ISSN 2221-5646(Print) 2523-4641(Online)
Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics”
2024, Vol. 99, p. 4–21
DOI: 10.26565/2221-5646-2024-99-01
УДК 517.957

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
2024, Том 99, с. 4–21

К. В. Стєпанова
кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри прикладної математики
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
e.v.stiepanova@karazin.ua *http://orcid.org/0000-0003-2294-155X*

Д. Р. Шевчук
магістр кафедри прикладної математики
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
d.shevtchuk@gmail.com *http://orcid.org/0000-0002-2553-9657*

Поведінка узагальненого розв'язку початково-крайової задачі для нелінійного параболічного рівняння

В рамках даної роботи нами вивчається поведінка узагальненого розв'язку (або так званого енергетичного розв'язку) цікавої початково-крайової задачі (а саме розглядається задача Коші-Діріхле) для параболічного рівняння, що є нелінійним. Дослідження проводиться в циліндричній області. На параметри рівняння накладається структурна умова, яка відповідає процесу повільної дифузії. Отже, в статті маємо справу з розподілом концентрації речовини в просторі та часі з урахуванням початкових та крайових умов. Цей процес має прикладний аспект та знаходить своє застосування в фізиці та інженерії, наприклад, для вивчення дифузії речовини в середовищах зі змінною концентрацією чи хімічним впливом. Розв'язання таких задач дозволяє отримати важливі дані щодо еволюції системи та прогнозувати її поведінку в різних умовах. У роботі в результаті проведеного нами дослідження було встановлено декілька інтегральних співвідношень, різних оцінок та нерівностей, які приводять до необхідності аналізу поведінки диференціальної системи нерівностей, яка, в свою чергу, дає змогу встановити наявність властивості локалізації розв'язку. Так, спираючись на добре відомі результати щодо поведінки розв'язку отриманої диференціальної системи, вдається знайти умову, що гарантує локалізацію носія розв'язку для досліджуваної задачі Коші-Діріхле. Основним результатом роботи є теорема, яка доведена при довільній фінітній початковій функції та при умові виконання певного обмеження на граничний режим. Стаття має досить стандартну структуру та, окрім анотацій та літератури, містить наступні структурні елементи: вступ; постановка задачі; основні означення; формулювання основного результату; допоміжні нерівності для доведення основного результату; допоміжні твердження для доведення теореми; доведення основного результату; висновок.

Ключові слова: **поведінка узагальненого розв'язку; початково-крайова задача; граничний режим.**

2020 Mathematics Subject Classification: 35A23; 35D30.

1. Вступ

Задача, яка буде досліджена в рамках цієї роботи, моделює розподіл концентрації речовини в просторі та часі з урахуванням початкових та крайових умов. Цей процес має практичний аспект та знаходить своє застосування в фізиці та інженерії, наприклад, для вивчення дифузії речовини в середовищах зі змінною концентрацією чи хімічним впливом. Розв'язання таких задач дозволяє отримати важливі дані щодо еволюції системи та прогнозувати її поведінку в різних умовах. Тут вивчається поведінка узагальненого розв'язку початково-крайової задачі для параболічного рівняння, в результаті якого знайдено умову на граничний режим для наявності властивості локалізації розв'язку при довільній фінітній початковій функції.

В якості простого представника досліджуваної задачі розглянемо наступне рівняння:

$$u_t - \Delta_p u = 0,$$

де

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{t} > 0$$

$$p \text{ – додатнє дійсне число;}$$

$$n \text{ – розмірність простору,} \quad n \geq 1.$$

Розглянемо окремо більш детально еліптичний оператор, що фігурує в рівнянні:

$$\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = |\nabla u|^{p-4}|\nabla u|^2 \Delta u + (p-2)\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

В критичних точках ($\nabla u = 0$) оператор є виродженим для $p > 2$ і сингулярним, коли $p < 2$.

Розглянемо декілька випадків:

- при $p = 1$ $\quad \Delta_1 u = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = -H$, де H – це оператор середньої кривизни;
- при $p = 2$ маємо звичайний оператор Лапласа:

$$\Delta_2 u = \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

- при $p = n$, де n – це число незалежних змінних, інтеграл має наступний вигляд:

$$\int_\Omega |\nabla u|^n dx = \int \ldots \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 \right\}^{\frac{n}{2}} dx_1 \ldots dx_n.$$

- при $p = \infty$:

$$\Delta_p u \equiv |\nabla u|^{p-4} \left(|\nabla u|^2 \Delta u + (p-2)\Delta_\infty u \right) = 0$$

є граничним рівнянням при $p \to \infty$. Розділивши його на $|\nabla u|^{p-4}$ і $(p-2)$, отримаємо

$$\frac{|\nabla u|^2 \Delta u}{p-2} + \Delta_\infty u = 0.$$

Нехай $p \to \infty$, тоді маємо

$$\Delta_\infty u = 0.$$

Розв'язки цього рівняння називаються ∞-гармонічними функціями, а рівняння ∞-Лапласа записується у вигляді

$$\Delta_\infty \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

де $u = u\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ для n змінних.

Як відомо, Δ_p – це оператор p-Лапласа, який використовується в прикладних задачах фізики та широко представлений в різних галузях, наприклад, в реології, у гляціології або кригознавстві. Деякі нещодавні дослідження вказують на те, що навіть у броунівського руху є аналог і математична гра «Перетягування каната» призводить до випадку $p = \infty$.

2. Постановка задачі

В області $Q = (0,T) \times \Omega, \Omega = \Omega_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < |x| < R\}, n \geq 1$, $0 < T < \infty,\ R < \infty$, розглядається наступна задача Коші-Діріхле:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(|u|^{q-1} u \right) - \psi(t) \Delta_p u = 0, \quad \psi(t) > 0, \quad p > q \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma(1)} = \tilde{f}(t,x);\ u|_{\Gamma(R)} = 0; \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0 \in L_{q+1}(\Omega); \tag{3}$$

$$\text{supp } u_0 \in \{x \in R^n : |x| < d\}, 1 < d < R. \tag{4}$$

Тут

$$\Gamma(\text{s}) \equiv (0,\ \text{T}) \times \partial B(s),$$

$$B(s) = \{x \in R^n : |x| < s\}.$$

Виконується основна структурна умова:

$$0 < q < p, \tag{5}$$

тобто рівняння (1) є рівнянням типу «повільної дифузії». Гранична функція $\tilde{f}$ є слідом на $\Gamma(1)$ деякої функції $f(t,x)$ такої, що

$$f \in L_\infty\left((0,T_0)\times\Omega\right)\cap L_{p+1}\left(0,T_0;W^1_{p+1}(\Omega)\right) \quad \forall T_0<T, \tag{6}$$

$$\operatorname{supp} f \in [0,T]\times \mathrm{B}\left(R_0\right), R_0<R, \tag{7}$$

$$f'_t \in L_1\left(0,T_0;L_{q+1}(\Omega)\right)\cap L_{\frac{p+1}{p-q+1}}\left(0,T_0;L_{\frac{p+1}{p-q+1}}(\Omega)\right) \quad \forall T_0<T. \tag{8}$$

Характер загострення граничного режиму описується функцією

$$\begin{gathered}F(t)\equiv\int_\Omega|f(t,x)|^{q+1}dx+\\ +\int_0^t\psi(\tau)\int_\Omega\left|D_x f(\tau,x)\right|^{p+1}dxd\tau+\\ \int_0^t\psi(\tau)^{\frac{-q}{p-q+1}}\int_\Omega\left|f'_\tau(\tau,x)\right|^{\frac{p+1}{p-q+1}}dxd\tau+\\ +\left(\int_0^t\left(\int_\Omega\left|f'_\tau(\tau,x)\right|^{q+1}dx\right)^{\frac{1}{q+1}}d\tau\right)^{q+1} \forall t<T.\end{gathered} \tag{9}$$

Задача (1) – (5) моделює розподіл концентрації речовини в просторі та часі з урахуванням початкових та крайових умов. Модельність області Ω в задачі (1) – (5) продиктована лише бажанням уникнути додаткових громіздких (хоча при цьому й очевидних) побудов та обчислень. Всі результати залишаються справедливими для областей вигляду $B(R)\cap(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)$, $R<\infty$. Тут Ω – довільна однозв'язна область з C^1 – гладкою границею $\partial\Omega:\overline{\Omega}\subset B(R)$.

У викладках статті також будуть використовуватися наступні області:

$$\begin{gathered}\Gamma_a^b(\mathrm{s})\equiv(a,b)\times\partial B(s),\\ Q_a^b=(a,b)\times\Omega(s),\\ \Omega(s)=\Omega_R\setminus B(s),\quad \forall s>1,\\ B(s)=\left\{x\in R^n:|x|<s\right\}.\end{gathered}$$

3. Основні означення

У даному розділі розглянемо ключові та важливі означення, які будуть активно застосовуватися у подальшому.

Означення 1. *Функція $u(t,x)$ є узагальненим (енергетичним) розв'язком задачі (1) – (5), якщо для будь-якого $T_0<T$ виконується наступна інтегральна тотожність:*

$$\int_0^{T_0}\langle(|u|^{q-1}u)'_t,\eta\rangle dt-\int_0^{T_0}\int_\Omega\psi(t)\Delta_p u\eta_{x_i}dxdt=0, \tag{10}$$

де $\eta(t,x)$ – довільна функція із $L_{p+1}(0,T_0;W^1_{p+1}(\Omega,\partial\Omega))$,
та виконані наступні умови, що гарантують збіжність інтегралів:

1. *$u-f \in L_{p+1}(0,T_0;W^1_{p+1}(\Omega,\partial\Omega)) \cap L_\infty(0);T_0;L_{q+1}(\Omega))$;*

2. *$(|u|^{q-1})'_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0,T_0;(W^1_{p+1}(\Omega,\partial\Omega))^*)$*
та виконується початкова умова (3) в інтегральному сенсі

$$\int\limits_0^{T_0} \langle (|u|^{q-1}u)'_t, \zeta\rangle dt + \int\limits_0^{T_0}\int\limits_\Omega (|u|^{q-1}u - |u_0|^{q-1}u_0)\zeta'_t dxdt = 0$$

для довільної пробної функції $\zeta(t,x) \in L_{p+1}(0,T_0;W^1_{p+1}(\Omega,\partial\Omega)) \cap \cap W^1_1(0,T_0;L_\infty(\Omega))$, яка обертається в нуль (тобто є зникаючою) в околі $t=T_0$;

3. *початкова та гранична функції $f(t,x)$ задовільняють умові узгодження:*
$$f(0,x)-u_0(x) \in W^1_{p+1}(\Omega,\partial\Omega);$$

Через $W^1_r(\Omega,S)$, як це загальноприйнято, ми позначаємо в статті замикання за нормою $W^1_r(\Omega)$ множини функцій із класу $C^\infty(\Omega)$, які обертаються в нуль в околі $S\subset\partial\Omega, W^1_r(\Omega)\equiv W^1_r(\Omega,\varnothing)$.

В [1] було встановлено та доведено факт існування енергетичного (узагальненого) розв'язку для задачі Коші-Дірихле з більш загальним еліптичним оператором, що для досліджуваного тут рівняння (1) забезпечується першою та другою умовами Означення 1. Згідно з результатами роботи [2] остання (третя) умова в означенні узагальненого (енергетичного) розв'язку гарантує єдиність розв'язку для задачі (1) – (5) в сенсі Означення 1.

Означення 2. *Носієм розв'язку $u(t,x)$ є замикання множини $\operatorname{supp} u(t,\cdot)$, тобто*
$$\operatorname{supp} u(t,\cdot) = \overline{\{x\in\mathbb{R}^n : u(t,x)\neq 0\}}.$$

Доречним буде зазначити тут, що для рівняння з градієнтною нелінійністю, яке було розглянуто у вступі:
$$u_t - \Delta_p u = 0,$$
було знайдено автомодельний розв'язок, що відповідає граничній функції
$$f(t) = k(T-t)^{-n}, \quad n \text{ – розмірність простору.}$$
З аналізу структури знайденого розв'язку випливає, що граничний режим не руйнує властивість локалізації, що відповідає значенню $n=(p-1)^{-1},\ p>1$.

Слід зазначити, що ці та подібні результати були отримані шляхом бар'єрної техніки та пов'язані зі знаходженням рівзноманітних автомодельних розв'язків. А такий підхід у принципі не може бути застосований до рівнянь, які не допускають відповідних теорем порівняння. Тому важливим є пошук альтернативних методів дослідження та їх успішне застосування до вивчення поведінки узагальненого розв'язку початково-крайової задачі для рівняння (1), для якого неможливо побудувати автомодельний розв'язок, що і було зроблено в рамках представленого дослідження.

Означення 3. *Задача (1) – (5) має властивість локалізації, якщо її енергетичний розв'язок $u(t,x)$ має наступну властивість:*

$$\zeta(t) \equiv \inf\{r : \operatorname{supp} u(t,\cdot) \subset B(r)\} < R \quad \forall t < T. \tag{11}$$

4. Основний результат

Основний результат цієї роботи сформульовано в наступній теоремі.

Теорема 1. *Нехай граничний режим досліджуваної задачі Коші-Діріхле для нелінійного параболічного рівняння (1) – (5) задовільняє нерівності:*

$$F(t) \leqslant c\left(\int_t^T \psi(\tau)d\tau\right)^{-\frac{q+1}{p-q}} \qquad \forall t < T. \tag{12}$$

Тоді існують такі константи $c_i < \infty$, які «пам'ятають та акумулюють» константи з відомих нерівностей (нерівності Пуанкаре, інтерполяційної нерівності і т.п.), що були застосовані в результаті оцінювання та аналізу інтегралів, та константи $d < \infty$, які не залежать від зовнішнього радіусу R області Ω і такі, що початково-гранична задача (1) – (5) має властивість локалізації.

5. Допоміжні нерівності для доведення основного результату

Для доведення основного результату протягом роботи будуть застосовуватися добре відомі нижченаведені нерівності.

Інтерполяційна нерівність (див. [3]):

$$\|v\|L_{p+1(\partial\Omega(s))} < C_1 \|D_x v\|^{\theta}_{L_{p+1(\Omega(s))}} \|v\|^{1-\theta}_{L_{q+1(\Omega(s))}}, \tag{13}$$

де

$$v \in W^1_{p+1}(\Omega(s), \partial B(R)),$$
$$\Omega(s) = \Omega_R \setminus B(s), \quad \forall s > 1,$$
$$\Omega_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < |x| < R\},$$
$$B(s) = \{x \in R^n : |x| < s\} \quad \forall s > 1,$$
$$0 < \theta := \frac{(q+1) + n(p-q)}{(p+1)(q+1) + n(p-q)} < 1.$$

Нерівність Юнга з ε див., наприклад [4]:

$$ab \le \varepsilon a^p + c(\varepsilon) b^q, \tag{14}$$

де

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad \varepsilon > 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

Нерівність Пуанкаре [5]:

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{15}$$

де

$$1 \leq p < n;$$

Нерівність Фрідріхса [6]:

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \leq d^k \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p}, \tag{16}$$

де

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n; \qquad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1}_{x_1} \ldots \partial^{\alpha_n}_{x_n}}.$$

Нерівність Соболєва (p $>$ 1) та Гальярдо (p $=$ 1) [7]:

$$\|u\|^2_{L_r(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|^2_{L_p(\Omega)}, \quad \forall u \in C_0^\infty (\mathbb{R}^n),$$

для

$$1 \leq p < n.$$

6. Допоміжні твердження для доведення теореми

Лема 1. *Нехай $u(t,x)$ – узагальнений розв'язок початково-граничної задачі (1) – (5), тоді справедливою є оцінка*

$$\int_\Omega |u(b,x)|^{q+1} dx + \int_a^b \int_\Omega \psi(t) \, |D_x u|^{p+1} \, dxdt \leq$$
$$\leq c_1 \int_\Omega |u(a,x)|^{q+1} \, dx + c_2 \left(1 + \zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \right) F_1(a,b),$$

де

$$F_1(a,b) = \int_\Omega |f(b,x)|^{q+1} \, dx + \int_a^b \psi(t) \int_\Omega |D_x f|^{p+1} \, dxdt +$$
$$+ \left(\int_a^b \|f_t'(t,x)\|_{L_{q+1}(\Omega)} dt \right)^{q+1} + \int_a^b \psi(t)^{-\frac{q}{p-q+1}} \int_\Omega \|f_t'(t,x)\|^{\frac{p+1}{p-q+1}}_{L_{\frac{p+1}{p-q+1}}(\Omega)} dt,$$
$$F_1(0,b) = F(b).$$

Доведення.

Для $0 \leq a < b < T$ згідно з формулою інтегрування частинами [1], маємо рівність:

$$\int_a^b \int_\Omega \langle \left(|u|^{q-1}u\right)_t, (u-f)\rangle dxdt =$$
$$= \frac{q}{q+1} \int_\Omega \left(|u(b,x)|^{q+1} - |u(a,x)|^{q+1}\right) dx +$$
$$+ \int_a^b \int_\Omega \left(|u(t,x)|^{q-1}u(t,x) - |u(a,x)|^{q-1}u(a,x)\right) f_t'(t,x)dxdt -$$
$$- \int_\Omega \left(|u(b,x)|^{q-1}u(b,x) - |u(a,x)|^{q-1}u(a,x)\right) f(b,x)dx. \tag{17}$$

Підставимо пробну функцію $\eta = (u(t,x) - f(t,x))$ в другий доданок інтегральної тотожністі (10):

$$- \int_Q \psi(t) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(u-f)\right) dxdt =$$
$$= \int_Q \psi(t) \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(u-f)dxdt =$$
$$= \int_Q \psi(t) \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p+1} dxdt - \int_Q \psi(t) \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}dxdt,$$

де область $Q = (0,T) \times \Omega$.

Даний перехід дає можливість розглядати внесок часткових похідних розв'язку $u(t,x)$ та його відхилення від граничної умови у рамках інтегральних виразів, спрощуючи аналіз властивостей розв'язку.

Отже, підставляємо пробну функцію в інтегральну тотожність (10) з урахуванням рівності (17) та останньої викладки, отримуємо:

$$\frac{q}{q+1} \int_\Omega |u\,(b,x)|^{q+1}\, dx + \int_Q \psi(t) \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p+1} dxdt \leq$$
$$\leq \frac{q}{q+1} \int_\Omega |u\,(a,x)|^{q+1}\, dx -$$
$$- \int_a^b \int_\Omega \left(|u\,(t,x)|^{q-1}\, u\,(t,x) - |u\,(a,x)|^{q-1}\, u\,(a,x)\right) f_t'(t,x)dxdt +$$
$$+ \int_\Omega \left(|u(b,x)|^{q-1}u(b,x) - |u(a,x)|^{q-1}u(a,x)\right) f(b,x)dxdt +$$
$$+ \int_Q \psi(t) \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}dxdt. \tag{18}$$

Тепер оцінимо зверху стандартним чином за допомогою нерівностей (13) – (16) доданки, що знаходяться в правій частині нерівності (18). Таким чином,

$$I_1 = \int_a^b \int_\Omega |u(a,x)|^q \left|f_t'(t,x)\right| dxdt \le \varepsilon_1 \|u(a,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}(\Omega)} +$$
$$+ c_1(\varepsilon_1) \left(\int_a^b \left(\int_\Omega \left|f_t'(t,x)\right|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} dt \right)^{q+1};$$
$$I_2 = \int_a^b \int_\Omega |u(t,x)|^q \left|f_t'(t,x)\right| dxdt \le \int_a^b \left(\int_\Omega |u(t,x)|^{p+1} dx \right)^{\frac{q}{p+1}} \times$$
$$\times \left(\int_\Omega \left|f_t'(t,x)\right|^{\frac{p+1}{p-q+1}} dx \right)^{\frac{p-q+1}{p+1}} dt \le \int_a^b \psi(t)^{\frac{q}{p+1}} \zeta(t)^q \left(\int_\Omega |D_x u|^{p+1} dx \right)^{\frac{q}{p+1}} \times$$
$$\times \psi(t)^{-\frac{q}{p+1}} \left(\int_\Omega \left|f_t'(t,x)\right|^{\frac{p+1}{p-q+1}} dx \right)^{\frac{p-q+1}{p+1}} dt \le \varepsilon_2 \int_a^b \psi(t) \int_\Omega |D_x u|^{p+1} dxdt +$$
$$+ c(\varepsilon_2) \zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \int_a^b \psi(t)^{-\frac{q}{p-q+1}} \int_\Omega \left|f_t'(t,x)\right|^{\frac{p+1}{p-q+1}} dxdt,$$

де $\zeta_1(s) = \sup_{0 \le t < s} \zeta(t)$, $\zeta(t)$ з Означення 3;

$$I_3 = \int_\Omega \left(|u(b,x)|^q + |u(a,x)|^q\right) |f(b,x)| dx \le$$
$$\le \varepsilon_1 \left[\|u(b,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}(\Omega)} + \|u(a,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}(\Omega)} \right] + c_2(\varepsilon_1) \|f(b,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}(\Omega)};$$
$$I_4 = \int_a^b \int_\Omega \psi(t) \, |D_x u|^p \, |D_x f| \, dxdt \le$$
$$\le c \left(\int_Q \psi(t) \left(|D_x u|^{p+1} dxdt \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_Q \psi(t) |D_x f|^{p+1} dxdt \right)^{\frac{1}{p+1}} \le$$
$$\le \varepsilon_3 \left(\int_Q \psi(t) |D_x u|^{p+1} dxdt \right) + c_3(\varepsilon_3) \left(\int_Q \psi(t) |D_x f|^{p+1} dxdt \right).$$

З урахуванням (18), об'єднуючи всі отримані для інтегралів $I1 - I4$ оцінки, приходимо до глобальної апріорної оцінки:

$$\left(\frac{q}{q+1} - \varepsilon_1 \right) \|u(b,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}} + (1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \int_Q \psi(t) \, |D_x u|^{p+1} dxdt \le$$
$$\le \left(\frac{q}{q+1} + 2\varepsilon_1 \right) \|u(a,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}} + c(\varepsilon_2) \zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \int_a^b \psi(t)^{-\frac{q}{p-q+1}} \times$$
$$\times \int_\Omega |f_t'(t,x)|^{\frac{p+1}{p-q+1}} dxdt + c_1(\varepsilon_1) \left(\int_a^b \left(\int_\Omega \left|f_t'(t,x)\right|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} dt \right)^{q+1} +$$
$$+ c_2(\varepsilon_1) \|f(b,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}(\Omega)} + c_3(\varepsilon_3) \left(\int_Q \psi(t) |D_x f|^{p+1} dxdt \right).$$

Зафіксуємо в останій нерівності ε_1 та ε_2 таким чином, що

$$\frac{q}{q+1} - \varepsilon_1 \ge \frac{q}{2(q+1)}; \quad (1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \ge \frac{1}{2},$$

тоді отримаємо:

$$\int_{\Omega} |u(b,x)|^{q+1} dx + \int_a^b \int_{\Omega} \psi(t)\, |D_x u|^{p+1}\, dxdt \le$$
$$\le c_1 \int_{\Omega} |u(a,x)|^{q+1}\, dx + c_2 \left(1 + \zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right) F_1(a,b), \text{ де}$$
$$F_1(a,b) = \int_{\Omega} |f(b,x)|^{q+1}\, dx + \int_a^b \psi(t) \int_{\Omega} |D_x f|^{p+1}\, dxdt +$$
$$+ \left(\int_a^b \|f_t'(t,x)\|_{L_{q+1}(\Omega)} dt\right)^{q+1} + \int_a^b \psi(t)^{-\frac{q}{p-q+1}} \int_{\Omega} \|f_t'(t,x)\|^{\frac{p+1}{p-q+1}}_{L_{\frac{p+1}{p-q+1}}(\Omega)} dt,$$
$$F_1(0,b) = F(b).$$

Лема 2. *Нехай $u(t,x)$ – узагальнений розв'язок початково-граничної задачі (1) – (5), тоді справедливою є нерівність*

$$\frac{q}{q+1} \int_{\Omega(s)} |u(b,x)|^{q+1} dx + \int_{Q_a^b(s)} \psi(t)\, |D_x u|^{p+1}\, dxdt \le$$
$$\le \frac{q}{q+1} \int_{\Omega(s)} |u(a,x)|^{q+1}\, dx + c \left(\int_{\Gamma_a^b(s)} \psi(t)\, |D_x u|^{p+1}\, d\gamma dt\right)^{\frac{p}{p+1}} \times$$
$$\times \left(\int_{Q_a^b(s)} \psi(t) |D_x u|^{p+1} dxdt\right)^{\frac{\theta}{p+1}} \left(\int_a^b \psi(t) \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx\right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt\right)^{\frac{1-\theta}{p+1}}.$$

Доведення.
Зафіксуємо $s > 1$ та $\delta > 0$;

$$\eta_{s,\delta}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < s; \\ \frac{\tau - s}{\delta}, & s \le \tau \le s + \delta; \\ 1, & \tau > s + \delta. \end{cases}$$

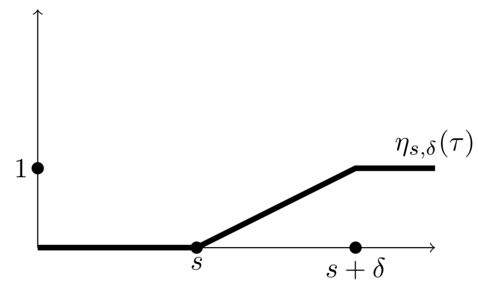

Рис.1. Профіль функції $\eta_{s,\delta}(\tau)$.
Pic.1. Function profile $\eta_{s,\delta}(\tau)$.

В якості пробної функції в інтегральній тотожності покладаємо: $\eta(t,x) = u(t,x)\eta_{s,\delta}(|x|)$.

$$\frac{q}{q+1}\int_{\Omega(s)} |u(b,x)|^{q+1}\eta_{s,\delta}(|x|)dx + \int_{Q_a^b(s)} \psi(t)|D_x u|^{p+1}\eta_{s,\delta}(|x|)dxdt =$$
$$= \frac{q}{q+1}\int_{\Omega(s)} |u(a,x)|^{q+1}\eta_{s,\delta}(|x|)dx -$$
$$- \int_{Q_a^b(s)\setminus Q_a^b(s+\delta)} \psi(t)\sum_{i=1}^{n}\left(|D_x u|^{p+1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)u(\eta_{s,\delta}(|x|)_{x_i}dxdt.$$

Переходячи до границі при $\delta \to 0$ як це було зроблено в [3] маємо:

$$\frac{q}{q+1}\int_{\Omega(s)} |u(b,x)|^{q+1}dx + \int_{Q_a^b(s)} \psi(t)\,|D_x u|^{p+1}\,dxdt =$$
$$\frac{q}{q+1}\int_{\Omega(s)} |u(a,x)|^{q+1}\,dx + \int_{\Gamma_a^b(s)} \psi(t)\sum_{i=1}^{n}|D_x u|^{p+1}\,u\nu_i d\gamma dt \le$$
$$\le \frac{q}{q+1}\int_{\Omega(s)} |u(a,x)|^{q+1}\,dx + c\left(\int_{\Gamma_a^b(s)} \psi(t)\,|D_x u|^{p+1}\,d\gamma dt\right)^{\frac{p}{p+1}} \times$$
$$\times\left(\int_{\Gamma_a^b(s)} \psi(t)|u|^{p+1}d\gamma dt\right)^{\frac{1}{p+1}}.$$

Покладемо тепер:

$$[a,b] = [t_{j-1},t_j]\,,\quad [0,T) = \bigcup_{j=1}^{\infty}[t_{j-1},t_j]\,,\quad t_0 = 0.$$

та зробимо оцінку доданку в правій частині попередньої нерівності за допомогою інтерполяційного співвідношення (13):

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi(t)\int_{\partial\Omega(s)}|u|^{p+1}d\gamma dt \le$$
$$\le c\int_{t_{j-1}}^{t_j}\int_{\Omega(s)}\psi^{\theta}(t)\|u\|^{p+1}_{L_{(p+1)\theta}(\Omega(s))}\psi(t)^{1-\theta}\|u\|^{(p+1)(1-\theta)}_{L_{p+1}(\Omega(s))}d\gamma dt \le$$
$$\le c\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi(t)\|D_x u\|^{p+1}_{L_{p+1}(\Omega(s))}dt\right)^{\theta}\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi(t)\|u\|^{p+1}_{L_{q+1}(\Omega(s))}dt\right)^{1-\theta},$$

тоді нерівність набуває вигляду

$$\int_{\Omega(s)} |u(t_j,x)|^{q+1}dx \le \int_{\Omega(s)} |u(t_{j-1},x)|^{q+1}dx+$$
$$+\,c\left(\int_{\Gamma_{t_{j-1}}^{t_j}(s)} \psi(t)|D_xu|^{p+1}d\gamma dt\right)^{\frac{p}{p+1}}\left(\int_{Q_{t_{j-1}}^{t_j}(s)} \psi(t)|D_xu|^{p+1}dxdt\right)^{\frac{\theta}{p+1}}\times$$
$$\times\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi(t)\left(\int_{\Omega(s)}|u|^{q+1}dx\right)^{\frac{p+1}{q+1}}dt\right)^{\frac{1-\theta}{p+1}}, \qquad (19)$$

що після інтегрування по $t \in (a,b)$ дає в точності результат Леми 2.

7. Доведення основного результату

Визначаємо два сімейства функцій, що пов'язані з $u(t,x)$:

$$h_j(s) = \text{ess}\ \sup_{t\in[t_{j-1},t_j]}\int_{\Omega(s)}|u(t,x)|^{q+1}dx;$$

$$E_j(s) = \int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi(t)\int_{\Omega(s)}|D_xu(t,x)|^{p+1}dxdt;$$

і монотонну послідовність:

$$t_j \to T, \quad t_0 = 0; \quad t_{j-1} < t_j, \quad j = 1,2\dots.$$

Оскільки

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi(t)\int_{\partial B(s)}|D_xu(t,x)|^{p+1}d\gamma dt = -\frac{d}{ds}E_j(s),$$

то (19) після застосування нерівності Юнга з ε (14) в нових термінах $h_j(s)$ та $E_j(s)$ дає диференціальну систему:

$$E_j(s) \le r_1h_{j-1}(s) + r_2\alpha_j^{\nu}\left(-\frac{dE_j(s)}{ds}\right)^{1+\mu}, \qquad (20)$$

$$h_j(s) \le (1+\delta_j)\,h_j(s) + r_3\delta_j^{\frac{-(p+1)\nu}{q+1}}\alpha_j^{\nu}\left(-\frac{dE_j}{ds}\right)^{1+\mu}, \qquad (21)$$

$$\forall s>1, \quad j\in\mathbb{N}, \quad \forall\delta_j>0,$$

де константи $r_1, r_2, r_3 < \infty$ залежать лише від відомих параметрів

$$\nu = \frac{(1-\theta)(q+1)}{q(p+1)+\theta(p-q)} < 1; \quad \mu = \frac{(1-\theta)(p-q)}{q(p+1)+\theta(p-q)}; \quad \alpha_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi(t)dt.$$

Для зручності домножимо обидві частини введених на початку параграфу функцій на $\alpha_j^{\frac{q+1}{p-q}}$:

$$A_j(s) = \alpha_j^{\frac{q+1}{p-q}} E_j(s); \quad H_j(s) = \alpha_j^{\frac{q+1}{p-q}} h_j(s) \Rightarrow$$

тоді очевидно, що нерівності (20) та (21) набувають вигляду:

$$A_j(s) \leq r_4 H_{j-1}(s) + r_2 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu},$$

$$H_j(s) \leq (1+\delta_j)\, \alpha_{j-1}^{\frac{q+1}{p-q}} h_{j-1}(s) + +r_3' \delta_j^{-\frac{(p+1)\nu}{q+1}} \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu}.$$

Розбиття $\{t_j\}$ та послідовність $\{\delta_j\}$ будемо обирати таким чином, щоб виконувалась строга нерівність:

$$(1+\delta_j) < \lambda = \text{const } < 1.$$

Тоді отримаємо:

$$A_j(s) \leq r_4 H_{j-1}(s) + r_2 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu} \tag{22}$$

$$H_j(s) \leq \lambda H_{j-1}(s) + r_3 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu} \tag{23}$$

Ітеруючи співвідношення (22), оцінюючи послідовно в правій частині усі $H_i(s)$ з урахуванням (23), маємо низку послідовних нерівностей:

$$\begin{aligned}
A_j(s) \leqslant & r_4 H_{j-1}(s) + r_2 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu} \\
\leqslant & r_4 \lambda H_{j-2}(s) + r_4 r_3 \left(-A_{j-1}'(s)\right)^{1+\mu} + r_2 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu} \\
\leqslant & r_4 \lambda^2 H_{j-3}(s) + r_4 r_3 \lambda \left(-A_{j-2}'(s)\right)^{1+\mu} \\
& + r_4 r_3 \left(-A_{j-1}'(s)\right)^{1+\mu} + r_2 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu} \\
\leqslant & s \leqslant r_4 \lambda^{j-1} H_0(s) + r_4 r_3 \Big[\lambda^{j-2} \left(-A_1'(s)\right)^{1+\mu} + \lambda^{j-3} \left(-A_2'(s)\right)^{1+\mu} \\
& + s + \lambda^2 \left(-A_{j-3}'(s)\right)^{1+\mu} + \lambda \left(-A_{j-2}'(s)\right)^{1+\mu} \\
& + \left(-A_{j-1}'(s)\right)^{1+\mu} + \frac{r_2}{r_3 r_4} \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu}\Big] \leqslant \\
\leqslant & r_4 \lambda^{j-1} H_0(s) + r_5 \sum_{i=1}^{j} \left(-\lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} A_i'(s)\right)^{1+\mu}
\end{aligned}$$

і остаточно отримуємо:

$$A_j(s) \leq r_4 \lambda^{j-1} \left(\int_0^T \psi(t)dt\right)^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(s) + r_5 \left[\sum_{i=1}^{j} \left(-\lambda^{\frac{j-i}{i+\mu}} A_i'(s)\right)\right]^{1+\mu}. \tag{24}$$

Якщо ввести сімейство невід'ємних функцій:

$$U_j(s) \equiv \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{i+\mu}} A_i(s), \quad j = 1, 2 \ldots.$$

і зауважити при цьому, що справедливою є наступна рівність

$$A_j(s) = U_j(s) - \lambda_j^{\frac{1}{1+\mu}} U_{j-1}(s),$$

то очевидно, що співвідношення (24) можна переписати наступним чином:

$$U_j(s) - \lambda_j^{\frac{1}{1+\mu}} U_{j-1}(s) \le r_4 \lambda^{j-1} \left(\int_0^T \psi(t)dt \right)^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(s) + r_5 \left(-U_j'(s)\right)^{1+\mu} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

тобто

$$U_j(s) \le \lambda_j^{\frac{1}{1+\mu}} U_{j-1}(s) + r_4 \lambda^{j-1} \left(\int_0^T \psi(t)dt \right)^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(s) + r_5 \left(-U_j'(s)\right)^{1+\mu} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

$$U_j(1) = \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{i+\mu}} A_i(1) = \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{i+\mu}} \alpha_i^{\frac{q+1}{p-q}} E_i(1) \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Для оцінки зверху $E_i(1)$ скористаємося нерівністю з Леми 1 при $a = 0,\ b = t_j$ маємо:

$$\int_\Omega |u(t_j,x)|^{q+1} dx + \int_0^{t_j} \int_\Omega |D_x u|^{p+1}\, dxdt$$
$$\leqslant c_1 \int_\Omega |u(0,x)|^{q+1} dx + c_2 \left(1 + \zeta_1(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right) F_1(0,t_j);$$

$$\int_\Omega |u(t_j,x)|^{q+1} dx + E_j(1)$$
$$\leqslant c_1 h_0(1) + c_2 \left(1 + \zeta_1(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right) F_1(t_j);$$

$$\int_\Omega |u(t_j,x)|^{q+1} dx + E_j(1)$$
$$\leqslant c_1 h_0(1) + c_2 \left(1 + \zeta_1(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right) C;$$

$$\int_\Omega |u(t_j,x)|^{q+1} dx + E_j(1)$$
$$\leqslant c_1 h_0(1) + c_2 \left(1 + \zeta_1(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right) C.$$

Отже,

$$E_j(1) \leqslant c_1 h_0(1) + c_3 \left(1 + \zeta_1\,(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right).$$

Тоді

$$U_j(1) = \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{i+\mu}} \alpha_i^{\frac{q+1}{p-q}} \left[c_1 h_0(1) + c_3 \left(1 + \zeta_1\,(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right) \right] \le$$

$$\le h_0(1) \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{i+\mu}} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi(t)dt \right)^{\frac{q+1}{p-q}} \left[c_1 + c_3 \left(1 - \lambda^{\frac{1}{1+\mu}}\right)^{-1} \left(1 + \zeta(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right) \right].$$

Таким чином, за умови, що

$$\sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi(t)dt \right)^{\frac{q+1}{p-q}} \leq \text{ const}$$

має місце оцінка:

$$U_j(1) \leq c_4 + c_5 \zeta(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}.$$

В свою чергу це приводить до системи диференціальних нерівностей

$$U_j(s) \leq c_6 U_{j-1}(s) + c_7 \left(-U_j'(s)\right)^{1+\mu}, \quad \forall s > d;$$
$$U_j(d) \leq c_4 + c_5 \zeta(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}, \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

А з цієї системи в силу Леми 6.3 статті [8] випливає наступна рівномірна оцінка для носіїв функцій $U_j(s)$:

$$\zeta\left(t_j\right) \leqslant \sup\left\{s : s \in \operatorname{supp} U_j\right\} \leqslant c_8 \left[c_4 + c_5 + c_5 \zeta_1\left(t_j\right)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right]^{\frac{\mu}{1+\mu}} + d,$$

де $c_8 = \left(\frac{c_7}{1-6}\right)^{\frac{1}{1+\mu}} \frac{1+\mu}{\mu}$.

З останньої нерівності випливає

$$\zeta\left(t_j\right) \leqslant d + c_8 \left(c_4 + c_5\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_8 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}} \zeta_1\left(t_j\right)^{\varkappa} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \tag{25}$$

де

$$\varkappa = \frac{q(p+1)(p-q)}{(p-q+1)[n(p-q)+(q+1)(p+1)]} < 1 \quad \forall n \geqslant 1, \quad p > q.$$

Для завершення доведення залишилося лише встановити оцінку зверху для функції $\zeta(t)$ на множині

$$S = \left\{t \in (0,T) : \zeta(t) = \zeta_1(t)\right\}. \tag{26}$$

Візьмемо довільну точку $\tilde{t}$:

$$\tilde{t} \in [T_0, T) \cap S, \quad \tilde{t} = t_{j_0}, \quad j_0 \in \mathbb{N}.$$

З огляду на співвідношення (25) і означення (26) маємо:

$$\begin{aligned} \zeta(\tilde{t}) = \zeta\left(t_{j_0}\right) &\leqslant d + c_8 \left(c_4 + c_5\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_8 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}} \zeta(\tilde{t})^{\varkappa} \\ &\leqslant d + c_8 \left(c_4 + c_5\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + \varepsilon \zeta(\tilde{t}) + c_9(\varepsilon) \left(c_8 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}}\right)^{\frac{1}{1-\varkappa}}, \end{aligned}$$

Це, у свою чергу, приводить до оцінки

$$\zeta(\tilde{t}) \leqslant (1-\varepsilon)^{-1}\left[d + c_8\,(c_4+c_5)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_9(\varepsilon)\left(c_8 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}}\right)^{\frac{1}{1-\varkappa}}\right] \equiv D(\varepsilon).$$

Розглянемо

$$D(\varepsilon) = (1-\varepsilon)^{-1}\left[d + c_8\,(c_4+c_5)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_9(\varepsilon)\left(c_8 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}}\right)^{\frac{1}{1-\varkappa}}\right] = \frac{D_0}{1-\varepsilon} \quad \forall\varepsilon > 0. \tag{27}$$

Усі постійні c_i, які фігурували у вищенаведених обчисленнях, не залежать від зовнішнього радіуса R області Ω. Тому при виконанні умови

$$d + c_8\,(c_4+c_5)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_9(\varepsilon)\left(c_8 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}}\right)^{\frac{1}{1-\varkappa}} < R \tag{28}$$

можна знайти $\varepsilon_0 > 0$ таке, що

$$\zeta(\tilde{t}) < D(\varepsilon) < R \quad \forall\tilde{t} \in [T_0, T)\,. \tag{29}$$

Ця оцінка є еквівалентною наявності властивості локалізації граничної задачі, що розглядається, при R, що задовольняє співвідношенням (28), (29). Таким чином, Теорему 1, яка є основним результатом роботи, доведено.

Висновок

Основний результат даної роботи має важливе значення в теорії рівнянь у частинних похідних і може бути застосований в різних галузях, таких як, наприклад, моделювання теплопровідності, дифузії та динаміки рідин. Результати, отримані в статті, можуть бути використані в подальших дослідженнях у галузі нелінійних параболічних рівнянь.

Історія статті: отримана: 20 квітня 2024; останній варіант: 19 травня 2024
прийнята: 21 травня 2024.

REFERENCES

1. H. W. Alt, S. Luckhaus. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations, Math. Z. – 1983. – Vol. **183**, No **3**. – P. 311–341. 10.1007/BF01176474

2. Ph. Benilan, P. Wittbold. On mild and weak solutions of elliptic-parabolic problems, Adv. Differential Equations. – 1996. – Vol. **1**, No **6**. – P. 1053–1073. 10.57262/ade/1366895244

3. J. I. Diaz, L. Veron. Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations, Trans. Amer. Math. Soc. – 1985. – Vol. **290**, No **2**. – P. 787–814. 10.2307/2000315

4. G. H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya. Inequalities. Cambridge University Press. – 1952. – P. 324.

5. H. Poincare. Sur les Equations aux Derivees Partielles de la Physique Mathematique, American Journal of Mathematics. – 1890. – Vol. **12**, No. **3** – P. 211–294. 10.2307/2369620

6. K. Rektorys. The Friedrichs Inequality. The Poincare inequality. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering (2nd ed.). Dordrecht: Reidel.– 1977. – P. 188–198. 10.1007/978-94-011-6450-4

7. E. Gagliardo. Ulteriori proprieta di alcune classi di funzioni in the most variabili. Ricerche Mat. – 1959. – Vol. **8**. – P. 24–51.

8. A. E. Shishkov, A. G. Shchelkov. Blow-up boundary regimes for general quasilinear parabolic equations in multidimensional domains, Sb. Math. – 1999. – V. **190**, No **3**. – P. 447–479. 10.1070/sm1999v190n03abeh000398

9. B. H. Gilding, M. A. Herrero. Localization and blow-up of thermal waves in nonlinear heat conduction, Math. Ann. – 1988. – Vol. **282**. – P. 223–242. 10.1007/BF01456972

10. C. Cortazar, M. Elgueta. Localization and boundedness of the solutions of the Neumann problem for a filtration equation, Nonlinear Anal. – 1989. – Vol. **13**, No **1**. – P. 33–41.

Article history: Received: 20 April 2024; Final form: 19 May 2024
Accepted: 21 May 2024.

The behavior of the generalized solution of the initial-boundary value problem for the nonlinear parabolic equation

K. V. Stiepanova, D. R. Shevchuk
V. N. Karazin Kharkiv National University
4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine, 61022

Within the framework of this work, we study the behavior of the generalized solution (or the so-called energy solution) of an interesting initial-boundary value problem (namely, the Cauchy-Dirichlet problem is considered) for nonlinear parabolic equation. The research is carried out in a cylindrical area. A structural condition is imposed on the parameters of the equation corresponding to the slow diffusion process. So, in the article we are dealing with the distribution of the substance concentration in space and time, taking into account the initial and boundary conditions. This process has a practical aspect and is used in physics and engineering, for example, to study the diffusion of matter in environments with variable concentration or chemical influence. Solving such problems allows obtaining important data on the evolution of the system and predicting its behavior in various conditions. In the work, as a result of our research, several integral ratios, various estimates and inequalities were established, which lead to the need to analyze the behavior of the differential system, which in turn makes it possible to establish the presence of the solution localization property. So, relying on the well-known results regarding the behavior of the solution of the resulting differential system, it is possible to find a condition that guarantees the localization of the solution carrier for the Cauchy-Dirichlet problem under study. The main result of the work is a theorem that is proved for an arbitrary finite initial function and under the condition of fulfilling a certain restriction on the limit mode. The article has a fairly standard structure and, in addition to annotations and literature, contains the following structural elements: introduction; Formulation of the problem; basic definitions; formulation of the main result; auxiliary inequalities for proving the main result; auxiliary statements for proving the theorem; proving the main result; conclusions.

Keywords: **behavior of the generalized solution; initial boundary value problem; boundary mode.**

How to cite this article:

K. V. Stiepanova, D. R. Shevchuk. The behavior of the generalized solution of the initial-boundary value problem for the nonlinear parabolic equation. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 99, 2024, p. 4–21 (in Ukrainian). DOI: 10.26565/2221-5646-2024-99-01