у вигляді

$$X_n = BA^{-1}X_{n+1} - A^{-1}F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Скориставшись цією рівністю ν разів, з урахуванням рівності $B^\nu = 0$ отримаємо:

$$X_n = - \sum_{s=0}^{\nu-1} A^{-s-1} B^s F_{n+s}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Перевіримо, що ця послідовність є розв'язком рівняння (1):

$$BX_{n+1} - AX_n = -B \sum_{s=0}^{\nu-1} A^{-s-1} B^s F_{n+1+s} + A \sum_{s=0}^{\nu} A^{-s-1} B^s F_{n+s} = F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Це доводить друге твердження леми.

Третє твердження леми випливає з того, що у разі існування розв'язку $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ рівняння (1) $F_n = BX_{n+1} - AX_n \in (A, B)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. $\square$

Нехай R ізоморфне прямій сумі комутативних кілець $\hat{R}_1, \dots, \hat{R}_r$ з одиницею (цей факт буде записуватись наступним чином: $R \cong \hat{R}_1 \oplus \dots \oplus \hat{R}_r$). Ми не виключаємо випадок, коли $\hat{R}_i = \{0\}$ для деяких значень $i \in \{1, \dots, r\}$: в цьому і тільки в цьому випадку вважаємо, що одиниця кільця $\hat{R}_i$ співпадає з нулем цього кільця. Позначимо $\hat{\psi}: \hat{R}_1 \oplus \dots \oplus \hat{R}_r \rightarrow R$ — відповідний канонічний ізоморфізм, а $\hat{\pi}_k: R \rightarrow \hat{R}_k$ — відповідні канонічні проекції. Також позначимо $\hat{A}_k = \hat{\pi}_k(A)$, $\hat{B}_k = \hat{\pi}_k(B)$, $\hat{F}_{k,n} = \hat{\pi}_k(F_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $k = 1, \dots, r$.

Якщо $\hat{T}_k \in \hat{R}_k$, $k = 1, \dots, r$, то з означення $\hat{\psi}$ випливає, що

$$\hat{\pi}_k(\hat{\psi}(\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_r)) = \hat{T}_k, \quad k = 1, \dots, r. \quad (5)$$

Також, $(\hat{\pi}_1)^{-1}(\hat{T}_1) \cap \dots \cap (\hat{\pi}_r)^{-1}(\hat{T}_r)$ є одноелементною множиною, причому $\hat{\psi}(\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_r)$ є елементом цієї множини. Це означає, що

$$\{\hat{\psi}(\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_r)\} = \bigcap_{k=1}^r (\hat{\pi}_k)^{-1}(\hat{T}_k). \quad (6)$$

Наступна теорема показує, що рівняння (1) еквівалентне системі рівнянь

$$\hat{B}_k \hat{X}_{k,n+1} = \hat{A}_k \hat{X}_{k,n} + \hat{F}_{k,n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (7)$$

де при кожному $k = 1, \dots, r$ відповідне рівняння розглядається над кільцем $\hat{R}_k$ відносно послідовності $\{\hat{X}_{k,n}\}_{n=0}^\infty$.

Теорема 1. *Послідовність*

$$X_n = \widehat{\psi}(\widehat{X}_{1,n}, \dots, \widehat{X}_{r,n}), \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad (8)$$

є розв'язком рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли для кожного $k = 1, \dots, r$ послідовність $\{\widehat{X}_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ є розв'язком відповідного рівняння (7). При цьому $\widehat{\pi}_k(X_n) = \widehat{X}_{k,n}$, $k = 1, \dots, r$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Доведення. З рівностей (8) і (5) випливають рівності $\widehat{\pi}_k(X_n) = \widehat{X}_{k,n}$, $k = 1, \dots, r$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Оскільки $\widehat{\pi}_k$ ($k = 1, \dots, r$) є гомоморфізмами [18, с. 243, теорема 7], то

$$\widehat{\pi}_k(BX_{n+1} - AX_n - F_n) = \widehat{B}_k \widehat{X}_{k,n+1} - \widehat{A}_k \widehat{X}_{k,n} - \widehat{F}_{k,n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (9)$$

За рівністю (6) отримуємо:

$$BX_{n+1} - AX_n - F_n = \widehat{\psi}(\widehat{B}_1 \widehat{X}_{1,n+1} - \widehat{A}_1 \widehat{X}_{1,n} - \widehat{F}_{1,n}, \dots, \widehat{B}_r \widehat{X}_{r,n+1} - \widehat{A}_r \widehat{X}_{r,n} - \widehat{F}_{r,n}), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Зазначимо, що

$$\widehat{\pi}_k(0) = 0, \quad k = 1, \dots, r. \quad (10)$$

За рівностями (9) і (10) маємо, що рівність (1) вірна тоді і тільки тоді, коли є вірною рівність (7) для всіх $k = 1, \dots, r$. Це завершує доведення теореми. $\square$

3. Загальні критерії існування розв'язку рівняння

Уздовж цього розділу R є ненульовим скінченним комутативним кільцем з одиницею.

Анулятором елемента $u \in R$ називається множина

$$\text{Ann } u = \{v \in R \mid vu = 0\}$$

[18, с. 249, вправа 22(a)].

За теоремою VI.2 [13, с. 95], кільце R ізоморфне прямій сумі $\bigoplus_{i=1}^r R_i$ локальних скінченних комутативних кілець $R_i \neq \{0\}$ з одиницею. Позначимо через $\pi_i: R \rightarrow R_i$ відповідні канонічні проекції, $i = 1, \dots, r$. Визначимо множини I_1, I_2, I_3 наступним чином:

- I_1 — множина всіх $i \in \{1, \dots, r\}$ таких, що $\pi_i(B) \in R_i^\times$;
- I_2 — множина всіх $i \in \{1, \dots, r\} \setminus I_1$ таких, що $\pi_i(A) \in R_i^\times$;
- $I_3 = \{1, \dots, r\} \setminus (I_1 \cup I_2)$.

Тоді $\{1, \dots, r\} = I_1 \cup I_2 \cup I_3$ і відповідно $R \cong R^{(1)} \oplus R^{(2)} \oplus R^{(3)}$, де $R^{(j)} = \bigoplus_{i \in I_j} R_i$,

при цьому будемо вважати $R^{(j)} = \{0\}$, якщо $I_j = \emptyset$, $j = 1, 2, 3$. Позначимо через $\pi^{(j)}$ канонічну проекцію з R у $R^{(j)}$ і

$$B^{(j)} = \pi^{(j)}(B), \quad A^{(j)} = \pi^{(j)}(A), \quad F_n^{(j)} = \pi^{(j)}(F_n), \quad j = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Наступна лема встановлює властивості деяких елементів $A^{(j)}, B^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$.

Лема 2.

1. $B^{(2)}$ — нільпотент кільця $R^{(2)}$, а $B^{(3)}, A^{(3)}$ — нільпотенти кільця $R^{(3)}$.
2. Якщо $R^{(1)} \neq \{0\}$, то $B^{(1)}$ — оборотний елемент кільця $R^{(1)}$. Якщо $R^{(2)} \neq \{0\}$, то $A^{(2)}$ — оборотний елемент кільця $R^{(2)}$.

Доведення. За означенням множини I_2 , для кожного $i \in I_2$ елемент $\pi_i(B)$ не є оборотним у кільці R_i . Оскільки кільце R_i локальне, то $\pi_i(B)$ нільпотентний елемент [16, лема 2.1, теорема 2.3], а тому елемент $B^{(2)}$ також нільпотентний. Аналогічно, з означення I_3 випливають необоротності елементів $\pi_i(A), \pi_i(B)$ для всіх $i \in I_3$ і отже $A^{(3)}, B^{(3)}$ є нільпотентами кільця $R^{(3)}$.

Нехай $R^{(1)} \neq \{0\}$, тобто $I_1 \neq \emptyset$. Тоді, за означенням I_1 , для кожного $i \in I_1$ елемент $\pi_i(B)$ є оборотним. Отже $B^{(1)}$ є оборотним елементом кільця $R^{(1)}$. Аналогічно доводиться, що якщо $R^{(2)} \neq \{0\}$, то $A^{(2)}$ є оборотним елементом кільця $R^{(2)}$. Лему доведено повністю. $\square$

Лема 3. Умови $(A, B) = R$ і $R^{(3)} = \{0\}$ рівносильні.

Доведення. Зауважимо, що умову $(A, B) = R$ виконано тоді і тільки тоді, коли $\pi^{(j)}((A, B)) = \pi^{(j)}(R) = R^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$. Оскільки $\pi^{(j)}$ — сюр'єктивний гомоморфізм, то

$$\begin{aligned} \pi^{(j)}((A, B)) &= \left\{ \pi^{(j)}(\alpha A + \beta B) \mid \alpha, \beta \in R \right\} = \\ &= \left\{ \pi^{(j)}(\alpha) A^{(j)} + \pi^{(j)}(\beta) B^{(j)} \mid \alpha, \beta \in R \right\} = (A^{(j)}, B^{(j)}), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Тому умову $(A, B) = R$ виконано тоді і тільки тоді, коли

$$(A^{(j)}, B^{(j)}) = R^{(j)}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (12)$$

Тепер покажемо, що умова (12) виконується завжди при $j = 1, 2$.

Якщо $R^{(1)} = \{0\}$, то $A^{(1)} = B^{(1)} = 0$ і рівність (12) при $j = 1$ є очевидною. Якщо $R^{(1)} \neq \{0\}$, то, за лемою 2, $B^{(1)}$ є оборотним елементом кільця $R^{(1)}$, звідки випливає рівність (12) при $j = 1$.

Аналогічно при $j = 2$: якщо $R^{(2)} = \{0\}$, то рівність (12) є очевидною. Якщо $R^{(2)} \neq \{0\}$, то, за лемою 2, $A^{(2)}$ є оборотним елементом кільця $R^{(2)}$, і отже справджується рівність (12) при $j = 2$.

Таким чином, умова (12) рівносильна умові

$$(A^{(3)}, B^{(3)}) = R^{(3)}. \quad (13)$$

Тепер покажемо, що умова (13) рівносильна рівності $R^{(3)} = \{0\}$. Якщо $R^{(3)} = \{0\}$, то $(A^{(3)}, B^{(3)}) = \{0\}$ і тому рівність (13) виконується. Тепер, навпаки, нехай виконано (13) і $R^{(3)} \neq \{0\}$. Тоді, за лемою 2, елементи $A^{(3)}$ і $B^{(3)}$ є нільпотентами кільця $R^{(3)}$, а тому $1 \in R^{(3)}$ не може бути їх лінійною комбінацією. Отже, $(A^{(3)}, B^{(3)}) \neq R^{(3)}$, що суперечить (13). Це завершує доведення леми. $\square$

Позначимо через ψ ізоморфізм кілець $R^{(1)} \oplus R^{(2)} \oplus R^{(3)}$ і R .

Наступний наслідок з теореми 1 показує, що рівняння (1) еквівалентне системі рівнянь

$$B^{(j)} X_{n+1}^{(j)} = A^{(j)} X_n^{(j)} + F_n^{(j)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (14)$$

де при кожному $j = 1, 2, 3$ відповідне рівняння розглядається над кільцем $R^{(j)}$ відносно послідовності $\{X_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$.

Наслідок 1. *Послідовність*

$$X_n = \psi(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, X_n^{(3)}), \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

є розв'язком рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли для кожного $j = 1, 2, 3$ послідовність $\{X_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$ є розв'язком відповідного рівняння (14). При цьому $\pi^{(j)}(X_n) = X_n^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Через $\text{card } R$ позначатимемо кількість елементів кільця R . Наступна теорема встановлює критерій існування скінченного числа розв'язків однорідного рівняння

$$BX_{n+1} = AX_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad (15)$$

над кільцем R .

Теорема 2. *Однорідне рівняння (15) має скінченне число розв'язків тоді і тільки тоді, коли $(A, B) = R$. При цьому кількість розв'язків цього рівняння дорівнює $\text{card } R^{(1)}$.*

Доведення. Розглянемо рівняння (14) з $F_n^{(j)} = 0$, $j = 1, 2, 3$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Достатність. Нехай $(A, B) = R$, тоді, за лемою 3, $R^{(3)} = \{0\}$. Отже, єдина послідовність у кільці $R^{(3)}$ має вигляд $X_n^{(3)} = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), ця послідовність і є розв'язком рівняння (14) при $j = 3$.

Якщо $R^{(2)} \neq \{0\}$, то, за лемою 2, при $j = 2$ елемент $B^{(2)}$ є нільпотентним, а $A^{(2)}$ — оборотним. Отже, за другим твердженням леми 1, при $j = 2$ існує лише

тривіальний розв'язок рівняння (14). Якщо $R^{(2)} = \{0\}$, то єдина послідовність $X_n^{(2)} = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) у кільці $R^{(2)}$ і є розв'язком рівняння (14) при $j = 2$. Таким чином, рівняння (14) при $j = 2$ має лише тривіальний розв'язок.

Якщо $R^{(1)} = \{0\}$, то єдина послідовність $X_n^{(1)} = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) у кільці $R^{(1)}$ є розв'язком рівняння (14) при $j = 1$. Якщо $R^{(1)} \neq \{0\}$, то, за лемою 2, елемент $B^{(1)}$ є оборотним. Отже, за першим твердженням леми 1, загальний розв'язок рівняння (14) при $j = 1$ має вигляд $X_n^{(1)} = (B^{(1)})^{-n} (A^{(1)})^n X_0^{(1)}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де $X_0^{(1)}$ — довільний елемент кільця $R^{(1)}$. Таким чином, кількість розв'язків рівняння (14) при $j = 1$ дорівнює $\text{card } R^{(1)}$.

Враховуючи наслідок 1, отримуємо, що при $(A, B) = R$ кількість розв'язків рівняння (15) дорівнює $\text{card } R^{(1)}$. Достатність доведено.

Необхідність. Нехай $(A, B) \neq R$, тоді, за лемою 3, $R^{(3)} \neq \{0\}$. За лемою 2, елементи $A^{(3)}, B^{(3)}$ є нільпотентними. Отже, за [16, лема 2.2], існує елемент $u \neq 0$ кільця $R^{(3)}$ такий, що $u \in \text{Ann } A^{(3)} \cap \text{Ann } B^{(3)}$. Тоді послідовність $X_n^{(3)} = u\beta_n$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ є довільною послідовністю нулів та одиниць, є розв'язком рівняння (14) при $j = 3$. Справді,

$$B^{(3)}X_{n+1}^{(3)} - A^{(3)}X_n^{(3)} = (uB^{(3)})\beta_{n+1} - (uA^{(3)})\beta_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Таким чином отримуємо нескінченно багато розв'язків рівняння (14) при $j = 3$. Оскільки при $j = 1, 2$ рівняння (14) має принаймні тривіальний розв'язок, то, за наслідком 1, рівняння (15) має нескінченно багато розв'язків. Теорему доведено повністю. $\square$

Наступний наслідок є критерієм єдиності розв'язку однорідного рівняння (15).

Наслідок 2. *Однорідне рівняння (15) має тільки тривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли B — нільпотентний елемент кільця R , а $A \in R^\times$.*

Доведення. Достатність випливає з твердження 2 леми 1.

Необхідність. Нехай рівняння (15) має тільки тривіальний розв'язок. За теоремою 2, $(A, B) = R$ і $\text{card } R^{(1)} = 1$. Умова $\text{card } R^{(1)} = 1$ рівносильна тому, що $R^{(1)} = \{0\}$. За лемою 3, $R^{(3)} = \{0\}$. Отже $R^{(2)} \cong R$ і тому $R^{(2)} \neq \{0\}$. За лемою 2, $B^{(2)}$ — нільпотентний елемент кільця $R^{(2)}$, а $A^{(2)}$ — оборотний елемент цього кільця. Враховуючи, що $R^{(2)} \cong R$, маємо, що B — нільпотентний елемент кільця R , а $A \in R^\times$. $\square$

Наступний наслідок є деяким аналогом однієї з теорем Фредгольма.

Наслідок 3. *Якщо однорідне рівняння (15) має тільки тривіальний розв'язок, то відповідне неоднорідне рівняння (1) має єдиний розв'язок для будь-якої послідовності $\{F_n\}_{n=0}^\infty$. Цей розв'язок визначається формулою (4).*

Доведення. За наслідком 2, якщо однорідне рівняння (15) має тільки тривіальний розв'язок, то $A \in R^\times$ і B — нільпотентний елемент кільця R . Тоді,

за лемою 1, рівняння (1) має єдиний розв'язок, який визначається формулою (4). $\square$

Наступна теорема встановлює необхідну і достатню умову існування скінченного числа розв'язків неоднорідного рівняння (1).

Теорема 3. *Рівняння (1) має скінченне число розв'язків тоді і тільки тоді, коли $(A, B) = R$. При цьому кількість розв'язків рівняння (1) дорівнює $\text{card } R^{(1)}$. Крім того:*

1. якщо $B \in R^\times$, то загальний розв'язок рівняння (1) визначається формулою (3), де X_0 — довільний елемент кільця R ;
2. якщо $A \in R^\times$ і B — нільпотентний елемент кільця R , то єдиний розв'язок рівняння (1) визначається формулою (4);
3. якщо $R^{(1)} \neq \{0\}$ і $R^{(2)} \neq \{0\}$, то загальний розв'язок рівняння (1) визначається формулою $X_n = \psi(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, 0)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де

$$X_n^{(1)} = \left(B^{(1)}\right)^{-n} \left(A^{(1)}\right)^n X_0^{(1)} + \sum_{s=0}^{n-1} \left(B^{(1)}\right)^{-s-1} \left(A^{(1)}\right)^s F_{n-s-1}^{(1)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (16)$$

$$X_n^{(2)} = \sum_{s=0}^{\text{ind } B^{(2)} - 1} \left(A^{(2)}\right)^{-s-1} \left(B^{(2)}\right)^s F_{n+s}^{(2)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (17)$$

а $X_0^{(1)}$ є довільним елементом кільця $R^{(1)}$.

Доведення. Достатність. Нехай $(A, B) = R$.

Якщо $B \in R^\times$, то, за лемою 1, загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд (3), де X_0 — довільний елемент кільця R . Отже кількість розв'язків рівняння (1) у цьому випадку дорівнює $\text{card } R$. З того, що $B \in R^\times$, випливає, що $\pi_i(B) \in R_i^\times$ при всіх $i \in \{1, \dots, r\}$, тому $R^{(1)} \cong R$, а отже кількість розв'язків рівняння (1) у цьому випадку дорівнює $\text{card } R^{(1)}$, що доводить твердження 1 теореми.

Якщо $A \in R^\times$ і B — нільпотентний елемент кільця R , то, за лемою 1, розв'язок рівняння (1) визначається єдиним чином формулою (4). Оскільки B — нільпотентний елемент кільця R , то $R^{(1)} = \{0\}$, і тоді $\text{card } R^{(1)} = 1$. Це завершує доведення твердження 2 теореми.

Тепер доведемо третє твердження теореми.

Оскільки $R^{(1)} \neq \{0\}$ і $R^{(2)} \neq \{0\}$, то, за лемою 2, $B^{(1)}$ є оборотним елементом кільця $R^{(1)}$, $B^{(2)}$ є нільпотентним елементом кільця $R^{(2)}$, $A^{(2)}$ є оборотним елементом кільця $R^{(2)}$. Отже, за лемою 1, розв'язки рівнянь (14) при $j = 1$ і при $j = 2$ визначаються формулами (16) і (17) відповідно, причому кількість розв'язків рівняння (14) при $j = 1$ дорівнює $\text{card } R^{(1)}$, а рівняння (14) при $j = 2$ має єдиний розв'язок. Оскільки $(A, B) = R$,

то, за лемою 3, $R^{(3)} = \{0\}$, а тому єдина послідовність у $R^{(3)}$ має вигляд $X_n^{(3)} = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Ця послідовність і є розв'язком рівняння (14) при $j = 3$. За наслідком 1, маємо, що загальний розв'язок рівняння (1) визначається рівністю $X_n = \psi(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, 0)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де послідовності $\{X_n^{(j)}\}_{n=0}^\infty$, $j = 1, 2$, визначаються формулами (16), (17) відповідно. Кількість розв'язків рівняння (1), відповідно, дорівнює $\text{card } R^{(1)}$. Це завершує доведення достатності теореми.

Необхідність. Нехай рівняння (1) має скінченне число розв'язків. Припустимо супротивне, що $(A, B) \neq R$. Зафіксуємо деякий розв'язок $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ рівняння (1). Тоді формула

$$\tilde{X}_n = X_n + \alpha_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (18)$$

де $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ — загальний розв'язок однорідного рівняння (15), також задає розв'язок рівняння (1). Оскільки, за теоремою 2, існує нескінченно багато розв'язків рівняння (15), то формула (18) визначає нескінченно багато розв'язків рівняння (1). Отримали протиріччя з припущенням скінченності числа розв'язків рівняння (1). Теорему доведено повністю. $\square$

З теореми 3 випливає наступний критерій існування та єдиності розв'язку рівняння (1).

Наслідок 4. Рівняння (1) має єдиний розв'язок для будь-якої послідовності $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ тоді і тільки тоді, коли $A \in R^\times$, а B є нільпотентним елементом кільця R . Цей розв'язок визначається формулою (4).

Також із теореми 3 випливають наступні наслідки.

Наслідок 5. Рівняння (1) має скінченне число розв'язків для будь-якої послідовності $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ тоді і тільки тоді, коли $(A, B) = R$.

Наслідок 6. Якщо $A \in R^\times$, то однорідне рівняння (15) має $\text{card } R^{(1)}$ розв'язків. При цьому загальний розв'язок цього рівняння визначається формулою $X_n = \psi(X_n^{(1)}, 0, 0)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де

$$X_n^{(1)} = \left(B^{(1)}\right)^{-n} \left(A^{(1)}\right)^n X_0^{(1)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

а $X_0^{(1)}$ є довільним елементом кільця $R^{(1)}$.

Зауваження 1. Нехай $(A, B) \neq R$. Тоді множина розв'язків однорідного рівняння (15) має потужність континууму (див. доведення необхідності твердження теореми 2). Тому, за теоремою 3, множина розв'язків неоднорідного рівняння (1) або порожня, або також має потужність континууму. Зокрема, множина розв'язків цього рівняння не може бути зліченною.

4. Випадок, коли коефіцієнти рівняння породжують головний ідеал

В цьому розділі, якщо не оговорено інше, $R \neq \{0\}$ є скінченним комутативним кільцем з одиницею і існує елемент D кільця R такий, що $(A, B) = (D)$, де A, B — коефіцієнти рівняння (1).

Якщо $F_n \in (D)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$, то зафіксуємо деякі елементи A', B', F'_n ($n \in \mathbb{Z}_+$) кільця R так, що

$$A = DA', \quad B = DB', \quad F_n = DF'_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (19)$$

Лема 4. *Нехай R — локальне кільце. Якщо $D \neq 0$, то $(A', B') = R$, тобто хоча б один з елементів A', B' є оборотним. Більш того, існує елемент $\gamma \in R$ такий, що $A = \gamma B$ у випадку $B' \in R^\times$, $B = \gamma A$ у випадку $A' \in R^\times$.*

Доведення. Запишемо

$$(D) = (A, B) = \{\alpha A + \beta B \mid \alpha, \beta \in R\} = \{\alpha DA' + \beta DB' \mid \alpha, \beta \in R\}.$$

Припустимо, що серед A', B' немає оборотного елемента. Тоді, оскільки R — локальне кільце, то A', B' — нільпотенти [16, лема 2.1, теорема 2.3] і сума нільпотентів є також нільпотентом [18, с. 250, вправа 29]. Тому для деяких $\alpha, \beta \in R$ справедливе наступне зображення елемента D :

$$D = \alpha DA' + \beta DB' = D(\alpha A' + \beta B') = D j_0,$$

де j_0 — деякий нільпотентний елемент кільця R . Тому $D = D j_0^m$ для довільного натурального m , зокрема $D = D j_0^{\text{ind } j_0} = 0$. Це суперечить умові $D \neq 0$, отже припущення хибне і серед A', B' є оборотний елемент.

Тепер нехай $A' \in R^\times$. Тоді, за (19), $B = B'D = B'(A')^{-1}A = \gamma A$, де $\gamma = B'(A')^{-1}$. Аналогічно у випадку $B' \in R^\times$ доводиться рівність $A = \gamma B$ для деякого $\gamma \in R$. Лему доведено. $\square$

Зауваження 2. Якщо $D = 0$, то $A = B = 0$ і будемо вважати в (19) $A' = F'_n = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) і $B' = 1$ у кільці R .

Наступна теорема встановлює критерії існування скінченного і нескінченного числа розв'язків рівняння (1) над локальним кільцем R .

Теорема 4. *Нехай R — локальне кільце. Справедливі наступні твердження.*

1. Рівняння (1) має скінченну кількість розв'язків тоді і тільки тоді, коли $D \in R^\times$. При цьому рівняння (1) має

$$N = \begin{cases} \text{card } R, & B \in R^\times, \\ 1, & B \notin R^\times, A \in R^\times \end{cases}$$

розв'язків і загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$X_n = \begin{cases} B^{-n} A^n X_0 + \sum_{s=0}^{n-1} B^{-s-1} A^s F_{n-s-1}, & B \in R^\times, \\ - \sum_{s=0}^{\text{ind } B-1} A^{-s-1} B^s F_{n+s}, & B \notin R^\times, A \in R^\times, \end{cases} \quad (20)$$

де X_0 — довільний елемент кільця R у випадку $B \in R^\times$.

2. Рівняння (1) має нескінченно багато розв'язків тоді і тільки тоді, коли $D \notin R^\times$ і $F_n \in (D)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. При цьому загальний розв'язок цього рівняння визначено рівністю

$$X_n = X'_n + \alpha_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (21)$$

в якій $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів анулятора $\text{Ann } D$, а послідовність $\{X'_n\}_{n=0}^\infty$ має вигляд

$$X'_n = \begin{cases} (B')^{-n} (A')^n X'_0 + \sum_{s=0}^{n-1} (B')^{-s-1} (A')^s F'_{n-s-1}, & B' \in R^\times, \\ - \sum_{s=0}^{\text{ind } B'-1} (A')^{-s-1} (B')^s F'_{n+s}, & B' \notin R^\times, A' \in R^\times, \end{cases} \quad (22)$$

де X'_0 є довільним елементом кільця R у випадку $B' \in R^\times$.

3. Рівняння (1) не має розв'язків тоді і тільки тоді, коли $F_n \notin (D)$ при деякому n .

Доведення. Доведемо достатність першого твердження теореми. Нехай $D \in R^\times$. Тоді $(D) = R$ і отже виконано рівність $(A, B) = (D) = R$. Тому, за теоремою 3, рівняння (1) має скінченне число розв'язків. Вигляд (20) загального розв'язку рівняння (1) впливає з тверджень 1, 2 теореми 3.

При цьому, якщо $B \in R^\times$, то рівняння (1) є явним і, за першим твердженням леми 1, загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд (3), де X_0 — довільний елемент кільця R . Отже, у цьому випадку кількість розв'язків рівняння (1) дорівнює $\text{card } R$. Якщо ж B — нільпотентний елемент кільця R і $A \in R^\times$, то, за другим твердженням теореми 3, рівняння (1) має єдиний розв'язок.

Достатність твердження 1 доведено.

Доведемо достатність другого твердження теореми. Нехай $D \notin R^\times$ і $F_n \in (D)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. Рівняння (1) з урахуванням (19) приймає вигляд

$$D(B'X_{n+1} - A'X_n - F'_n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

що рівносильно рівнянню

$$B'X_{n+1} = A'X_n + (F'_n + \beta_n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (23)$$

де $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів анулятора $\text{Ann } D$. Оскільки, за лемою 4 і зауваженням 2, $(A', B') = R$, то можна застосувати теорему 3 до рівняння (23). З цієї теореми випливає, що загальний розв'язок рівняння (23) визначено формулою

$$X_n = \begin{cases} (B')^{-n}(A')^n X_0 + \sum_{s=0}^{n-1} (B')^{-s-1}(A')^s (F'_{n-s-1} + \beta_{n-s-1}), & B' \in R^\times, \\ - \sum_{s=0}^{\text{ind } B' - 1} (A')^{-s-1}(B')^s (F'_{n+s} + \beta_{n+s}), & B' \notin R^\times, A' \in R^\times, \end{cases}$$

де X_0 — довільний елемент кільця R , а $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів анулятора $\text{Ann } D$.

Останню рівність можна переписати у вигляді (21), де $\{X'_n\}_{n=0}^\infty$ визначено формулою (22), $X'_0 = X_0$ — довільний елемент кільця R , а послідовність $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ визначено формулою

$$\alpha_n = \begin{cases} 0, & n = 0, B' \in R^\times, \\ \sum_{s=0}^{n-1} (B')^{-s-1}(A')^s \beta_{n-s-1}, & n \in \mathbb{N}, B' \in R^\times, \\ - \sum_{s=0}^{\text{ind } B' - 1} (A')^{-s-1}(B')^s \beta_{n+s}, & n \in \mathbb{Z}_+, B' \notin R^\times, A' \in R^\times. \end{cases}$$

Оскільки $\beta_n \in \text{Ann } D$ і $\text{Ann } D$ є ідеалом кільця R [18, с. 249, вправа 22], то $\alpha_n \in \text{Ann } D$ при кожному $n \in \mathbb{Z}_+$. Таким чином, кожен розв'язок рівняння (1) має вигляд (21), де $\{X'_n\}_{n=0}^\infty$ визначено формулою (22), а $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів анулятора $\text{Ann } D$.

Тепер покажемо, що для довільної послідовності $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ елементів анулятора $\text{Ann } D$ і послідовності $\{X'_n\}_{n=0}^\infty$, визначеної формулою (22), будь-яка послідовність вигляду (21) є розв'язком рівняння (1). Підставляючи $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ в рівняння (1) і враховуючи, що $\{X'_n\}_{n=0}^\infty$ є розв'язком рівняння (23) при $\beta_n = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), маємо

$$\begin{aligned} BX_{n+1} - AX_n - F_n &= DB'X'_{n+1} + DB'\alpha_{n+1} - DA'X'_n - DA'\alpha_n - DF'_n = \\ &= D(B'X'_{n+1} - A'X'_n - F'_n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

тобто $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ є розв'язком рівняння (1). Це доводить формулу загального розв'язку у випадку другого твердження теореми.

Оскільки R — локальне кільце і $D \notin R^\times$, то D — нільпотент [16, лема 2.1, теорема 2.3]. Покладемо

$$a = \begin{cases} D^{\text{ind } D - 1}, & D \neq 0, \\ 1 \in R, & D = 0. \end{cases}$$

Тоді $a \neq 0$ і $a \in \text{Ann } D$. Тепер, якщо зафіксувати будь-яку послідовність $\{X'_n\}_{n=0}^\infty$ і обрати $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ як довільну послідовність з 0 і a , то отримаємо нескінченно багато розв'язків рівняння (1).

Достатність третього твердження теореми впливає з третього твердження леми 1.

Ми довели достатність кожного з тверджень теореми. Оскільки достатні умови всіх трьох тверджень теореми вичерпують всі можливості і попарно несумісні, то доведення критеріїв завершено. $\square$

Зауваження 3. Формула (20) є частковим випадком формули (21), оскільки якщо $D \in R^\times$, то $\alpha_n = 0$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і відповідно $X_n = X'_n$ ($n \in \mathbb{Z}_+$).

Зауваження 4. Нехай $R \neq \{0\}$ є локальним скінченним кільцем головних ідеалів, $A, B \neq 0$ і j — нільпотентний елемент кільця R , що породжує максимальний ідеал цього кільця. На кільці R уведемо відношення еквівалентності наступним чином: $u \sim v$ ($u, v \in R$), якщо $u = vs$ для деякого $s \in R^\times$. Для будь-якого $u \in R \setminus \{0\}$ існує єдине ціле невід'ємне $\kappa(u)$ таке, що $u \sim j^{\kappa(u)}$ [19, с. 245]. Позначимо $m = \min\{\kappa(A), \kappa(B)\}$. Оскільки R — кільце головних ідеалів, то існує такий елемент $D \in R$, що $(A, B) = (D)$. Пояснимо, що $D \sim j^m$. Справді, нехай $A = j^{\kappa(A)}\tilde{A}$, $B = j^{\kappa(B)}\tilde{B}$, де $\tilde{A}, \tilde{B} \in R^\times$. Тоді

$$(D) = (A, B) = (j^{\kappa(A)}\tilde{A}, j^{\kappa(B)}\tilde{B}) = j^m(j^{\kappa(A)-m}\tilde{A}, j^{\kappa(B)-m}\tilde{B}).$$

Оскільки $\kappa(A) = m$ або $\kappa(B) = m$, то $(j^{\kappa(A)-m}\tilde{A}, j^{\kappa(B)-m}\tilde{B}) = R$ і $(D) = (j^m)$. Тоді, з урахуванням локальності кільця R , маємо $D \sim j^m$. Звідси випливає, що $\text{Ann } D = \text{Ann } j^m = (j^{\text{ind } j - m})$. Тому будь-який елемент $\alpha \in \text{Ann } D$ допускає зображення $\alpha = j^{\text{ind } j - m}\gamma$ при деякому $\gamma \in R$. Отже, якщо $D \notin R^\times$ і $F_n \in (D)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$, то загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд $X_n = X'_n + j^{\text{ind } j - m}\gamma_n$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), в якому $\{\gamma_n\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів кільця R , а послідовність $\{X'_n\}_{n=0}^\infty$ визначено формулою (22), де X'_0 — довільний елемент кільця R у випадку $B' \in R^\times$.

Нагадаємо, що, за теоремою VI.2 [13, с. 95], будь-яке скінченне комутативне кільце $R \neq \{0\}$ з одиницею ізоморфне прямій сумі $\bigoplus_{i=1}^r R_i$ локальних скінченних комутативних кілець $R_i \neq \{0\}$ з одиницею. Позначимо через $\varphi: R_1 \oplus \dots \oplus R_r \rightarrow R$ канонічний ізоморфізм і через $A_i, B_i, F_{i,n}$ канонічні проекції елементів A, B, F_n відповідно (див. розділ 3):

$$A_i = \pi_i(A), \quad B_i = \pi_i(B), \quad F_{i,n} = \pi_i(F_n), \quad i = 1, \dots, r, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (24)$$

Наступна лема встановлює зв'язок між рівністю $(A, B) = (D)$ у кільці R і рівностями $(A_i, B_i) = (D_i)$ у кільцях R_i , $i = 1, \dots, r$.

Лема 5. Нехай $R \neq \{0\}$ — скінченне комутативне кільце з одиницею, $A, B, D \in R$. Для виконання умови $(D) = (A, B)$ необхідно і достатньо існування таких елементів $D_i \in R_i$, що $(D_i) = (A_i, B_i)$, $i = 1, \dots, r$. При цьому $D = \varphi(D_1, \dots, D_r)$ і $D_i = \pi_i(D)$ для кожного $i = 1, \dots, r$.

Доведення. Необхідність. Нехай $(D) = (A, B)$. Зафіксуємо довільне $i \in \{1, \dots, r\}$ і покладемо $D_i = \pi_i(D)$. Зауважимо, що

$$(D_i) = \pi_i(D)R_i = \pi_i(D)\pi_i(R) = \pi_i(DR) = \pi_i((A, B)).$$

З іншого боку, оскільки π_i — сюр'єктивний гомоморфізм, то

$$\begin{aligned}\pi_i((A, B)) &= \pi_i(\{\alpha A + \beta B \mid \alpha, \beta \in R\}) = \\ &= \{\pi_i(\alpha)\pi_i(A) + \pi_i(\beta)\pi_i(B) \mid \alpha, \beta \in R\} = (\pi_i(A), \pi_i(B)) = (A_i, B_i).\end{aligned}$$

Це доводить необхідність.

Достатність. Нехай $(A_i, B_i) = (D_i)$ при всіх $i = 1, \dots, r$.

Оскільки π_i ($i = 1, \dots, r$), φ — сюр'єктивні гомоморфізми, маємо:

$$\begin{aligned}(A, B) &= (\varphi(A_1, \dots, A_r), \varphi(B_1, \dots, B_r)) = \\ &= \{\alpha \varphi(A_1, \dots, A_r) + \beta \varphi(B_1, \dots, B_r) \mid \alpha, \beta \in R\} = \\ &= \{\varphi(\pi_1(\alpha)A_1 + \pi_1(\beta)B_1, \dots, \pi_r(\alpha)A_r + \pi_r(\beta)B_r) \mid \alpha, \beta \in R\} = \\ &= \varphi((A_1, B_1), \dots, (A_r, B_r)) = \varphi((D_1), \dots, (D_r)) = \\ &= \{\varphi(\alpha_1 D_1, \dots, \alpha_r D_r) \mid \alpha_1 \in R_1, \dots, \alpha_r \in R_r\} = \\ &= \{\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \varphi(D_1, \dots, D_r) \mid \alpha_1 \in R_1, \dots, \alpha_r \in R_r\} = (D),\end{aligned}$$

де $D = \varphi(D_1, \dots, D_r)$. Тепер застосування тотожності (5) дає формулу $\pi_i(D) = \pi_i(\varphi(D_1, \dots, D_r)) = D_i$, $i = 1, \dots, r$. Це завершує доведення лемми. $\square$

Оскільки $(D) = (A, B)$, то, за лемою 5, $(A_i, B_i) = (D_i)$, де $D_i = \pi_i(D)$, $i = 1, \dots, r$. Якщо $F_n \in (D)$, то визначимо елементи $A'_i, B'_i, F'_{i,n}$ наступними співвідношеннями, які є аналогами співвідношень (19) для кільця R_i :

$$B_i = B'_i D_i, \quad A_i = A'_i D_i, \quad F_{i,n} = F'_{i,n} D_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (25)$$

Тоді, за лемою 4, у випадку $D_i \neq 0$ принаймні один з елементів A'_i, B'_i є оборотним. Якщо $D_i = 0$, то згідно з зауваженням 2 вважаємо, що $A'_i = F'_{i,n} = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) і $B'_i = 1$ у кільці R_i .

Наступна теорема встановлює критерії розв'язності рівняння (1) над довірливим скінченним кільцем R у випадку $(A, B) = (D)$.

Теорема 5. *Справедливі наступні твердження.*

1. Рівняння (1) має скінченну кількість розв'язків тоді і тільки тоді, коли $D \in R^\times$. При цьому рівняння (1) має $N = \text{card } R^{(1)}$ розв'язків і загальний розв'язок цього рівняння визначається твердженнями 1–3 теореми 3.
2. Рівняння (1) має нескінченно багато розв'язків тоді і тільки тоді, коли $D \notin R^\times$ і $F_n \in (D)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. При цьому загальний розв'язок цього рівняння визначено рівністю

$$X_n = \varphi(X'_{1,n}, \dots, X'_{r,n}) + \alpha_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (26)$$

в якій $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів анулятора $\text{Ann } D$,
а

$$X'_{i,n} = \begin{cases} (B'_i)^{-n} (A'_i)^n X'_{i,0} + \sum_{s=0}^{n-1} (B'_i)^{-s-1} (A'_i)^s F'_{i,n-s-1}, & B'_i \in R_i^\times, \\ - \sum_{s=0}^{\text{ind } B'_i - 1} (A'_i)^{-s-1} (B'_i)^s F'_{i,n+s}, & B'_i \notin R_i^\times, A'_i \in R_i^\times, \end{cases} \quad (27)$$

де $X'_{i,0}$ — довільний елемент кільця R_i у випадку $B'_i \in R_i^\times$, $i = 1, \dots, r$.

3. Рівняння (1) не має розв'язків тоді і тільки тоді, коли $F_n \notin (D)$ при деякому $n \in \mathbb{Z}_+$.

Доведення. Перше твердження теореми безпосередньо випливає з теореми 3.

Доведемо достатність другого твердження теореми.

За теоремою 1, рівняння (1) еквівалентне системі рівнянь

$$B_i X_{i,n+1} = A_i X_{i,n} + F_{i,n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (28)$$

де при кожному $i = 1, \dots, r$ відповідне рівняння розглядається над кільцем R_i відносно послідовності $\{X_{i,n}\}_{n=0}^\infty$. Зафіксуємо $i \in \{1, \dots, r\}$. За лемою 5, $(D_i) = (A_i, B_i)$. Для відповідного рівняння (28) в залежності від оборотності елементу D_i скористаємось першим або другим твердженням теореми 4 з урахуванням зауваження 3. Отримуємо, що загальний розв'язок рівняння (28) має вигляд $X_{i,n} = X'_{i,n} + \alpha_{i,n}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де послідовність $\{X'_{i,n}\}_{n=0}^\infty$ визначено формулою (27), а $\{\alpha_{i,n}\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів анулятора $\text{Ann } D_i$. Тоді, за теоремою 1, загальний розв'язок рівняння (1) має наступний вигляд:

$$X_n = \varphi(X'_{1,n} + \alpha_{1,n}, \dots, X'_{r,n} + \alpha_{r,n}) = \varphi(X'_{1,n}, \dots, X'_{r,n}) + \alpha_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (29)$$

де $\alpha_n = \varphi(\alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{r,n})$. Враховуючи, що, за лемою 5, $D = \varphi(D_1, \dots, D_r)$ і $\alpha_{i,n} \in \text{Ann } D_i$ ($n \in \mathbb{Z}_+, i = 1, \dots, r$), маємо $D\alpha_n = \varphi(D_1\alpha_{1,n}, \dots, D_r\alpha_{r,n}) = \varphi(0, \dots, 0) = 0$, тобто $\alpha_n \in \text{Ann } D$. Таким чином, будь-який розв'язок рівняння (1) має вигляд (26). Тепер нехай $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів анулятора $\text{Ann } D$, а при кожному $i = 1, \dots, r$ послідовність $\{X'_{i,n}\}_{n=0}^\infty$ визначено формулою (27). Покажемо, що послідовність $\{X_n\}_{n=0}^\infty$, яку визначено рівністю (26), є розв'язком рівняння (1). Справді, оскільки $\alpha_n \in \text{Ann } D = \text{Ann } A \cap \text{Ann } B$, то

$$\begin{aligned} BX_{n+1} - AX_n - F_n &= BX'_{n+1} + B\alpha_{n+1} - AX'_n - A\alpha_n - F_n = \\ &= BX'_{n+1} - AX'_n - F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \quad (30)$$

де $X'_n = \varphi(X'_{1,n}, \dots, X'_{r,n})$. Поклавши у формулі (29) всі $\alpha_{i,n} = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+, i = 1, \dots, r$), отримуємо, що послідовність $\{X'_n\}_{n=0}^\infty$ є розв'язком рівняння (1),

а отже, з урахуванням рівності (30), $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ задовольняє рівняння (1). Це доводить достатність другого твердження теореми і формулу (26) загального розв'язку рівняння (1) у цьому випадку.

Достатність третього твердження теореми випливає з третього твердження леми 1.

Ми довели достатність всіх тверджень теореми. Оскільки достатні умови всіх трьох тверджень теореми вичерпують всі можливості і попарно несумісні, то доведення теореми завершено. $\square$

5. Приклади

В цьому розділі розглядаються приклади застосування результатів, отриманих у розділах 3, 4.

Нагадаємо, що через $\mathbb{Z}_m$ позначається кільце лишків за модулем m , елементами якого є класи $[z]_m$ чисел $z \in \mathbb{Z}$.

Приклад 1. Розглянемо рівняння

$$vX_{n+1} = uX_n + F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (31)$$

над кільцем $R = \mathbb{Z}_m[u, v]/(u^2, v^2)$ ($m > 1$). Елементи кільця R мають вигляд $t_0 + t_u u + t_v v + t_{uv} uv$, де $t_k \in \mathbb{Z}_m$ ($k \in \{0, u, v, uv\}$), а $u^2 = v^2 = 0$ в R . Рівняння (31) записується у вигляді (1), де $A = u$, $B = v$, і тому $(A, B) = (u, v) \neq R$. За теоремою 3, рівняння (31) або не має розв'язків, або має нескінченно багато розв'язків. Зобразимо в (31) $X_n = x_{0,n} + x_{u,n}u + x_{v,n}v + x_{uv,n}uv$, $F_n = f_{0,n} + f_{u,n}u + f_{v,n}v + f_{uv,n}uv$, де $x_{k,n}, f_{k,n} \in \mathbb{Z}_m$ ($k \in \{0, u, v, uv\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$). Рівняння (31) переписується у вигляді

$$x_{0,n+1}v + x_{u,n+1}uv = f_{0,n} + x_{0,n}u + x_{v,n}uv + f_{u,n}u + f_{v,n}v + f_{uv,n}uv, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (32)$$

Прирівнюючи в (32) коефіцієнти при u, v, uv і вільні члени, маємо $f_{0,n} = 0$, $x_{0,n+1} = f_{v,n}$, $f_{u,n} = -x_{0,n}$, $x_{u,n+1} - x_{v,n} = f_{uv,n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Таким чином, рівняння (32) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$f_{0,n} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad (33)$$

і

$$f_{v,n} + f_{u,n+1} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (34)$$

При цьому рівняння (31) має нескінченно багато розв'язків і загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$X_0 = -f_{u,0} + x_{u,0}u + x_{v,0}v + x_{uv,0}uv,$$

$$X_n = -f_{u,n} + (x_{v,n-1} + f_{uv,n-1})u + x_{v,n}v + x_{uv,n}uv, \quad n \in \mathbb{N},$$

де $x_{u,0}$ — довільний елемент кільця $\mathbb{Z}_m$, а $\{x_{v,n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{x_{uv,n}\}_{n=0}^{\infty}$ — довільні послідовності елементів кільця $\mathbb{Z}_m$.

Цікаво зауважити, що якщо порушується умова (33), то рівняння (31) не має розв'язків за лемою 1. А якщо виконується умова (33), але порушується умова (34), то рівняння (31) не має розв'язків, хоча $F_n \in (A, B)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. Цей приклад показує, що умова $F_n \in (A, B)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) не є достатньою для існування розв'язку рівняння (1).

Приклад 2. Розглянемо рівняння

$$([4]_6 + v)X_{n+1} = ([3]_6 + [2]_6 u)X_n + [n]_6 u, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad (35)$$

над кільцем $R = \mathbb{Z}_6[u, v]/(u^2, v^2)$. Елементи кільця R мають вигляд $t_0 + t_u u + t_v v + t_{uv} uv$, де $t_k \in \mathbb{Z}_6$ ($k \in \{0, u, v, uv\}$), а $u^2 = v^2 = 0$ в R . Рівняння (35) записується у вигляді (1), де $A = [3]_6 + [2]_6 u$, $B = [4]_6 + v$, $F_n = [n]_6 u$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Розглянемо локальні кільця $R_i = \mathbb{Z}_{m_i}[u, v]/(u^2, v^2)$, де $m_1 = 3$, $m_2 = 2$ [15]. Тоді, за китайською теоремою про остачі, $R \cong R_1 \oplus R_2$ (див. [18, п. 7.6]).

При цьому $A + B = [1]_6 + [2]_6 u + v \in$ оборотним, а отже $(A, B) = R$.

Визначимо $B_i = \pi_i(B)$, $A_i = \pi_i(A)$, $F_{i,n} = \pi_i(F_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ згідно з формулами (24), де для кожного $i = 1, 2$ канонічна проекція $\pi_i: R \rightarrow R_i$ визначається формулою

$$\pi_i([a]_m + [b]_m u + [c]_m v + [d]_m uv) = [a]_{m_i} + [b]_{m_i} u + [c]_{m_i} v + [d]_{m_i} uv \quad (36)$$

для довільних $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Обчислимо множини I_1, I_2 і відповідні їм кільця $R^{(1)}, R^{(2)}$ (див. розділ 3). Маємо $B_1 = [1]_3 + v$, $B_2 = v$, тому $B_2^2 = 0$ і $B_1 \cdot ([1]_3 - v) = [1]_3$. Відповідно, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{2\}$, і тому $R^{(1)} = R_1$, $R^{(2)} = R_2$.

Обчислимо елементи $B^{(j)}, A^{(j)}, F_n^{(j)}$ кілець $R^{(j)}$ відповідно (див. формули (11), (36)), $j = 1, 2$, $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned} B^{(1)} &= B_1 = [1]_3 + v, & A^{(1)} &= A_1 = -u, & F_n^{(1)} &= \pi_1(F_n) = [n]_3 u, \\ B^{(2)} &= B_2 = v, & A^{(2)} &= A_2 = [1]_2, & F_n^{(2)} &= \pi_2(F_n) = [n]_2 u. \end{aligned}$$

Помітимо, що $(B^{(2)})^2 = 0$, $B^{(1)} \cdot ([1]_3 - v) = [1]_3$, а отже $\text{ind } B^{(2)} = 2$, $(B^{(1)})^{-1} = [1]_3 - v$.

За теоремою 3, рівняння (35) має $\text{card } R^{(1)} = 81$ розв'язок. Оскільки $R^{(1)} \neq \{0\}$ і $R^{(2)} \neq \{0\}$, то загальний розв'язок рівняння (35) має вигляд $X_n = \psi(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, 0)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де послідовності $\{X_n^{(1)}\}_{n=0}^\infty, \{X_n^{(2)}\}_{n=0}^\infty$ визначаються формулами (16) і (17) відповідно, а $\psi \in$ ізоморфізмом $R^{(1)} \oplus R^{(2)} \oplus \{0\} \rightarrow R$.

Оскільки $(A^{(1)})^2 = u^2 = 0$, $(B^{(1)})^{-1} = [1]_3 - v$, а $(B^{(1)})^{-2} = [1]_3 + v$, за

формулою (16) маємо

$$X_n^{(1)} = ([1]_3 + v)^{-n} (-u)^n X_0^{(1)} + \sum_{s=0}^{n-1} ([1]_3 + v)^{-s-1} (-u)^s [n-s-1]_3 u =$$

$$= \begin{cases} X_0^{(1)}, & n = 0, \\ (v - [1]_3) u X_0^{(1)}, & n = 1, \\ ([1]_3 - v) [n-1]_3 u, & n \geq 2, \end{cases} \quad (37)$$

де $X_0^{(1)}$ — довільний елемент кільця R_1 .

Враховуючи, що $\text{ind } B^{(2)} = 2$, за формулою (17) маємо

$$X_n^{(2)} = [n]_2 u + [n+1]_2 uv, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (38)$$

Формула

$$X_0^{(1)} = [\rho]_3 + [\mu]_3 u + [\sigma]_3 v + [\theta]_3 uv, \quad \rho, \sigma, \mu, \theta \in \mathbb{Z} \quad (39)$$

описує зображення довільного елемента $X_0^{(1)} \in R_1$.

Підставляючи (39) у (37), отримуємо:

$$X_n^{(1)} = \begin{cases} [\rho]_3 + [\mu]_3 u + [\sigma]_3 v + [\theta]_3 uv, & n = 0, \\ -[\rho]_3 u + [\rho - \sigma]_3 uv, & n = 1, \\ [n-1]_3 (u - uv), & n \geq 2. \end{cases} \quad (40)$$

Ізоморфізм $\psi: R^{(1)} \oplus R^{(2)} \oplus R^{(3)} \rightarrow R$ визначається формулою

$$\psi([t_{0,1}]_3 + [t_{u,1}]_3 u + [t_{v,1}]_3 v + [t_{uv,1}]_3 uv, \\ [t_{0,2}]_2 + [t_{u,2}]_2 u + [t_{v,2}]_2 v + [t_{uv,2}]_2 uv, 0) =$$

$$= \psi_0([t_{0,1}]_3, [t_{0,2}]_2) + \psi_0([t_{u,1}]_3, [t_{u,2}]_2) u + \psi_0([t_{v,1}]_3, [t_{v,2}]_2) v +$$

$$+ \psi_0([t_{uv,1}]_3, [t_{uv,2}]_2) uv, \quad t_{k,i} \in \mathbb{Z}, \quad k \in \{0, u, v, uv\}, \quad i = 1, 2, \quad (41)$$

де ізоморфізм $\psi_0: \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_6$ будується наступним чином:

$$\psi_0([z_1]_3, [z_2]_2) = [4z_1 + 3z_2]_6, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \quad (42)$$

(див. [18, с. 267, вправа 5(b)]). Користуючись формулами (38), (40)–(42), одержимо загальний розв'язок рівняння (35):

$$X_0 = [4\rho]_6 + [4\mu]_6 u + [4\sigma]_6 v + [4\theta + 3]_6 uv,$$

$$X_1 = [-4\rho + 3]_6 u + [4\rho - 4\sigma]_6 uv,$$

$$X_n = [n+2]_6 u + [-n+1]_6 uv, \quad n \geq 2,$$

де $\rho, \sigma, \mu, \theta$ — довільні цілі числа.

Приклад 3. Розглянемо рівняння

$$([20]_{360} + [180]_{360} v)X_{n+1} = ([210]_{360} + [280]_{360} u)X_n + [20n]_{360} u, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (43)$$

над кільцем $R = \mathbb{Z}_{360}[u, v]/(u^2, v^2, uv)$. Елементи кільця R мають вигляд $t_0 + t_u u + t_v v$, де $t_k \in \mathbb{Z}_{360}$ ($k \in \{0, u, v\}$), а $u^2 = v^2 = uv = 0$ в R . Рівняння (43) записується у вигляді (1), де $B = [20]_{360} + [180]_{360} v$, $A = [210]_{360} + [280]_{360} u$ і $F_n = [20n]_{360} u$, причому A, B — необоротні елементи кільця R . Розглянемо локальні кільця $R_i = \mathbb{Z}_{m_i}[u, v]/(u^2, v^2, uv)$, де $m_1 = 8$, $m_2 = 9$, $m_3 = 5$ [15]. Тоді, за китайською теоремою про остачі, $R \cong R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$ (див. [18, п. 7.6]).

Канонічні проекції $\pi_i: R \rightarrow R_i$ тут визначаються формулами

$$\pi_i([a]_{360} + [b]_{360} u + [c]_{360} v) = [a]_{m_i} + [b]_{m_i} u + [c]_{m_i} v, \quad i = 1, 2, 3, \quad (44)$$

для довільних $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Ізоморфізм $\varphi: R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \rightarrow R$ визначається формулою

$$\begin{aligned} \varphi([t_{0,1}]_8 + [t_{u,1}]_8 u + [t_{v,1}]_8 v, [t_{0,2}]_9 + [t_{u,2}]_9 u + [t_{v,2}]_9 v, \\ [t_{0,3}]_5 + [t_{u,3}]_5 u + [t_{v,3}]_5 v) = \psi_0([t_{0,1}]_8, [t_{0,2}]_9, [t_{0,3}]_5) + \\ + \psi_0([t_{u,1}]_8, [t_{u,2}]_9, [t_{u,3}]_5)u + \\ + \psi_0([t_{v,1}]_8, [t_{v,2}]_9, [t_{v,3}]_5)v, \quad t_{k,i} \in \mathbb{Z}, \quad k \in \{0, u, v\}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (45)$$

де ізоморфізм $\psi_0: \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_{360}$ будується наступним чином:

$$\psi_0([z_1]_8, [z_2]_9, [z_3]_5) = [225z_1 + 280z_2 + 216z_3]_{360}, \quad z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z} \quad (46)$$

(див. також [18, с. 267, вправа 5(b)]).

Обчислимо елементи $A_i, B_i, F_{i,n}$, $i = 1, 2, 3$, $n \in \mathbb{Z}_+$ (див. формули (24), (44)):

$$\begin{aligned} B_1 = [4]_8 + [4]_8 v, \quad B_2 = [2]_9, \quad B_3 = [0]_5, \\ A_1 = [2]_8, \quad A_2 = [3]_9 + [1]_9 u, \quad A_3 = [0]_5, \\ F_{1,n} = [4n]_8 u, \quad F_{2,n} = [2n]_9 u, \quad F_{3,n} = [0]_5. \end{aligned}$$

Зауважимо, що $(A_1, B_1) = ([2]_8)$, $(A_2, B_2) = ([1]_9)$, $(A_3, B_3) = ([0]_5)$. Відповідно покладемо $D_1 = [2]_8$, $D_2 = [1]_9$, $D_3 = [0]_5$. Тоді, за лемою 5, $(A, B) = (D)$, де $D = \varphi(D_1, D_2, D_3) = \psi_0(D_1, D_2, D_3) = [10]_{360}$ (див. формули (45), (46)).

Оскільки $D \notin R^\times$ і $F_n = [20n]_{360} u \in (D)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$, то, за другим твердженням теореми 5, рівняння (43) має нескінченно багато розв'язків. Більш того, загальний розв'язок рівняння (43) має вигляд (26), де $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів анулятора $\text{Ann } D$, а послідовності $\{X'_{i,n}\}_{n=0}^\infty$ ($i = 1, 2, 3$) визначаються формулами (27), причому елементи

$$\begin{aligned} B'_1 = [2]_8 + [2]_8 v, \quad B'_2 = B_2 = [2]_9, \quad B'_3 = [1]_5, \\ A'_1 = [1]_8, \quad A'_2 = A_2 = [3]_9 + [1]_9 u, \quad A'_3 = [0]_5, \\ F'_{1,n} = [2n]_8 u, \quad F'_{2,n} = F_{2,n} = [2n]_9 u, \quad F'_{3,n} = [0]_5, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

задовольняють рівності (25).

Обчислимо елементи послідовності $\{X'_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$. Оскільки $A'_1 \in R_1^\times$, $(B'_1)^3 = [0]_8$ і $(B'_1)^2 F'_{1,n} = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), то, за другою формулою (27),

$$X'_{1,n} = - \sum_{s=0}^2 [1]_8^{-s-1} ([2]_8 + [2]_8 v)^s [2(n+s)]_8 u = [2n+4]_8 u, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (47)$$

Оскільки $(B'_2)^{-1} = [5]_9$, то послідовність $\{X_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ визначається першою формулою (27). Тепер, враховуючи рівність $(A'_2)^3 = 0$, приходимо до формули

$$\begin{aligned} X'_{2,n} &= ([2]_9)^{-n} ([3]_9 + [1]_9 u)^n X'_{2,0} + \\ &+ \sum_{s=0}^{n-1} ([2]_9)^{-s-1} ([3]_9 + [1]_9 u)^s [2(n-s-1)]_9 u = \\ &= \begin{cases} X'_{2,0}, & n = 0, \\ ([6]_9 + [5]_9 u) X'_{2,0}, & n = 1, \\ [6]_9 X'_{2,0} u + [1]_9 u, & n = 2, \\ [n-1]_9 u + [n-2]_9 [6]_9 u, & n \geq 3, \end{cases} \quad (48) \end{aligned}$$

де $X'_{2,0}$ — довільний елемент кільця R_2 .

Також маємо

$$X'_{3,n} = \begin{cases} X'_{3,0}, & n = 0, \\ [0]_5, & n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (49)$$

де $X'_{3,0}$ — довільний елемент кільця R_3 .

Формули

$$X'_{2,0} = [\rho_2]_9 + [\mu_2]_9 u + [\sigma_2]_9 v, \quad \rho_2, \sigma_2, \mu_2 \in \mathbb{Z}, \quad (50)$$

$$X'_{3,0} = [\rho_3]_5 + [\mu_3]_5 u + [\sigma_3]_5 v, \quad \rho_3, \sigma_3, \mu_3 \in \mathbb{Z} \quad (51)$$

описують зображення елементів $X'_{2,0} \in R_2$ та $X'_{3,0} \in R_3$ відповідно.

Підставляючи (50) у (48) та (51) у (49), отримуємо:

$$X'_{2,n} = \begin{cases} [\rho_2]_9 + [\mu_2]_9 u + [\sigma_2]_9 v, & n = 0, \\ [6\rho_2]_9 + [5\rho_2 + 6\mu_2]_9 u + [6\sigma_2]_9 v, & n = 1, \\ [6\rho_2 + 1]_9 u, & n = 2, \\ [7n + 5]_9 u, & n \geq 3, \end{cases} \quad (52)$$

$$X'_{3,n} = \begin{cases} [\rho_3]_5 + [\mu_3]_5 u + [\sigma_3]_5 v, & n = 0, \\ [0]_5, & n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (53)$$

Тепер знайдемо анулятор $\text{Ann } D$. Оскільки $D = [10]_{360}$, то для $f = [f_0]_{360} + [f_u]_{360} u + [f_v]_{360} v \in R$ ($f_0, f_u, f_v \in \mathbb{Z}$) рівність $Df = 0$ рівносильна одночасному виконанню рівностей $[10f_0]_{360} = [10f_u]_{360} = [10f_v]_{360} = [0]_{360}$,

що, в свою чергу, виконано тоді і тільки тоді, коли $f_0, f_u, f_v \in [36]_{360} \mathbb{Z}$. Останнє означає, що $f \in [36]_{360} R$, тобто $\text{Ann } D = ([36]_{360})$.

Підставляючи (47), (52), (53) в (26) і враховуючи зображення ізоморфізмів (45), (46), одержимо загальний розв'язок рівняння (43):

$$X_0 = [280\rho_2]_{360} + [280\mu_2]_{360} u + [280\sigma_2]_{360} v + \alpha_0,$$

$$X_1 = [240\rho_2]_{360} + [270 + 320\rho_2 + 240\mu_2]_{360} u + [240\sigma_2]_{360} v + \alpha_1,$$

$$X_2 = [240\rho_2 + 280]_{360} u + \alpha_2,$$

$$X_n = [250n + 140]_{360} u + \alpha_n, \quad n \geq 3,$$

де ρ_2, σ_2, μ_2 — довільні цілі числа, а $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів ідеалу $[36]_{360} R$.

6. Висновок

У даній статті досліджено неоднорідне неявне лінійне різницеве рівняння першого порядку над скінченним комутативним кільцем з одиницею. Встановлено необхідні і достатні умови існування скінченного числа розв'язків відповідного однорідного рівняння над цим кільцем. Встановлено необхідні і достатні умови скінченності числа розв'язків неоднорідного рівняння, а за умови існування розв'язку визначено кількість розв'язків та загальний вигляд розв'язку. У випадку, коли ідеал, породжений коефіцієнтами рівняння, є головним, встановлено необхідні і достатні умови розв'язності неоднорідного рівняння, а за умови існування розв'язку визначено кількість розв'язків та загальний вигляд розв'язку. Наведено приклади, що демонструють використання одержаних теоретичних результатів. Планується в подальшому дослідити розв'язність початкової задачі для розглянутого неявного лінійного різницевого рівняння першого порядку, а також дослідити різницеве рівняння вищого порядку над скінченними комутативними кільцями з одиницею.

Подяка. Роботу виконано за часткової підтримки Фонду Ахієзера (Харків).

Конфлікт інтересів: Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

Історія статті: отримана: 7 квітня 2026; останній варіант: 10 травня 2026;
прийнята: 20 травня 2026. Оприлюднено 31 травня 2026.

REFERENCES

1. S.L. Campbell. Singular system of differential equations I. 1980, V. **40**. San Francisco, London, Melbourne: Pitman Publishing, Research Notes in Mathematics.

2. M.F. Bondarenko, A.G. Rutkas. On a class of implicit difference equations, *Dopovidi NANU of Ukraine*, — 1998. — No. 7, — P. 11–15.
3. M. F. Bondarenko, L. A. Vlasenko, A. G. Rutkas. Discrete Optimal Control of Descriptor Systems with Variable Parameters. *Journal of Automation and Information Sciences*, — 2011. — V. **43**. — No. 5. — P. 1–9. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v43.i5.10>
4. M. Kostić. Almost Periodic Type Solutions, 2025. Berlin, Boston, Walter de Gruyter, *Studies in Mathematics*, V. **101**. <https://doi.org/10.1515/9783111689746-201>
5. S.L. Gefter, A.L. Piven. Implicit Linear Nonhomogeneous Difference Equation in Banach and Locally Convex Spaces. *J. Math. Physics, Analysis, Geometry*, — 2019. — V. **15**. — No. 3. — P. 336–353. <https://doi.org/10.15407/mag15.03.336>
6. V.V. Martseniuk, S.L. Gefter, A.L. Piven'. Uniqueness Criterion and Cramer's Rule for Implicit Higher Order Linear Difference Equations Over $\mathbb{Z}$, *Progress on Difference Equations and Discrete Dynamical Systems* (eds. S. Baignent, M. Bohner, S. Elaydi), Springer, — 2020. — V. **341**. — P. 311–325. https://doi.org/10.1007/978-3-030-60107-2_16
7. S.L. Gefter, A.L. Piven'. Implicit Linear Nonhomogeneous Difference Equation over $\mathbb{Z}$ with a Random Right-Hand Side, *J. Math. Physics, Analysis, Geometry*, — 2022. — V. **18**. — No. 1. — P. 105–117. <https://doi.org/10.15407/mag18.01.105>
8. A.B. Goncharuk. Implicit linear difference equations over a non-Archimedean ring. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, — 2021. — V. **93**. — P. 18–33. <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2021-93-03>
9. S. Gefter, A. Goncharuk, A. Piven'. Implicit Linear First Order Difference Equations Over Commutative Rings. In: Elaydi, S., Kulenovic, M.R.S., Kalabusic, S. (eds) *Advances in Discrete Dynamical Systems, Difference Equations and Applications. ICDEA 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, — 2023. — V. **416**. — P. 199–216. https://doi.org/10.1007/978-3-031-25225-9_10
10. V.A. Gerasimov, S.L. Gefter, A.B. Goncharuk. Application of the p -adic Topology on $\mathbb{Z}$ to the Problem of Finding Solutions in Integers of an Implicit Linear Difference Equation, *J. Math. Sci.*, — 2018. — V. **235**. — No. 3. — P. 256–261. <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4072-x>
11. M.V. Heneralov, A.L. Piven'. Implicit linear difference equation over residue class rings, *Algebra and Discrete Mathematics*, — 2024. — V. **37**. — No. 1. — P. 85–105. <https://doi.org/10.12958/adm2110>.

12. M.V. Heneralov. Implicit linear difference equations over finite commutative rings of order p^2 with identity, Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, — 2025. — V. **101**. — P. 21–30 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2025-101-02>
13. B.R. Macdonald. Finite commutative rings with identity. New York: M. Dekker, Inc., — 1974.
14. S. Alabiad, Y. Alkhamees. On classification of finite commutative chain rings, AIMS Mathematics, — 2021. — V. **7**. — No. 2. — P. 1742–1757. DOI: <https://doi.org/10.3934/math.2022100>
15. A. Nowicki. Tables of finite commutative local rings of small orders, 2018. UMK, Torun. Available at: <https://www.researchgate.net/publication/328319576>.
16. M. Axtell, J. Stickles, W. Trampbach. Zero-divisor ideals and realizable zero-divisor graphs, Involve, — 2009, — V. **2**, — No. 1, P. 17–27. <https://doi.org/10.2140/involve.2009.2.17>
17. S. Elaydi. An Introduction to Difference Equations. New York: Springer, — 2005. <https://doi.org/10.1007/0-387-27602-5>
18. D.S. Dummit, R.M. Foote. Abstract algebra. Third edition. John Wiley & Sons, Inc., — 2004.
19. O. Zariski, P. Samuel. Commutative algebra. D. van Nostrand, Princeton, — 1958. — V. **1**. <https://doi.org/10.2307/3611016>

First-order implicit linear difference equation over finite commutative rings with identity

M. V. Heneralov¹, A. L. Piven²

¹*Department of Fundamental Mathematics
V. N. Karazin Kharkiv National University
4 Svobody sq., Kharkiv, 61022, Ukraine*

²*Department of Applied Mathematics
V. N. Karazin Kharkiv National University
4 Svobody sq., Kharkiv, 61022, Ukraine*

The paper studies an implicit first-order linear difference equation $BX_{n+1} = AX_n + F_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ over a finite commutative ring R with identity, that is, an equation with a noninvertible element B of the ring R . In contrast to the classical (explicit) linear difference equation, an implicit linear difference equation over the finite ring R may have no solutions, and may also have infinitely many solutions. Since any finite commutative ring

with identity is isomorphic to a finite direct sum of local commutative rings with identity, the equation decomposes into a system of equations over local finite commutative rings with identity. It is shown that the condition that the ideal (A, B) generated by the elements $A, B \in R$ coincides with R is necessary and sufficient for the existence of a finite number of solutions of this equation; the number of solutions in the case of their existence is counted and a formula for the general solution is provided. The condition $(A, B) \neq R$ is a necessary and sufficient condition for the existence of an infinite number of solutions of the corresponding homogeneous equation $BX_{n+1} = AX_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. It is also established that in the case $(A, B) \neq R$ the condition $F_n \in (A, B)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ is necessary for the solvability of the nonhomogeneous implicit linear difference equation, but it is not sufficient, as examples show. Under the additional restriction that (A, B) is a proper principal ideal of the ring R , this condition is also sufficient for the existence of a solution of the considered nonhomogeneous equation; in this situation the equation has infinitely many solutions. Under the assumption that (A, B) is a principal ideal, first a criterion for the existence of a solution is proved in the case of a local finite commutative ring with identity, and then in the case of an arbitrary finite commutative ring with identity. As in Fredholm theory, it is shown that if the corresponding homogeneous equation has only the trivial solution, then the studied nonhomogeneous equation has a unique solution. The work of the proved theorems is demonstrated by concrete examples.

Keywords: implicit linear difference equation; finite ring; local ring; ideal.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Article history: Received: 7 April 2026; Final form: 10 May 2026.

Accepted: 20 May 2026. Published 31 May 2026.

How to cite this article:

M. V. Heneralov, A. L. Piven', First-order implicit linear difference equation over finite commutative rings with identity, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 103, 2026, p. 90–114 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2026-103-05>