ISSN 2221-5646(Print) 2523-4641(Online)
Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics”
2023, Vol. 98, p. 50–67
DOI: 10.26565/2221-5646-2023-98-04
УДК 514.764

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
2023, Том 98, с. 50–67

І. О. Гавриленко
аспірант кафедри фундаментальної математики
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
igorgavrilenko0898@gmail.com *http://orcid.org/0009-0003-4226-8603*

Є. В. Петров
кандидат фізико-математичних наук
старший викладач кафедри фундаментальної математики
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
petrov@karazin.ua *http://orcid.org/0000-0003-2340-5038*

Стійкість мінімальних поверхонь у субрімановому многовиді $\widetilde{E(2)}$

У роботі досліджуються гладкі орієнтовані поверхні в універсальному накритті групи власних рухів евклідової площини, що має лівоінваріантну структуру тривимірного субріманового многовида. Ця структура будується як обмеження евклідової метрики групи на деякий цілком неінтегровний лівоінваріантний розподіл. Субріманова площа поверхні визначається як інтеграл довжини ортогональної проєкції одиничного нормального поля поверхні на цей розподіл. Обчислено формулу першої варіації субріманової площі поверхні, з якої виведено критерій мінімальності. Тут ми розуміємо під мінімальними поверхні, що є критичними точками функціонала субріманової площі під дією нормальних варіацій з компактними носіями. Встановлено, що така мінімальність у даному випадку не є еквівалентною до рівності нулю субріманової середньої кривини поверхні. Показано, що евклідова площина є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона паралельна або ортогональна до осі z (де координата z відповідає куту обертання власного руху). Отримано умову мінімальності для явно заданої поверхні та наведені приклади таких поверхонь. Розглянуті приклади демонструють, зокрема, що з мінімальності поверхні у рімановому (у даному випадку евклідовому) сенсі не випливає її субріманова мінімальність та навпаки.

Далі розглядається питання про стійкість мінімальних поверхонь. Для цього виведено формулу другої варіації субріманової площі. За її допомогою встановлено, що мінімальні евклідові площини є стійкими. Введено клас поверхонь, для яких дотичні площини перпендикулярні до площин розподілу субріманової структури, і які ми звемо вертикальними.

Зокрема, для таких поверхонь формула другої варіації суттєво спрощується. Показано, що повні зв'язні вертикальні мінімальні поверхні вичерпуються евклідовими площинами та гелікоїдами, причому гелікоїди нестійкі. Звідси випливає результат типу Бернштейна: повна зв'язна вертикальна мінімальна поверхня є стійкою тоді й тільки тоді, коли це евклідова площина, що ортогональна до осі z.

Keywords: **субрімановий многовид; лівоінваріантна метрика; мінімальна поверхня; стійкість.**

2010 Mathematics Subject Classification: 53C40; 53C17; 53C42.

1. Вступ

Відомо, що у тривимірному евклідовому просторі повна зв'язна мінімальна поверхня є стійкою тоді й тільки тоді, коли є площиною. Цей результат був отриманий незалежно О. В. Погорєловим, М. до Кармо і К. К. Пенгом та Д. Фішер-Колбрі і Р. Шоеном (див., наприклад, [3]). Він узагальнює класичну теорему С. Н. Бернштейна, згідно з якою будь-яка повна явно задана мінімальна поверхня є площиною. У [4] було введене поняття мінімальної поверхні в субрімановому многовиді. У подальшому такі поверхні та їхня стійкість вивчалися у різних субріманових геометріях, зокрема, у субрімановій тривимірній групі Гейзенберга (див. короткий огляд у [8]). Зокрема, у [2] та [7] (див. також [1]) були отримані результати типу Бернштейна, тобто опис стійких мінімальних поверхонь, у цій групі. Також мінімальні поверхні досліджувалися у т. зв. тривимірній субрімановій сфері ([6]) і групі власних рухів евклідової площини та її універсальному накритті ([5], де обговорювалося також застосування таких поверхонь до задач математичного моделювання у нейробіології, і [9]), але питання стійкості не розглядалися. Саме останню зі згаданих геометрій ми будемо досліджувати в даній роботі.

2. Основні поняття та приклади

Субрімановим многовидом зветься гладкий многовид M разом з цілком неінтегровним гладким векторним розподілом $\mathcal{H}$ на M (він зветься *горизонтальним розподілом*) і гладким полем евклідових скалярних добутків $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ на $\mathcal{H}$ (*субрімановою метрикою*). Зокрема, якщо M рімановий, то субріманову метрику можна побудувати як обмеження на $\mathcal{H}$ ріманової метрики M. Саме таку конструкцію ми й будемо розглядати в подальшому.

Активно досліджуваним прикладом субріманового многовида є тривимірна група Гейзенберга $\mathbb{H}^1$. Це простір $\mathbb{R}^3$ з координатами (x,y,z), на якому структура групи Лі задається множенням $(x,y,z)(x',y',z') = \big(x+x', y+y', z+z'+\frac{1}{2}(xy'-yx')\big)$ і визначає наступний базис лівоінваріантних векторних полів:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Розглянемо на $\mathbb{H}^1$ ріманову метрику $\langle\cdot,\cdot\rangle$ таку, що $\{X_1, X_2, X_3\}$ є ортонормованим базисом у кожній точці. У якості горизонтального розподілу $\mathcal{H}$ візьмемо розподіл, що породжений базисом $\{X_1, X_2\}$, а у якості субріманової метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ – обмеження $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathcal{H}$.

Нехай Σ – гладка орієнтована поверхня у тривимірному субрімановому многовиді M, субріманова метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ якого будується як обмеження на $\mathcal{H}$ деякої ріманової метрики M. *Сингулярна множина* Σ_0 цієї поверхні складається з тих її точок p, для яких дотична площина $T_p\Sigma$ збігається з $\mathcal{H}_p$ (*сингулярних*). Відомо, що Σ_0 має нульову ріманову площу в силу повної неінтегровності розподілу $\mathcal{H}$. Якщо N – одиничне нормальне поле Σ у рімановому сенсі, то можна описати сингулярну множину як

$$\Sigma_0 = \{p \in \Sigma \mid N_h(p) = 0\},$$

де N_h – ортогональна проекція поля N на $\mathcal{H}$. Решту точок поверхні будемо називати *регулярними*. *Субріманова площа* області $D \subset \Sigma$ визначається як

$$A(D) = \int_D |N_h|\, d\Sigma,$$

де $d\Sigma$ – ріманова форма площі Σ. *Нормальною варіацією* поверхні Σ, що задана гладкою функцією u, будемо називати відображення $\varphi\colon \Sigma \times I \to M$, що визначене умовою

$$\varphi_s(p) = \exp_p(s\, u(p)\, N(p)).$$

Тут I – деякий окіл нуля в $\mathbb{R}$, а $\exp_p$ – ріманове експоненційне відображення. Іншими словами, ми будуємо варіацію традиційним для ріманової геометрії чином, випускаючи геодезичні з точки p у напрямку $u(p)N(p)$. Позначимо через $A(s) = A(\Sigma_s)$ субріманову площу поверхні варіації $\Sigma_s = \varphi_s(\Sigma)$, що відповідає параметру s (для обчислення першої та другої варіацій достатньо знайти площу образу носія u, замикання якого вважатимемо компактним). Тоді $A'(0)$ зветься *першою (нормальною) варіацією площі*, що відповідає φ, а $A''(0)$ – *другою*. Поверхня Σ називається *мінімальною*, якщо $A'(0) = 0$ для будь-яких нормальних варіацій з компактним носієм у $\Sigma \setminus \Sigma_0$. Зауважимо, що тут ми також слідуємо рімановій традиції, називаючи мінімальними поверхнями стаціонарні точки субріманового функціонала площі. Мінімальна поверхня Σ зветься *стійкою*, якщо $A''(0) \geqslant 0$ для будь-яких нормальних варіацій з компактним носієм у $\Sigma \setminus \Sigma_0$. У [2] та [7] було, зокрема, встановлено, що у субрімановій тривимірній групі Гейзенберга повна зв'язна мінімальна поверхня з порожньою сингулярною множиною є стійкою тоді й тільки тоді, коли ця поверхня є вертикальною (тобто паралельною осі z) евклідовою площиною, що є прикладом результату типу Бернштейна.

У даній роботі ми розглядатимемо многовид $\widetilde{E(2)}$, що визначається як універсальне накриття групи власних рухів площини. Це простір $\mathbb{R}^3$ з координатами (x, y, z) (де (x, y) відповідає паралельному перенесенню, а z –

куту обертання), на якому структура групи Лі задається множенням рухів $(x,y,z)(x',y',z') = (x + x'\cos z - y'\sin z, y + x'\sin z + y'\cos z, z + z')$ і визначає такий базис лівоінваріантних векторних полів:

$$X_1 = \cos z\frac{\partial}{\partial x} + \sin z\frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial z},\ X_3 = \sin z\frac{\partial}{\partial x} - \cos z\frac{\partial}{\partial y}. \tag{1}$$

Ненульовими попарними дужками Лі цих полів є

$$[X_1, X_2] = -[X_2, X_1] = X_3,\ [X_2, X_3] = -[X_3, X_2] = X_1. \tag{2}$$

Розглянемо на $\widetilde{E(2)}$ ріманову метрику $\langle\cdot,\cdot\rangle$, для якої $\{X_1, X_2, X_3\}$ є ортонормованим базисом у кожній точці. Зауважимо, що вона виявляється евклідовою. У якості горизонтального розподілу $\mathcal{H}$ розглянемо розподіл, що натягнутий на базис $\{X_1, X_2\}$, а у якості $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ – обмеження евклідової метрики на $\mathcal{H}$. Нехай ∇ – зв'язність Леві-Чівіта метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$. З формули Кошуля та (2) (або просто з (1) і того, що ∇ пласка) тоді отримуємо

$$\begin{gathered}\nabla_{X_1}X_1 = \nabla_{X_1}X_2 = \nabla_{X_1}X_3 = \nabla_{X_2}X_2 = \nabla_{X_3}X_1 = \\ = \nabla_{X_3}X_2 = \nabla_{X_3}X_3 = 0,\ \nabla_{X_2}X_1 = -X_3,\ \nabla_{X_2}X_3 = X_1.\end{gathered} \tag{3}$$

Оператор кривини $\langle\cdot,\cdot\rangle$ нульовий, оскільки ця метрика евклідова.

3. Формули першої та другої варіації

Нехай тепер Σ – гладка орієнтована поверхня у $\widetilde{E(2)}$. Введемо деякі додаткові позначення. На регулярній частині $\Sigma \setminus \Sigma_0$ поверхні визначимо *горизонтальне гаусове відображення* $\nu_h = \frac{N_h}{|N_h|}$ та *характеристичне векторне поле* Z, яке у кожній регулярній точці p поверхні Σ утворюється з $\nu_h(p)$ обертанням на прямий кут у площині $\mathcal{H}_p$ (в орієнтації, що визначена вектором нормалі $X_3(p)$ цієї площини). Це поле є дотичним до Σ за побудовою. Позначимо через $S = \langle N, X_3\rangle\nu_h - |N_h|X_3$ векторне поле, що доповнює Z у кожній регулярній точці поверхні до ортонормованого базису її дотичної площини. Через B позначатимемо (рімановий) оператор Вейнгартена поверхні Σ відносно N, що визначається для будь-якого дотичного до Σ векторного поля W умовою $B(W) = -\nabla_W N$.

Теорема 1 (Формула першої варіації)**.** *Нехай Σ – поверхня у $\widetilde{E(2)}$. Тоді перша нормальна варіація її площі, що задана функцією u, має наступний вигляд:*

$$A'(0) = \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_0} |N_h|^{-1}\left(-\langle B(Z), Z\rangle + \langle N, X_3\rangle\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle\right) u\, d\Sigma. \tag{4}$$

Доведення. Застосуємо тут техніку, аналогічну до використаної у роботі [7]. Позначимо через N ріманове одиничне нормальне поле поверхонь нормальної варіації $\varphi\colon \Sigma\times I \to M$, а через $N_h = N - \langle N, X_3\rangle X_3$ – його ортогональну проекцію на $\mathcal{H}$ (субріманове нормальне поле). Побудуємо на підмножинах регулярних точок поверхонь варіації поля ν_h, Z та S як вказано вище. За означенням субріманової площі маємо

$$A(s) = A(\Sigma_s) = \int\limits_{\Sigma_s} |N_h|\, d\Sigma_s = \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_0} |N_h \circ \varphi_s|\, |\mathrm{J}\, \varphi_s|\, d\Sigma,$$

де $d\Sigma_s$ – ріманова форма площі поверхні Σ_s, $\varphi_s \colon \Sigma \to \Sigma_s$ – дифеоморфізм варіації, що відповідає параметру $s \in I$, а $\mathrm{J}\, \varphi_s$ – його якобіан. Остання рівність аналогічна формулі ріманової площі поверхні варіації (див., наприклад, [10, с. 49]). Як згадувалося вище, тут достатньо інтегрувати по носію u. Далі позначатимемо $|N_h|(s) = |N_h \circ \varphi_s|$. Тоді

$$A'(s) = \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_0} \left(|N_h|'(s)|\mathrm{J}\, \varphi_s| + |N_h|(s)|\mathrm{J}\, \varphi_s|'(s)\right)\, d\Sigma \tag{5}$$

і, оскільки $|\mathrm{J}\, \varphi_0| = 1$,

$$A'(0) = \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_0} \left(|N_h|'(0) + |N_h|(0)|\mathrm{J}\, \varphi_s|'(0)\right)\, d\Sigma. \tag{6}$$

Проведемо деякі допоміжні обчислення. Диференціюючи рівність $N_h = N - \langle N, X_3\rangle X_3$ у напрямку довільного вектора v, отримуємо

$$\begin{aligned} \nabla_v N_h = \nabla_v N - \langle \nabla_v N, X_3\rangle X_3 - \langle N, \nabla_v X_3\rangle X_3 - \langle N, X_3\rangle \nabla_v X_3 = \\ = (\nabla_v N)_h - \langle N, \nabla_v X_3\rangle X_3 - \langle N, X_3\rangle \nabla_v X_3. \end{aligned} \tag{7}$$

У регулярних точках поверхонь варіації значення полів ν_h, Z та X_3 утворюють ортонормовані базиси і $\langle \nabla_v \nu_h, \nu_h\rangle = 0$, тому

$$\nabla_v \nu_h = \langle \nabla_v \nu_h, Z\rangle Z + \langle \nabla_v \nu_h, X_3\rangle X_3,$$

де, оскільки $\nu_h = |N_h|^{-1} N_h$, а Z і N_h ортогональні,

$$\langle \nabla_v \nu_h, Z\rangle = |N_h|^{-1} \langle \nabla_v N_h, Z\rangle = |N_h|^{-1} \left(\langle \nabla_v N, Z\rangle - \langle N, X_3\rangle \langle \nabla_v X_3, Z\rangle\right)$$

в силу (7), отже

$$\nabla_v \nu_h = |N_h|^{-1} \left(\langle \nabla_v N, Z\rangle - \langle N, X_3\rangle \langle \nabla_v X_3, Z\rangle\right) Z - \langle \nu_h, \nabla_v X_3\rangle X_3. \tag{8}$$

Також у регулярних точках $|N_h| = \langle N_h, \nu_h\rangle$, тому похідна цієї функції у напрямку v дорівнює

$$v(|N_h|) = \langle \nabla_v N_h, \nu_h\rangle + \langle N_h, \nabla_v \nu_h\rangle = \langle \nabla_v N_h, \nu_h\rangle,$$

бо $\langle \nu_h, \nabla_v \nu_h\rangle = 0$. Звідси і з (7) тоді випливає

$$v(|N_h|) = \langle \nabla_v N, \nu_h\rangle - \langle N, X_3\rangle \langle \nabla_v X_3, \nu_h\rangle. \tag{9}$$

За побудовою нормальної варіації φ у евклідовому просторі поле $d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$ дорівнює $U = uN(0)$, де $N(0)$ – паралельно перенесене уздовж нормалей до поверхні Σ її одиничне нормальне поле. Звідси і з (9) випливає, що

$$|N_h|'(s) = U(|N_h|) = \langle \nabla_U N, \nu_h\rangle - \langle N, X_3\rangle\langle \nabla_U X_3, \nu_h\rangle. \tag{10}$$

Оскільки у регулярних точках значення полів Z, S та N утворюють ортонормовані базиси і $\langle \nabla_U N, N\rangle = 0$,

$$\begin{gathered}\nabla_U N = \langle \nabla_U N, Z\rangle Z + \langle \nabla_U N, S\rangle S = \\ = -\langle N, \nabla_U Z\rangle Z - \langle N, \nabla_U S\rangle S = -\langle N, \nabla_Z U\rangle Z - \langle N, \nabla_S U\rangle S,\end{gathered}$$

де остання рівність випливає з того, що дужки Лі $[U, Z]$ та $[U, S]$ поля U і дотичних полів до поверхонь варіації нульові. Починаючи з цього місця, позначатимемо через N, N_h, ν_h, Z та S відповідні поля на поверхні Σ (останні три з яких визначені лише в її регулярних точках). Отже, при $s = 0$

$$\nabla_U N = -\langle N, \nabla_Z(uN)\rangle Z - \langle N, \nabla_S(uN)\rangle S = -Z(u)Z - S(u)S,$$

бо N одиничне, тому (10) приймає вигляд

$$\begin{gathered}|N_h|'(0) = \langle -Z(u)Z - S(u)S, \nu_h\rangle - \langle N, X_3\rangle\langle \nabla_N X_3, \nu_h\rangle u = \\ = -\langle N, X_3\rangle S(u) - |N_h|\langle N, X_3\rangle\langle \nabla_{\nu_h} X_3, \nu_h\rangle u\end{gathered} \tag{11}$$

в силу рівностей $S = \langle N, X_3\rangle\nu_h - |N_h|X_3$, $N = |N_h|\nu_h + \langle N, X_3\rangle X_3$ і (3). Як показано, наприклад, у [10, с. 50-51], перша похідна модуля якобіана φ_s в нулі дорівнює дивергенції поля варіації $U = uN$:

$$\begin{gathered}|\mathrm{J}\,\varphi_s|'(0) = \mathrm{div}_\Sigma(uN) = \langle \nabla_Z(uN), Z\rangle + \langle \nabla_S(uN), S\rangle = \\ = \left(\langle \nabla_Z N, Z\rangle + \langle \nabla_S N, S\rangle\right)u = -\left(\langle B(Z), Z\rangle + \langle B(S), S\rangle\right)u.\end{gathered} \tag{12}$$

Таким чином, вираз під інтегралом у (6) має вигляд

$$\begin{gathered}|N_h|'(0) + |N_h||\mathrm{J}\,\varphi_s|'(0) = -\langle N, X_3\rangle S(u) - |N_h|\langle N, X_3\rangle\langle \nabla_{\nu_h} X_3, \nu_h\rangle u - \\ -|N_h|\left(\langle B(Z), Z\rangle + \langle B(S), S\rangle\right)u.\end{gathered} \tag{13}$$

Зробимо ще кілька допоміжних обчислень. Оскільки $\nu_h = \langle \nu_h, X_1\rangle X_1 + \langle \nu_h, X_2\rangle X_2$, з (3) випливає $\nabla_{\nu_h} X_3 = \langle \nu_h, X_2\rangle X_1$, отже маємо $\langle \nabla_{\nu_h} X_3, \nu_h\rangle = \langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle$. За побудовою тоді $Z = -\langle \nu_h, X_2\rangle X_1 + \langle \nu_h, X_1\rangle X_2$, тому $\nabla_Z X_3 = \langle \nu_h, X_1\rangle X_1$ в силу (3), і таким чином

$$\langle \nabla_{\nu_h} X_3, \nu_h\rangle = \langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle = -\langle \nabla_Z X_3, Z\rangle. \tag{14}$$

Звідси ж маємо

$$\langle \nabla_{\nu_h} X_3, Z\rangle = -\langle \nu_h, X_2\rangle^2,\ \langle \nabla_Z X_3, \nu_h\rangle = \langle \nu_h, X_1\rangle^2. \tag{15}$$

Зокрема, оскільки ν_h одиничний, $\langle \nabla_Z X_3, \nu_h\rangle - \langle \nabla_{\nu_h} X_3, Z\rangle = 1$.

Зауважимо тепер, що, оскільки Z і $S = \langle N, X_3\rangle\nu_h - |N_h|X_3$ одиничні, а ν_h, Z та X_3 утворюють ортонормовані базиси в регулярних точках,

$$\begin{gathered}\mathrm{div}_\Sigma S = \langle\nabla_Z S, Z\rangle + \langle\nabla_S S, S\rangle = -\langle S, \nabla_Z Z\rangle = \\ = -\langle S, \nu_h\rangle\langle\nabla_Z Z, \nu_h\rangle - \langle S, X_3\rangle\langle\nabla_Z Z, X_3\rangle = \langle N, X_3\rangle\langle Z, \nabla_Z \nu_h\rangle - |N_h|\langle Z, \nabla_Z X_3\rangle.\end{gathered}$$

Оскільки

$$\nabla_Z\nu_h = |N_h|^{-1}\left(\langle\nabla_Z N, Z\rangle - \langle N, X_3\rangle\langle\nabla_Z X_3, Z\rangle\right) Z - \langle\nabla_Z X_3, \nu_h\rangle X_3$$

в силу (8) і тому, враховуючи (14), (15) та означення оператора Вейнгартена B, маємо

$$\begin{gathered}\nabla_Z\nu_h = -|N_h|^{-1}\left(\langle B(Z), Z\rangle - \langle N, X_3\rangle\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle\right) Z - \\ -\langle\nu_h, X_1\rangle^2 X_3,\end{gathered} \tag{16}$$

звідси випливає з урахуванням (14)

$$\begin{gathered}\mathrm{div}_\Sigma S = -\langle N, X_3\rangle|N_h|^{-1}\left(\langle B(Z), Z\rangle - \langle N, X_3\rangle\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle\right) + \\ +|N_h|\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle.\end{gathered}$$

Оскільки поле N одиничне, $|N_h|^2 + \langle N, X_3\rangle^2 = 1$, тому остаточно маємо

$$\mathrm{div}_\Sigma S = -|N_h|^{-1}\left(\langle N, X_3\rangle\langle B(Z), Z\rangle - \langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle\right). \tag{17}$$

За властивостями дивергенції тоді

$$\begin{gathered}\mathrm{div}_\Sigma(\langle N, X_3\rangle uS) = S(\langle N, X_3\rangle u) + \langle N, X_3\rangle u\,\mathrm{div}_\Sigma S = \\ = \langle\nabla_S N, X_3\rangle u + \langle N, \nabla_S X_3\rangle u + \langle N, X_3\rangle S(u) - \\ -\langle N, X_3\rangle|N_h|^{-1}\left(\langle N, X_3\rangle\langle B(Z), Z\rangle - \langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle\right) u = \\ = -\langle B(S), X_3\rangle u + \langle N, X_3\rangle\langle\nabla_{\nu_h} X_3, N\rangle u + \langle N, X_3\rangle S(u) - \\ -|N_h|^{-1}\langle B(Z), Z\rangle u + |N_h|\langle B(Z), Z\rangle u + |N_h|^{-1}\langle N, X_3\rangle\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle u,\end{gathered}$$

де у останній рівності знову використали $|N_h|^2 + \langle N, X_3\rangle^2 = 1$. Оскільки поле $B(S)$ є дотичним до поверхні Σ,

$$\langle B(S), X_3\rangle = \langle B(S), S\rangle\langle S, X_3\rangle + \langle B(S), Z\rangle\langle Z, X_3\rangle = -|N_h|\langle B(S), S\rangle.$$

Враховуючи також, що $\nabla_{\nu_h} X_3$ ортогональне до X_3, отримуємо

$$\begin{gathered}\mathrm{div}_\Sigma(\langle N, X_3\rangle uS) = |N_h|\left(\langle B(Z), Z\rangle + \langle B(S), S\rangle\right) u + |N_h|\langle N, X_3\rangle\langle\nabla_{\nu_h} X_3, \nu_h\rangle u + \\ +\langle N, X_3\rangle S(u) + |N_h|^{-1}\left(-\langle B(Z), Z\rangle + \langle N, X_3\rangle\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle\right) u.\end{gathered}$$

Таким чином, рівність (13) набуває вигляду

$$\begin{gathered}|N_h|'(0) + |N_h||\mathrm{J}\,\varphi_s|'(0) = -\mathrm{div}_\Sigma(\langle N, X_3\rangle uS) + \\ +|N_h|^{-1}\left(-\langle B(Z), Z\rangle + \langle N, X_3\rangle\langle\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle\right) u.\end{gathered}$$

Підставляючи це у (6) і враховуючи, що $\int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_0} \mathrm{div}_\Sigma(\langle N, X_3\rangle uS)\, d\Sigma = 0$, отримуємо потрібну формулу першої варіації (4).

Висновок 1 (Критерій мінімальності). *Поверхня* Σ *у* $\widetilde{E(2)}$ *мінімальна тоді й тільки тоді, коли у всіх її регулярних точках*

$$\langle B(Z), Z\rangle = \langle N, X_3\rangle\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle. \tag{18}$$

У [7] розглядалася *субріманова середня кривина* $H = -\frac{1}{2}\mathrm{div}_\Sigma \nu_h$ поверхні Σ і було показано, що мінімальність Σ у групі Гейзенберга еквівалентна умові $H = 0$. Обчислимо цю функцію для нашого випадку. З (8) випливає, що

$$\begin{gathered}\nabla_S \nu_h = |N_h|^{-1}\left(\langle \nabla_S N, Z\rangle - \langle N, X_3\rangle\langle \nabla_S X_3, Z\rangle\right) Z - \langle \nabla_S X_3, \nu_h\rangle X_3 = \\ = |N_h|^{-1}\left(-\langle B(S), Z\rangle - \langle N, X_3\rangle^2\langle \nabla_{\nu_h} X_3, Z\rangle\right) Z - \langle N, X_3\rangle\langle \nabla_{\nu_h} X_3, \nu_h\rangle X_3.\end{gathered}$$

Враховуючи (14), (15) і самоспряженість оператора Вейнгартена, отримуємо

$$\begin{gathered}\nabla_S \nu_h = -|N_h|^{-1}\left(\langle B(Z), S\rangle - \langle N, X_3\rangle^2\langle \nu_h, X_2\rangle^2\right) Z - \\ -\langle N, X_3\rangle\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle X_3.\end{gathered} \tag{19}$$

Звідси і з (16) маємо

$$\begin{gathered}-2H = \mathrm{div}_\Sigma \nu_h = \langle \nabla_Z \nu_h, Z\rangle + \langle \nabla_S \nu_h, S\rangle = \\ = |N_h|^{-1}\left(-\langle B(Z), Z\rangle + \langle N, X_3\rangle(1 + |N_h|^2)\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle\right).\end{gathered}$$

Порівнюючи цей вираз з (18), бачимо, що для поверхонь у $\widetilde{E(2)}$ мінімальність, взагалі кажучи, не рівносильна рівності субріманової середньої кривини нулю. Застосуємо тепер отриманий критерій мінімальності до найпростішого класу поверхонь – евклідових площин. Ми не вживатимемо слова "горизонтальна" і "вертикальна" для опису розташування площини відносно осі z, щоб уникнути плутанини з іншими значеннями цих слів у даній роботі.

Твердження 1. *Евклідова площина у* $\widetilde{E(2)}$ *є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона паралельна або ортогональна до осі* z.

Доведення. Оскільки для площини $B = 0$, (18) набуває вигляду

$$\langle N, X_3\rangle\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle = 0,$$

тобто

$$\langle N, X_1\rangle\langle N, X_2\rangle\langle N, X_3\rangle = 0.$$

Одиничний нормальний вектор $N = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}$ тут постійний, і з урахуванням (1) умовою мінімальності таким чином є

$$(a\cos z + b\sin z)\, c\, (a\sin z - b\cos z) = 0.$$

Зокрема, регулярними є точки, для яких $(a\cos z + b\sin z)^2 + c^2 > 0$. Якщо площина паралельна осі z, то $c = 0$, а якщо перпендикулярна до неї, то $a = b = 0$, тому такі площини мінімальні. Нехай тепер площина похила, тобто $c \neq 0$ і $a^2 + b^2 > 0$. Припустимо, що вона мінімальна. З попереднього рівняння маємо

$$\tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\sin 2z - ab\cos 2z = 0.$$

Оскільки для похилої площини z приймає усі дійсні значення, тоді $a^2 - b^2 = ab = 0$, тобто $a = b = 0$, протиріччя.

Для кращого розуміння класу мінімальних поверхонь даної геометрії запишемо також рівняння мінімальності для одного з типів явно заданих поверхонь.

Твердження 2 (Критерій мінімальності для явно заданих поверхонь)**.** *Нехай поверхня у $\widetilde{E(2)}$ задана рівнянням $y = f(x,z)$. Вона буде мінімальною тоді й тільки тоді, коли*

$$\begin{gathered}-\cos^2 z\, f_z^2 f_{xx} + (2\cos^2 z\, f_x f_z - \sin 2z f_z)f_{xz}+\\ +(-\cos^2 z\, f_x^2 + \sin 2z\, f_x - \sin^2 z)f_{zz}-\\ -\tfrac{1}{2}\sin 2z\, f_x^2 f_z - \cos 2z\, f_x f_z + \tfrac{1}{2}\sin 2z\, f_z = 0\end{gathered} \tag{20}$$

для усіх (x,z) таких, що $(f_x \cos z - \sin z)^2 + f_z^2 > 0$.

Доведення. Для даної поверхні

$$\begin{gathered}N = \tfrac{1}{\delta}\left(f_x\tfrac{\partial}{\partial x} - \tfrac{\partial}{\partial y} + f_z\tfrac{\partial}{\partial z}\right) =\\ = \tfrac{1}{\delta}\left((f_x\cos z - \sin z)X_1 + f_z X_2 + (f_x \sin z + \cos z)X_3\right)\end{gathered}$$

в силу (1), де позначили $\delta = \sqrt{1 + f_x^2 + f_z^2}$. Тому

$$N_h = \tfrac{1}{\delta}\left((f_x\cos z - \sin z)X_1 + f_z X_2\right),\ \langle N, X_3\rangle = \tfrac{1}{\delta}\left(f_x\sin z + \cos z\right).$$

Якщо позначити $\Delta = \sqrt{(f_x\cos z - \sin z)^2 + f_z^2}$, то $|N_h| = \frac{\Delta}{\delta}$, умовою регулярності буде $\Delta \neq 0$, і в регулярних точках

$$\nu_h = \tfrac{1}{\Delta}\left((f_x\cos z - \sin z)X_1 + f_z X_2\right),$$

тому за побудовою

$$\begin{gathered}Z = \tfrac{1}{\Delta}\left(-f_z X_1 + (f_x\cos z - \sin z)X_2\right) =\\ = -\tfrac{1}{\Delta}f_z\cos z\left(\tfrac{\partial}{\partial x} + f_x\tfrac{\partial}{\partial y}\right) + \tfrac{1}{\Delta}(f_x\cos z - \sin z)\left(\tfrac{\partial}{\partial z} + f_z\tfrac{\partial}{\partial y}\right).\end{gathered}$$

Позначимо через Z^1 і Z^2 коефіцієнти біля базисних векторних полів поверхні $\frac{\partial}{\partial x} + f_x\frac{\partial}{\partial y}$ і $\frac{\partial}{\partial z} + f_z\frac{\partial}{\partial y}$ відповідно у попередньому виразі. Оскільки в координатах (x,z) коефіцієнти другої фундаментальної форми явно заданої поверхні мають вигляд

$$b_{11} = -\tfrac{f_{xx}}{\delta},\ b_{12} = -\tfrac{f_{xz}}{\delta},\ b_{22} = -\tfrac{f_{zz}}{\delta},$$

маємо після розкриття дужок

$$\begin{gathered}\langle B(Z), Z\rangle = b_{ij}Z^i Z^j = \tfrac{1}{\delta\Delta^2}\left(-\cos^2 z\, f_z^2 f_{xx} + (2\cos^2 z\, f_x f_z - \sin 2z f_z)f_{xz}+\right.\\ \left.+(-\cos^2 z\, f_x^2 + \sin 2z\, f_x - \sin^2 z)f_{zz}\right).\end{gathered}$$

Тоді в силу (18), прирівнюючи цей вираз до

$$\langle N, X_3\rangle\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle = \tfrac{1}{\delta\Delta^2}(f_x \sin z + \cos z)(f_x \cos z - \sin z)f_z,$$

отримаємо умову мінімальності, що має вигляд (20).

Крім ортогональних до осі z площин $y = a\,x + b$, прикладами розв'язків рівняння (20) є знайдені у [9] поверхні $y = a\cos z + b$ та $y = x + a(\sin z + \cos z)+b$, де a і b постійні. Аналогічні рівняння можна виписати для поверхонь вигляду $x = f(y, z)$ і $z = f(x, y)$. Наведені приклади демонструють, зокрема, що з мінімальності поверхні у евклідовому сенсі не випливає її субріманова мінімальність та навпаки. Тепер перейдемо до питання про стійкість таких поверхонь, обчисливши другу варіацію субріманової площі.

Теорема 2 (Формула другої варіації)**.** *Нехай* Σ *– мінімальна поверхня у* $\widetilde{E(2)}$*. Тоді друга нормальна варіація її площі, що задана функцією* u*, має наступний вигляд:*

$$\begin{aligned} A''(0) = \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_0} \Big(&|N_h|^{-1}\left(Z(u) - \langle N, X_3\rangle|N_h|\langle \nu_h, X_2\rangle^2 u\right)^2 - \\ &-2|N_h|\langle B(Z), S\rangle^2 u^2 - 2\langle N, X_3\rangle\langle B(Z), S\rangle Z(u)u + \\ &+4\langle N, X_3\rangle|N_h|\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle\langle B(S), S\rangle u^2 + \\ &+2\left(1 - 2|N_h|^2\right)\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle S(u)u + \\ &+|N_h|\left(2 - 3|N_h|^2\right)\langle \nu_h, X_1\rangle^2\langle \nu_h, X_2\rangle^2 u^2\Big)\, d\Sigma. \end{aligned} \tag{21}$$

Доведення. Продовжимо міркування з доведення теореми 1. Спочатку знову вважатимемо поля N, N_h, ν_h, Z та S заданими на поверхнях варіації. З (5) та рівності $|\mathrm{J}\,\varphi_0| = 1$ випливає

$$A''(0) = \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_0} \left(|N_h|''(0) + 2|N_h|'(0)|\mathrm{J}\,\varphi_s|'(0) + |N_h|(0)|\mathrm{J}\,\varphi_s|''(0)\right) d\Sigma. \tag{22}$$

Перш за все, перепишемо формулу (10) у більш зручному для подальшого диференціювання вигляді. В силу (3),

$$\begin{aligned} \nabla_U X_3 &= \langle U, X_2\rangle X_1 = u\langle N(0), X_2\rangle X_1, \\ \nabla_U X_1 &= -\langle U, X_2\rangle X_3 = -u\langle N(0), X_2\rangle X_3, \end{aligned} \tag{23}$$

отже (10) приймає вигляд

$$|N_h|'(s) = \langle \nabla_U N, \nu_h\rangle - \langle N, X_3\rangle u\langle N(0), X_2\rangle\langle \nu_h, X_1\rangle.$$

Тут u та $\langle N(0), X_2\rangle$ не залежать від s, тому, диференціюючи, отримуємо

$$\begin{aligned} |N_h|''(s) = U(|N_h|') = &\langle \nabla_U\nabla_U N, \nu_h\rangle + \langle \nabla_U N, \nabla_U \nu_h\rangle - \\ &-\left(\langle \nabla_U N, X_3\rangle + \langle N, \nabla_U X_3\rangle\right)\langle N(0), X_2\rangle\langle \nu_h, X_1\rangle u - \\ &-\langle N, X_3\rangle\langle N(0), X_2\rangle\left(\langle \nabla_U \nu_h, X_1\rangle + \langle \nu_h, \nabla_U X_1\rangle\right) u. \end{aligned} \tag{24}$$

Також з (8), (23) та рівності $\langle Z, X_1\rangle = -\langle \nu_h, X_2\rangle$ випливає, що

$$\begin{gathered}\nabla_U\nu_h = |N_h|^{-1}\left(\langle\nabla_U N, Z\rangle - \langle N, X_3\rangle\langle\nabla_U X_3, Z\rangle\right) Z - \langle\nabla_U X_3, \nu_h\rangle X_3 = \\ = |N_h|^{-1}\left(\langle\nabla_U N, Z\rangle + \langle N, X_3\rangle\langle N(0), X_2\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle u\right) Z- \\ -\langle N(0), X_2\rangle\langle\nu_h, X_1\rangle u X_3.\end{gathered} \tag{25}$$

Підрахуємо значення доданків виразу (24) при $s = 0$. Оскільки поля Z, S та N утворюють ортонормовані базиси у регулярних точках поверхонь варіації, а ν_h ортогональне до Z,

$$\begin{gathered}\langle\nabla_U\nabla_U N, \nu_h\rangle = \langle\nabla_U\nabla_U N, S\rangle\langle S, \nu_h\rangle + \langle\nabla_U\nabla_U N, N\rangle\langle N, \nu_h\rangle = \\ = -\langle N, X_3\rangle\left(2\langle\nabla_U N, \nabla_U S\rangle + \langle N, \nabla_U\nabla_U S\rangle\right) - |N_h|\langle\nabla_U N, \nabla_U N\rangle = \\ = -\langle N, X_3\rangle\left(2\langle\nabla_U N, \nabla_S U\rangle + \langle N, \nabla_U\nabla_S U\rangle\right) - |N_h|\langle\nabla_U N, \nabla_U N\rangle,\end{gathered}$$

де друга рівність випливає з того, що другі похідні виразів $\langle N, S\rangle = 0$ та $\langle N, N\rangle = 1$ у напрямку U рівні нулю, а третя – з $[S, U] = 0$. Тут $\nabla_U\nabla_S U$ дорівнює оператору кривини евклідової метрики $R(U, S)U = 0$, бо $\nabla_U U = [U, S] = 0$. При $s = 0$, як було встановлено у доведенні теореми 1 перед рівняннями (11), $\nabla_U N = -Z(u)Z - S(u)S$, тому

$$\begin{gathered}\langle\nabla_U N, \nabla_S U\rangle(0) = -\langle Z(u)Z + S(u)S, \nabla_S N\rangle u = \\ = \left(\langle B(S), Z\rangle Z(u) + \langle B(S), S\rangle S(u)\right) u = B(S)(u)u\end{gathered}$$

за означенням оператора Вейнгартена і оскільки Z та S у регулярних точках утворюють ортонормовані базиси дотичних площин. Тут у правій частині й далі тепер позначаємо через N, N_h, ν_h, Z та S відповідні поля на поверхні Σ. Таким чином,

$$\langle\nabla_U\nabla_U N, \nu_h\rangle(0) = -2\langle N, X_3\rangle B(S)(u)u - |N_h|(Z(u)^2 + S(u)^2). \tag{26}$$

При $s = 0$ рівняння (25) приймає вигляд

$$\begin{gathered}\nabla_U\nu_h(0) = |N_h|^{-1}\left(-Z(u) + \langle N, X_3\rangle\langle N, X_2\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle u\right) Z- \\ -\langle N, X_2\rangle\langle\nu_h, X_1\rangle u X_3 = |N_h|^{-1}\left(-Z(u) + \langle N, X_3\rangle|N_h|\langle\nu_h, X_2\rangle^2 u\right) Z- \\ -|N_h|\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle u X_3.\end{gathered} \tag{27}$$

Звідси маємо з урахуванням формули $S = \langle N, X_3\rangle\nu_h - |N_h|X_3$

$$\begin{gathered}\langle\nabla_U N, \nabla_U\nu_h\rangle(0) = |N_h|^{-1}Z(u)^2 - \langle N, X_3\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle^2 Z(u)u- \\ -|N_h|^2\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle S(u)u, \\ \langle\nabla_U N, X_3\rangle(0) = |N_h|S(u).\end{gathered} \tag{28}$$

З (23) випливає, що

$$\langle N, \nabla_U X_3\rangle(0) = \langle N, X_2\rangle\langle N, X_1\rangle u = |N_h|^2\langle\nu_h, X_1\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle u. \tag{29}$$

З (27) та рівності $\langle Z, X_1\rangle = -\langle\nu_h, X_2\rangle$ отримуємо

$$\langle\nabla_U\nu_h, X_1\rangle(0) = |N_h|^{-1}\langle\nu_h, X_2\rangle Z(u) - \langle N, X_3\rangle\langle\nu_h, X_2\rangle^3 u. \tag{30}$$

Нарешті, з (23) також маємо

$$\langle \nu_h, \nabla_U X_1 \rangle(0) = 0, \tag{31}$$

бо ν_h ортогональне до X_3. Підставимо (26) і (28)-(31) у (24), приведемо подібні та спростимо:

$$\begin{gathered} |N_h|''(0) = -2\langle N, X_3\rangle B(S)(u)u - |N_h|(Z(u)^2 + S(u)^2) + \\ +|N_h|^{-1}\left(Z(u) - \langle N, X_3\rangle |N_h| \langle \nu_h, X_2\rangle^2 u\right)^2 - \\ -2|N_h|^2 \langle \nu_h, X_1\rangle \langle \nu_h, X_2\rangle S(u)u - |N_h|^3 \langle \nu_h, X_1\rangle^2 \langle \nu_h, X_2\rangle^2 u^2. \end{gathered} \tag{32}$$

Як показано, наприклад, у [10, с. 50-51], для евклідової метрики

$$\begin{gathered} |\mathrm{J}\,\varphi_s|''(0) = (\mathrm{div}_\Sigma U)^2 + \langle \nabla_Z U, N\rangle^2 + \langle \nabla_S U, N\rangle^2 - \\ -\langle \nabla_Z U, Z\rangle^2 - 2\langle \nabla_Z U, S\rangle \langle \nabla_S U, Z\rangle - \langle \nabla_S U, S\rangle^2 = \\ = \langle \nabla_Z U, N\rangle^2 + \langle \nabla_S U, N\rangle^2 + 2\left(\langle \nabla_Z U, Z\rangle \langle \nabla_S U, S\rangle - \langle \nabla_Z U, S\rangle \langle \nabla_S U, Z\rangle\right). \end{gathered}$$

Перепишемо цю рівність у термінах оператора Вейнгартена з урахуванням його самоспряженості:

$$|\mathrm{J}\,\varphi_s|''(0) = Z(u)^2 + S(u)^2 + 2\left(\langle B(Z), Z\rangle \langle B(S), S\rangle - \langle B(Z), S\rangle^2\right) u^2. \tag{33}$$

Залишилося підставити (11) (врахувавши (14)), (12), (32) і (33) у вираз під інтегралом формули (22):

$$\begin{gathered} |N_h|''(0) + 2|N_h|'(0)|\mathrm{J}\,\varphi_s|'(0) + |N_h||\mathrm{J}\,\varphi_s|''(0) = -2\langle N, X_3\rangle \langle B(S), Z\rangle Z(u)u - \\ -2\langle N, X_3\rangle \langle B(S), S\rangle S(u)u + |N_h|^{-1}\left(Z(u) - \langle N, X_3\rangle |N_h| \langle \nu_h, X_2\rangle^2 u\right)^2 - \\ -2|N_h|^2 \langle \nu_h, X_1\rangle \langle \nu_h, X_2\rangle S(u)u - |N_h|^3 \langle \nu_h, X_1\rangle^2 \langle \nu_h, X_2\rangle^2 u^2 + \\ +2\langle N, X_3\rangle \left(S(u) + |N_h| \langle \nu_h, X_1\rangle \langle \nu_h, X_2\rangle u\right)\left(\langle B(Z), Z\rangle + \langle B(S), S\rangle\right) u + \\ +2|N_h|\left(\langle B(Z), Z\rangle \langle B(S), S\rangle - \langle B(Z), S\rangle^2\right) u^2. \end{gathered}$$

Після підстановки умови мінімальності поверхні (18) та деяких спрощень звідси отримуємо потрібну формулу (21).

Твердження 3. *Усі мінімальні евклідові площини у $\widetilde{E(2)}$ є стійкими.*

Доведення. В силу твердження 1, мінімальна площина або паралельна осі z, і тоді $\langle \nu_h, X_2\rangle = 0$, або ортогональна до неї, і тоді $\langle N, X_3\rangle = \langle \nu_h, X_1\rangle = 0$. Оскільки крім того $B = 0$, формула (21) набуває вигляду

$$A''(0) = \int\limits_{\Sigma \setminus \Sigma_0} |N_h|^{-1} Z(u)^2 \, d\Sigma \geqslant 0,$$

що й означає стійкість.

4. Вертикальні поверхні

Розглянемо ще один (крім евклідових площин) клас поверхонь, для яких формула другої варіації (21) суттєво спрощується. Будемо називати поверхню Σ у тривимірному субрімановому многовиді *вертикальною*, якщо її дотична площина $T_p\Sigma$ перпендикулярна до горизонтальної площини субрімановою структури $\mathcal{H}_p$ у кожній точці p поверхні, тобто їхні вектори нормалі ортогональні. Зокрема, такі поверхні не містять сингулярних точок. У наших позначеннях вертикальні поверхні у $\widetilde{E(2)}$ характеризуються еквівалентними умовами $\langle N, X_3\rangle = 0$, $|N_h| = 1$ або $N = N_h = \nu_h$. Умова (18) мінімальності для них приймає вигляд $\langle B(Z), Z\rangle = 0$. Зауважимо, що вертикальні евклідові площини у тривимірній групі Гейзенберга, якими згідно з результатами робіт [2] та [7] вичерпуються повні зв'язні стійкі мінімальні поверхні з порожніми сингулярними множинами, є вертикальними у цьому сенсі. Як побачимо далі у доведенні теореми 3, формула другої варіації для таких поверхонь суттєво спрощується (на що можна сподіватися і у випадку загального тривимірного субріманового многовида).

Евклідова площина у $\widetilde{E(2)}$ є вертикальною тоді й тільки тоді, коли вона перпендикулярна до осі z, бо умова ортогональності її постійного вектора нормалі N та X_3 в усіх точках площини еквівалентна $N = \pm\frac{\partial}{\partial z}$. Такі площини є мінімальними в силу твердження 1. Іншим прикладом вертикальної мінімальної поверхні у $\widetilde{E(2)}$ є стандартний гелікоїд $x\cos z + y\sin z = 0$. Дійсно, його одиничне нормальне поле N пропорційне до градієнта $\cos z\frac{\partial}{\partial x} + \sin z\frac{\partial}{\partial y} + (-x\sin z + y\cos z)\frac{\partial}{\partial z}$, а отже ортогональне до X_3. Мінімальність цієї поверхні можна встановити за допомогою рівняння (20), виразивши $y = -x\operatorname{ctg} z$ у точках, де $\sin z \neq 0$, або безпосередньо перевіривши умову $\langle B(Z), Z\rangle = 0$, що буде зроблено у доведенні наступної теореми. Також властивості вертикальності та мінімальності не порушаться, якщо паралельно перенести такий гелікоїд уздовж площини (x, y). Виявляється, що цей список прикладів вичерпний. Далі під повнотою ми будемо розуміти повноту індукованої ріманової метрики поверхні.

Теорема 3. *Будь-яка повна зв'язна вертикальна мінімальна поверхня у $\widetilde{E(2)}$ – це ортогональна до осі z евклідова площина або паралельно перенесений уздовж площини (x, y) стандартний гелікоїд $x\cos z + y\sin z = 0$. При цьому гелікоїди є нестійкими.*

Доведення. Оскільки для вертикальної поверхні $\langle N, X_3\rangle = 0$ і $|N_h| = 1$, в усіх її точках $S = -X_3$, тобто в силу повноти поверхня складається з інтегральних траєкторій поля X_3 – геодезичних, що є горизонтальними евклідовими прямими з напрямними векторами $(\sin z, -\cos z, 0)$. Отже, поверхня є лінійчатою. Представимо її як

$$r(\rho, \varphi) = (x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi)) + \rho(\sin z(\varphi), -\cos z(\varphi), 0), \tag{34}$$

де (x, y, z) – натурально параметризована (у евклідовому сенсі, тобто $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1$) інтегральна траєкторія поля Z, тому виконується умова

$$x' \sin z - y' \cos z = 0 \tag{35}$$

ортогональності Z і S. Зокрема, для площин можна покласти $x = \varphi \cos z$ і $y = \varphi \sin z$ при постійній z, а для гелікоїдів – взяти постійні x та y і $z = \varphi$. Для такої поверхні базис дотичних площин утворюють поля

$$r_\rho = \sin z \frac{\partial}{\partial x} - \cos z \frac{\partial}{\partial y} = -S,\ r_\varphi = (x' + \rho z' \cos z)\frac{\partial}{\partial x} + (y' + \rho z' \sin z)\frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z},$$

тому $N = \frac{1}{\delta}\left(z' \cos z \frac{\partial}{\partial x} + z' \sin z \frac{\partial}{\partial y} - \sigma \frac{\partial}{\partial z}\right)$, де позначаємо $\sigma = x' \cos z + y' \sin z + z'\rho$ і $\delta = \sqrt{(z')^2 + \sigma^2}$. Таким чином, $N = N_h = \nu_h = \frac{z'}{\delta}X_1 - \frac{\sigma}{\delta}X_2$, тому

$$Z = \frac{\sigma}{\delta}X_1 + \frac{z'}{\delta}X_2 = \frac{1}{\delta}(-x' \sin z + y' \cos z)r_\rho + \frac{1}{\delta}r_\varphi = \frac{1}{\delta}r_\varphi \tag{36}$$

в силу (35). Обчислюючи коефіцієнти другої фундаментальної форми поверхні (34) у координатах (ρ, φ), отримуємо

$$b_{11} = 0,\ b_{12} = \frac{(z')^2}{\delta},\ b_{22} = \frac{1}{\delta}\left((x''z' - x'z'')\cos z + (y''z' - y'z'')\sin z\right). \tag{37}$$

Зауважимо, що усі ці міркування вірні й для довільних вертикальних поверхонь. В силу (36), умова мінімальності $\langle B(Z), Z\rangle = 0$ тут еквівалентна $b_{22} = 0$, тобто

$$(x''z' - x'z'')\cos z + (y''z' - y'z'')\sin z = 0.$$

З умови (35) випливає, що $(x', y') = \lambda(\cos z, \sin z)$ для деякої функції λ, тому попереднє рівняння набуває вигляду

$$\lambda' z' - z''\lambda = 0, \tag{38}$$

а умова натуральності параметра φ дає $\lambda^2 + (z')^2 = 1$. Тому на проміжках, де $\lambda = 0$, маємо $z' = \pm 1$, $x' = y' = 0$, тобто поверхня (34) є стандартним гелікоїдом, що паралельно перенесений уздовж площини (x, y). На проміжках, де $\lambda \neq 0$, умова (38) означає, що $\left(\frac{z'}{\lambda}\right)' = 0$, тобто $z' = \lambda c$ для деякого постійного c. З умови натуральності параметра тоді отримуємо, що $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$ і $z' = a = \pm\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ постійні, отже $z = a\varphi + b$ і $(x', y') = \lambda(\cos(a\varphi + b), \sin(a\varphi + b))$. Тоді при $a = 0$ рівняння (34) задає ортогональну до осі z площину, а при $a \neq 0$ – знову паралельно перенесений стандартний гелікоїд.

Залишилося дослідити гелікоїди на стійкість. Для цього спочатку спростимо формулу другої варіації (21). Для вертикальної мінімальної поверхні вираз під інтегралом у цій формулі набуває вигляду

$$\begin{gathered} Z(u)^2 - 2\langle B(Z), S\rangle^2 u^2 - 2\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle S(u)u - \\ -\langle \nu_h, X_1\rangle^2\langle \nu_h, X_2\rangle^2 u^2. \end{gathered} \tag{39}$$

Як і в доведенні теореми 1, зробимо перетворення, обчисливши дивергенцію допоміжного поля. Підставляючи умову мінімальності $\langle B(Z), Z\rangle = 0$ та умови вертикальності поверхні у (17) та (19), отримаємо

$$\mathrm{div}_\Sigma S = \langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle,\ \nabla_S \nu_h = -\langle B(Z), S\rangle Z.$$

Тому, враховуючи, що $\nabla_S X_1$ пропорційне до X_3 (аналогічно до (23)), а $\nabla_S X_2 = 0$ в силу (3), маємо

$$\begin{gathered}\mathrm{div}_\Sigma\left(\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle u^2 S\right) = \left(\langle \nabla_S\nu_h, X_1\rangle + \langle \nu_h, \nabla_S X_1\rangle\right)\langle \nu_h, X_2\rangle u^2 + \\ + \langle \nu_h, X_1\rangle\left(\langle \nabla_S\nu_h, X_2\rangle + \langle \nu_h, \nabla_S X_2\rangle\right) u^2 + 2\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle S(u)u + \\ + \langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle u^2 \mathrm{div}_\Sigma S = -\langle B(Z), S\rangle\langle Z, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle u^2 - \\ - \langle \nu_h, X_1\rangle\langle B(Z), S\rangle\langle Z, X_2\rangle u^2 + 2\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle S(u)u + \\ + \langle \nu_h, X_1\rangle^2\langle \nu_h, X_2\rangle^2 u^2 = 2\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle S(u)u + \\ + \left(\langle B(Z), S\rangle\left(\langle \nu_h, X_2\rangle^2 - \langle \nu_h, X_1\rangle^2\right) + \langle \nu_h, X_1\rangle^2\langle \nu_h, X_2\rangle^2\right) u^2.\end{gathered}$$

Таким чином, (39) дорівнює

$$\begin{gathered}Z(u)^2 - 2\langle B(Z), S\rangle^2 u^2 - \mathrm{div}_\Sigma\left(\langle \nu_h, X_1\rangle\langle \nu_h, X_2\rangle u^2 S\right) + \\ + \langle B(Z), S\rangle\left(1 - 2\langle \nu_h, X_1\rangle^2\right) u^2.\end{gathered}$$

Знову ж враховуючи, що інтеграл від дивергенції дорівнює нулю, отримуємо звідси спрощену формулу другої варіації:

$$A''(0) = \int_\Sigma \left(Z(u)^2 + (-2\langle B(Z), S\rangle^2 + \langle B(Z), S\rangle(1 - 2\langle \nu_h, X_1\rangle^2))u^2\right) d\Sigma. \quad (40)$$

Покладемо у (34) функції x та y постійними і $z = \varphi$. Тоді у введених вище позначеннях маємо $\langle \nu_h, X_1\rangle = \frac{z'}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}$, $Z = \frac{1}{\delta} r_\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} r_\varphi$, $S = -r_\rho$ і таким чином $\langle B(Z), S\rangle = -\frac{b_{12}}{\sqrt{1+\rho^2}} = -\frac{1}{1+\rho^2}$ в силу (36) і (37). Враховуючи також, що $d\Sigma = \delta\, d\rho d\varphi = \sqrt{1+\rho^2}\, d\rho d\varphi$, бачимо, що (40) набуває вигляду

$$A''(0) = \int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}(u_\varphi^2 - u^2)\, d\rho d\varphi.$$

Нехай $u(\rho, \varphi) = u_1(\rho) u_2(\varphi)$, де u_1 – гладка невід'ємна функція з компактним носієм, а $u_2(\varphi) = \left(\varphi^2 - 4\right)^2$ на відрізку $[-2, 2]$ і дорівнює нулю за його межами. Для відповідної гладкої нормальної варіації з компактним носієм тоді маємо $A''(0) < 0$ за попередньою формулою. Таким чином, гелікоїди дійсно нестійкі.

З цієї теореми та твердження 3 отримуємо наступний частковий результат типу Бернштейна.

Висновок 2. *У $\widetilde{E(2)}$ повна зв'язна вертикальна мінімальна поверхня є стійкою тоді й тільки тоді, коли ця поверхня є ортогональною до осі z евклідовою площиною.*

5. Прикінцеві зауваження

Автори хотіли б подякувати анонімному рецензенту за корисні пропозиції щодо змісту і викладення роботи, зокрема, за запропоновану нову функцію, що використана для доведення нестійкості гелікоїдів у доведенні теореми 3.

Історія статті: отримана: 9 жовтня 2023; останній варіант: 22 листопада 2023
прийнята: 25 листопада 2023.

REFERENCES

1. D. Danielli, N. Garofalo, D. M. Nhieu, S. D. Pauls. Instability of graphical strips and a positive answer to the Bernstein problem in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$, J. Differential Geom. – 2009. – Vol. **81**, No **2**. – P. 251–295. 10.4310/jdg/1231856262

2. D. Danielli, N. Garofalo, D. M. Nhieu, S. D. Pauls. The Bernstein problem for embedded surfaces in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$, Indiana Univ. Math. J. – 2010. – Vol. **59**, No **2**. – P. 563–594. 10.1512/iumj.2010.59.4291

3. D. Fischer-Colbrie, R. Schoen. The structure of complete stable minimal surface in 3-manifolds of non-negative scalar curvature, Comm. Pure Appl. Math. – 1980. – Vol. **33**, No **2**. – P. 199–211. 10.1002/cpa.3160330206

4. N. Garofalo, D.-M. Nhieu. Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces, Comm. Pure Appl. Math. – 1996. – Vol. **42**, No **3**. – P. 1081–1144. 10.1002/(SICI)1097-0312(199610)49:10<1081::AID-CPA3>3.0.CO;2-A

5. R. K. Hladky, S. D. Pauls. Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model, J. Math. Imaging Vis. – 2010. – Vol. **36**, No **1**. – P. 1–27. 10.1007/s10851-009-0167-9

6. A. Hurtado, C. Rosales. Area-stationary surfaces inside the sub-Riemannian three-sphere, Math. Ann. – 2008. – Vol. **340**, No **3**. – P. 675–708. 10.1007/s00208-007-0165-4

7. A. Hurtado, M. Ritoré, C. Rosales. The classification of complete stable area-stationary surfaces in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$, Adv. in Math. – 2010. – Vol. **224**, No **2**. – P. 561–600. 10.1016/j.aim.2009.12.002

8. M. Ritoré, C. Rosales. Area-stationary and stable surfaces in the sub-Riemannian Heisenberg group $\mathbb{H}^1$, Matemática Contemporânea. – 2008. – Vol. **35**. – P. 185–203. 10.21711/231766362008/rmc3512

9. N. Shcherbakova. Minimal surfaces in sub-Riemannian manifolds and structure of their singular sets in the (2,3) case, ESAIM Control Optim. Calc. Var. – 2009. – Vol. **15**, No **4**. – P. 839–862. 10.1051/cocv:2008051

10. L. Simon. Lectures on geometric measure theory, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University. – 1983. – Vol. **3**. – vii+272 p. ISBN:0-86784-429-9

Article history: Received: 9 October 2023; Final form: 22 November 2023
Accepted: 25 November 2023.

How to cite this article:

I. O. Havrylenko, E. V. Petrov, Stability of minimal surfaces in the sub-Riemannian manifold $\widetilde{E(2)}$, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 98, 2023, p. 50–67, (in Ukr.). DOI: 10.26565/2221-5646-2023-98-04

Stability of minimal surfaces in the sub-Riemannian manifold $\widetilde{E(2)}$

I. O. Havrylenko, E. V. Petrov
V. N. Karazin Kharkiv National University
Svobody square, 4, Kharkiv, Ukraine, 61022

In the paper we study smooth oriented surfaces in the universal covering space of the group of orientation-preserving Euclidean plane isometries, which has a three-dimensional sub-Riemannian manifold structure. This structure is constructed as a restriction of the Euclidean metric on the group to some completely non-integrable left invariant distribution. The sub-Riemannian area of a surface is then defined as the integral of the length of its unit normal field projected orthogonally onto this distribution. We calculate the first variation formula of the sub-Riemannian surface area and derive the minimality criterion from it. Here we call a surface minimal if it is a critical point of the sub-Riemannian area functional under normal variations with compact support. We show that the minimality in this case is not equivalent to the vanishing of the sub-Riemannian mean curvature. We then prove that a Euclidean plane is minimal if and only if it is parallel or orthogonal to the z-axis (where the z-coordinate corresponds to the rotation angle of an isometry). Also we obtain the minimality condition for a graph and give examples of minimal graphs. The examples considered in the paper demonstrate, in particular, that the minimality of a surface in the Riemannian (in this case Euclidean) sense does not imply its sub-Riemannian minimality, and vice versa.

Next, we consider the stability of minimal surfaces. For this purpose, we derive the second variation formula of the sub-Riemannian area and show with it that minimal Euclidean planes are stable. We introduce a class of surfaces for which the tangent planes are perpendicular to the planes of the sub-Riemannian structure, and call them vertical surfaces. In particular, for such surfaces the second variation formula is simplified significantly. Then we prove that complete connected vertical minimal surfaces are either Euclidean planes or helicoids and that helicoids are unstable. This implies a following Bernstein type result: a complete connected vertical minimal surface is stable if and only if it is a Euclidean plane orthogonal to the z-axis.

Keywords: **sub-Riemannian manifold; left invariant metric; minimal surface; stability.**