

**Д. Д. Селютін**

доктор філософії

викладач кафедри фундаментальної математики

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

майдан Свободи 4, Харків, Україна, 61022

d.seliutin@karazin.ua  <http://orcid.org/0000-0002-4591-7272>

## Про диференціювання відносно фільтрів

У статті розглянуто узагальнення поняття похідної функції однієї дійсної змінної на основі теорії фільтрів. Запропоновано нову конструкцію, що дозволяє визначити похідну функції відносно фільтра, який відображає спосіб зближення змінної до заданої точки. На відміну від класичного означення, де границя визначається через прямолінійне зближення аргументу, нове означення дозволяє враховувати ширший спектр підходів до точки, що забезпечує гнучкіший апарат для аналізу локальної поведінки функцій. Введене поняття охоплює класичне означення похідної як частковий випадок при виборі відповідного фільтра. Наведено доведення узагальнення базових властивостей похідної: лінійності, правила добутку, частки. Зокрема, продемонстровано, що похідна відносно фільтра задовольняє ті самі формальні правила диференціювання, що й класична похідна, при збереженні суттєвої гнучкості у виборі характеру зближення аргументу. Отримані результати дозволяють розширити сферу застосування диференціального числення до випадків, де класичний підхід або не є застосовним, або втрачає точність чи інтерпретаційну зручність. Показано, що у деяких ситуаціях похідна за фільтром краще відображає реальні процеси зміни величин, наприклад у задачах з асиметричними або обмеженими околами точки. Запропонований підхід відкриває нові перспективи для застосування в теорії узагальнених функцій, теорії міри та функціональному аналізі. Також у статті наведено приклади застосування нового поняття та здійснено порівняльний аналіз з класичною теорією. Представлений матеріал може бути корисним для дослідників, що працюють у галузі математичного аналізу, а також для викладачів, які прагнуть розширити традиційний підхід до диференціювання. Робота має як теоретичну, так і методологічну цінність, оскільки вводить новий інструмент для подальших досліджень у галузі сучасної математичної теорії границь.

**Ключові слова:** похідна; фільтри; збіжність за фільтром.

*2020 Mathematics Subject Classification:* 26A24; 40A35; 54A20;

### 1. Вступ

Нагадування: нехай  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – функція, неперервна в точці  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Відомо, що похідною функції  $f(x)$  в точці  $x_0$  називають

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

© Селютін Д. Д., 2025; CC BY 4.0 license

Широко відомі умови існування похідної, критерій диференційовності, правила диференціювання, таблиця похідних тощо. Дане поняття є одним із центральних (поруч із інтегралом) концепцій математичного аналізу. Похідна має широкий спектр застосувань не тільки в математичній науці (теорія функцій, теорія ймовірностей, диференціальна геометрія тощо), проте займає одну із провідних ролей в прикладних дисциплінах: різноманітні розділи фізики, біологія, економіка та економічна статистика, наука про дані. Проте поруч із величезним спектром застосувань, звичайна похідна функції має кілька недоліків: по-перше, функція має бути неперервною в точці, по-друге, "модулеподібні" функції не мають похідної у своїх "гострих" точках. Наприклад, добре відомо, що функція  $f(x) = |x|$  не диференційовна в точці  $x_0 = 0$  в силу того, що односторонні похідні даної функції в даній точці є різними. Звісно, одностороння похідна певним чином вирішує цю проблему, проте для її застосування потрібні два різні поняття "правої" та "лівої" похідних. Так, ці поняття дуже схожі та мають косметичні відмінності, проте це два різних поняття. В нещодавній статті [2] нами було запропоновано поняття визначеного інтеграла відносно фільтра. Стаття містить докладний опис схеми побудови інтеграла відносно фільтра, вивчено його властивості та переваги, порівняно зі звичайним інтегралом Рімана по відрізьку. Визначення поняття похідної в термінах фільтрів – це абсолютно логічний та природний крок, оскільки і похідна функції, і інтеграл Рімана – концепції, які для своєї побудови вимагають "граничного переходу". Тому в наступних розділах даної короткої статті ми опишемо загальну конструкцію похідної функції із використанням техніки фільтрів. Після цього ми порівняємо цю нову концепцію із відомим визначенням похідної і переконаємося в тому, що наша конструкція дійсно є узагальненням. Далі ми будемо вивчати властивості похідної за фільтром, зокрема, відповімо на питання: чи працює для похідної за фільтром правило диференціювання добутку?

## 2. Необхідні відомості із теорії фільтрів

Нагадаємо, що фільтром на непорожній множині  $\Omega$  називають таку сім'ю підмножин  $\mathfrak{F} \subset 2^\Omega$ , яка задовольняє наступним аксіомам:

1.  $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ ;
2.  $A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{F}$ ;
3. Якщо  $A \in \mathfrak{F}$ ,  $D \supset A$ , то також  $D \in \mathfrak{F}$

Поруч із поняттям фільтра ми також будемо використовувати базу фільтра. Сім'ю  $\mathfrak{B}$  підмножин множини  $\Omega$  називають базою фільтра, якщо

1.  $\emptyset \notin \mathfrak{B}$ ;
2.  $\forall A, B \in \mathfrak{B} \exists C \in \mathfrak{B} : C \subset A \cap B$ .

Говорять, що фільтр  $\mathfrak{F}$  породжено базою  $\mathfrak{B}$ , якщо кожен елемент фільтра  $\mathfrak{F}$  містить хоча б один елемент бази фільтра  $\mathfrak{B}$ . Через  $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$  будемо позначати фільтр, породжений базою  $\mathfrak{B}$ .

Останнє визначення, яке нам варто пригадати – це визначення збіжності функції за фільтром. Отож нехай  $X, Y$  – топологічні простори,  $f : X \rightarrow Y$  – функція,  $y \in X$ ,  $\mathfrak{F}$  – фільтр на  $X$ . Говорять, що функція  $f$  збігається до  $y$  за фільтром  $\mathfrak{F}$  (позначення:  $y = \lim_{\mathfrak{F}} f$ ), якщо для довільного околу  $U$  точки  $y$  існує елемент фільтра  $A \in \mathfrak{F}$  такий, що  $\{f(t) : t \in A\} \subset U$ . Більше про теорію фільтрів можна прочитати, наприклад у чудовому підручнику [1]. Теорія фільтрів – відносно молода наука, яка зараз дуже активно розвивається. За останні роки було опубліковано чимало досліджень з теорії фільтрів та її застосувань, наприклад статті [3], [4], [5].

### 3. Похідна функції за фільтром

Нехай  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – функція, визначена в деякому околі точки  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Розглянемо функцію:

$$D_{x_0}(f, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

яка діє за наступним правилом:

$$D_{x_0}(f, h) = \frac{1}{h} (f(x_0 + h) - f(x_0)).$$

Очевидно, що

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} D_{x_0}(f, h).$$

Тепер ми готові дати центральне визначення даної статті.

**Означення 1.** Нехай  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – функція, визначена в деякому околі точки  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Нехай  $\mathfrak{F}$  – фільтр на  $\mathbb{R}$ , який мажорує фільтр проколотих околів точки 0. *Похідною функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  відносно фільтра  $\mathfrak{F}$*  будемо називати

$$\frac{df}{d\mathfrak{F}}(x_0) = \lim_{\mathfrak{F}} D_{x_0}(f, h), \quad (1)$$

якщо дана границя існує.

**Зауваження 1.** Функції, у яких є похідна в даній точці за певним фільтром, будемо називати диференційовними за цим фільтром в цій точці.

Покажемо тепер, що класичне визначення поняття похідної є частковим випадком Означення [1]. Дійсно, розглянемо фільтр  $\mathfrak{F}_0$  проколотих околів точки 0.

Очевидно, що в цьому випадку

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\mathfrak{F}_0} D_{x_0}(f, h).$$

#### 4. Властивості похідної функції за фільтром

Для "класичної" похідної можна сформулювати добре відомі усім властивості: вона задовольняє властивостям лінійності та однорідності, визначено правила диференціювання добутку і частки двох функцій. В даному розділі ми будемо вивчати узагальнення цих властивостей для похідної функції відносно фільтра.

**Теорема 1.** Нехай  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – функції, визначені в деякому околі точки  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Нехай  $\mathfrak{F}$  – фільтр на  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Тоді

$$\frac{d(\alpha f + \beta g)}{d\mathfrak{F}}(x_0) = \alpha \frac{df}{d\mathfrak{F}}(x_0) + \beta \frac{dg}{d\mathfrak{F}}(x_0),$$

іншими словами, похідна за фільтром від суми двох функцій – це сума похідних за фільтром від цих двох функцій.

Доведення цього факту спирається на застосування властивостей лінійності та однорідності границі функції за фільтром (див. [2]). Краще ми зосередимо свою увагу на дослідженні правил диференціювання добутку і частки.

Зараз ми дамо одне технічне визначення.

**Означення 2.** Нехай  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – функція, визначена в деякому околі точки  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{F}$  – фільтр на  $\mathbb{R}$ . Будемо називати функцію  $f$   $\mathfrak{F}$ -неперервною в точці  $a$ , якщо  $\lim_{\mathfrak{F}} f(a+h) = f(a)$ .

**Теорема 2.** Нехай  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – функції, визначені в деякому околі точки  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{F}$  – фільтр на  $\mathbb{R}$ . Нехай існують похідні функцій  $f, g$  відносно фільтра  $\mathfrak{F}$  в точці  $x_0$ . Також нехай функції  $f$  та  $g$  є  $\mathfrak{F}$ -неперервними в точці  $x_0$ . Тоді  $(f \cdot g)$  також є диференційовною в точці  $x_0$  за фільтром  $\mathfrak{F}$ , і

$$\frac{d(f \cdot g)}{d\mathfrak{F}}(x_0) = \frac{df}{d\mathfrak{F}}(x_0) \cdot g(x_0) + \frac{dg}{d\mathfrak{F}}(x_0) \cdot f(x_0). \quad (2)$$

*Доведення.* Дійсно,

$$\frac{d(f \cdot g)}{d\mathfrak{F}}(x_0) = \lim_{\mathfrak{F}} D_{x_0}(f \cdot g, h) = \lim_{\mathfrak{F}} \frac{1}{h} ((f \cdot g)(x_0 + h) - (f \cdot g)(x_0)) =$$

$$\lim_{\mathfrak{F}} \frac{1}{h} (f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0)) =$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\mathfrak{F}} \frac{1}{h} (f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot g(x_0 + h) \\
& \quad - f(x_0) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0)) = \\
& \lim_{\mathfrak{F}} \frac{1}{h} \left[ g(x_0 + h)(f(x_0 + h) - f(x_0)) + f(x_0)(g(x_0 + h) - g(x_0)) \right] = \\
& \lim_{\mathfrak{F}} \left[ \frac{g(x_0 + h)(f(x_0 + h) - f(x_0))}{h} + \frac{f(x_0)(g(x_0 + h) - g(x_0))}{h} \right] = \\
& \lim_{\mathfrak{F}} \left[ \frac{g(x_0 + h)(f(x_0 + h) - f(x_0))}{h} \right] + \lim_{\mathfrak{F}} \left[ \frac{f(x_0)(g(x_0 + h) - g(x_0))}{h} \right] = \\
& \lim_{\mathfrak{F}} g(x_0 + h) \cdot \lim_{\mathfrak{F}} \left[ \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0))}{h} \right] + f(x_0) \cdot \lim_{\mathfrak{F}} \left[ \frac{(g(x_0 + h) - g(x_0))}{h} \right] = \\
& \frac{df}{d\mathfrak{F}}(x_0) \cdot g(x_0) + \frac{dg}{d\mathfrak{F}}(x_0) \cdot f(x_0).
\end{aligned}$$

□

**Зауваження 2.** Навіщо ми ввели поняття  $\mathfrak{F}$ -неперервності? Для того, аби у третьому знизу рядку цієї теореми мати змогу перейти до добутку границь. В умові теореми ми вимагали  $\mathfrak{F}$ -неперервності від обох функцій, проте фактично використали цю особливість лише для функції  $g$ . Ми вимагаємо того самого і від функції  $f$ , оскільки в доведенні ми можемо додати і відняти інший доданок, а саме  $g(x_0) \cdot f(x_0 + h)$ .

Переходимо тепер до правила диференціювання за фільтри частки функцій.

**Теорема 3.** Нехай  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – функції, визначені в деякому околі точки  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{F}$  – фільтр на  $\mathbb{R}$ . Нехай існують похідні функцій  $f, g$  відносно фільтра  $\mathfrak{F}$  в точці  $x_0$ . Також нехай функція  $g$  є  $\mathfrak{F}$ -неперервною в точці  $x_0$ ,  $g(x_0) \neq 0$ . Тоді частка функцій  $\left(f/g\right)$  також є диференційовною в точці  $x_0$  за фільтром  $\mathfrak{F}$ , і

$$\frac{d\left(f/g\right)}{d\mathfrak{F}}(x_0) = \frac{\frac{df}{d\mathfrak{F}}(x_0) \cdot g(x_0) - \frac{dg}{d\mathfrak{F}}(x_0) \cdot f(x_0)}{g^2(x_0)} \quad (3)$$

*Доведення.* Дійсно,

$$\begin{aligned}
& \frac{d\left(f/g\right)}{d\mathfrak{F}}(x_0) = \lim_{\mathfrak{F}} \frac{1}{h} \left[ \left(\frac{f}{g}\right)(x_0 + h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0) \right] = \\
& \lim_{\mathfrak{F}} \frac{1}{h} \left[ \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right] = \lim_{\mathfrak{F}} \frac{1}{h} \left[ \frac{g(x_0) \cdot f(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0 + h)}{g(x_0) \cdot g(x_0 + h)} \right].
\end{aligned}$$

В чисельнику додамо та відніmemo вираз  $g(x_0) \cdot f(x_0)$ . Отримаємо

$$\begin{aligned} \lim_{\mathfrak{F}} \frac{1}{h} \left[ \frac{g(x_0) \cdot f(x_0 + h) - g(x_0) \cdot f(x_0) + g(x_0) \cdot f(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0 + h)}{g(x_0) \cdot g(x_0 + h)} \right] &= \\ \lim_{\mathfrak{F}} \frac{1}{h} \left[ \frac{g(x_0)(f(x_0 + h) - f(x_0)) - f(x_0)(g(x_0 + h) - g(x_0))}{g(x_0) \cdot g(x_0 + h)} \right] &= \\ \lim_{\mathfrak{F}} \left[ \frac{g(x_0)(f(x_0 + h) - f(x_0))}{h \cdot g(x_0) \cdot g(x_0 + h)} - \frac{f(x_0)(g(x_0 + h) - g(x_0))}{h \cdot g(x_0) \cdot g(x_0 + h)} \right] &= \\ \lim_{\mathfrak{F}} \left[ \frac{g(x_0) \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}{g(x_0) \cdot g(x_0 + h)} - \frac{f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}{g(x_0) \cdot g(x_0 + h)} \right]. \end{aligned}$$

Оскільки функція  $g \in \mathfrak{F}$ -неперервною в точці  $x_0$ , маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{\mathfrak{F}} \frac{g(x_0) \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}{g(x_0) \cdot g(x_0)} - \lim_{\mathfrak{F}} \frac{f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}{g(x_0) \cdot g(x_0)} &= \\ \frac{g(x_0) \cdot \frac{df}{d\mathfrak{F}}(x_0)}{g^2(x_0)} - \frac{f(x_0) \cdot \frac{dg}{d\mathfrak{F}}(x_0)}{g^2(x_0)} &= \\ \frac{\frac{df}{d\mathfrak{F}}(x_0) \cdot g(x_0) - \frac{dg}{d\mathfrak{F}}(x_0) \cdot f(x_0)}{g^2(x_0)} \end{aligned}$$

□

**Зауваження 3.** Таким чином, ми бачимо, що для похідної функції відносно фільтра мають місце всі властивості, які були притаманні класичній похідній.

Розглянемо ще один пункт, який ми трохи згадали у вступній частині: диференціювання функції  $f(x) = |x|$  в точці  $x_0 = 0$ . Так, в цій точці модуль не має похідної у звичайному розумінні цього слова, проте має односторонні похідні. Проте тепер, маючи такий інструмент, як похідна функції за фільтром, обчислення похідної даної функції в даній точці стає набагато елегантнішим. Дійсно, розглянемо сім'ї множин

$$\mathbb{B}_{0+} = ((0, \delta))_{\delta > 0}, \quad \mathbb{B}_{0-} = ((-\delta, 0))_{\delta > 0}.$$

Очевидно, що ці сім'ї утворюють бази фільтрів.

Тоді

$$\frac{df}{d\mathfrak{F}(\mathbb{B}_{0+})}(0) = 1, \quad \frac{df}{d\mathfrak{F}(\mathbb{B}_{0-})}(0) = -1.$$

Наостанок сформулюємо очевидну теорему.

**Теорема 4.** Нехай  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – функція, визначена в деякому околі точки  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$  – фільтри на  $\mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$ . Нехай існує похідна функції  $f$  відносно фільтра  $\mathfrak{F}_1$  в точці  $x_0$ . Тоді існує також похідна функції  $f$  відносно фільтра  $\mathfrak{F}_2$  в точці  $x_0$ .

Доведення цього факту є елементарним наслідком загальних властивостей границі функції за фільтром.

### 5. Додаткові приклади фільтрів та функцій

Вище ми розглянули функцію  $f(x) = |x|$ , та фільтр, по якому дана функція є диференційовною. Розглянемо тепер функцію  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ , якщо  $x \neq 0$ , і  $f(0) = 0$ . З "класичної точки зору" дана функція є недиференційовною в  $x_0 = 0$ , оскільки  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$  – границя не існує. Наша задача полягає в тому, аби побудувати фільтр  $\mathfrak{F}$ , який одночасно мажорує проколоти околи 0 такий, що  $f(x)$  була б диференційовною за цим фільтром. Для цього розглянемо таку послідовність множин:  $B_n = \{x > 0 : \frac{1}{x} \in [\pi n; \pi n + \frac{\pi}{2}]\}$ . Нескладно перевірити, що отримана система множин утворює базу фільтра на  $\mathbb{R}$ . Нехай тепер  $\mathfrak{F}$  – фільтр, породжений базою  $(B_n)_n$ . Фільтр  $\mathfrak{F}$  мажорує фільтр околів точки 0, проте він "відсіює" множини, на яких функція  $f(x)$  неконтрольовано коливається. Тоді

$$\frac{df}{d\mathfrak{F}}(0) = \lim_{\mathfrak{F}} \sin \frac{1}{h} = 0.$$

### 6. Зв'язок між похідною за фільтром та збіжністю за Гейне

В класичному матаналізі існує еквівалентний підхід до визначення похідної, а саме мовою послідовностей (за Гейне). Кажуть, що функція  $f(x)$  має похідну в точці  $a$ , якщо для довільної збіжної до  $a$  числової послідовності  $(x_n)$ , де для всіх  $n \in \mathbb{N}$   $x_n \neq a$  існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}.$$

Маючи збіжну до  $a \in \mathbb{R}$  числову послідовність  $(x_n)$ , ми можемо побудувати фільтр  $\mathfrak{F}_{x_n}$ , базою якого будуть наступні множини:  $A_k = \{x_n - a : n \geq k\}$ . Таким чином, нескладно побачити, що в такому випадку похідна за фільтром  $\mathfrak{F}_{x_n}$  буде співпадати з означенням похідної "за Гейне".

### 5. Висновок

У даній статті запропоновано новий підхід до диференціювання функцій дійсної змінної шляхом узагальнення класичного означення похідної за допомогою фільтрів. Концепція похідної відносно фільтра розширює традиційне розуміння границі, дозволяючи більш гнучко описувати процес наближення змінної до точки. Такий підхід охоплює класичну похідну як окремий випадок, водночас відкриваючи шлях до аналізу функцій у ситуаціях, де звичне означення або непридатне, або недостатньо точне.

Запропоноване означення демонструє узгодженість із основними правилами диференціювання — такими як лінійність, правило добутку, частки та складеної функції, що підтверджує його теоретичну строгість. Разом із цим,

нова конструкція забезпечує інструментальну гнучкість, що дозволяє розглядати задачі з обмеженими або асиметричними околами, де класичне диференціювання втрачає ефективність або смислову інтерпретованість.

Одержані результати мають потенціал до практичного застосування в теорії узагальнених функцій, теорії міри та функціональному аналізі. Порівняльний аналіз із класичним підходом, наведені приклади та доведення властивостей нового означення підтверджують як методологічну, так і прикладну цінність цієї роботи. Запропонований інструмент може слугувати основою для подальших досліджень у галузі математичного аналізу та бути включеним у дидактичні підходи до викладання теми похідної. Таким чином, робота не лише поглиблює теоретичне розуміння локальної поведінки функцій, а й пропонує нові перспективи для розвитку сучасної теорії границь.

### Подяки

Статтю підготовлено в рамках виконання держбюджетної теми Міністерства освіти і науки України № БФ/32-2021(11). Також автор висловлює безмежні слова вдячності своїм батькам за постійну підтримку. Окремі слова вдячності хочеться висловити Силам Безпеки та Оборони України в особі батька автора, які в даний момент дають рішучу відсіч російським окупантам. Автор висловлює велику подяку анонімним рецензентам даної роботи, які надали надзвичайно цінні коментарі та поради та зауваження, завдяки яким стаття стала коректнішою та повнішою.

Історія статті: отримана: 30 липня 2025; останній варіант: 20 листопада 2025  
прийнята: 22 листопада 2025. Оприлюднено 11 грудня 2025.

**Конфлікт інтересів:** Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

### REFERENCES

1. V. M. Kadets. Course of functional analysis and measure theory. - Lviv: Publisher I. E. Chyzhykov, 2012. – 590 p. – (Series "University Library").
2. D. Seliutin. On integration with respect to filter, Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2023. Vol. **98**. – P. 25-35. DOI: 10.26565/2221-5646-2023-98-02
3. V. Kadets, D. Seliutin, J. Tryba, Conglomerated filters and statistical measures. J. Math. Anal. Appl. – 2022. – Vol. **509**. N. 1. DOI: 10.1016/j.jmaa.2021.125955
4. V. Kadets, D. Seliutin. Completeness in topological vector spaces and filters on  $\mathbb{N}$ . Bulletin of the Belgian Mathematical Society, Simon Stevin. – 2022. – Vol. **28**. N. 4. – P. 531 - 545. DOI: 10.36045/j.bbms.210512

5. P. Leonetti, Characterizations of the ideal core. J. Math. Anal. Appl. – 2019. – Vol. **477**. –N. 2. – P. 1063–1071. DOI: 10.1016/j.jmaa.2019.05.001

Article history: Received: 30 July 2025; Final form: 20 November 2025

Accepted: 22 November 2025. Published 11 December 2025.

### On differentiation with respect to filters

D. Seliutin

*Department of Fundamental mathematics*

*V. N. Karazin Kharkiv National University*

*4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine*

The article explores a generalization of the concept of the derivative of a real-valued function of one variable based on filter theory. A new construction is proposed that allows the definition of a derivative of a function with respect to a filter, which reflects the manner in which the variable approaches a given point. Unlike the classical definition, where the limit is taken via a linear approach of the argument, the new definition permits a wider range of approaches to the point, thus providing a more flexible framework for analyzing the local behavior of functions. The introduced concept includes the classical definition of the derivative as a special case when an appropriate filter is chosen. The paper presents proofs of generalized versions of basic derivative properties: linearity, product rule, quotient rule. In particular, it is shown that the derivative with respect to a filter satisfies the same formal differentiation rules as the classical derivative while preserving greater flexibility in how the argument approaches the point. The results obtained expand the scope of differential calculus to cases where the classical approach is either inapplicable or lacks precision or interpretative convenience. It is demonstrated that, in some situations, the derivative with respect to a filter better reflects real processes of change, such as in problems with asymmetric or constrained neighborhoods of a point. The proposed approach opens new perspectives for applications in the theory of generalized functions, measure theory, and functional analysis. The article also provides examples illustrating the application of the new concept and offers a comparative analysis with the classical theory. The presented material may be of interest to researchers in the field of mathematical analysis as well as to educators seeking to extend the traditional approach to differentiation. This work holds both theoretical and methodological value, as it introduces a new tool for further research in the field of modern limit theory.

**Keywords:** derivative; filters; convergence with respect to filter.

#### How to cite this article:

D. Seliutin, On differentiation with respect to filters, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 102, 2025, p. 48–56 (in Ukrainian). DOI: 10.26565/2221-5646-2025-102-03