ISSN 2221-5646(Print) 2523-4641(Online)
Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics”
2022, Vol. 95, p. 31–38
DOI: 10.26565/2221-5646-2022-95-03
УДК 517.954

Вісник Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
2022, Том 95, с. 31–38

О. А. Макаров
доцент, кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри прикладної математики
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
makarovifamily07@gmail.com *http://orcid.org/0000-0002-9050-4987*

І. Г. Ніколенко
кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри штучного інтелекту та програмного забезпечення
майдан Свободи, 6, Харків, Україна, 61022
makarovifamily07@gmail.com *http://orcid.org/0000-0002-2904-6761*

Двоточкова крайова задача для систем псевдодиференціальних рівнянь з крайовими умовами, що містять псевдодиференціальні оператори

У роботі розглядається двоточкова крайова задача для псевдодиференціальних рівнянь та систем псевдодиференціальних рівнянь другого порядку з крайовими умовами, що містять псевдодиференціальні оператори. Необхідність розгляду псевдодиференціальних операторів обумовлена тим, що, по-перше, у прикладних задачах все частіше виникають рівняння з такими операторами, а по-друге, розглядаючи такі рівняння, вдається досягти коректності крайової задачі в просторі Л. Шварца S і в двоїстому до нього просторі.

Спочатку розглядається скалярне псевдодиференціальне рівняння з символом з простору $C^{\infty}_{-\infty}$, що складається з нескінченно диференційовних функцій, якх зростають степеневим чином. Для такого рівняння зазначається конкретний вид крайової умови, за якою крайова задача коректна у просторі S. Крім того, наведено приклад диференціально-різніцевого рівняння та конкретні крайові умови з псевдодиференціальним оператором типу згортки, за яких дана крайова задача, є коректною у просторі S.

Потім розглядається система двох псевдодифференціальних рівнянь із символами з простору $C^{\infty}_{-\infty}$ і для цієї системи доводиться існування коректної краєвої задачі в просторі S. При доведенні використовується перетворення Фур'є і зведення системи до трикутного виду. Для цього випадку також наведено приклад такої системи та вказаний конкретний вид крайової умови, при якої ця крайова задача є коректною у просторі S.

Таким чином, у роботі доведено, що для будь-якого псевдодиференціального рівняння, а також для системи двох псевдодиференціальних рівнянь завжди існує коректна крайова задача у просторі S, при цьому крайові умови містять псевдодиференціальні оператори. Також вказано алгоритм побудови коректних крайових умов, які є псевдодиференціальними операторами, символи якіх залежать від смволів псевдодиференціальних рівнянь.

Ключові слова: **крайова задача; псевдодиференціальні рівняння; перетворення Фур'є; триангуляція.**

2010 Mathematics Subject Classification: 35S15.

Псевдодиференціальні рівняння все частіше виникають у застосунках тому, що, зокрема, містять диференціально-різницеві рівняння та рівняння у згортках [1, 2, 3, 4] .

Проте коректної двоточкової крайової задачі зі сталими коефіцієнтами може не існувати для деяких рівнянь [5]. Тому виникає необхідність розгляду крайових умов, що містять псевдодиференціальні оператори. Покажемо, що в класі таких задач завжди існують коректні крайові задачі у просторі Л. Шварца S та у просторах скінченно-гладких функцій, які зростають або спадають степеневим чином.

Розглянемо псевдодиференціальне рівняння

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,T]. \tag{1}$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,0) + C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,T) = \varphi(x), \tag{2}$$

де $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — псевдодиференціальні оператори з символами $\widetilde{A}(s), \widetilde{B}(s), \widetilde{C}(s)$ з простору $C^{\infty}_{-\infty}$, що складається з нескінченно диференційовних функцій степеневого зростання [6].

Покажемо, що для будь-якого $\widetilde{A}(s) \in C^{\infty}_{-\infty}$ знайдуться такі $\widetilde{B}(s) \in C^{\infty}_{-\infty}$ та $\widetilde{C}(s) \in C^{\infty}_{-\infty}$, що крайова задача (1)–(2) буде коректною у просторі S.

Виконаємо перетворення Фур'є за просторовими змінними

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \widetilde{u}(s,t)}{\partial t} = \widetilde{A}(s)\widetilde{u}(s,t), \\ &\widetilde{B}(s)\widetilde{u}(s,0) + \widetilde{C}(s)\widetilde{u}(s,T) = \widetilde{\varphi}(s). \end{aligned}$$

Розв'язок такої задачі має вигляд

$$\begin{aligned} &\widetilde{u}(s,t) = e^{t\widetilde{A}(s)} \left(\widetilde{B}(s) + \widetilde{C}(s) \exp T\widetilde{A}(s)\right)^{-1} \widetilde{\varphi}(s), \\ &\left(\widetilde{B}(s) + \widetilde{C}(s) \exp T\widetilde{A}(s)\right) \neq 0, \qquad s \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Візьмемо $\widetilde{B}(s) \equiv 1, \quad \widetilde{C}(s) = \exp\left(-iTIm\widetilde{A}(s)\right) \in C^{\infty}_{-\infty}$.
Покажемо, що $Q(s,t) = e^{t\widetilde{A}(s)}\left(1 + \exp TRe\widetilde{A}(s)\right)^{-1} \in C^{\infty}_{-\infty}$.
Це нескінченно диференційовна функція та

$$|Q(s,t)| = e^{tRe\widetilde{A}(s)}\left(1 + \exp TRe\widetilde{A}(s)\right)^{-1}$$

Якщо $Re\widetilde{A}(s) \geq 0$, то

$$|Q(s,t)| \leq e^{(t-T)Re\widetilde{A}(s)}\left(e^{-TRe\widetilde{A}(s)} + 1\right)^{-1} \leq 1.$$

Якщо $Re\widetilde{A}(s) < 0$, то

$$|Q(s,t)| \leq 1.$$

Оцінимо похідні

$$\left|\frac{\partial}{\partial s_j}Q(s,t)\right| \leq \left|e^{t\widetilde{A}(s)}\left(1+e^{T\widetilde{A}(s)}\right)^{-1} t\frac{\partial\widetilde{A}(s)}{\partial s_j}\right| + \left|e^{t\widetilde{A}(s)}\left(1+e^{T\widetilde{A}(s)}\right)^{-2} e^{T\widetilde{A}(s)}T\frac{\partial\widetilde{A}(s)}{\partial s_j}\right|,$$

тобто обидва доданки задовольняють степеневу оцінку.

Аналогічно оцінюємо похідні вищого порядку $\dfrac{\partial^k}{\partial s_j^k}Q(s,t)$.

Коректність доведено.

Доведемо коректність крайової задачі для неоднорідного рівняння.
Для цього розглянемо крайову задачу для неоднорідного рівняння.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) + f(x,t), \tag{3}$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,0) + C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,T) = 0. \tag{4}$$

Після перетворення Фур'є ця задача перейде в наступну:

$$\frac{\partial\widetilde{u}(s,t)}{\partial t} = \widetilde{A}(s)\widetilde{u}(s,t) + \widetilde{f}(s,t), \tag{5}$$

$$\widetilde{B}(s)\widetilde{u}(s,0) + \widetilde{C}(s)\widetilde{u}(s,T) = 0. \tag{6}$$

Функція Гріна для цієї задачі має вигляд

$$G(s,t,\tau) = \begin{cases} Q(s,t)e^{-\tau\widetilde{A}(s)} \cdot \widetilde{B}(s) & t > \tau, \\ -Q(s,t)e^{(T-\tau)\widetilde{A}(s)} \cdot \widetilde{C}(s) & t < \tau. \end{cases}$$

Покажемо, що $G(s,t,\tau) \in C^{\infty}_{-\infty}$ при обраних $\widetilde{B}(s)$ та $\widetilde{C}(s)$.

При $t > \tau \quad |G(s,t,\tau)| \le e^{(t-T-\tau)Re\widetilde{A}(s)} \le 1$ за умови $Re\widetilde{A}(s) \ge 0$.
Якщо $Re\widetilde{A}(s) < 0$, то $|G(s,t,\tau)| \le e^{(T-\tau)Re\widetilde{A}(s)} \le 1$.

При $t < \tau \quad |G(s,t,\tau)| \le e^{(t-T+T-\tau)Re\widetilde{A}(s)} \le 1$ за умови $Re\widetilde{A}(s) \ge 0$.
Якщо $Re\widetilde{A}(s) < 0$, то $|G(s,t,\tau)| \le e^{(t+T-\tau)Re\widetilde{A}(s)} \le 1$.
Таким чином, $|G(s,t,\tau)| \le 1$.

Аналогічно оцінці похідних $Q(s,t)$ доводиться, що

$$\left|\frac{\partial^k G(s,t,\tau)}{\partial s_j}\right| \le C_k(1+|s|)^{p_k}$$

Тому $G(s,t,\tau) \in C^{\infty}_{-\infty}$. Отже, крайова задача (3)–(4) є коректною у просторі S.

Розглянемо наступний приклад.

Приклад 1.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + bu(x+h,t), \quad x \in \mathbb{R}, \ \ t \in [0,T], \ \ a,b,h \in \mathbb{R}.$$

Тут $\widetilde{A}(s) = -as^2 + be^{ihs} \in C^{\infty}_{-\infty}, \ \ Im\widetilde{A}(s) = b\sin hs$.
Тому, якщо взяти $\widetilde{B}(s) = 1, \ \ \widetilde{C}(s) = e^{iTb\sin hs}$, то крайова задача з умовою

$$u(x,0) + C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,T) = \varphi(s)$$

буде коректною у просторі S.
Вона також буде коректною у двоїстому просторі S' та коректно розв'язуваною у просторах Соболева-Слободецького H^s_l (див. [6]).

Більш того, оскільки фундаментальна функція

$$Q(s,t) = e^{t(-as^2+be^{ihs})}\left(1 + e^{T(-as^2+b\cos hs)}\right)^{-1}$$

задовольняє оцінку

$$|Q(s,t)| \le \begin{cases} C_1 e^{-ats^2} & \text{при} \quad a > 0, \\ C_2 e^{a(T-t)s^2} & \text{при} \quad a < 0, \end{cases}$$

то розв'язки такої крайової задачі будуть нескінченно диференційовними за x при $t \in (0,T)$ (див.[7]).

Розглянемо систему псевдодиференціальних рівнянь

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) \tag{7}$$

з крайовими умовами

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,0) + C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,T) = \varphi(x), \tag{8}$$

де матриці $\widetilde{A}(s), \widetilde{B}(s)$ та $\widetilde{C}(s)$ розмірами 2×2 належать простору $C_{-\infty}^{\infty}$.

Нехай $\lambda_1(s)$ та $\lambda_2(s)$ — власні значення матриці

$$\widetilde{A}(s) = \begin{pmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) \end{pmatrix}.$$

Легко показати, що $\lambda_1(s)$ та $\lambda_2(s)$ належать простору $C_{-\infty}^{\infty}$.
Унітарна матриця

$$T(s) = \frac{1}{\sqrt{|a_{12}(s)|^2 + |\lambda_1(s) - a_{11}(s)|^2}} \begin{pmatrix} a_{12}(s) & \overline{a_{11}(s)} - \overline{\lambda_1(s)} \\ \lambda_1(s) - a_{11}(s) & \overline{a_{12}(s)} \end{pmatrix}$$

зводить матрицю $\widetilde{A}(s)$ до трикутного вигляду (див. [8])

$$T^*(s)\widetilde{A}(s)T(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & q(s) \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix},$$

де функція $q(s)$ виражається через $a_{ij}(s)$ і також належить простору $C_{-\infty}^{\infty}$.
Тому заміна $v(s,t) = T^*(s)\widetilde{u}(s,t)$ приведе до системи

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1(s,t)}{dt} = \lambda_1(s)v_1(s,t) + q(s)v_2(s,t), \\ \dfrac{dv_2(s,t)}{dt} = \lambda_2(s)v_2(s,t). \end{cases} \tag{9}$$

Якщо взяти крайові умови

$$\begin{cases} v_1(s,0) + e^{-iT\,Im\lambda_1(s)}v_1(s,T) = \psi_1(s), \\ v_2(s,0) + e^{-iT\,Im\lambda_2(s)}v_2(s,T) = \psi_2(s), \end{cases} \tag{10}$$

то, згідно попередньому, $v_1(s,t)$ та $v_2(s,t)$ будуть належати простору S, а отже, і $\widetilde{u}(s,t) \in S$.
Таким чином, доведено теорему.

Теорема 1. *Для будь-якої матриці $\widetilde{A}(s) \in C_{-\infty}^{\infty}$ розміру 2×2 існують такі матриці $\widetilde{B}(s)$ та $\widetilde{C}(s)$, які належать простору $C_{-\infty}^{\infty}$, що крайова задача (7) – (8) є коректною у просторі S.*

Приклад 2. Розглянемо систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(x_1,x_2,t)}{\partial t} &= u_2(x_1,x_2,t) \\ \frac{\partial u_2(x_1,x_2,t)}{\partial t} &= 2\frac{\partial^2 u_2(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2 u_2(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^4 u_1(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^4} + \\ &+ 2\frac{\partial^4 u_1(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - \frac{\partial^4 u_1(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^2 u_1(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2}. \end{aligned}$$

Запишемо матрицю цієї системи

$$\widetilde{A}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(s_1^2 - s_2^2)^2 - s_1^2 & 2(s_1^2 - s_2^2) \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння цієї матриці має вигляд

$$\lambda^2 - 2(s_1^2 - s_2^2)\lambda + (s_1^2 - s_2^2)^2 + s_1^2 = 0,$$

а власні значення $\lambda_{1,2}(s) = s_1^2 - s_2^2 \pm is_1$.

Отже, унітарна матриця переходу $T(s)$ дорівнює

$$T(s) = \frac{1}{\sqrt{\left(s_2^2 - s_1^2\right)^2 + s_1^2 + 1}} \begin{pmatrix} 1 & s_2^2 - s_1^2 + is_1 \\ -s_2^2 + s_1^2 + is_1 & 1 \end{pmatrix},$$

а після заміни $v(s,t) = T^*(s)\widetilde{u}(s,t)$ перейдемо до трикутної системи

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1(s,t)}{dt} = \left(s_1^2 - s_2^2 + is_1\right) v_1(s,t) + q(s)v_2(s,t), \\ \dfrac{dv_2(s,t)}{dt} = \left(s_1^2 - s_2^2 - is_1\right) v_2(s,t) \end{cases}$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} v_1(s,0) + e^{-iTs_1}v_1(s,T) = \psi_1(s), \\ v_2(s,0) + e^{+iTs_1}v_2(s,T) = \psi_2(s), \end{cases}$$

де $\psi(s) = T^*(s)\widetilde{\varphi}(s)$. Ця крайова задача буде коректною у просторі S на підставі доведеної вище теореми.

Якщо від перетворення Фур'є повернутися до вихідних функцій, то крайові умови будуть такими

$$\begin{aligned} u_1(x_1,x_2,0) + u_1(x_1+T,x_2,T) = w_1(x_1,x_2) \\ u_2(x_1,x_2,0) + u_2(x_1-T,x_2,T) = w_2(x_1,x_2), \end{aligned}$$

де $w(x) = T^*\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)$.

Висновок

У роботі доведено, що для будь-якого псевдодиференціального рівняння, а також для системи двох псевдодиференціальних рівнянь завжди існує коректна крайова задача у просторі S, при цьому крайові умови містять псевдодиференціальні оператори. Крім того, вказано алгоритм побудови коректних крайових умов.

REFERENCES

1. B. J. Ptashnik., V. S. Ilkiv, I. I. Kmit, V. M. Polishchuk, Nonlocal boundary value problems for partial differential equations. 2002. K.: Scientific thought, 416p.
2. A. M. Kuz, B. Yo. Ptashnyk, Problem for hyperbolic system of equations having constant coefficients with integral conditions with respect to the time variable, Carpathian Math. Publ., — 2014. **6**, N. **2**. — P. 282–299. DOI: 10.15330/cmp.6.2.282-299.
3. A. Bouziani, N. Merazga,. Solution to a pseudoparabolic problem with conditions, EJDE. — 2006. — No. **115**. — P. 1–18. SSN: 1072-6691. URL: http://ejde.math.txstate.edu or http://math.unt.edu ftp ejde.math.txstate.edu (login: ftp).
4. A. A. Makarov, D. A. Levkin. Boundary-value problems in a layer for evolutionary pseudo-differential equations with integral conditions. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics". – 2018. – **87**. – P. 61–67. DOI: 10.26565/2221-5646-2018-87-05.
5. A. A. Makarov. The existence of a correct two-point boundary value problem in a layer for systems of pseudo-differential equations, Differential Equations. 1994. – Vol. **30**, No. **1**. – P.144–150.
6. L. R. Volevich, S. G. Gindikin. Generalized functions and equations in convolutions. M.: Fizmatlit. – 1994. – 336 p. – ISBN 5-02-014601-3.
7. A. A. Makarov. Parabolic boundary value problems for systems of pseudodifferential equations in an infinite layer, Differential Equations. 1996. – Vol. **32**, No. **5**. – P.636–642.
8. Roger A. Horn, Charles R. Johnson. Matrix Analysis./ Cambridge University Press. – 2013. – 643 p. – ISBN 0521839408, 9780521839402.

Історія статті: отримана: 17 квітня 2022; останній варіант: 15 червня 2022
прийнята: 18 червня 2022.

How to cite this article:

O. Makarov, I. Nikolenko., Two-point boundary value problem for systems of pseudo-differential equations under boundary conditions containing pseudo-differential operators., Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 95, 2022, p. 31–38. DOI: 10.26565/2221-5646-2022-95-03

Two-point boundary value problem for systems of pseudo-differential equations under boundary conditions containing pseudodifferential operators.

O. Makarov[1], I. Nikolenko[2]
[1]*Department of Applied Mathematics*
V. N. Karazin Kharkiv National University
Svobody square, 4, Kharkiv, Ukraine, 61022
[2]*Department of Artificial Intelligence and Software*
V. N. Karazin Kharkiv National University
Svobody square, 4, Kharkiv, Ukraine, 61022

This paper deals with a two-point boundary value problem for pseudodifferential equations and for systems of second order pseudodifferential equations under boundary conditions containing pseudodifferential operators. The need to consider pseudodifferential operators is caused by two reasons, first, such equations appear more and more often in applied problems, and second, by considering such equations, it is possible to achieve the well-posedness of the boundary value problem in the Schwartz space S and in its dual space.

First, we consider a scalar pseudodifferential equation with a symbol belonging to the space $C^{\infty}_{-\infty}$, consists of infinitely differentiable functions of polinomial growth. For this equation it is found of the boundary condition under which a specific type the boundary value problem is well-posed in the space S. In addition, an example of a differential-difference equation and a specific boundary condition with a convolution-type pseudo-differential operator under which this boundary value problem is well-posed in the space S are given.

Then we consider a system of two pseudodifferential equations with symbols from the space $C^{\infty}_{-\infty}$. For this system, we prove the existence of a well posed boundary value problem in the space S. The Fourier transform and the reduction of the system to a triangular form are used in the proof. In this case, we also give an example of a system and a specific boundary condition under which this boundary value problem is correct in the space S.

Thus, the work proves that for any pseudo-differential equation, as well as for a system of two pseudo-differential equations, there is always a correct boundary value problem in the S space, while the boundary conditions contain pseudo-differential operators. The algorithm for constructing correct boundary conditions is also indicated. They are pseudo-differential operators whose symbols depend on the symbols of pseudo-differential equations.

Keywords: **boundary-value problem; pseudodifferential equations; Fourier transform; triangulation.**

Article history: Received: 17 April 2022; Final form: 15 June 2022
Accepted: 18 June 2022.