

О. А. Макаров

доцент, кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри математичного моделювання та аналізу даних
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
makarovifamily07@gmail.com  <http://orcid.org/0000-0002-9050-4987>

І. Г. Ніколенко

кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри математичного моделювання та аналізу даних
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
iryna.nikolenko@karazin.ua  <http://orcid.org/0000-0002-2904-6761>

Коректні крайові задачі з інтегральною умовою в напівпросторі для рівнянь у частинних похідних

Як відомо, задача Коші некоректна для диференціальних рівнянь у частинних похідних зі сталими коефіцієнтами, які не є коректними за Петровським.

У цій роботі пропонується інтегральна умова, в якій отримана крайова задача стає коректною в просторі Л. Шварца, а також у просторах функцій **степеневого** зростання за просторовими змінними. Наведена інтегральна умова є інтегралом по півосі з експоненційною вагою, що забезпечує збіжність даного інтеграла.

Якщо розглядати цей інтеграл як перетворення Лапласа від функції $\exp(-t^2/2)$, то можна отримати його асимптотику, яка дозволяє оцінити **розв'язувальну функцію**. Дана оцінка дозволяє довести теорему про коректність отриманої крайової задачі в просторі Л. Шварца, а також у шкалі функцій кінцевої гладкості степеневого зростання.

Потім розглядається задача для неоднорідного диференціального рівняння, у якого права частина за просторовими змінними належить простору Л. Шварца, а за часовою змінною — фінітна. Для отриманої задачі знаходиться функція Гріна, що оцінюється зверху. За допомогою цієї оцінки доводиться теорема про коректність даної задачі в просторі Л. Шварца й у спряженому просторі.

Наведено приклади некоректних за Петровським рівнянь та вказано конкретні інтегральні умови, за яких одержувані задачі будуть коректними в просторі Л.Шварца.

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2}.$$

Для даного рівняння не виконані умови за Петровським, оскільки поліном $P(s_1, s_2) = -s_1^2 + s_2^2$ необмежений. Але якщо додати умову

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) u(x_1, x_2, t) dt = \varphi(x_1, x_2),$$

то така задача буде коректною в просторі Л. Шварца, а також у шкалі банахових просторів.

Ключові слова: диференціальні рівняння у частинних похідних; інтегральні умови; псевдодиференціальний оператор; перетворення Фур'є; простір Л. Шварца.

2020 Mathematics Subject Classification: 35C10, 93B28.

Вступ

Як відомо [1], задача Коші некоректна для диференціальних рівнянь у частинних похідних зі сталими коефіцієнтами, які не є коректними за Петровським.

У цій роботі пропонується інтегральна умова для еволюційного диференціального рівняння в частинних похідних, в якій отримана крайова задача стає коректною в просторі Л. Шварца, а також у просторах функцій **степеневого** зростання за просторовими змінними. Наведена інтегральна умова є інтегралом по півосі з експоненційною вагою, що забезпечує збіжність даного інтеграла.

Подібні інтегральні умови зустрічалися раніше в крайових задачах на кінцевому відрізку, наприклад, у роботах [2, 3, 4].

1. Постановка задачі

Розглянемо наступну крайову задачу:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} B\left(t, \frac{\partial}{i\partial x}\right) u(x, t) dt = \varphi(x), \quad (2)$$

де $P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)$ — диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами, $B\left(t, \frac{\partial}{i\partial x}\right)$ — псевдодиференціальний оператор із символом $\tilde{B}(t, s)$, який належить простору $C_{-\infty}^{\infty} = \bigcap_s \bigcup_l C_l^s$ для будь-яких $t \geq 0$.

Означення 1. Задача (1)–(2) називається коректною в просторі Л. Шварца $S = \bigcap_{s,l} C_l^s$, якщо для будь-якої функції $\varphi(x) \in S$ існує єдиний розв'язок

$u(x, t) \in S$ для будь-яких $t \geq 0$, і розв'язувальний оператор $T : \varphi \rightarrow u$ є неперервним у топологічних просторах S для всіх $t \geq 0$.

2. Крайова задача для однорідного рівняння

Теорема 1. Для будь-якого рівняння (1) крайова задача з умовою (2), де

$$\tilde{B}(t, s) = \exp \left(-\frac{t^2}{2} - it \cdot \operatorname{Im} P(s) \right),$$

коректна в просторі S .

Зауваження. Вигляд функції $\tilde{B}(s, t)$ обумовлений вимогами до збіжності інтеграла у рівнянні (2) та існування розв'язку крайової задачі.

Доведення. Застосуємо перетворення Фур'є за просторовими змінними. Тоді задача (1) перейде в задачу

$$\frac{\partial \tilde{u}(s, t)}{\partial t} = P(s) \tilde{u}(s, t), \quad (3)$$

$$\int_0^\infty \tilde{B}(t, s) \tilde{u}(s, t) dt = \tilde{\varphi}(s). \quad (4)$$

Оскільки розв'язок рівняння (3) має загальний вигляд $\tilde{u}(s, t) = \exp(tP(s)) \psi(s)$ і зростає за t не швидше ніж експонента, то інтеграл $\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt$ збігається.

Підставляючи розв'язок $\tilde{u}(s, t)$ до умови (4), отримаємо

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt \cdot \psi(s) = \tilde{\varphi}(s).$$

Отже,

$$\psi(s) = \left(\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt \right)^{-1} \tilde{\varphi}(s).$$

Оцінемо зростання функції $\Delta(s) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt$. Цей інтеграл можна розглядати як перетворення Лапласа від функції $\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ при $z = \operatorname{Re} P(s)$. Тому (див. [5])

$$|\Delta(s)^{-1}| \leq C (1 + |\operatorname{Re} P(s)|) \exp\left(-\frac{1}{2}(\operatorname{Re} P(s))^2\right).$$

Тоді розв'язувальна функція $Q(s, t) = \exp tP(s) \cdot \Delta^{-1}(s)$ задовольняє оцінку

$$|Q(s, t)| \leq C(1 + |\operatorname{Re} P(s)|) \exp \left(t \operatorname{Re} P(s) - \frac{1}{2} (\operatorname{Re} P(s))^2 \right) \leq \\ \leq C(1 + |\operatorname{Re} P(s)|) e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Тобто для кожного фіксованого значення t вона належить простору $C_{-\infty}^{\infty}$, а тому є мультиплікатором у просторі S .

Отже, для фіксованого t функція $\tilde{u}(s, t) = Q(s, t)\tilde{\varphi}(s) \in S$. Розв'язок $u(x, t) = G(x, t) \star \varphi(x)$ також належить простору S , де $G(x, t) = F_s^{-1}Q(s, t)$ є згортувачем у просторі S (див. [1]).

Теорема доведена.

Зауваження. Оскільки оператор згортки $u(x, t) = G(x, t) \star \varphi(x)$ продовжується до неперервного оператора у спряженому просторі S' , то дана крайова задача також коректна в просторі S' , а тому коректно розв'язна з простору $C_{l_1}^{s_1}$ в простір $C_{l_2}^{s_2}$ для будь-яких досить великих s_1 та l_1 і деяких s_2 та l_2 (див. [1]).

Розглянемо наступні приклади.

Приклад 1. Дано рівняння

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c = a + bi \in \mathbb{C}.$$

Оскільки $\operatorname{Im} P(s) = as$, то при $\tilde{B}(s, t) = \exp \left(-\frac{t^2}{2} - iast \right)$ крайова умова (2) має вигляд

$$\int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) u(x - at, t) dt = \varphi(x).$$

Згідно з теоремою (1) дана крайова задача коректна в просторі S і в просторі S' .

Приклад 2. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2}.$$

Поліном $P(s_1, s_2) = -s_1^2 + s_2^2$ є дійсним та необмеженим, тобто задане рівняння не є коректним за Петровським.

Але якщо додати умову

$$\int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) u(x, t) dt = \varphi(x),$$

то дана крайова задача буде коректною в просторі S , а також у просторі S' .

3. Крайова задача для неоднорідного рівняння

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P \left(\frac{\partial}{i \partial x} \right) u(x, t) + f(x, t) \quad (5)$$

і однорідну крайову умову

$$\int_0^{\infty} B \left(t, \frac{\partial}{i \partial x} \right) u(x, t) dt = 0. \quad (6)$$

Будемо розглядати функції $f(x, t)$, які належать простору S для всіх $t \geq 0$ та задовольняють умову $f(x, t) = 0$, $t \geq T$.

Як і раніше будемо розглядати $\tilde{B}(t, s) = \exp \left(-\frac{t^2}{2} - it \operatorname{Im} P(s) \right)$. Застосуємо до рівняння (5) перетворення Фур'є за просторовими змінними та розглянемо крайову задачу

$$\frac{\partial \tilde{u}(s, t)}{\partial t} = P(s) \tilde{u}(s, t) + \tilde{f}(s, t), \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{t^2}{2} - it \operatorname{Im} P(s) \right) \tilde{u}(s, t) dt = 0 \quad (8)$$

Знайдемо для цієї задачі функцію Гріна $G(s, t, \tau)$, яка має задовольняти умови

- 1) $\frac{\partial \tilde{G}(s, t, \tau)}{\partial t} = P(s) \tilde{G}(s, t, \tau), \quad t \neq \tau,$
- 2) $\int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{t^2}{2} - it \operatorname{Im} P(s) \right) \tilde{G}(s, t, \tau) dt = 0,$
- 3) $G(s, \tau + 0, \tau) - G(s, \tau - 0, \tau) = 1.$

Перевіримо, що функція Гріна має вигляд

$$G(s, t, \tau) = \begin{cases} \exp(t - \tau) P(s) \cdot \int_0^{\tau} \exp \left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s) \right) dt \cdot \Delta^{-1}(s), & t \geq \tau, \\ -\exp(t - \tau) P(s) \cdot \int_{\tau}^{\infty} \exp \left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s) \right) dt \cdot \Delta^{-1}(s), & t < \tau, \end{cases}$$

$$\text{де } \Delta(s) = \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s) \right) dt.$$

Умова 1) виконана.

Перевіримо виконання умови **2**).

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2} - it \operatorname{Im} P(s)\right) G(s, t, \tau) dt = \\
 & = - \int_0^{\tau} \exp\left(-\frac{t^2}{2} - it \operatorname{Im} P(s) + (t - \tau)P(s)\right) dt \cdot \\
 & \cdot \int_{\tau}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt \cdot \Delta^{-1}(s) + \\
 & + \int_{\tau}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + it \operatorname{Im} P(s) + (t - \tau)P(s)\right) dt \cdot \\
 & \cdot \int_0^{\tau} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt \cdot \Delta^{-1}(s) = \\
 & = \left(- \int_0^{\tau} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt \cdot \int_{\tau}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt + \right. \\
 & + \int_{\tau}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt \cdot \\
 & \cdot \left. \int_0^{\tau} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt\right) \cdot \exp(-\tau P(s)) \cdot \Delta^{-1}(s) = 0.
 \end{aligned}$$

Отже, умова **2**) також виконана.

Перевіримо виконання умови **3**).

$$\begin{aligned}
 & G(s, \tau + 0, \tau) - G(s, \tau - 0, \tau) = \\
 & = \left(\int_0^{\tau} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt + \int_{\tau}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + t \operatorname{Re} P(s)\right) dt \right) \cdot \Delta^{-1}(s) = 1.
 \end{aligned}$$

Таким чином, умова **3**) також виконана.

Оцінимо функцію Гріна.

При $t \geq \tau$ та $\operatorname{Re} P(s) \geq 0$ отримаємо

$$\begin{aligned}
 |G(s, t, \tau)| & \leq \exp((t - \tau) |\operatorname{Re} P(s)|) \cdot \exp(\tau |\operatorname{Re} P(s)|) \cdot \\
 & \cdot C(1 + |\operatorname{Re} P(s)|) \exp\left(-\frac{1}{2} |\operatorname{Re} P(s)|^2\right) \leq \\
 & \leq C(1 + |\operatorname{Re} P(s)|) \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).
 \end{aligned}$$

$$\text{Для } \operatorname{Re} P(s) < 0 \text{ маємо } |G(s, t, \tau)| \leq C(1 + |\operatorname{Re} P(s)|) \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Якщо $t < \tau$ та $\operatorname{Re} P(s) \geq 0$, то $|G(s, t, \tau)| \leq 1$.

А для $\operatorname{Re} P(s) < 0$ маємо

$$|G(s, t, \tau)| \leq \exp(t \operatorname{Re} P(s)) \cdot \Delta^{-1}(s) \leq C(1 + |\operatorname{Re} P(s)|) e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Тоді функція Гріна задовольняє оцінці

$$|G(s, t, \tau)| \leq C(1 + |\operatorname{Re} P(s)|) e^{\frac{t^2}{2}},$$

тобто вона належить простору $C_{-\infty}^{\infty}$ для будь-яких $t \geq 0$.

Розв'язок задачі (7)–(8) знаходиться за формулою

$$\tilde{u}(s, t) = \int_0^{\infty} G(s, t, \tau) \tilde{f}(s, \tau) d\tau = \int_0^T G(s, t, \tau) \tilde{f}(s, \tau) d\tau$$

і належить простору S для будь-яких $t \geq 0$.

Таким чином доведена наступна теорема.

Теорема 2. *Крайова задача (5)–(6) з функцією*

$$\tilde{B}(s, t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2} - it \cdot \operatorname{Im} P(s)\right)$$

з додатковою умовою $f(x, t) = 0$ при $t \geq T$ коректна у просторі S .

Зауваження. Оскільки $G(s, t, \tau) \in C_{-\infty}^{\infty} \forall t, \tau \geq 0$, то оператор згортки з $F_s^{-1}G(s, t, \tau)$ продовжується за неперервністю на простір S' . Тому задача (5)–(6) коректна у просторі S' .

Приклад 3. Задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} + f(x_1, x_2, t) \\ \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) u(x_1, x_2, t) dt &= 0 \end{aligned}$$

коректна у просторі S при $f(x_1, x_2, t) = 0$ для $t \geq T$.

Висновок. У цій роботі показано, що для будь-якого диференціального рівняння в частинних похідних зі сталими коефіцієнтами вигляду (1) існує інтегральна умова вигляду (2), для якої крайова задача (1)–(2) коректна у просторах S та S' .

Аналогічний факт є справедливим і для неоднорідного рівняння вигляду (3).

Конфлікт інтересів: Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

Історія статті: отримана: 1 лютого 2026; останній варіант: 10 травня 2026;
прийнята: 15 травня 2026. Оприлюднено 31 травня 2026.

REFERENCES

1. L. Hörmander. The Analysis of linear partial differential operators. II. Differential operators with constant coefficients. – Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York Tokyo. – 1983. – 455 p.
2. L. V. Fardigola, Test for propriety in a layer of a boundary problem with integral condition, Ukr. Math. Journ., 42 (1990), no 11, P.-1388–1394.
3. A. A. Makarov., D. A. Levkin. The boundary-value problem in the layer for evolution pseudodifferential equations with integral condition, Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University, Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics” Vol. 87, 2018, P.- 61–68. <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2018-87-05>
4. V. S. Ilkiv, B. B. Pakholok. Nonlocal boundary value problem with integral conditions for hyperbolic systems of equations. / Bulletin of the National University "Lviv Polytechnic" Physical and Mathematical Sciences, No. 871, 2017, P.- 70-76. <https://ena.lpnu.ua/handle/ntb/42779>
5. Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplace-transformation und der Z-transformation. / von Gustav Doetsch ord. Professor an der Universitat Freiburg i. B. mit Einem Tabellenanhang von Rudolf Herschel. R. Oldenbourg, Munchen, Wien, 1967.

Well-posed boundary value problems with an integral condition in half-space for partial differential equations

A. A. Makarov, I. G. Nikolenko

*Department of Mathematical Modeling and Data Analysis
Educational and Scientific Institute of Computer Science
and Artificial Intelligence*

*V. N. Karazin Kharkiv National University
sq. Svobody, 6, Kharkiv, 61022, Ukraine*

It is well known that the Cauchy problem is ill posed for partial differential equations with constant coefficients if they do not satisfy the Petrovsky well-posedness condition.

In this work, an integral condition is proposed under which the resulting boundary value problem becomes well-posed in the Schwartz space, as well as in spaces of functions with polynomial growth in spatial variables. The presented integral condition is an integral over a semi-axis with an exponential weight, which ensures the convergence of this integral.

By considering this integral as the Laplace transform of the function $\exp(-t^2/2)$, one can obtain its asymptotics, which allow to estimate the resolving function. This estimate makes it possible to prove a theorem on the well-posedness of the resulting boundary value problem in the Schwartz space, as well as in a scale of functions of finite smoothness with polynomial growth.

Furthermore, the problem is considered for an inhomogeneous differential equation where the right-hand side belongs to the Schwartz space in the spatial variables and is compactly supported in the time variable. For the resulting problem, a Green's function is found and estimated from above. Using this estimate, a theorem on the well-posedness of this problem is proved in the Schwartz space and its dual space.

Examples of equations that are ill posed in the sense of Petrovsky are provided, and specific integral conditions are indicated under which the resulting problems will be well-posed in the Schwartz space.

Examples of Petrovsky-incorrect equations are given and specific integral conditions are indicated under which the resulting problems will be correct in the L. Schwartz space. Consider the equation

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2}.$$

For this equation, the Petrovsky conditions are not satisfied, since the polynomial $P(s_1, s_2) = -s_1^2 + s_2^2$ is unbounded. But if we add the condition

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) u(x_1, x_2, t) dt = \varphi(x_1, x_2),$$

then which the boundary value problem becomes well-posed in the L. Schwartz space, as well as in the scale of Banach spaces.

Keywords: partial differential equations; integral conditions; pseudodifferential operator; Fourier transform; L. Schwartz space.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Article history: Received: 1 February 2026; Final form: 10 May 2026

Accepted: 20 May 2026. Published 31 May 2026.

How to cite this article:

O.A. Makarov, I. G. Nikolenko, Well-posed boundary value problems with an integral condition in half-space for partial differential equations, *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 103, 2026, p. 60–68, (in Ukrainian). <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2026-103-03>