

М. В. Генералов

аспірант

кафедра фундаментальної математики

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

майдан Свободи, 4, Харків, 61022, Україна

mykola.heneralov@karazin.ua  <http://orcid.org/0009-0001-4855-6337>

Неявні лінійні різницеві рівняння над скінченними комутативними кільцями порядку p^2 з одиницею

Відомо, що, з точністю до ізоморфізму, існує рівно чотири скінченні комутативні кільця з одиницею, порядок яких дорівнює p^2 , де p — просте число. А саме, цими кільцями є кільце лишків за модулем p^2 , пряма сума двох полів лишків $\mathbb{Z}_p$ за модулем p , поле з p^2 елементів і кільце $\mathcal{S}_p = \mathbb{Z}_p[t]/(t^2)$. Нещодавно було встановлено критерій розв'язності лінійного різницевого рівняння першого порядку над кільцем лишків за модулем $m \geq 2$. З огляду на це, актуальною є задача розв'язання лінійного різницевого рівняння над кільцем $\mathcal{S}_p$ порядку p^2 .

У статті досліджуються неявні лінійні різницеві рівняння першого порядку над кільцем $\mathcal{S}_p$. Встановлено необхідні та достатні умови розв'язності розглянутого рівняння над цим кільцем. Крім того, отримані у статті результати описують як кількість розв'язків у випадку їх існування, так і вигляд загального розв'язку цього рівняння. Аналогічні результати встановлено для відповідної початкової задачі над кільцем $\mathcal{S}_p$. Зокрема, показано, що, на відміну від випадку цілісного кільця, початкова задача над кільцем $\mathcal{S}_p$ може мати нескінченно багато розв'язків. Водночас, якщо вона має скінченну кількість розв'язків, то її розв'язок є єдиним. Також отримано наслідки з одержаного критерію розв'язності розглянутого неявного лінійного різницевого рівняння над кільцем $\mathcal{S}_p$. Зокрема, аналогічно до теорії Фредгольма, показано, що якщо відповідне однорідне рівняння має тільки тривіальний розв'язок, то досліджуване неоднорідне рівняння має єдиний розв'язок.

У статті наведено приклад, що демонструє застосування отриманих теоретичних результатів до розв'язання конкретного рівняння над кільцем $\mathcal{S}_p$ і відповідної початкової задачі.

Результати роботи можуть бути використані для подальшого вивчення лінійних різницевого рівнянь над скінченними кільцями, а також у загальній теорії дискретних динамічних систем.

Ключові слова: неявне лінійне різницеве рівняння; скінченне кільце; початкова задача; розв'язність.

2020 Mathematics Subject Classification: 39A06; 11B37; 16P10.

1. Вступ

Нещодавно неявні лінійні різниці рівняння над цілісними кільцями було досліджено у [1, 2], і більш детально над кільцем цілих чисел у [3, 4, 5]. Неявне лінійне різницеве рівняння першого порядку над кільцем $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ лишків за модулем m досліджувалось у [6].

Нехай p — просте число. У роботі [7] було показано, що, з точністю до ізоморфізму, існує всього 4 комутативних кільця порядку p^2 з одиницею, а саме поле з p^2 елементів, пряма сума $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, кільце лишків $\mathbb{Z}_{p^2}$ і “спеціальне” кільце $\mathcal{S}_p = \mathbb{Z}_p[t]/(t^2)$ (див. також [8]). З огляду на цю класифікацію і результати роботи [6], актуальною є задача розв’язання неявного лінійного різницевого рівняння над кільцем $\mathcal{S}_p$.

Нехай A, B, F_n ($n \in \mathbb{Z}_+$) — задані елементи кільця $\mathcal{S}_p$, причому $B \neq 0$. Розглянемо наступне лінійне різницеве рівняння першого порядку над кільцем $\mathcal{S}_p$:

$$BX_{n+1} = AX_n + F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1)$$

де через $\mathbb{Z}_+$ позначено множину цілих невід’ємних чисел. Як і в [2, 6], рівняння (1) називається *неявним*, якщо B є необоротним елементом кільця $\mathcal{S}_p$, і *явним* у протилежному випадку.

Для рівняння (1) розглядається початкова умова

$$X_0 = Y_0 \in \mathcal{S}_p. \quad (2)$$

Послідовність $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ елементів кільця $\mathcal{S}_p$ називається розв’язком початкової задачі (1), (2), якщо вона задовольняє рівняння (1) і початкову умову (2).

Допоміжні результати, що стосуються властивостей елементів кільця $\mathcal{S}_p$, наведено у розділі 2. Основні результати містяться в розділах 3, 4. Теорема 1 описує необхідні і достатні умови розв’язності рівняння (1), а також визначає число розв’язків і її загальний розв’язок цього рівняння. З теореми 1 випливає критерій існування і єдиності розв’язку рівняння (1) (див. наслідок 2). Як і у теорії Фредгольма (див., наприклад, [9, розділ 7]), наслідок 3 показує, що якщо відповідне до (1) однорідне рівняння має тільки тривіальний розв’язок, то для будь-якої послідовності $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ елементів кільця $\mathcal{S}_p$ рівняння (1) має єдиний розв’язок (див. також [6, наслідок 3.4], де отримано аналогічний результат для кільця $\mathbb{Z}_m$). Теорема 2 описує необхідні і достатні умови розв’язності початкової задачі (1), (2), а також визначає число розв’язків і загальний розв’язок цієї початкової задачі. Зауважимо, що, як і в [6], ця початкова задача може мати нескінченне число розв’язків. У розділі 5 розглянуто приклад застосування результатів теорем 1, 2, а також наслідку 2.

2. Властивості елементів кільця $\mathcal{S}_p$

Нагадаємо, що кільце $\mathcal{S}_p$ визначається як факторкільце $\mathbb{Z}_p[t]/(t^2)$. Відповідно, елементи цього кільця мають вигляд $x = a + bt$, де a, b — елементи кільця $\mathbb{Z}_p$, причому $t^2 = 0$. Тепер додавання та множення у кільці $\mathcal{S}_p$ задаються наступним чином: якщо $x_1 = a_0 + a_1t$ і $x_2 = b_0 + b_1t$, то

- $x_1 + x_2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t$,
- $x_1 \cdot x_2 = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)t$.

Нехай $x_1 = a_1 + b_1t$, $x_2 = a_2 + b_2t$ — елементи кільця $\mathcal{S}_p$. Тоді рівність $x_1 = x_2$ рівносильна системі рівностей

$$\begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Наступне твердження описує оборотні та необоротні елементи кільця $\mathcal{S}_p$.

Лема 1. *Нехай $x = a + bt \in \mathcal{S}_p$, де $a, b \in \mathbb{Z}_p$. Справедливі наступні твердження.*

1. *Якщо $a \neq 0$, то x є оборотним елементом кільця $\mathcal{S}_p$ і вірною є формула $x^{-1} = a^{-1} - a^{-2}bt$.*
2. *Якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то x є нільпотентним елементом кільця $\mathcal{S}_p$ і його індекс нільпотентності дорівнює 2.*

Доведення. Справді, нехай $x = a + bt$, де $a \in \mathbb{Z}_p, b \in \mathbb{Z}_p$. Якщо $a \neq 0$, то $x \cdot (a^{-1} - a^{-2}bt) = 1$, тобто x є оборотним елементом кільця $\mathcal{S}_p$. Якщо ж $a = 0$, тобто $x = bt$, то $x^2 = b^2t^2 = 0$. Отже, кожен необоротний елемент кільця $\mathcal{S}_p$ є нільпотентним, причому індекс нільпотентності будь-якого ненульового елемента дорівнює 2. $\square$

3. Розв'язність неявного лінійного різницевого рівняння над кільцем $\mathcal{S}_p$

Повернемося до неявного лінійного різницевого рівняння (1), в якому $A = A_0 + tA_1$, $B = B_0 + tB_1 \neq 0$, $F_n = F_{0,n} + tF_{1,n}$, де $A_0, B_0, F_{0,n}, A_1, B_1, F_{1,n}$ — елементи поля $\mathbb{Z}_p$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Наступна теорема є критерієм розв'язності цього рівняння над кільцем $\mathcal{S}_p$.

Теорема 1. *Справедливі наступні твердження.*

1. *Рівняння (1) має скінченну кількість розв'язків тоді і тільки тоді, коли або $A_0 \neq 0$, або $B_0 \neq 0$. При цьому рівняння (1) має*

$$N = \begin{cases} p^2, & B_0 \neq 0, \\ 1, & B_0 = 0, A_0 \neq 0 \end{cases}$$

розв'язків і загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$X_n = \begin{cases} B^{-n} A^n X_0 + \sum_{s=0}^{n-1} B^{-s-1} A^s F_{n-s-1}, & B_0 \neq 0, \\ -A^{-1} F_n - B A^{-2} F_{n+1}, & B_0 = 0, A_0 \neq 0, \end{cases} \quad (3)$$

де X_0 — довільний елемент кільця $\mathcal{S}_p$ у випадку $B_0 \neq 0$.

2. Рівняння (1) має нескінченну кількість розв'язків тоді і тільки тоді, коли $A_0 = B_0 = 0$, $F_{0,n} = 0$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. При цьому загальний розв'язок цього рівняння визначено рівністю $X_n = X_{0,n} + t X_{1,n}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де $\{X_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$ — довільна послідовність елементів поля $\mathbb{Z}_p$, а послідовність $\{X_{0,n}\}_{n=0}^{\infty}$ елементів у $\mathbb{Z}_p$ визначено рівністю

$$X_{0,n} = B_1^{-n} A_1^n X_{0,0} + \sum_{s=0}^{n-1} B_1^{-s-1} A_1^s F_{1,n-s-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

де $X_{0,0}$ — довільний елемент поля $\mathbb{Z}_p$.

3. Рівняння (1) не має розв'язків тоді і тільки тоді, коли $A_0 = B_0 = 0$ і $F_{0,n} \neq 0$ при деякому $n \in \mathbb{Z}_+$.

Доведення. Доведемо достатність першого твердження теореми. Якщо $B_0 \neq 0$, то, за першим твердженням леми 1, елемент B є оборотним елементом кільця $\mathcal{S}_p$. Отже, рівняння (1) є явним, тому загальний розв'язок рівняння (1) визначається формулою (див. наприклад [10, с. 4])

$$X_n = B^{-n} A^n X_0 + \sum_{s=0}^{n-1} B^{-s-1} A^s F_{n-s-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де X_0 — довільний елемент кільця $\mathcal{S}_p$. Таким чином, у випадку $B_0 \neq 0$ рівняння (1) має p^2 розв'язків.

Тепер нехай $B_0 = 0$ і $A_0 \neq 0$. Тоді, за лемою 1, елемент A є оборотним елементом кільця $\mathcal{S}_p$, а елемент B є нільпотентним з індексом нільпотентності 2. Відповідно, рівняння (1) можна переписати у вигляді

$$X_n = B A^{-1} X_{n+1} - A^{-1} F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Скориставшись цією рівністю двічі, з урахуванням рівності $B^2 = 0$ отримаємо:

$$X_n = -A^{-1} F_n - B A^{-2} F_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (5)$$

Підставляючи (5) у рівняння (1) і враховуючи, що $B^2 = 0$, переконаємось, що послідовність (5) є розв'язком рівняння (1):

$$\begin{aligned} B X_{n+1} &= -B(A^{-1} F_{n+1} + B A^{-2} F_{n+2}) = -B A^{-1} F_{n+1} - B^2 A^{-2} F_{n+2} = \\ &= A(-A^{-1} F_n - B A^{-2} F_{n+1}) + F_n = A X_n + F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Достатність твердження 1 доведено повністю.

Доведемо достатності тверджень 2 і 3 теореми. Нехай $B_0 = A_0 = 0$. Тоді рівняння (1) приймає наступний вигляд:

$$B_1 t (X_{0,n+1} + X_{1,n+1}t) = A_1 t (X_{0,n} + X_{1,n}t) + F_{0,n} + F_{1,n}t, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Прирівнюючи в цьому рівнянні коефіцієнти при степенях t (див. розділ 2), отримуємо, що рівняння (1) еквівалентне наступній системі рівнянь над $\mathbb{Z}_p$:

$$\begin{cases} F_{0,n} = 0 \text{ при всіх } n, \\ B_1 X_{0,n+1} = A_1 X_{0,n} + F_{1,n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \end{cases} \quad (6)$$

Тому для розв'язності рівняння (1) є необхідною умова $F_{0,n} = 0$ при всіх n . Якщо цю умову не виконано, то рівняння (1) не має розв'язків, тобто доведено достатність твердження 3 теореми.

Тепер нехай $F_{0,n} = 0$ при всіх n . Оскільки $B \neq 0$ і $B_0 = 0$, то $B_1 \neq 0$. Отже, за першим твердженням леми 1, існує обернений елемент B_1^{-1} в полі $\mathbb{Z}_p$. За [10, с. 4], загальний розв'язок другого рівняння системи (6) визначається рівністю

$$X_{0,n} = B_1^{-n} A_1^n X_{0,0} + \sum_{s=0}^{n-1} B_1^{-s-1} A_1^s F_{1,n-s-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

де $X_{0,0}$ — довільний елемент поля $\mathbb{Z}_p$. Якщо $\{X_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$ — довільна послідовність елементів поля $\mathbb{Z}_p$, то $(\{X_{0,n}\}_{n=0}^{\infty}, \{X_{1,n}\}_{n=0}^{\infty})$ є загальним розв'язком системи (6).

Отже, загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд $X_n = X_{0,n} + tX_{1,n}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де $X_{0,0}$ — довільний елемент поля $\mathbb{Z}_p$, $\{X_{0,n}\}_{n=1}^{\infty}$ визначається формулою (7), а $\{X_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$ — довільна послідовність елементів поля $\mathbb{Z}_p$.

Ми довели достатність кожного з тверджень теореми. Оскільки достатні умови всіх трьох тверджень теореми вичерпують всі можливості і попарно не перетинаються, то доведення критерію завершено. $\square$

Лема 1 і теорема 1 призводять до наступного наслідку.

Наслідок 1. *Якщо або A , або B є оборотним елементом кільця $\mathcal{S}_p$, то рівняння (1) завжди має розв'язок.*

З першого твердження теореми 1 безпосередньо впливає наступний критерій існування та єдиності розв'язку рівняння (1), і, зокрема, критерій існування тільки тривіального розв'язку відповідного однорідного рівняння.

Наслідок 2. *Справедливі наступні твердження.*

1. Рівняння (1) над кільцем $\mathcal{S}_p$ має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли $B_0 = 0$ і $A_0 \neq 0$. Цей розв'язок визначається формулою

$$X_n = -A^{-1}F_n - BA^{-2}F_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (8)$$

2. Однорідне рівняння

$$BX_{n+1} = AX_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (9)$$

має тільки тривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли $B_0 = 0$, $A_0 \neq 0$.

З наслідку 2 випливає наступне твердження.

Наслідок 3. Якщо однорідне рівняння (9) має тільки тривіальний розв'язок, то для будь-якої послідовності $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ елементів кільця $\mathcal{S}_p$ рівняння (1) має єдиний розв'язок. Цей розв'язок визначається формулою (8).

Доведення. За першим твердженням наслідку 2, маємо $B_0 = 0$, $A_0 \neq 0$. Застосовуючи друге твердження наслідку 2, одержуємо, що рівняння (1) має єдиний розв'язок. Цей розв'язок визначається формулою (8). $\square$

4. Розв'язність початкової задачі для неявного лінійного різницевого рівняння над кільцем $\mathcal{S}_p$

В (2) зобразимо $Y_0 = Y_{0,0} + Y_{1,0}t$, де $Y_{0,0}, Y_{1,0} \in \mathbb{Z}_p$. Користуючись результатами теореми 1, сформулюємо і доведемо наступний критерій розв'язності початкової задачі (1), (2).

Теорема 2. Справедливі наступні твердження.

1. Початкова задача (1), (2) має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконано одну з наступних умов:

(a) $B_0 \neq 0$.

(б) $B_0 = 0$, $A_0 \neq 0$ і $Y_0 = -A^{-1}F_0 - BA^{-2}F_1$;

При цьому єдиний розв'язок початкової задачі (1), (2) має вигляд

$$X_n = \begin{cases} B^{-n}A^nY_0 + \sum_{s=0}^{n-1} B^{-s-1}A^sF_{n-s-1}, & B_0 \neq 0, \\ -A^{-1}F_n - BA^{-2}F_{n+1}, & B_0 = 0, A_0 \neq 0, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Початкова задача (1), (2) має нескінченно багато розв'язків тоді і тільки тоді, коли $A_0 = B_0 = 0$ і $F_{0,n} = 0$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. При цьому загальний розв'язок цієї початкової задачі визначено рівністю $X_n = X_{0,n} + tX_{1,n}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де $X_{1,0} = Y_{1,0}$, $\{X_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ — довільна послідовність елементів поля $\mathbb{Z}_p$, а послідовність $\{X_{0,n}\}_{n=0}^{\infty}$ має наступний вигляд:

$$X_{0,0} = Y_{0,0}, \quad X_{0,n} = B_1^{-n}A_1^nY_{0,0} + \sum_{s=0}^{n-1} B_1^{-s-1}A_1^sF_{1,n-s-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

3. Початкова задача (1), (2) не має розв'язків тоді і тільки тоді, коли $B_0 = 0$ і виконано одну з наступних умов:

(а) $A_0 = 0$ і $F_{0,n} \neq 0$ при деякому $n \in \mathbb{Z}_+$;

(б) $A_0 \neq 0$ і $Y_0 \neq -A^{-1}F_0 - BA^{-2}F_1$.

Доведення. Доведемо достатність першого твердження теореми. Якщо виконано умову 1а або 1б, то, за теоремою 1, рівняння (1) має скінченне число розв'язків, при цьому загальний розв'язок визначено формулою (3). Ця формула показує, що розв'язок початкової задачі (1), (2) однозначно визначається початковою умовою (2). Це доводить достатність першого твердження теореми.

Доведемо достатність другого твердження теореми. Нехай тепер $A_0 = B_0 = 0$ і $F_{0,n} = 0$ при всіх n . За другим твердженням теореми 1, загальний розв'язок рівняння (1) визначено рівністю $X_n = X_{0,n} + tX_{1,n}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де $\{X_{1,n}\}_{n=0}^\infty$ — довільна послідовність елементів поля $\mathbb{Z}_p$, а послідовність $\{X_{0,n}\}_{n=0}^\infty$ визначено рівністю (4), де $X_{0,0}$ — довільний елемент поля $\mathbb{Z}_p$. Тому загальний розв'язок початкової задачі (1), (2) визначено рівністю $X_n = X_{0,n} + tX_{1,n}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), де $X_{1,0} = Y_{1,0}$, $\{X_{1,n}\}_{n=1}^\infty$ — довільна послідовність елементів поля $\mathbb{Z}_p$, а послідовність $\{X_{0,n}\}_{n=0}^\infty$ визначено рівністю (10). Достатність другого твердження теореми 2 доведено.

Доведемо достатність третього твердження теореми. Якщо $B_0 = 0$ і виконано умову 3а, то, за третім твердженням теореми 1, рівняння (1) не має розв'язків, відповідно і початкова задача (1), (2) не має розв'язків. Якщо ж $B_0 = 0$ і виконано умову 3б, то, за першим твердженням теореми 1, рівняння (1) має єдиний розв'язок, який задовольняє умову $X_0 = -A^{-1}F_0 - BA^{-2}F_1$. Тому при $Y_0 \neq -A^{-1}F_0 - BA^{-2}F_1$ початкова задача (1), (2) не має розв'язків. Достатність третього твердження теореми 2 доведено.

Ми довели достатність кожного з тверджень теореми. Аналогічно доведенню теореми 1, оскільки достатні умови всіх трьох тверджень теореми вичерпують всі можливості і попарно не перетинаються, то доведення критерію завершено. $\square$

5. Приклад

Розглянемо приклад застосування отриманих результатів.

Приклад 1. Нехай $A_0, A_1 \in \mathbb{Z}_p$. Розглянемо рівняння

$$tX_{n+1} = (A_0 + A_1t)X_n + F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (11)$$

над кільцем $\mathcal{S}_p$. Рівняння (11) має вигляд (1), де $A = A_0 + A_1t$, $B = t$, $B_0 = 0$, $B_1 = 1$. Якщо $A_0 \neq 0$, то, за першим твердженням леми 1, елемент A є

оборотним, і $A^{-1} = A_0^{-1} - A_0^{-2}A_1t$. За наслідком 2, існує єдиний розв'язок рівняння (11). Він визначається наступним чином:

$$\begin{aligned} X_n &= -A^{-1}F_n - A^{-2}BF_{n+1} = -(A_0^{-1} - A_0^{-2}A_1t)F_n - (A_0^{-2} - 2A_0^{-3}A_1t)tF_{n+1} = \\ &= (A_0^{-2}A_1t - A_0^{-1})F_n - A_0^{-2}tF_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \quad (12)$$

За першим твердженням теореми 2, якщо виконано умову $A_0 \neq 0$, то початкова задача (11), (2) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $Y_0 = (A_0^{-2}A_1t - A_0^{-1})F_0 - A_0^{-2}tF_1$. Відповідний розв'язок початкової задачі (11), (2) визначається рівністю (12).

Тепер нехай $A_0 = 0$ і $F_{0,n} = 0$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. За другим твердженням теореми 1, існує нескінченно багато розв'язків рівняння (11). При цьому загальний розв'язок цього рівняння має вигляд $X_n = X_{0,n} + X_{1,n}t$, де $X_{0,0}$ — довільний елемент поля $\mathbb{Z}_p$, $\{X_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$ — довільна послідовність елементів поля $\mathbb{Z}_p$, а послідовність $\{X_{0,n}\}_{n=1}^{\infty}$ визначається формулою

$$\begin{aligned} X_{0,n} &= B_1^{-n}A_1^nX_{0,0} + \sum_{s=0}^{n-1} B_1^{-s-1}A_1^sF_{1,n-s-1} = \\ &= A_1^nX_{0,0} + \sum_{s=0}^{n-1} A_1^sF_{1,n-s-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

При цьому, за другим твердженням теореми 2, початкова задача (11), (2) також має нескінченно багато розв'язків, і її загальний розв'язок має вигляд $X_n = X_{0,n} + X_{1,n}t$, де $X_{1,0} = Y_{1,0}$, $\{X_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ — довільна послідовність елементів поля $\mathbb{Z}_p$, а послідовність $\{X_{0,n}\}_{n=0}^{\infty}$ визначається формулою

$$X_{0,0} = Y_{0,0}, \quad X_{0,n} = A_1^nY_{0,0} + \sum_{s=0}^{n-1} A_1^sF_{1,n-s-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Якщо $A_0 = 0$ і $F_{0,n} \neq 0$ для деякого $n \in \mathbb{Z}_+$, то, за третім твердженням теореми 1, рівняння (11) не має розв'язків і, відповідно, початкова задача (11), (2) також не має розв'язків.

6. Висновки

У даній статті досліджено неявне лінійне різницеве рівняння першого порядку над скінченними комутативними кільцями з одиницею, порядок яких дорівнює p^2 . Встановлено необхідні і достатні умови розв'язності цього рівняння над кільцем $\mathcal{S}_p$, а за умови існування розв'язку визначено кількість розв'язків та загальний вигляд розв'язку. Аналогічні результати отримано для початкової задачі над кільцем $\mathcal{S}_p$.

Наведено приклад, що демонструє використання одержаних теоретичних результатів. У подальшому планується дослідити неявне лінійне різницеве рівняння над іншими класами скінченних комутативних кілець з одиницею.

Подяки. Цю роботу було частково підтримано грантом Фонду Ахієзера (Харків).

Історія статті: отримана: 27 лютого 2025; прийнята: 31 травня 2025.

REFERENCES

1. A. B. Goncharuk. Implicit linear difference equations over a non-Archimedean ring, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics". — 2021. — Vol. **93**. — P. 18–33. 10.26565/2221-5646-2021-93-03
2. S. Gefter, A. Goncharuk, A. Piven. Implicit Linear First Order Difference Equations Over Commutative Rings, In: Elaydi, S., Kulenovic, M.R.S., Kalabusic, S. (eds) Advances in Discrete Dynamical Systems, Difference Equations and Applications. ICDEA 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — 2023. — Vol. **416**. — P. 199–216. 10.1007/978-3-031-25225-9_10
3. V. A. Gerasimov, S. L. Gefter, A. B. Goncharuk. Application of the p -adic Topology on $\mathbb{Z}$ to the Problem of Finding Solutions in Integers of an Implicit Linear Difference Equation, J. Math. Sci. — 2018. — Vol. **235**, No. 2. — P. 256–261. 10.1007/s10958-018-4072-x
4. V. V. Martseniuk, S. L. Gefter, A. L. Piven. Uniqueness criterion and Cramers rule for implicit higher order linear difference equations over $\mathbb{Z}$, Progress on Difference Equations and Discrete Dynamical Systems (eds. S. Baigent, M. Bohner, S. Elaydi), Springer. — 2020. — Vol. **341**. — P. 311–325. 10.1007/978-3-030-60107-2_16
5. S. L. Gefter, A. L. Piven'. Implicit Linear Nonhomogeneous Difference Equation over $\mathbb{Z}$ with a Random Right-Hand Side, J. Math. Physics, Analysis, Geometry. — 2022. — Vol. **18**, No. 1. — P. 105–117. 10.15407/mag18.01.105
6. M. V. Heneralov, A. L. Piven'. Implicit linear difference equation over residue class rings, Algebra and Discrete Mathematics. — 2024. — Vol. **37**, No. 1. — P. 85–105. 10.12958/adm2110
7. B. Fine. Classification of Finite Rings of Order p^2 , Mathematics Magazine. — 1993. — Vol. **66**, No. 2. — P. 248–252. 10.2307/2690742
8. A. Nowicki. Tables of finite commutative local rings of small orders. Conference: UMK, Torun. — 2018. <https://www.researchgate.net/publication/328319576>
9. N. Dunford, J. T. Schwartz. Linear Operators. Part I: General theory. 1988. John Wiley & Sons, New York, 851 p.

10. S. Elaydi. Introduction to difference equations. 2005. Springer-Verlag, New York.

Article history: Received: 27 February 2025; Accepted: 31 May 2025.

Implicit linear difference equations over finite commutative rings of order p^2 with identity

M. V. Heneralov

Department of Fundamental Mathematics

V. N. Karazin Kharkiv National university

4 Svobody sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

It is known that, up to isomorphism, there are exactly four finite commutative rings with identity, whose order is equal to p^2 , where p is a prime number. Namely, these rings are the residue class ring modulo p^2 , the direct sum of two residue class rings $\mathbb{Z}_p$ modulo p , the field of order p^2 and the ring $\mathcal{S}_p = \mathbb{Z}_p[t]/(t^2)$. Recently, a solvability criterion was established for the first-order linear difference equation over the residue class ring modulo $m \geq 2$. Considering this, it appears necessary to solve the solvability problem for the linear difference equation over the ring $\mathcal{S}_p$ of order p^2 .

This paper investigates first-order implicit linear difference equations over the ring $\mathcal{S}_p$. The paper presents the solvability criterion for the mentioned equation over this ring. In addition, the obtained results describe both the number of solutions and the form of the general solution of this equation. Analogous results were obtained for the initial problem over the ring $\mathcal{S}_p$. In particular, it was established that, unlike in the case of an integral domain, the initial problem over the ring $\mathcal{S}_p$ may have infinitely many solutions. Moreover, if it has a finite number of solutions, then the solution of this initial problem is unique. We obtain several corollaries of the solvability criterion for the implicit linear difference equation over the ring $\mathcal{S}_p$. In particular, as in Fredholm theory, we show that if a homogeneous equation, which corresponds to the non-homogeneous equation, has only the trivial solution, then the non-homogeneous equation, which is being investigated, has a unique solution.

The article includes an example demonstrating the application of the obtained theoretical results to solving a certain equation over the ring $\mathcal{S}_p$ and the corresponding initial problem.

The results may be applied to further studies of linear difference equations over finite rings, and also to the general theory of discrete dynamical systems.

Keywords: implicit linear difference equation; finite ring; initial problem; solvability.

How to cite this article:

M. V. Heneralov, Implicit linear difference equations over finite commutative rings of order p^2 with identity, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 101, 2025, p. 21–30, (in Ukrainian). DOI: 10.26565/2221-5646-2025-101-02