ISSN 2221-5646(Print) 2523-4641(Online)
Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics”
2024, Vol. 99, p. 51–61
DOI: 10.26565/2221-5646-2024-99-04
УДК 517.954

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
2024, Том 99, с. 51–61

О. А. Макаров
доцент, кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри прикладної математики
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
makarovifamily07@gmail.com *http://orcid.org/0000-0002-9050-4987*

А. В. Чернікова
магістр з прикладної математики
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 6, Харків, Україна, 61022
chernikova2018.7419475@student.karazin.ua *http://orcid.org/0009-0005-7976-5069*

Коректність та параболічність крайової задачі для систем диференціальних рівнянь у частинних похідних

У роботі досліджується крайова двоточкова задача для систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Не для будь-якої системи існує коректна двоточкова крайова задача. Так, для рівняння

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + i\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2}$$

не існує крайових умов вигляду $au(x_1, x_1, 0) + bu(x_1, x_2, T) = \varphi(x_1, x_2)$, при яких ця крайова задача буде буде коректна в просторі Л. Шварца.
У роботі з'ясовано умови для матриці системи, за яких існують коректні крайові задачі в просторі Л. Шварца, а також вказано вигляд ціх крайових умов. Так для систем з ермітовою матрицею крайова задача з умовами наступного вигляду $u(x, 0) + u(x, T) = \varphi(x)$ завжди буде коректною в просторі Л. Шварца, а також в просторах функцій кінцевої гладкості степеневого зростання. Для систем з однією просторовою змінною доведено, що завжди існують коректні крайові задачі з умовою $u(x, 0) + bu(x, T) = \varphi(x)$ з додатньою b. Крім того досліджуються параболічні крайові задачі, властивостью яких є збільшування гладкості розв'язків.
З'ясовано, що при умові степеневого зростання модуля власних значень матриці системи (тобто $|\operatorname{Re}\lambda_j(s)| \geq c|s|^h - b$ з додатними c і h) існують параболічні крайові задачі. Наведено приклади коректних та параболічних крайових задач.
Аналогічні результати мають місце для лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. В якості прикладу розглянуто рівняння Гельмгольця

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \Delta u(x, t) = ku(x, t),$$

яке не є коректним за Петровським, але для нього існує крайова задача, яка є параболічною. Для рівняння з однією просторовою змінною наведено достатні умови на рівняння другого порядку за часом, при яких існують параболічні крайові задачі.
Ключові слова: **крайова задача; коректність; параболічність; перетворення Фур'є; простір Л. Шварца.**

2020 Mathematics Subject Classification: 35S15.

Вступ

Крайова двоточкова задача для системи диференціальних рівнянь у частинних похідних відіграє важливу роль, як у самій математиці, так і в фізиці й інших застосуваннях [1, 2]. Ця задача неодноразово досліджувалася харківськими математиками Борок В. М., Макаровим О. А., Фардиголою Л. В. [3, 4, 5, 6]. Ними були отримані класи єдиності та умови коректності в класах функцій степеневого та експоненціального зростання. Не для будь-якої ситеми існує коректна двоточкова крайова задача [5].

У цій роботі досліджуються випадки систем, для яких існує коректна двоточкова крайова задача в просторі Л. Шварца, а також за яких умов ця задача буде параболічною, тобто за яких умов збільшується гладкість розв'язків. Доведено, що якщо власні значення матриці системи зростають степеневим чином, то існують параболічні крайові задачі.

Аналогічні результати справедливі також для лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку за часом.

Показано, що існує параболічна крайова задача для рівняння Гельмгольця. Детально розглянуто випадок рівняння другого порядку з однією просторовою змінною і вказано умови існування параболічної крайової задачі.

1. Постановка задачі

Розглянемо наступну крайову задачу

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) u(x,t), \tag{1}$$

$$Au(x,0) + Bu(x,T) = \varphi(x), \tag{2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$, $P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)$ — квадратна матриця, елементами якої є диференціальні оператори зі сталими коефіцієнтами; A і B є постійними квадратними матрицями.

Важливу роль у дослідження цієї задачі відіграє визначник крайової задачі $\Delta(s) = \det\left(A + Be^{TP(s)}\right)$.

Означення 1. Задача (1)–(2) *називається коректно розв'язною* із простору Φ_1 у простір Φ_2, якщо для будь-якої функції $\varphi(x)$ із простору Φ_1 існує единий розв'язок $u(x,t)$ із простору Φ_2 $(t \in [0;t])$; і цей розв'язок неперевно залежить від $\varphi(x)$ у топології відповідних просторів.

У якості просторів Φ_1 і Φ_2 будемо розглядати простір Л. Шварца $S = \bigcap\limits_{s,l} C_l^s$, який складається з нескінченно диференційовних функцій, що спадають швидше ніж будь-який ступінь, де C_l^s – нормований простір з нормою $\|\varphi(x)\| = \sup\limits_{|k|\le s;\, x\in\mathbb{R}^n} \left(|D^k\varphi(x)| \cdot (1+|x|)^l\right)$.

Означення 2. Задача (1)–(2) називається *параболічною*, якщо $Q(s,t) = e^{tP(s)}\left(A + Be^{TP(s)}\right)^{-1}$ задовольняє оцінку $\|Q(s,t)\| \le C(1+|s|)^p \exp\left(-b\rho(t)|s|^h\right)$ з деякими додатними C, p, h, де $\rho(t) = \min\{t, T-t\}$.

У роботі [6] доведено, що коректна крайова задача буде параболічною, якщо власні значення матриці $P(s)$ задовольняють умову $\min\limits_j |\operatorname{Re}\lambda_j(s)| \ge C|s|^h - b$ при деяких додатних C, h та $b \in \mathbb{R}$.

З'ясуємо — для яких систем (1) існують коректні крайові задачі з крайовими умовами (2), і в яких випадках ці задачі будуть параболічними.

2. Випадок ермітової матриці

Розглянемо випадок, коли матриця є ермітовою

$$P(s) = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & \dots & P_{1n}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{n1}(s) & \dots & P_{nn}(s) \end{pmatrix},$$

тобто $P_{ij} = \overline{P}_{ji}$ — комплексно спряжені.

Теорема 1. *Якщо матриця $P(s)$ — ермітова, то крайова задача з умовою*

$$u(x,0) + u(x,T) = \varphi(x), \tag{3}$$

кооректна у просторі S.

Доведення. Оскільки власні значення ермітової матриці є дійсними, то визначник крайової задачі $\Delta(s) = \left(1 + e^{T\lambda_1(s)}\right)\dots\left(1 + e^{T\lambda_n(s)}\right) \ne 0$.

Покажемо, що розв'язувальна матриця $Q(s,t) = e^{tP(s)}\left(E + e^{TP(s)}\right)^{-1}$ задовольняє степеневу оцінку. Розглянемо функцію $f(\lambda) = e^{t\lambda}\left(1 + e^{T\lambda}\right)^{-1}$. Дана функція визначена на дійсній осі.
Тому матриця $Q(s,t) = f(P(\lambda))$ також визначена та задовольняє степеневу оцінку $\|Q(s,t)\| \le C(1+|s|)^p$ (див. [5]).
Тому крайова задача (1)—(3) коректна в просторі S, а також у просторах C_l^s (див. [7]).

Приклад 1. Розглянемо матрицю

$$P(s) = \begin{pmatrix} s^2 & is \\ -is & -s^2 \end{pmatrix}.$$

Це ермітова матриця, власні значення якої $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{s^4 + s^2}$. Тоді крайова задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(x,0) + u_1(x,T) = \varphi_1(x), \\ u_2(x,0) + u_2(x,T) = \varphi_2(x). \end{cases}$$

коректна у просторі S, а також у просторі C_l^s.

Теорема 2. *Якщо власні значення ермітової матриці $P(s)$ задовольняють умову $|\lambda_j(s)| \geq C|s|^h - b$ із деякими додатними C, h і дійсним b, то крайова задача (1)—(3) буде параболічною. Це означає що, якщо $\varphi(x) \in C_l^s$, то $u(x,t) \in C_{l_2}^{\infty}$, тобто будуть нескінченно диференційовними по x.*

Доведення. Це випливає з [6].

Зауваження. За цією теоремою задача, що розглядається у Прикладі 1, є параболічною.

3. Випадок загальної матриці

Розглянемо довільну поліноміальну матрицю $P(s)$.

Теорема 3. *Якщо існує дійсне число α таке, що на множинах $N_j = \{s \in \mathbb{R}^n \,:\, Re\,\lambda_j = \alpha\}$ $j = 1, 2$ виконується нерівність $Im\,\lambda_j(s) \neq \dfrac{(2k+1)}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$ то при $b = e^{-\alpha T}$ крайова задача для системи (1) з умовою*

$$u(x,0) + bu(x,T) = \varphi(x) \tag{4}$$

коректна в просторі S.

Доведення. Оскільки визначник крайової задачі

$$\Delta(s) = \left(1 + e^{T(\lambda_1(s)-\alpha)}\right) \dots \left(1 + e^{T(\lambda_n(s)-\alpha)}\right),$$

то він набуває значення 0 при $\lambda_j = \alpha + \dfrac{(2k+1)\pi i}{T}$ з деяким j. Це рівносильно умові

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\lambda_j(s) = \alpha, \\ \operatorname{Im}\lambda_j(s) = \dfrac{(2k+1)\pi}{T}. \end{cases}$$

з деякими s.

Але, у силу умови теореми, це не виконується.

Доведемо тепер, що розв'язувальна матриця $Q(s,t) = e^{tP(s)} + \left(1 + be^{TP(s)}\right)^{-1}$ задовольняє степеневу оцінку. Ця матриця визначена на спектрі матриць $P(s)$, оскільки $\Delta(s) \neq 0$.

Якщо $\operatorname{Re}\lambda < \alpha$, то $|f(\lambda)| = \left|e^{t\lambda}\left(1+e^{T(\lambda-\alpha)}\right)^{-1}\right| < C_1$, так як $|e^{t\lambda}| = e^{t\operatorname{Re}(\lambda)} \le e^{T\alpha}$.

Якщо $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$, то $|f(\lambda)| = \left|e^{(t-T)(\operatorname{Re}(\lambda)-\alpha)}\left(1+e^{-T(\lambda-\alpha)^{-1}}\right)^{-1}\right| < C_2$, так як $e^{(t-T)(\operatorname{Re}(\lambda)-\alpha)} \le 1$.

Тому значення функції $f(\lambda)$ на спектрі матриці $P(s)$ обмежені, а це означає, що й $\|Q(s,t)\| \le C(1+|s|)^p$, так як $f(P(s)) = \sum_j f(\lambda_j(s))H_j(P(s))$.

Отже, крайова задача коректна у просторі S, а також із простору $C^{s_1}_{l_1}$ в простір $C^{s_2}_{l_2}$ з деякими s_j, l_j (див. [8]).

Приклад 2.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x_1,x_2,t)}{\partial t} = u_1(x_1,x_2,t) + \dfrac{\partial^2 u_2(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_2(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^2}, \\ \dfrac{\partial u_1(x_1,x_2,t)}{\partial t} = u_1(x_1,x_2,t) + u_2(x_1,x_2,t). \end{cases}$$

Матриця $P(s) = \begin{pmatrix} 1 & -s_1^2+s_2^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Її характеристичне рівняння $(\lambda-1)^2 + s_1^2 - s_2^2 = 0$, а власні значення $\lambda_{1,2}(s) = 1 \pm \sqrt{s_2^2 - s_1^2}$.

Це означає, що $\lambda_{1,2}(s) = \begin{cases} 1 \pm \sqrt{s_2^2 - s_1^2}, & \text{при} \quad |s_2| \ge |s_1|, \\ 1 \pm i\sqrt{s_1^2 - s_2^2}, & \text{при} \quad |s_2| < |s_1|. \end{cases}$

Тоді для будь-яких додатніх $\alpha \ne 1$ виконуються умови теореми 3, а це означає, що відповідна крайова задача коректна в просторі S.

Теорема 4. *Якщо власні значення матриці $P(s)$ задовольняють умові $\min\limits_j |Re\,\lambda_j(s)| \ge C|s|^h - b$ з деякими додатними C, h і дійсним b, то існує параболічна задача.*

Доведення. Покажемо, що з умов теореми 4 випливає виконання умов теореми 3.

Із умов теореми 4 випливає, що існує таке додатне r, при якому для будь яких $s : |s| > r$ виконується нерівність $|\operatorname{Re}\lambda_j(s)| \ge m > 0$.

Тоді множина $G_k = \left\{ s \in \bar{U}_r(0) \ : \ \operatorname{Im}\lambda_j(s) = \dfrac{(2k+1)\pi}{T} \right\}$ є компакт такий що $\dim G_k < n$.

Тоді $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} G_k \ne \bar{U}_r(0)$, а значить існує $s_0 \ : \ \operatorname{Re}\lambda_j(s_0) = \alpha$ таке, що $\operatorname{Im}\lambda_j(s_0) \ne \dfrac{(2k+1)\pi}{T}$, тобто виконана умова теореми 3. Таким чином, існує коректна крайова задача з умови (4), яка також буде параболічною.

Теорему доведено.

Зауваження. В Прикладі 2 крайова задача була коректною, але не параболічною. Наведемо приклад параболічної задачі.

Приклад 3.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = u_1(x,t) - \dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x_2^2}, \\ \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = u_1(x,t) + u_2(x,t). \end{cases}$$

Матриця $P(s) = \begin{pmatrix} 1 & s_1^2 + s_2^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Власні значення цієї матриці $\lambda_{1,2}(s) = 1 \pm \sqrt{s_2^2 + s_1^2}$. Вони задавольняють умовам теореми 4 і тому крайова задача з крайовими умовами

$$\begin{cases} u_1(x,0) + bu_1(x,T) = \varphi_1(x), \\ u_2(x,0) + bu_2(x,T) = \varphi_2(x), \end{cases}$$

при будь-яких додатних b буде параболічною.

4. Система з однією просторовою змінною

Розглянемо систему з однією просторовою змінною, тобто $x \in \mathbb{R}$. Тоді з теореми 3 випливає наступний результат.

Наслідок 1. Для системи (1) у випадку $x \in \mathbb{R}$ завжди існує коректна крайова задача в просторі S.
Доведення. Якщо власні значення матриці $P(s)$ дійсні, то $\operatorname{Im} \lambda_j(s) = 0$ і виконуються умови теореми 3, тобто $\operatorname{Im} \lambda_j(s) \neq \dfrac{(2k+2)\pi}{T}$; і це означає, що крайова задача з умовою $u(x,0) + bu(x,T) = \varphi$ з будь-якими $b > 0$ буде коректна в просторі S.

Якщо $\operatorname{Im} \lambda_j(s)$ — не тотожній 0, то рівняння $\lambda_j(s) - \alpha = \dfrac{(2k+2)\pi i}{T}$ рівносильно умові

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \lambda_j(s) = \alpha, \\ \operatorname{Im} \lambda_j(s) = \dfrac{(2k+2)\pi}{T}. \end{cases}$$

Друге рівняння при фіксованому k має скінченну кількість коренів, а при $k \in \mathbb{Z}$ таких коренів — зліченна множина s_k. Тоді множина значень $\operatorname{Re} \lambda_j(s_k)$ теж зліченна, тобто існує α таке, що $\operatorname{Re} \lambda_j(s) = \alpha$. Отже, виконується умова теореми 3 й існує коректна крайова задача з умовою $u(x,0) + e^{-\alpha T} u(x,T) = \varphi(x)$.

З Наслідка 1 випливає:
Наслідок 2. Якщо умова $|\operatorname{Re} \lambda_j(s)| \geq C|s|^h - b$ виконується з додатними C і h, то існує параболічна крайова задача.

Приклад 4.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = u_2(x,t). \\ \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + k^2 u_1(x,t). \end{cases}$$

Матриця $P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-s^2+k^2) & 0 \end{pmatrix}$, її власні значення $\lambda_{1,2}(s) = \pm\sqrt{s^2-k^2}$. При $|s| \geq k$ корені $\lambda_j(s)$ дійсні, а при $|s| < k$ — корені уявні $\lambda_j(s) = \pm i\sqrt{k^2-s^2}$.
Тому крайова задача з умовою

$$\begin{cases} u_1(x,0) + bu_1(x,T) = \varphi_1(x), \\ u_2(x,0) + bu_2(x,T) = \varphi_2(x) \end{cases}$$

при $b \in (0;1)$ буде параболічною.

5. Крайова задача для диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку за часом.

Застосуємо отримані результати до рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + R\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) = 0. \tag{5}$$

Це рівняння зводиться до системи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = u_2(x,t). \\ \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = -Q\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)u_1 - R\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)u_2(x,t). \end{cases}$$

Тоді матриця $P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q(s) & -R(s) \end{pmatrix}$, а характеристичне рівняння для неї $\lambda^2 + R(s)\lambda + Q(s) = 0$.

Позначимо корені цього рівняння $\lambda_{1,2}(s)$. Тоді з теореми (3) випливає результат:

Наслідок 3. Якщо існує дійсне число α таке, що на множині $N_j = \{s \in \mathbb{R}^n \ : \ \operatorname{Re}\lambda_j(s) = \alpha\}$ $(j = 1,2)$ виконується нерівність $\operatorname{Im}\lambda_j(s) \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{T}$ при $k \in \mathbb{Z}$, то при $b = e^{-\alpha T}$ крайова задача для рівняння (5) з умовою

$$\begin{cases} u(x,0) + bu(x,T) = \varphi_1(x), \\ u'_t(x,0) + bu'_t(x,T) = \varphi_2(x) \end{cases} \tag{6}$$

буде коректна у просторі S.

Наслідок 4. Якщо $\min_j |\operatorname{Re}\lambda_j(s)| \geq C|s|^h - b$ з додатними C і h і дійсним b , тоді крайова задача для рівнянь (4) з крайовими умовами (5) буде парболічною.

В якості прикладу розглянемо рівняння Гельмгольця:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \Delta u(x,t) = ku(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ \ t \in [o,T], \ \ k \in \mathbb{R}.$$

з крайової умовою (6), де $b > 0$.

Після перетворення Фур'є за просторовими змінними отримаємо крайову задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \tilde{u}(s,t)}{\partial t^2} - |s|^2 \Delta \tilde{u}(s,t) = k\tilde{u}(s,t), \\ \tilde{u}(s,0) + b\tilde{u}(s,T) = \widetilde{\varphi}_1(s), \\ \tilde{u}'_t(s,0) + b\tilde{u}'_t(s,T) = \widetilde{\varphi}_2(s). \end{cases}$$

Розв'язок має вигляд $\tilde{u}(s,t) = C_1(s)e^{\lambda(s)t} + C_2(s)e^{-\lambda(s)t}$, де $\lambda(s) = \sqrt{k + |s|^2}$. Враховуючі крайові умови, знайдемо розв'язок крайової задачі:

$$\tilde{u}(xs,t) = \\ = \frac{(\operatorname{ch}\lambda t + b\operatorname{ch}\lambda(T-t))\widetilde{\varphi}_1(s) + \left(\dfrac{\operatorname{sh}\lambda t}{\lambda} + b\cdot\dfrac{\operatorname{sh}\lambda(T-t)}{\lambda}\right)\widetilde{\varphi}_2(s)}{\left(1+be^{\lambda T}\right)\left(1+be^{-\lambda T}\right)} \tag{7}$$

при $|s|^2 + k \geq 0$.

Якщо $|s|^2 + k < 0$, то розв'язок має вигляд

$$\tilde{u}(s,t) = \\ = \frac{\left(\cos t\sqrt{-|s|^2-k} + b\cos(T-t)\sqrt{-|s|^2-k}\right)\widetilde{\varphi}_1(s)}{1+b^2+2b\cdot\cos T\sqrt{-|s|^2-k}} + \\ + \left(\sin t\sqrt{-|s|^2-k} + b\sin(T-t)\sqrt{-|s|^2-k}\right)\cdot\frac{\widetilde{\varphi}_2(s)}{\sqrt{-|s|^2-k}}. \tag{8}$$

Таким чином, розв'язок належіть простору S, якщо $\varphi_1(s)$ і $\varphi_2(s)$ належать цьому простору.

Крім того, оскільки при великих s, $\tilde{u}(s,t)$ має вигляд (7) і виконується нерівність $\tilde{u}(s,t) \leq C\exp(-\rho(t)|s|)$, то $u(x,t)$ — нескінченно диференційовна (якщо $\varphi_1(s)$ і $\varphi_2(s)$ належать простору $L_2(\mathbb{R}^n)$), тобто ця крайова задача параболічна.

6. Диференціальні рівняння з однією просторовою змінною.

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + R\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) = 0. \tag{9}$$

З'ясуємо при яких R і Q існують параболічні крайові задачі.

1. Нехай $R(s) = 0$, а $Q(s) = b_0 s^{2k} + b_1 s^{2k-1} + \ldots + b_{2k}$ з $b_0 < 0$.
Тоді корені характеристичного рівняння

$$\lambda_j(s) = \pm\sqrt{-b_0 s^{2k} - b_1 s^{2k-1} - \ldots - b_{2k}} \sim \pm\sqrt{|b_0|}\cdot|s^k|, \quad \text{при } s \to \infty$$

і виконані умови Наслідку 4, тобто крайова задача з умовами

$$\begin{aligned} u(x,0) + bu(x,T) &= \varphi_1(x), \\ u'_t(x,0) + bu'_t(x,T) &= \varphi_2(x) \end{aligned} \tag{10}$$

буде параболічною з деяким додатним b.

2. Якщо $Q(s) = b_0 s^{2k} + b_1 s^{2k-1} + \ldots + b_{2k}$ з $b_0 < 0$, а степінь полінома $R(s)$ менше k, то

$$\lambda_j(s) = \frac{1}{2}\left(-R(s) \pm \sqrt{R(s)^2 - 4Q(s)}\right) \sim \pm\sqrt{|b_0|}\cdot|s|^k, \quad \text{при } s \to \infty$$

і теж виконані умови Наслідку 4, тобто крайова задача з умовами (10) буде параболічною.

3. Якщо $R(s) = a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \ldots + a_m$ з $a_0 \in \mathbb{R}$, а $D(s) = R(s^2) - 4Q(s) = c_0 s^m + c_1 s^{m-1} + \ldots + c_{2m}$ з додатним $c_0 \neq a_0^2$, тоді $\lambda_j(s) = \dfrac{1}{2}\left(-R(s) \pm \sqrt{R(s)^2 - 4Q(s)}\right)$.

При таких умовах $\min\limits_j |\operatorname{Re}\lambda_j(s)| \sim \dfrac{1}{2}\left|\sqrt{c_0} - |a_0|\right| \cdot |s|^m$ при $s \to \infty$ і теж виконані умови Наслідку 4, тобто існує параболічна крайова задача.

Приклад 5.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \left(a_0\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = 0.$$
$$R(s) = -a_0 s^2 - i a_1 s + a_2, \quad Q(s) = -s^4.$$

При $a_0 \neq \pm 1$ виконані умови попереднього пункту 3 і тому існує параболічна крайова задача з умовами (10) з деяким додоатним b.

Висновки.

У цій роботі досліджуються випадки систем диференціальних рівнянь у частинних похідних, для яких існує коректна двоточкова крайова задача в просторі Л. Шварца; а також з'ясовується при яких додаткових умовах на власні значення матриці $P(s)$ ця задача буде параболічною, тобто збільшується гладкість розв'язків.

Доведено що при степеневому зростанні власних значень матриці існують параболічні крайові задачі.

Аналогічні результати справедливі також для лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку за часом.

Крім того, показано що існує параболічна крайова задача для рівняння Гельмгольця.

Докладно розглянутий випадок рівнянь другого порядку за часом з однією просторовою змінною, і вказані умови, при яких існує параболічна крайова задача.

Історія статті: отримана: 29 січня 2024; останній варіант: 29 травня 2024
прийнята: 31 травня 2024.

REFERENCES

1. B. J. Ptashnik. Nonlocal boundary value problems for partial differential equations. / [B. J. Ptashnik., V. S. Ilkiv, I. I. Kmit, V. M. Polishchuk]. – 2002. K.: Scientific thought. – 416 p.
2. D. A. Levkin, O. A. Makarov, A. I. Zavgorodniy, A. V. Levkin. The theoretical research of multi-point boundary tasks. / Academic notes of the Tavri National University named after V.I. Vernadskyi. Series: Technical sciences. – 2020. — Vol. 31 (70). – №3. – P. 126–130.
DOI https://doi.org/10.32838/TNU-2663-5941/2020.3-1/20
3. V. M. Borok. On correct solvability of a boundary value problem in an infinite slab for linear equations with constant coefficients/Mathematics of the USSR-Izvestiya. – 1971. – Volume 5, Issue 4, Pages 935–953.
4. L. V. Fardigola. Nonlocal two-point boundary-value problems in a layer with differential operators in the boundary condition / Ukr.mat. journal. – 1995. – Vol.47, No **8**. – P. 1122–1128.
5. A. A. Makarov. The existence of a correct two-point boundary value problem in a layer for systems of pseudo-differential equations, Differential Equations. – 1994. – Vol. **30**, No. **1**. – P. 144–150.
6. A. A. Makarov. Parabolic boundary value problems for systems of pseudodifferential equations in an infinite layer, Differential Equations. – 1996. – Vol. **32**, No. **5**. – P. 636–642.
7. A. A. Makarov. A criterion for the correct solvability of a boundary value problem in a layer for a system of linear equations in convolutions in topological spaces. / Theoretical and applied questions of differential equations and algebra. / Sb. scientific works. – Kiev: Naukova Dumka. – 1978. – P. 178–180.
8. L. Hörmander. The Analysis of linear partial differential operators. II. / Differential operators with constant coefficients. – Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York Tokyo. – 1983. – 455 p.

Article history: Received: 29 January 2024; Final form: 29 May 2024
Accepted: 31 May 2024.

Well-posedness and parabolicity of the boundary-value problem for systems of partial differential equations

A. A. Makarov, A. V. Chernikova
Departement of Applied Mathematics
V. N. Karazin Kharkiv National University
Svobody sq., 4, Kharkiv, Ukraine, 61022

The two-point boundary value problem for systems of linear partial differential equations is studied in the paper. A correct two-point boundary value problem exists not for any arbitrary system. Thus, for example, for equation

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + i\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2}$$

there are no boundary conditions of the form $au(x_1, x_1, 0) + bu(x_1, x_2, T) = \varphi(x_1, x_2)$, under which this boundary value problem will be correct in the Schwartz space.
In the paper found the conditions for the matrix of the system under which exist well posed boundary-value problem are found in the Schwartz space, and also indicates the form of these boundary conditions. So, for systems with a Hermitian matrix, the boundary value problem with conditions of form

$$u(x, 0) + u(x, T) = \varphi(x)$$

will always be of a well posed in the Schwartz spaces, as well as in the spaces of functions of finite smoothness of power growth. For systems with one space variable, it is proved that always exist well posed boundary value problems with the condition $u(x, 0) + bu(x, T) = \varphi(x)$ if b is positive. In addition, parabolic boundary value problems with property of increasing smoothness of the solutions are investigated.
It was found that there are parabolic boundary value problems under the condition of power-law growth of the modulus of the eigenvalues of the matrix of the system (that is, $|\operatorname{Re}\lambda_j(s)| \geq c|s|^h - b$ with positive c and h). Examples of correct and parabolic boundary value problems are given.

Similar results hold for linear partial differential equations. The Helmholtz equation

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \Delta u(x,t) = ku(x,t),$$

is considered as an example. It is not well posed according to Petrovsky, but for it exist a boundary value problem that is parabolic. For equation with one space variable, sufficient conditions for the second-order equation in time are given, under which parabolic boundary value problems exist.

Keywords: **boundary-value problem; well-posedness; parabolicity; Fourier transformation; the space of L. Schwartz.**

How to cite this article:

A. A. Makarov, A. V. Chernikova. Well-posedness and parabolicity of the boundary-value problem for systems of partial differential equations. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 99, 2024, p. 51–61 (in Ukrainian). DOI: 10.26565/2221-5646-2024-99-04