

С. М. Чуйко

професор, доктор фізико-математичних наук
завідувач кафедри математики та інформатики
Донбаський державний педагогічний університет
Батюка, 19, Слов'янськ Донецької області, Україна, 84116
chujko-slav@ukr.net  <http://orcid.org/0000-0001-7186-0129>

О. В. Несмєлова

доцент, доктор фізико-математичних наук
заступник директора з наукової роботи
Інститут прикладної математики і механіки НАН України
Батюка, 19, Слов'янськ Донецької області, Україна, 84116
star-o@ukr.net  <http://orcid.org/0000-0003-2542-5980>

О. В. Чуйко

доцент, кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри методики навчання математики та методики навчання інформатики
Донбаський державний педагогічний університет
Батюка, 19, Слов'янськ Донецької області, Україна, 84116
chujko-e@ukr.net  <http://orcid.org/0000-0002-6032-490X>

Нелінійні крайові задачі для вироджених диференціально-алгебраїчних систем у некритичному випадку

Нами отримані умови існування та схема побудови розв'язків слабконелінійної крайової задачі для виродженої диференціально-алгебраїчної системи у некритичному випадку. Крайову умову визначає слабконелінійний векторний функціонал. Лінійна частина поставленої задачі являє собою лінійну нетерову крайову задачу для виродженої диференціально-алгебраїчної системи. Лінійні диференціально-алгебраїчні крайові задачі досліджені у монографіях S. Campbell, J.R. Magnus, A.M. Samoilenko та В.П. Яковця. У роботах А.М. Самойленка та О.А. Бойчука з використанням центральної канонічної форми отримані необхідні і достатні умови існування розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач. Нами отримані необхідні і достатні умови існування розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних систем без використання центральної канонічної форми, що дає можливість досліджувати розв'язність диференціально-алгебраїчних крайових задач у залежності від довільних неперервних функцій. Такий підхід значно урізноманітнює класифікацію нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач у критичних і некритичних випадках.

Постановка слабконелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі, дослідженої нами, узагальнює крайові задачі, досліджені в роботах Ю.О. Митро-

© Чуйко С. М., Несмєлова О. В., Чуйко О. В., 2024; CC BY 4.0 license

польського, А.М. Самойленка, а також О.А. Бойчука. Досліджено випадок, коли диференціально-алгебраїчна система не розв'язна відносно похідної, при цьому запропоновані заміни невідомої, які приводять вихідну систему до нелінійної диференціально-алгебраїчної системи, розв'язної відносно похідної. Наприкінці статті наведено приклад нелінійної диференціально-алгебраїчної антиперіодичної крайової задачі для рівняння типу Ріккати, який демонструє конструктивність отриманих необхідних і достатніх умов існування розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних систем. Отримані результати можна перенести на задачі про знаходження умов існування та схеми побудови розв'язків нелінійної виродженої диференціально-алгебраїчної крайової задачі у критичних випадках, а також на задачі про знаходження умов стійкості таких розв'язків.

Ключові слова: нелінійна крайова задача; вироджена диференціально-алгебраїчна система; некритичний випадок; рівняння типу Ріккати.

2020 Mathematics Subject Classification: 34B15

1. Постановка задачі

Досліджуємо задачу про знаходження умов існування та побудову розв'язків [1]

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі

$$A(t)z'(t, \varepsilon) = B(t)z(t, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \quad (1)$$

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \quad (2)$$

Розв'язки крайової задачі (1), (2) шукаємо в малому околі розв'язку

$$z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$$

нетерової ($n \neq k$) породжуючої диференціально-алгебраїчної задачі [9, 3]

$$A(t)z'_0(t) = B(t)z_0(t) + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^q. \quad (3)$$

Тут

$$A(t), B(t) \in \mathbb{C}_{m \times n}[a, b]$$

— неперервні матриці, $f(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ — неперервний вектор; $Z(z, t, \varepsilon)$ — нелінійна функція, неперервно-диференційовна за невідомою $z(t, \varepsilon)$ у малому околі розв'язку породжуючої задачі, неперервна по $t \in [a, b]$ і неперервно-диференційовна по малому параметру; $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ — лінійний та $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ — нелінійний векторний функціонали

$$\ell z(\cdot, \varepsilon), \quad J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^q,$$

причому другий функціонал неперервно-диференційовний за невідомою $z(t, \varepsilon)$ та неперервний по малому параметру ε у малому околі розв'язку породжуючої задачі та на відрізку $[0, \varepsilon_0]$.

Нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача (1), (2) узагальнює численні постановки нелінійних нетерових крайових задач [1, 4].

**2. Умови розв'язності лінійної крайової задачі
для виродженої диференціально-алгебраїчної системи**

За умови [3]

$$P_{A^*(t)} \neq 0 \quad (4)$$

система (3) не розв'язна відносно похідної; тут $P_{A^*(t)}$ — матриця-ортопроектор [1]:

$$P_{A^*(t)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(A^*(t)).$$

Припустимо, що матриця $A(t)$ має сталий ранг, а саме:

$$1 \leq \text{rank } A(t) = \sigma_0.$$

Як відомо [3], довільна $(m \times n)$ — матриця $A(t)$ у певному базисі може бути представлена у вигляді

$$A(t) = R_0(t) \cdot J_{\sigma_0} \cdot S_0(t), \quad J_{\sigma_0} := \begin{pmatrix} I_{\sigma_0} & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad R_0(t) \in \mathbb{C}_{m \times m}[a, b];$$

тут $R_0(t)$ і $S_0(t)$ — невироджені матриці:

$$S_0(t) \in \mathbb{C}_{n \times n}[a, b].$$

Невироджена заміна змінної $y(t) = S_0(t)z(t)$ приводить систему (3) до вигляду

$$J_{\sigma_0} y'(t) = C_0(t)y(t) + R_0^{-1}(t)f(t); \quad (5)$$

тут

$$C_0(t) := (J_{\sigma_0} S_0'(t) + R_0^{-1}(t)B(t)) S_0^{-1}(t) := \begin{pmatrix} C_{11}^{(0)}(t) & C_{12}^{(0)}(t) \\ C_{21}^{(0)}(t) & C_{22}^{(0)}(t) \end{pmatrix}.$$

Заміна змінної

$$y(t) = \text{col } (u(t), v(t)) \in \mathbb{C}_n^1[a, b], \quad u(t) \in \mathbb{C}_{\sigma_0}^1[a, b], \quad v(t) \in \mathbb{C}_{n-\sigma_0}^1[a, b]$$

приводить систему (5) до вигляду

$$u'(t) = C_{11}^{(0)}(t)u(t) + C_{12}^{(0)}(t)v(t) + g_1^{(0)}(t), \quad (6)$$

$$C_{21}^{(0)}(t)u(t) + C_{22}^{(0)}(t)v(t) + g_2^{(0)}(t) = 0, \quad (7)$$

Тут $P_{D_0^*}(t)$ — матриця-ортопроектор:

$$P_{D_0^*}(t) : \mathbb{R}^{m-\sigma_0} \rightarrow \mathbb{N}(D_0^*(t)),$$

крім того

$$R_0^{-1}(t)f(t) := \text{col} \left(g_1^{(0)}(t), g_2^{(0)}(t) \right).$$

Рівняння (7) розв'язне тоді і тільки тоді, коли [1, 3]

$$P_{D_0^*}(t)g_2^{(0)}(t) \equiv 0;$$

в цьому випадку загальний розв'язок рівняння (7)

$$y(t) = P_{D_{\rho_0}} \varphi(t) - D_0^+(t)g_2^{(0)}(t),$$

$$D_0(t) := \begin{bmatrix} C_{21}^{(0)}(t); C_{21}^{(0)}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m-\sigma_0) \times n}, \quad \varphi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}[a, b]$$

визначає $P_{D_{\rho_0}}(t) - (n \times \rho_0)$ - матриця, утворена із ρ_0 лінійно-незалежних стовпців $P_{D_0}(t)$ - матриці-ортопроектора:

$$P_{D_0}(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(D_0(t)).$$

Позначивши блоки матриці $P_{D_{\rho_0}}(t)$ і добутку $D_0^+(t)g_2^{(0)}(t)$:

$$P_{D_{\rho_0}}(t) := \text{col} (P_1^{(0)}(t), P_2^{(0)}(t)), \quad D_0^+(t)g_2^{(0)}(t) = - \text{col} \left(f_1^{(1)}(t), f_2^{(1)}(t) \right),$$

приходимо до задачі про побудову розв'язків

$$\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}^1[a, b]$$

лінійної диференціально-алгебраїчної системи

$$A_1(t)\varphi'(t) = B_1(t)\varphi(t) + f_1(t), \quad A_1(t) := P_1^{(0)}(t) \in \mathbb{R}^{\sigma_0 \times \rho_0}; \quad (8)$$

тут

$$B_1(t) := C_{11}^{(0)}(t)P_1^{(0)}(t) + C_{12}^{(0)}(t)P_2^{(0)}(t) - A_1'(t),$$

крім того

$$\text{rank } A_1(t) := \sigma_1 = \sigma_0 \leq \rho_0,$$

$$f_1(t) := C_{11}^{(0)}(t)f_1^{(1)}(t) + C_{12}^{(0)}(t)f_2^{(1)}(t) + g_1^{(0)}(t) - \left(f_1^{(1)}(t) \right)'.$$

За умови [3]

$$P_{A^*} \neq 0, \quad P_{A_1^*} \equiv 0, \quad P_{D_0^*}f_1(t) \equiv 0 \quad (9)$$

система (8) розв'язна відносно похідної

$$\frac{d\varphi}{dt} = A_1^+(t)B_1(t)\varphi + \mathfrak{F}_1(t, \nu_1(t)), \quad \nu_1(t) \in \mathbb{C}_{\rho_1}[a; b]; \quad (10)$$

тут

$$\mathfrak{F}_1(t, \nu_1(t)) := A_1^+(t)f_1(t) + P_{A_{e_1}}(t)\nu_1(t).$$

Крім того $P_{A_1^*}(t)$ — неперервна [5] матриця-ортопроектор:

$$P_{A_1^*}(t) : \mathbb{R}^{\sigma_0} \rightarrow \mathbb{N}(A_1^*(t)),$$

$P_{A_{\rho_1}}(t)$ — $(n \times \rho_1)$ — матриця, утворена із ρ_1 лінійно-незалежних стовпців $(\rho_0 \times \rho_0)$ -вимірної неперервної [5] матриці-ортопроектора

$$P_{A_1}(t) : \mathbb{R}^{\rho_0} \rightarrow \mathbb{N}(A_1(t)).$$

Позначимо $U_1(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$U_1'(t) = A_1^+(t)B_1(t)U_1(t), \quad U_1(a) = I_{\rho_1}$$

отриманої традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь (10). За умови (9) система (10), а відповідно і система (3), має розв'язок вигляду [3]

$$z(t, c_{\rho_1}) = X_1(t)c_{\rho_1} + P_{D_{\rho_0}}S_0^{-1}(t)K \left[\mathfrak{F}_1(s, \nu_1(s)) \right] (t) - S_0^{-1}(t)D_0^+(t)g_2^{(0)}(t), \quad c_{\rho_1} \in \mathbb{R}^{\rho_1},$$

де

$$X_1(t) := S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}U_1(t), \quad K \left[\mathfrak{F}_1(s, \nu_1(s)) \right] (t) := X_0(t) \int_a^t X_0^{-1}(s) \mathfrak{F}_1(s, \nu_1(s)) ds.$$

Таким чином, за умови (9) лінійна диференціально-алгебраїчна система (3) має розв'язок вигляду

$$z(t, c_{\rho_1}) = X_1(t)c_{\rho_1} + K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (t), \quad X_1(t) := P_{D_{\rho_0}}S_0^{-1}(t)U_1(t), \quad c_{\rho_1} \in \mathbb{R}^{\rho_1},$$

де

$$K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (t) := P_{D_{\rho_0}}S_0^{-1}(t)K \left[\mathfrak{F}_1(s, \nu_1(s)) \right] (t) - S_0^{-1}(t)D_0^+(t)g_2^{(0)}(t)$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (3). У випадку (9) будемо казати, що для лінійної диференціально-алгебраїчної системи (3) має місце виродження першого порядку [3].

Зафіксуємо довільну неперервну вектор функцію

$$\nu_1(t) \in \mathbb{C}_{\rho_1}[a, b].$$

Підставляючи загальний розв'язок

$$z(t, c_{\rho_1}) = X_1(t)c_{\rho_1} + K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (t), \quad c_{\rho_1} \in \mathbb{R}^{\rho_1},$$

задачі Коші $z(a) = c_{\rho_1}$ для диференціально-алгебраїчного рівняння (3) у крайову умову (3), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння

$$Q c_{\rho_1} = \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (\cdot). \quad (11)$$

Рівняння (11) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (\cdot) \right\} = 0. \quad (12)$$

Тут P_{Q^*} — ортопроектор: $\mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{N}(Q^*)$; матриця $P_{Q_d^*}$ утворена з d лінійно-незалежних рядків ортопроектора P_{Q^*} , крім того

$$Q := \ell X_1(\cdot) \in \mathbb{R}^{q \times \rho_1}.$$

За умови (12) і тільки за неї, загальний розв'язок рівняння (11)

$$c = Q^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (\cdot) \right\} + P_{Q_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3)

$$z(t, c_r) = X_r(t) c_r + X_1(t) Q^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (\cdot) \right\} + K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (t).$$

Тут P_Q — матриця-ортопроектор:

$$\mathbb{R}^{\rho_1} \rightarrow \mathbb{N}(Q);$$

матриця $P_{Q_{r_1}} \in \mathbb{R}^{\rho_1 \times r}$ утворена з r лінійно-незалежних стовпців ортопроектора P_Q . Таким чином, доведена наступна лема [3].

Лема. За умови (9) лінійна диференціально-алгебраїчна система (3) має розв'язок вигляду

$$z(t, c_{\rho_1}) = X_1(t) c_{\rho_1} + K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (t), \quad X_1(t) := P_{D_{\rho_0}} S_0^{-1}(t) U_1(t), \quad c_{\rho_1} \in \mathbb{R}^{\rho_1},$$

де

$$K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (t) := P_{D_{\rho_0}} S_0^{-1}(t) K \left[\mathfrak{F}_1(s, \nu_1(s)) \right] (t) - S_0^{-1}(t) D_0^+(t) g_2^{(0)}(t)$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (3). За умови (12) і тільки за неї для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_1(t) \in \mathbb{C}_{\rho_1}[a, b]$ загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3)

$$z(t, c_r) = X_r(t) c_r + G \left[f(s); \nu_1(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3)

$$G \left[f(s); \nu_1(s); \alpha \right] (t) := X_1(t) Q^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (\cdot) \right\} + K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (t).$$

3. Умови розв'язності нелінійної крайової задачі для виродженої диференціально-алгебраїчної системи

Припустимо, що породжуюча крайова задача (3) вироджена і некритична ($P_{Q^*} = 0$), при цьому породжуюча задача (3) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α . Загальний розв'язок породжуючої диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3) для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_1(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ має вигляд

$$z(t, c_{\rho_1}) = X_1(t)c_{\rho_1} + K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (t).$$

Розв'язки крайової задачі (1), (2) шукаємо в малому околі розв'язку породжуючої задачі:

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon).$$

Для знаходження вектора

$$x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad x(t, \cdot) \in \mathbb{C}^1[0, \varepsilon_0], \quad x(t, 0) \equiv 0$$

приходимо до задачі

$$A(t)x'(t, \varepsilon) = B(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad (13)$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \quad (14)$$

Невироджена заміна змінної

$$y(t) = S_0(t)x(t)$$

приводить систему (13) до вигляду

$$J_{\sigma_0} y'(t) = C_0(t)y(t) + \varepsilon R_0^{-1}(t)Z(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon). \quad (15)$$

Заміна змінної

$$y(t) = \text{col } (u(t), v(t)) \in \mathbb{C}_n^1[a, b],$$

$$u(t) \in \mathbb{C}_{\sigma_0}^1[a, b], \quad v(t) \in \mathbb{C}_{n-\sigma_0}^1[a, b]$$

приводить систему (15) до вигляду

$$u'(t) = C_{11}^{(0)}(t)u(t) + C_{12}^{(0)}(t)v(t) + \varepsilon Z_1(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad (16)$$

$$C_{21}^{(0)}(t)u(t) + C_{22}^{(0)}(t)v(t) + \varepsilon Z_2(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = 0; \quad (17)$$

тут

$$\begin{aligned} & R_0^{-1}(t)Z(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) := \\ & = \text{col } (Z_1(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), Z_2(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)). \end{aligned}$$

Рівняння (17) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{D_0^*}(t)Z_2(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \equiv 0; \quad (18)$$

при цьому загальний розв'язок рівняння (17) має вигляд

$$y(t) = P_{D_{\rho_0}}\mu(t) - D_0^+(t)Z_2(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon).$$

Позначивши блоки матриці

$$P_{D_{\rho_0}}(t) := \text{col} (P_1^{(0)}(t), P_2^{(0)}(t))$$

і добутку

$$D_0^+(t)Z_2(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = - \text{col} (M(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon), N(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon)),$$

приходимо до задачі про побудову розв'язків

$$\mu(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}^1[a, b]$$

нелінійної диференціально-алгебраїчної системи

$$A_1(t)\mu'(t) = B_1(t)\mu(t) + \varepsilon Y(y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon), t, \varepsilon); \quad (19)$$

тут

$$A_1(t) := P_1^{(0)}(t), \quad B_1(t) := C_{11}^{(0)}(t)P_1^{(0)}(t) + C_{12}^{(0)}(t)P_2^{(0)}(t) - \left(P_1^{(0)}(t)\right)';$$

крім того

$$Y(y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon), t, \varepsilon) := C_{11}^{(0)}(t)M(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + \\ + C_{12}^{(0)}(t)N(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + Z_1(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) - M_y'(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\mu'(t).$$

За умови $P_{A_1^*}(t) \equiv 0$ система (19), принаймні однозначно, розв'язна відносно похідної:

$$\frac{d\mu}{dt} = A_1^+(t)B_1(t)\mu + \varepsilon A_1^+(t)Y(y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon), t, \varepsilon). \quad (20)$$

За умови (9) і (18) система (13) має розв'язок вигляду

$$x(t, c_{\rho_1}(\varepsilon)) = X_1(t)c_{\rho_1}(\varepsilon) + \varepsilon K \left[Z(z(s, \varepsilon), s, \varepsilon), \nu_1(s) \right] (t),$$

де

$$X_1(t) := S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}U_1(t), \quad K \left[Z(z(s, \varepsilon), s, \varepsilon), \nu_1(s) \right] (t) := \\ = S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}U_1(t) \int_a^t U_1^{-1}(s)A_1^+(s)Y(y(s, \varepsilon), y'(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds - \\ - S_0^{-1}(t)D_0^+(t)Z_2(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad c_{\rho_1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\rho_1}.$$

Таким чином, за умови (9) і (18) розв'язок нелінійної диференціально-алгебраїчної системи (1) має вигляд

$$z(t, c_{\rho_1}) = z_0(t, c_{\rho_1}) + x(t, c_{\rho_1}(\varepsilon)),$$

де

$$z_0(t, c_{\rho_1}) = X_1(t)c_{\rho_1} + K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (t).$$

У некритичному випадку задача (1), (2) розв'язна для довільних нелінійностей. Загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (13), (14) для фіксованої неперервної вектор-функції

$$\nu_1(t) \in \mathbb{C}[a, b]$$

має вигляд

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon),$$

де

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) := \varepsilon G \left[Z(z_0(s, c_r) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon); \nu_1(s); J(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] (t).$$

Розв'язки крайової задачі (1), (2) при цьому визначає операторна система

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), \quad x(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left[Z(z_0(s, c_r) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon); \nu_1(s); J(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] (t).$$

Для побудови розв'язків цієї операторної системи може бути використаний [1] метод простих ітерацій:

$$z_{k+1}(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x_{k+1}(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon), \quad (21)$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left[Z(z_0(s, c_r) + x_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon); \nu_1(s); J(z_0(\cdot, c_r) + x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] (t).$$

Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (3) задовольняє вимоги лєми. У некритичному випадку ($P_{Q^*} = 0$) породжуюча задача (3) розв'язна для довільних неоднорідностей диференціально-алгебраїчної системи і крайової умови (3) і для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_1(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ має r лінійно-незалежних розв'язків*

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \nu_1(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

За умов (9) та (18) для побудови розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) може бути використана збіжна при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ ітераційна схема (21).

Для визначення величини ε_* може бути використаний метод мажорируючих рівнянь Ляпунова [1, 4]; крім того, конструктивна оцінка величини ε_* може бути знайдена аналогічно [6]. На відміну від статей [7, 8] результат теореми отриманий без використання означення центральної канонічної форми лінійної диференціально-алгебраїчної системи [9].

Приклад. Вимоги теореми задовольняє нелінійна диференціально-алгебраїчна антиперіодична задача для рівняння типу Ріккати

$$A(t) z'(t) = B(t)z(t) + f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) := z(0, \varepsilon) + z(\pi, \varepsilon) = 0, \quad (22)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 & \cos t \\ \cos t & \cos t & \sin t \\ -\sin t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix}.$$

крім того

$$z(t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a(t, \varepsilon) \\ z_b(t, \varepsilon) \\ z_c(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad Z(z, t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a^2(t, \varepsilon) \\ 0 \\ z_a^2(t, \varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{A^*(t)} \neq 0$, умова (4) не виконана, при цьому матриця $A(t)$ може бути представлена у вигляді

$$A(t) = R_0(t) \cdot J_{\sigma_0} \cdot S_0(t), \quad J_{\sigma_0} := \begin{pmatrix} I_3 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = 3;$$

тут

$$P_{A^*(t)} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - \cos 2t & \sin 2t & \cos 2t - 1 & -\sin 2t \\ \sin 2t & 1 + \cos 2t & -\sin 2t & -1 - \cos 2t \\ \cos 2t - 1 & -\sin 2t & 1 - \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & -1 - \cos 2t & \sin 2t & 1 + \cos 2t \end{pmatrix},$$

$$R_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ \cos t & \sin t & \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad S_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— невироджені матриці. У даному випадку матриця

$$A_1(t) = I_3$$

невироджена, тому має місце виродження першого порядку, при цьому

$$P_{A_1}(t) = 0, \quad P_{A_{\rho_1}}(t) = 0,$$

тому шуканий розв'язок

$$z(t, c_3) = X_1(t)c_3 + K \left[f(s) \right] (t), \quad c_3 \in \mathbb{R}^3$$

не залежить від довільної неперервної функції $\nu_1(t)$; тут

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 \\ e^{-t} - 1 & e^{-t} & 1 - e^{-t} - t \end{pmatrix},$$

а також

$$K \left[f(s) \right] (t) = \begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ 0 \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(0) = 0$ для лінійної частини диференціально-алгебраїчної системи (22). Загальний розв'язок породжуючої задачі визначає невироджена матриця

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 + e^{-\pi} & 1 + e^{-\pi} & 1 - e^{-\pi} - \pi \end{pmatrix},$$

отже, для диференціально-алгебраїчної крайової задачі (22) має місце не критичний випадок. Таким чином, знаходимо єдиний розв'язок породжуючої задачі

$$z_0(t) = G \left[f(s); \alpha \right] (t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна породжуючої задачі для диференціально-алгебраїчної крайової задачі (22). Оскільки $D_0 = 0$, то $D_0^+ = 0$, отже, умова (18) виконана. Умову (9) для диференціально-алгебраїчної системи (22) також виконано. Для побудови розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (22) може бути використана ітераційна схема (21), при цьому, поклавши $c_r(\varepsilon) := 0$, отримуємо:

$$x_1(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x_{1a}(t, \varepsilon) \\ 0 \\ x_{1c}(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

де

$$x_{1a}(t, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{12} \left(9 \sin t + \sin 3t \right),$$

$$x_{1c}(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{60} \left(15 \cos t - 3 \cos 3t - 15 \sin t + \sin 3t \right).$$

Аналогічно, на другому кроці отримуємо:

$$x_2(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x_{2a}(t, \varepsilon) \\ 0 \\ x_{2c}(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

де

$$x_{2a}(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1\ 310\ 400} \left(8400 \varepsilon \cos t + 3080 \varepsilon \cos 3t + 168 \varepsilon \cos 5t - 15\ 120 \sin t - \right.$$

$$\left. -3535 \varepsilon^2 \sin t - 1680 \sin 3t + 945 \varepsilon^2 \sin 3t + 133 \varepsilon^2 \sin 5t + 5 \varepsilon^2 \sin 7t \right),$$

$$x_{2c}(t, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{1\ 310\ 400} \left(327\ 600 \cos t + 546\ 000 \varepsilon \cos t - 143\ 325 \varepsilon^2 \cos t - \right.$$

$$\left. -65\ 520 \cos t - 29\ 120 \varepsilon \cos t + 12285 \varepsilon^2 \cos 3t - 1680 \varepsilon \cos 5t + 5775 \varepsilon^2 \cos 5t + \right.$$

$$\left. +273 \varepsilon \cos 7t - 327\ 600 \sin t + 546\ 000 \varepsilon \sin t + 143\ 325 \varepsilon \sin t + 21840 \sin 3t - \right.$$

$$\left. -87\ 360 \varepsilon \sin 3t - 4095 \varepsilon^2 \sin 3t - 8400 \varepsilon \sin 5t - 1155 \varepsilon^2 \sin 5t - 39 \varepsilon^2 \sin 7t \right).$$

Таким чином, на другому кроці нами отримано друге наближення до розв'язку крайової задачі (22):

$$z_2(t, \varepsilon) = z_0(t) + (z_1(t, \varepsilon) - z_0(t)) + (z_2(t, \varepsilon) - z_1(t, \varepsilon)).$$

У даному випадку перша скобка першого порядку по ε , а друга — другого, тому існують константи q_1, q_2 , для яких

$$\|z_1(t, \varepsilon) - z_0(t)\| = \varepsilon q_1, \quad \|z_2(t, \varepsilon) - z_1(t, \varepsilon)\| = \varepsilon^2 q_2.$$

Використовуючи мажорантну ознаку, отримуємо умову практичної збіжності отриманих наближень до розв'язку крайової задачі (22):

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < \min \left(\frac{q_0}{q_1}, \frac{q_1}{q_2} \right) \approx 1,08\ 603.$$

Для оцінки точності знайдених наближень до розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (22) визначимо нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) := \left\| \left\| A(t) z'_k(t, \varepsilon) - B(t) z_k(t, \varepsilon) - f(t) - \varepsilon Z(z_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right\|_{\mathbb{R}^4} \right\|_{\mathbb{C}[0, 2\pi]}$$

нульового, першого і другого наближення до розв'язку крайової задачі (22), зокрема, отримуємо

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0,141\,421, \quad \Delta_0(0, 01) \approx 0,0141\,421, \quad \Delta_0(0, 001) \approx 0,00141\,421.$$

Аналогічно:

$$\Delta_1(0, 1) \approx 0,0122\,244, \quad \Delta_1(0, 01) \approx 0,000\,120\,317, \quad \Delta_1(0, 001) \approx 1,20\,124 \times 10^{-6};$$

$$\Delta_2(0, 1) \approx 0,0016\,323, \quad \Delta_2(0, 01) \approx 1,63\,418 \times 10^{-6}, \quad \Delta_2(0, 001) \approx 1,6342 \times 10^{-9}.$$

Відзначимо також, що нульове і перші два наближення до розв'язку крайової задачі (22) в точності задовольняють крайову умову.

Отримані результати можна перенести на задачі про знаходження умов існування та схеми побудови розв'язків нелінійної виродженої диференціально-алгебраїчної крайової задачі [9, 10, 11] у критичних випадках [1, 12, 13, 14], а також на задачі про знаходження умов стійкості таких розв'язків [15].

Історія статті: отримана: 17 серпня 2024; останній варіант: 5 вересня 2024
прийнята: 18 жовтня 2024.

REFERENCES

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems; 2-th edition. Berlin; Boston: De Gruyter. – 2016. – 298 p. 10.1515/9783110378443
2. S. L. Campbell. Singular Systems of differential equations. San Francisco–London–Melbourne. Pitman Advanced Publishing Program. – 1980. – 178 p.
3. S. M. Chuiko. On a reduction of the order in a differential-algebraic system, Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – Vol. **235**, No. **1**. – P. 2-18. 10.1007/s10958-018-4054-z
4. E. Grebenikov, Yu. Ryabov. Constructive methods in the analysis of nonlinear systems. Mir Publishers. – 1983. – 442 p.
5. S. M. Chuiko. Differential-algebraic boundary-value problems with the variable rank of leading-coefficient matrix, Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2021. – Vol. **259**, No. **1**. – P. 10–22. 10.1007/s10958-021-05597-8
6. A. S. Chuiko. Domain of convergence of an iterative procedure for a weakly nonlinear boundary value problem, Nonlinear Oscillations (N.Y.). – 2005. – Vol. **8**, No. **2**. – P. 277-287. 10.1007/s11072-005-0056-0

7. M. A. Perepelitsa, A. A. Pokutniy. Study of solvability of weakly nonlinear differential-algebraic systems, Bulletin of YuSU. Series "Mathematical Modelling and Programming". – 2013. – Vol. 6, No. 4. – P. 55-62.
8. A. A. Boichuk, L. M. Shehda. Degenerate nonlinear boundary-value problems, Ukrainian Mathematical Journal. – 2009. – Vol. 61, No. 9. – P. 1387-1403. 10.1007/s11253-010-0284-z
9. S. L. Campbell. Singular Systems of differential equations. San Francisco–London–Melbourne. Pitman Advanced Publishing Program. – 1980. – 178 p.
10. S. L. Campbell, C. D. Meyer. Generalized Inverses of Linear Transformations. London. Pitman Publishing Limited. – 1979. – 272 p.
11. P. Benner, M. Bollhofer, D. Kressner, C. Mehl, T. Stykel. Numerical Algebra, Matrix Theory, Differential-Algebraic Equations and Control Theory. Springer International Publishing. – 2015. – 608 p. 10.1007/978-3-319-15260-8
12. S. M. Chuiko. A weakly nonlinear boundary value problem in a special critical case, Ukrainian Mathematical Journal. – 2009. – Vol. 61, No. 4. – P. 657–673. 10.1007/s11253-009-0227-8
13. A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev, A. M. Samoilenko. Normal-solvable boundary value problems. Kyiv. Naukova Dumka. – 2019. – 628 c. (in Russian).
14. O. A. Boichuk, S. M. Chuiko. Constructive methods of analysis of boundary value problems of the theory of nonlinear oscillations. Kyiv. Naukova Dumka. – 2023. – 232 p. (in Ukrainian). 10.37863/6581477912-64
15. V. I. Korobov, M. O. Bebiya. Stabilization of some class of nonlinear systems that are uncontrollable the first approximation. Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukraine. – 2014. – No. 2. – P. 20–25 (in Russian). 10.15407/dopovidi2014.02.020

Article history: Received: 17 August 2024; Final form: 5 September 2024

Accepted: 18 October 2024.

Nonlinear boundary value problems for degenerate differential-algebraic systems in the noncritical case

S. M. Chuiko¹, O. V. Nesmelova², O. V. Chuiko¹

¹*Donbas State Pedagogical University*

19, Batiuka, Sloviansk, Ukraine, 84116

²*Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine*

19, Batiuka, Sloviansk, Ukraine, 84116

We have obtained the conditions of existence and a scheme for constructing solutions of a weakly nonlinear boundary value problem for a degenerate differential-algebraic system in the noncritical case. The boundary condition is determined by a weakly nonlinear vector functional. The linear part of the problem is a linear boundary value problem for a degenerate differential-algebraic system. Linear differential-algebraic boundary value problems have been studied in monographs by S. Campbell, J.R. Magnus, A.M. Samoilenko and V.P. Yakovets. In the works of A.M. Samoilenko and O.A. Boichuk, using the central canonical form, the necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of nonlinear differential-algebraic boundary value problems were obtained. We have obtained necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of nonlinear differential-algebraic systems without using the central canonical form, which allows us to study the solvability of differential-algebraic boundary value problems that depend on arbitrary continuous functions. This approach significantly varies the classification of nonlinear differential-algebraic boundary value problems in critical and noncritical cases.

Our formulation of the weakly nonlinear differential-algebraic boundary value problem generalises the boundary value problems studied in the works of Yu.O. Mitropolsky, A.M. Samoilenko, and O.A. Boichuk. The case when a differential-algebraic system is not solvable with respect to the derivative is considered, and substitutions of the unknown are proposed. It leads the original system to a nonlinear differential-algebraic system solvable with respect to the derivative. Finally, we present an example of a nonlinear differential-algebraic antiperiodic boundary value problem for a Riccati-type equation, which demonstrates the constructiveness of the obtained necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of nonlinear differential-algebraic systems. The obtained results can be transferred to the problems of finding conditions for the existence and schemes for constructing solutions of nonlinear degenerate differential-algebraic boundary value problems in critical cases, as well as to the problems of finding conditions for the stability of such solutions.

Keywords: nonlinear boundary value problem; degenerate differential-algebraic system; noncritical case; Riccati-type equation.

How to cite this article:

S. M. Chuiko, O. V. Nesmelova, O. V. Chuiko. Nonlinear boundary value problems for degenerate differential-algebraic systems in the noncritical case. *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 100, 2024, p. 4–18, (in Ukrainian). DOI: 10.26565/2221-5646-2024-100-01