

О. А. Макаров

доцент, кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри математичного моделювання та аналізу даних
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 6, Харків, Україна, 61022
makarovfamily07@gmail.com  <http://orcid.org/0000-0002-9050-4987>

І. Г. Ніколенко

кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри математичного моделювання та аналізу даних
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 6, Харків, Україна, 61022
iryna.nikolenko@karazin.ua  <http://orcid.org/0000-0002-2904-6761>

Умови керованості еволюційної системи лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних

Керованості систем диференціальних рівнянь з частинними похідними, які описують різноманітні природні процеси, присвячено безліч робіт. Особливістю цієї статті є розглядання керованості лінійної системи диференціальних рівнянь у частинних похідних загального вигляду.

Раніше у статті Макарова О.А. "Керованість еволюційної системи диференціальних рівнянь у частинних похідних" / Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, Серія "Математика, прикладна математика і механіка" 2016, Т. 83, с. 47–56" розглядалась система диференціальних рівнянь у частинних похідних. У даній роботі була досліджена 0-керованість таких систем у просторі Л. Шварца при певних умовах на керування. Зокрема, було доведено, що якщо власні значення матриці системи є дійсними, то існує керування, яке не залежить від часу. Крім того, досліджений випадок, при якому власні значення є уявними.

Метою цієї статті є дослідження керованості системи лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних для довільної матриці системи при обмеженнях на пошук керування у вигляді $u(x, t) = u(x) \cdot \exp(-\alpha t)$, де вектор-функція $u(x)$ належить простору Л. Шварца.

Отримано необхідні та достатні умови 0-керованості цієї системи, а також наведено приклади як керованої системи, так і некерованої. Як наслідки цієї теореми отримано достатні умови 0-керованості системи, дійсні частини власних значень матриці $P(s)$ обмежені зверху або знизу. Крім того, доведено, що якщо просторова змінна належить простору $\mathbb{R}$, то така система є 0-керованою. До кожного випадку наведено приклади.

Розглянуто також диференціальне рівняння у частинних похідних другого порядку за часом. Для нього доведено, що якщо корені характеристичного рівняння

задовольняють умовам критерію, то це рівняння буде 0-керованим. Так рівняння Гельмгольца є 0-керованими.

Ключові слова: диференціальні рівняння у частинних похідних; 0-керованість; перетворення Фур'є; простір Л. Шварца.

2020 Mathematics Subject Classification: 35C10, 93B28.

Вступ

Керованості систем диференціальних рівнянь з частинними похідними, яки описують різноманітні природні процеси, присвячено безліч робіт. Наприклад, у роботі [1] досліджено керування хвільового рівняння.

У статті [2] розглянута еволюційна система диференціальних рівнянь у частинних похідних, де досліджена 0-керованість таких систем у просторі Л. Шварца при певних умовах на керування. Зокрема було доведено, що якщо власні значення матриці системи $P(s)$ дійсні, то існує керування, яке не залежить від часу. Крім того був досліджен випадок для уявних власних значень.

Метою цієї роботи є дослідження керованості системи лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних при обмеженнях на пошук керування у вигляді $u(x, t) = u(x) \exp(-\alpha t)$, де вектор-функція $u(x)$ належить простору Л. Шварца. Був отриман критерій 0-керованості цієї системи у просторі Л. Шварца та наведені приклади як керованої так і некерованої систем. Як наслідок цього критерію було доведено, що системи з обмеженими зверху або знизу дійсними частинами $\operatorname{Re} \lambda_j(s)$ теж є 0-керованими.

Крім того доведено, що системи з одновимірною просторовою змінною є 0-керованими. Наведені приклади на усі випадки.

Розглянуто також диференціальне рівняння у частинних похідних другого порядку за часом. Для нього доведено, що якщо корені характеристичного рівняння задовольняють умовам критерію, то це рівняння 0-керовано. Так рівняння Гельмгольца є 0-керованими.

1. Критерій керованості

Розглянемо систему диференціальних рівнянь у частинних похідних зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = P \left(\frac{\partial}{i \partial x} \right) w(x, t) + e^{-\alpha t} u(x), \quad t \in [0; T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

де $P(s)$ — поліноміальна матриця $n \times n$, $u(x)$ і $w(x, t)$ — вектор-функції, яки належать простору Л. Шварца S , тобто нескінченно диференційовні та швидко спадають [3].

Означення 1. Система (1) називається 0-керованою у просторі S , якщо для будь-якої функції $\varphi(x) \in S$ існує керування $u(x) \in S$ таке, що розв'язок цієї системи (1) з умовами $w(x, 0) = \varphi(x)$ та $w(x, T) = 0$ належить простору S по просторовим змінним.

У роботі [2] доведена наступна теорема.

Теорема. Система (1) з керуванням вигляду $u(x)v(t)$ буде 0-керованою у просторі S , тоді і тільки тоді, коли існує обернена матриця

$$\left(\int_0^T v(t) \exp(-tP(s)dt) \right)^{-1} \in C_{-\infty}^{\infty} \quad \forall s \in \mathbb{R}^n,$$

де $C_{-\infty}^{\infty}$ — простір нескінченно-диференційовних функцій, які зростають не швидше степені.

За її допомогою доведемо наступний критерій.

Теорема 1. Система (1) 0-керована у просторі Л. Шварца S тоді і тільки тоді, коли виконується умова: існує таке $\alpha \in \mathbb{R}$, що на множині

$$N_j = \{s \in \mathbb{R}^n : \operatorname{Re} \lambda_j(s) = -\alpha\} \quad j = \overline{1, n}$$

виконується нерівність

$$\operatorname{Im} \lambda_j(s) \neq \frac{2k\pi}{T}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Доведення. У випадку керування вигляду $u(x) \exp(-\alpha t)$ умова попередньої теореми виглядає так:

існує обернена матриця

$$\left(\int_0^T \exp(-\alpha t) \cdot \exp(-tP(s)) dt \right)^{-1} \in C_{-\infty}^{\infty}. \quad (2)$$

У роботі Л. В. Фардигіоли [4] було доведено: якщо

$$\Delta = \det \int_0^T \exp tQ(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^n,$$

то матриця

$$\left(\int_0^T \exp tQ(s) dt \right)^{-1} \in C_{-\infty}^{\infty}.$$

Там же доведено, що ця умова еквівалентна умові $\exp(T\lambda_j(s)) \neq 1$, $j = \overline{1, n}$.

У нашому випадку остання умова означає, що

$$\exp(-T(\lambda_j(s) + \alpha)) \neq 1, \quad j = \overline{1, n} \quad \forall s \in \mathbb{R}^n,$$

тобто

$$\lambda_j(s) + \alpha \neq \frac{2k\pi i}{T} \quad (k \neq 0),$$

а ця нерівність еквівалентна сукупності нерівностей $\operatorname{Re} \lambda_j(s) \neq -\alpha$, або

$$\operatorname{Im} \lambda_j(s) \neq \frac{2k\pi i}{T}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Теорема доведена.

Приклад 1. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} = 4w_2(x, t) + \Delta w_2(x, t) + u_1(x)e^{-\alpha t}, \\ \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t} = -2w_2(x, t) + \Delta w_1(x, t) + u_2(x)e^{-\alpha t}. \end{cases}$$

Матриця $P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 4 - |s|^2 \\ -|s|^2 & -2 \end{pmatrix}$, де $|s|^2 = \sum_{k=1}^n s_k^2$.

Тоді характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2\lambda - |s|^4 + 4|s|^2 = 0$, а власні значення $\lambda_{1,2}(s) = -1 \pm \sqrt{1 - 4|s|^2 + |s|^4} = -1 \pm \sqrt{(2 - |s|^2)^2 - 3}$.

$|\operatorname{Im} \lambda_j(s)| \leq \sqrt{3}$ і тому при $T = 1$ маємо $\operatorname{Im} \lambda_j(s) \neq 2k\pi$ при $k \neq 0$.

Тобто виконана умова теореми 1, значить дана система 0-керована при $T \geq 1$.

Приклад 2.

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1(x_1, x_2, t)}{\partial t} = w_2(x_1, x_2, t) + e^{-\alpha t} u_1(x_1, x_2), \\ \frac{\partial w_2(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \\ = -\frac{\partial^2 w_1(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 w_1(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial w_2(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + e^{-\alpha t} u_2(x). \end{cases}$$

Матриця $P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s_1^2 + s_2^2 & -2is_1 \end{pmatrix}$.

Тоді характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2\lambda s_1 - s_1^2 - s_2^2 = 0$, і власні значення

$$\lambda_{1,2}(s) = -is_1 \pm \sqrt{-s_1^2 + s_1^2 + s_2^2} = -is_1 \pm s_2.$$

Отже у рівняння $-is_1 - s_2 + \alpha = \frac{2k\pi i}{T}$ завжди є корінь $s_2 = \alpha$, $s_1 = \frac{2k\pi}{T}$, а значить система некерована.

2. Достатні умови керованості

Теорема 2. Якщо дійсні частини власних значень матриці $P(s)$ обмежені зверху або знизу, то система (1) 0-керована.

Доведення. Якщо $\operatorname{Re} \lambda_j(s) < C$, $j = \overline{1, n}$, $\forall s \in \mathbb{R}^n$, то при $\alpha < C$ виконана нерівність $\operatorname{Re} \lambda_j(s) + \alpha < 0$, тобто виконуються умови теореми 1.

Аналогічно: якщо $\operatorname{Re} \lambda_j(s) > -C$, то при $\alpha > C$ виконується нерівність $\operatorname{Re} \lambda_j(s) + \alpha > 0$, тобто виконуються умови теореми 1.

Теорема доведена.

Приклад 3. Розглянемо систему еквівалентну рівнянню звука у в'язкому середовищі

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} = w_2(x) + e^{-\alpha t} u_1(x), \\ \frac{\partial w_2(x)}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 w_2(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1(x)}{\partial x^2} + w_2(x) e^{-\alpha t}, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -s^2 & -\lambda - 2s^2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda s^2 + s^2 = 0.$$

Його корені $\lambda_{1,2}(s) = -s^2 \pm \sqrt{s^4 - s^2}$.

При $|s| \geq 1$ корені дійсні і $\max \lambda_j(s) < 0$.

При $|s| < 1$ корені комплексні і $\max \operatorname{Re} \lambda_j(s) \leq 0$.

Тобто виконана умова теореми 2, а значить система 0-керована з керуванням, яке не залежить від часу.

3. Керованість системи з однією просторовою змінною

Розглянемо систему (1) з однією просторовою змінною.

Теорема 3. Система (1) з $x \in \mathbb{R}$ завжди 0-керована з деяким α .

Доведення. Рівняння $\lambda_j(s) = \frac{2k\pi i}{T}$, $k \neq 0$ еквівалентно системі

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \lambda_j(s) = -\alpha, \\ \operatorname{Im} \lambda_j(s) = \frac{2k\pi i}{T}, \end{cases} \quad j = \overline{1, n}.$$

Випадок дійсних $\lambda_j(s)$ був розглянут у статті [2]. Тому у даній роботі ми розглянемо тільки випадок, коли $\operatorname{Im} \lambda_j(s) \neq 0$.

В цьому випадку $\operatorname{Im} \lambda_j(s) = \frac{2k\pi i}{T}$ має скінченну кількість коренів при фіксованому k , а всього цих коренів зліченна множина $s_p \in \mathbb{R}$ при $k \in \mathbb{N}$.

Тоді множина значень $\operatorname{Re} \lambda_j(s_p)$ теж зліченна і тому завжди знайдеться таке α , при якому $\operatorname{Re} \lambda_j(s_p) \neq -\alpha$.

Отже, виконані умови теореми 1, тобто система (1) 0-керована.

Теорема доведена.

Приклад 4. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} = w_2(x, t) + u_1(x)e^{-\alpha t}, \\ \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial^2 w_1(x, t)}{\partial x^2} - bw_1(x, t) + u_2(x)e^{-\alpha t}, \end{cases} \quad b > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Власні значення знаходяться із рівняння

$$\lambda^2 + b - s^2 = 0, \quad \lambda_{1,2}(s) = \pm \sqrt{s^2 - b}.$$

При $|s| \geq b$ власні значення дійсні, а при $|s| < b$ власні значення уявні $\lambda_{1,2}(s) = \pm i\sqrt{b - s^2}$ і $|\operatorname{Im} \lambda_j(s)| \leq b$.

Тому, якщо $T < \frac{2\pi}{\sqrt{b}}$, то $\lambda_j(s) \neq \frac{2k\pi i}{N}$ і система 0-керована.

4. Керованість диференціального рівняння другого порядку за часом

Розглянемо керованість диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w(x, t) = 0, \quad (3)$$

де $P(s)$ і $Q(s)$ — поліноми, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0; T]$.

Розглянемо систему, еквівалентну цьому рівнянню.

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} = w_2(x, t), \\ \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t} = -P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w_2(x, t) - Q\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w_1(x, t) \end{cases}$$

Як і раніше, будемо розглядати керування вигляду $e^{-\alpha t}u_j(x)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} = w_2(x, t) + e^{-\alpha t}u_1(x), \\ \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t} = -P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w_2(x, t) - Q\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w_1(x, t) + e^{-\alpha t}u_2(x). \end{cases}$$

З першого рівняння знайдемо функцію

$$w_2(x, t) = \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} - e^{-\alpha t} u_1(x).$$

Підставляючи цю функцію у друге рівняння, отримаємо нове рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_1(x, t)}{\partial t^2} + P \left(\frac{\partial}{i\partial x} \right) \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} + Q \left(\frac{\partial}{i\partial x} \right) w_1(x, t) + \\ + \alpha e^{-\alpha t} u_1(x) - e^{-\alpha t} P \left(\frac{\partial}{i\partial x} \right) u_1(x) - e^{-\alpha t} u_2(x) = 0. \end{aligned}$$

Отже, отримали рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_1(x, t)}{\partial t^2} + P \left(\frac{\partial}{i\partial x} \right) \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} + Q \left(\frac{\partial}{i\partial x} \right) w_1(x, t) = \\ = e^{-\alpha t} \left(P \left(\frac{\partial}{i\partial x} \right) u_1(x) - \alpha u_1(x) + u_2(x) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

з початковими умовами

$$\begin{cases} u_1(x, 0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial w_1(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) + u_1(x). \end{cases}$$

Застосовуючи теорему 1, маємо наступний наслідок.

Наслідок. Якщо корені характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + P(s)\lambda + Q(s) = 0$$

задовольняють умовам теореми 1, то рівняння (4) 0-кероване у просторі Л. Шварца.

Приклад 5. Розглянемо рівняння Гельмгольца (див. [5])

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \Delta w(x, t) + kw(x, t) = f(x, t).$$

Оскільки характеристичні корені цього рівняння

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{|s|^2 - k}$$

задовольняють умовам теореми 1, то рівняння Гельмгольца 0-кероване.

Висновки

У цієї роботі отриман критерій керованості системи лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних у просторі Л. Шварца. Даний критерій формулюється у термінах обмежень на власні значення матриці системи.

Наведені приклади як керованих, так і некерованих систем.

Як наслідок отримані також умови керованості диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку за часом.

Конфлікт інтересів: Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

REFERENCES

1. L. V. Fardigola, Controllability Problems for the String Equation on a Half-Axis with a Boundary Control Bounded by a Hard Constant. / SIAM J. Control Optim., 2008. — Vol. 47, No. 4. — P. 2179-2199.
<https://doi.org/10.1137/070684057>
2. A. A. Makarov. Controllability of evolution partial differential equation. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, — Vol. 83, — 2016, p. 47-56.
<https://doi.org/10.26565/2221-5646-2016-83-04>
3. L. Hörmander. The Analysis of linear partial differential operators. II. / Differential operators with constant coefficients. — Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York Tokyo. — 1983. — 455 p.
4. L. V. Fardigola. An integral boundary-value problem in a layer for a system of linear partial differential equations. — 1995, Sb. Math. 186 1671 DOI 10.1070/SM1995v186n11ABEH000088.
5. A. A. Makarov, A. V. Chernikova. Well-posedness and parabolicity of the boundary-value problem for systems of partial differential equations. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, — Vol. 99, — 2024, p. 51–61 (in Ukrainian). DOI: <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2024-99-04>

Історія статті: отримана: 27 лютого 2025; останній варіант: 28 квітня 2025
прийнята: 19 травня 2025.

**Controllability conditions for evolutionary systems
of linear partial differential equations**

A. A. Makarov, I. G. Nikolenko

Department of Mathematical Modeling and Data Analysis

Educational and Scientific Institute of Computer Science

and Artificial Intelligence

V. N. Karazin Kharkiv National University

sq. Svobody, 6, Kharkiv, Ukraine, 61022

Many works have been devoted to the controllability of systems of partial differential equations that describe various natural processes. The peculiarity of this article is the consideration of the controllability of a linear system of partial differential equations of general forms.

In the article by Makarov O.A. "Controllability of an evolutionary system of partial differential equations. / Bulletin of the Kharkiv National University named after V. N. Karazin, Series "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics 2016, Vol. 83. pp. 47–56" a system of partial differential equations has previously been considered. The null-controllability of such systems in the L. Schwartz space under certain control conditions has been investigated in this work. In particular, it was proved that if the eigenvalues of the system matrix are real, then there is a time-independent control. In addition, the

case when the eigenvalues are imaginary was investigated.

The purpose of this article is to study the controllability of a system of linear partial differential equations for an arbitrary matrix of the system under the constraints on the search for control in the form $u(x, t) = u(x) \cdot \exp(-\alpha t)$, where the vector of the function $u(x)$ belongs to the L. Schwartz space.

Necessary and sufficient conditions for the null-controllability of this system are obtained and examples of both controllable and uncontrollable systems are given. As a consequence of this theorem, sufficient conditions for the null-controllability of the system are obtained, the real parts of the eigenvalues of the matrix $P(s)$ are bounded from above or below. In addition, it is proved that if the spatial variable belongs to the space $\mathbb{R}$, then such a system is null-controllable. Examples are given for each case.

A partial differential equation of the second order in time is also considered. It has been proven that if the roots of the characteristic equation satisfy the conditions of the criterion, then this equation is null-controllable. Thus, the Helmholtz equation are null-controllable.

Keywords: partial differential equations; null-controllability; Fourier transform; L. Schwartz space.

Article history: Received: 27 February 2025; Final form: 28 April 2025

Accepted: 19 May 2025.

How to cite this article:

O. A. Makarov, I. G. Nikolenko, Controllability conditions for evolutionary systems of linear partial differential equations. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 101, 2025, p. 31–39, (in Ukrainian). DOI: 10.26565/2221-5646-2025-101-03