

Форма хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі

Харченко Д. С.¹

¹Центральноукраїнський державний педагогічний університет
імені В. Винниченка, вул. Шевченка, 1, м. Кропивницький, 25000, Україна
harcenkodiana5@gmail.com

Стаття присвячена проблемі поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою», стратифікованій за густиною. З використанням методу багатомасштабних розвинень отримано перші три наближення досліджуваної задачі, з яких в статті наведено перші два. Представлено розв'язки першого наближення та дисперсійне співвідношення. Виведено еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів на поверхнях контакту у вигляді нелінійного рівняння Шредінгера. Отримано частинний розв'язок нелінійного рівняння Шредінгера. Виведено формули відхилень поверхонь контакту та умови, при яких змінюється форма хвильових пакетів на верхній та нижній поверхнях контакту. Наведено та проаналізовано області знакосталості коефіцієнтів при других гармоніках на верхній та нижній поверхнях контакту для обох пар частот. Також графічно проілюстровано та проаналізовано різні випадки, при яких виникає асиметрія форми хвильових пакетів.

Ключові слова: тришарова гідродинамічна система; хвильові пакети; форма хвильових пакетів.

D. S. Kharchenko **The shape of wave-packets in a three-layer hydrodynamic system.** The article is devoted to the problem of wave-packet propagation in a three - layer hydrodynamic system "layer with a hard bottom - layer - layer with a cover stratified by density. Using the method of multiscale developments, the first three approximations of the studied problem are obtained, of which the first two are given in the article. The solutions of the first approximation and the variance relation are presented. The evolution equations of the circumferential wave packets on the contact surfaces are derived in the form of the nonlinear Schrodinger equation. A partial solution of the nonlinear Schrodinger equation is obtained. The formulas of deviations of contact surfaces and the conditions under which the shape of wave-packets on the upper and lower contact surfaces changes are derived. The regions of familiarity of the coefficients for the second harmonics on the upper and lower contact surfaces for both frequency pairs are given and analyzed. Various cases in which there is an asymmetry in the shape of wave-packets also graphically illustrated and analyzed

Keywords: three-layer hydrodynamic system; wave-packets; shape of wave-packets.

Харченко Д. С. **Форма волновых пакетов в трехслойной гидродинамической системе.** Статья посвящена проблеме распространения волновых пакетов в трехслойной гидродинамической системе «слой с твердым дном - слой - слой с крышкой», стратифицированной по плотности. С использованием метода многомасштабных разложений получены первые три приближения исследуемой задачи, из которых в статье приведены первые два. Представлены решения первого приближения и дисперсионное соотношение. Выведены эволюционные уравнения обводных волновых пакетов на поверхностях контакта в виде нелинейного уравнения Шредингера. Получено частное решение нелинейного уравнения Шредингера. Выведены формулы отклонений поверхностей контакта и условия, при которых изменяется форма волновых пакетов на верхней и нижней поверхностях контакта. Приведены и проанализированы области знакопостоянства коэффициентов при вторых гармониках на верхней и нижней поверхностях контакта для обеих пар частот. Также графически проиллюстрировано и проанализированы различные случаи, при которых возникает асимметрия формы волновых пакетов.

Ключевые слова: трехслойная гидродинамическая система; волновые пакеты; форма волновых пакетов.

2010 Mathematics Subject Classification: 76A02; 76B15; 76M35.

1. Вступ

Питання аналізу та вивчення властивостей хвильових пакетів та хвиль у рідинах різного типу залишаються актуальними та зустрічається в багатьох дослідженнях. Наприклад, у статті [1] зроблений аналітичний аналіз поширення слабонелінійних хвильових пакетів у двошаровій рідині з вільною поверхнею. Були отримані рівняння еволюції хвильових пакетів на кордоні розділу і вільної поверхні у вигляді нелінійних диференціальних рівнянь типу Шредингера другого порядку. Проаналізовано вид внутрішніх і поверхневих хвиль в залежності від співвідношення щільності шарів і хвильового числа з урахуванням поверхневого натягу. В результаті були виявлені ефекти обліку другого наближення при моделюванні хвильових рухів в двошаровій системі, що призводять до притуплення або загострення гребенів і западин хвиль. Аналітичні результати підтверджені натурними спостереженнями.

Стаття [2] присвячена дослідженню поширення слабконелінійних хвильових пакетів на поверхнях контакту гідродинамічної системи «півпростір-шар-шар з твердою кришкою» з використанням методу багатомасштабного розв'язання. Отримано розв'язки другого наближення слабконелінійної задачі та виведено умову її розв'язності. Для кожної частоти хвильового пакету побудовано області знакосталості коефіцієнта при другій гармоніці на нижній і верхній поверхнях контакту. Виявлено залежності від геометричних і фізичних параметрів гідродинамічної системи у закономірності хвилеутворення. Проаналізовано графіки форми відхилення нижньої і верхньої поверхонь контакту, які є характерними для побудованих областей знакосталості коефіцієнта. Виявлено області, де хвилі набувають U-подібної та П-подібної

форми. Встановлено істотний вплив довжини хвилі на форму відхилення поверхонь контакту гідродинамічної систем.

У статті [4] досліджується задача поширення хвильових пакетів на поверхні розділу двох рідких шарів з урахуванням сил поверхневого натягу. Аналіз проводиться асимптотичним методом багатомасштабних розвинень до третього наближення. На цій основі виведено нелінійне еволюційне рівняння типу Шредінгера для випадку малих частот, що відповідає критичним хвильовим числам. Отримані вирази для відхилення поверхні розділу та критичного хвильового числа залежно від характерних параметрів задачі.

Задачі про поширення хвильових пакетів та хвиль в шаруватих гідродинамічних системах є актуальними на даний момент часу. Дослідження таких явищ дає можливість якісно та кількісно аналізувати основні характеристики поширення хвиль в рідинах. Нижче представлено модель для аналізу форми хвиль, які можуть поширюватися в тришаровій гідродинамічній системі скінченної глибини.

2. Постановка задачі

У даній роботі продовжується дослідження задачі поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» [3]. $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, -h_1 \leq z \leq 0\}$, $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, 0 \leq z \leq h_2\}$, $\Omega_3 = \{(x, z) : |x| < \infty, h_2 \leq z \leq h_2 + h_3\}$ - нижній, середній та верхній шари відповідно, розділені поверхнями контакту $z = \eta_1(x, t)$ та $z = \eta_2(x, t)$. Верхній шар обмежений кришкою. Сила тяжіння направлена перпендикулярно поверхні розподілу у від'ємному z -напрямку. Математична постановка проблеми виглядає наступним чином:

швидкість поширення пакетів:

$$\varphi_{j,xx} + \varphi_{j,zz} = 0 \quad \text{у} \quad \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

кінематичні умови на поверхнях контакту:

$$\eta_{1,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x}\eta_{1,x} \quad \text{при} \quad z = \eta_1(x, t), \quad j = 1, 2 \quad (2)$$

$$\eta_{2,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x}\eta_{2,x} \quad \text{при} \quad z = h_2 + \eta_2(x, t), \quad j = 2, 3 \quad (3)$$

динамічні умови на поверхнях контакту:

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{1,t} - \rho_2\varphi_{2,t} + g(\rho_1 - \rho_2)\eta_1 + \frac{1}{2}\rho_1(\nabla\varphi_1)^2 - \frac{1}{2}\rho_2(\nabla\varphi_2)^2 - \\ - T_1(1 + (\eta_{1,x})^2)^{-3/2}\eta_{1,xx} = 0 \quad \text{при} \quad z = \eta_1(x, t) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \rho_2\varphi_{2,t} - \rho_3\varphi_{3,t} + g(\rho_2 - \rho_3)\eta_2 + \frac{1}{2}\rho_2(\nabla\varphi_2)^2 - \frac{1}{2}\rho_3(\nabla\varphi_3)^2 - \\ - T_2(1 + (\eta_{2,x})^2)^{-3/2}\eta_{2,xx} = 0 \quad \text{при} \quad z = h_2 + \eta_2(x, t) \end{aligned}$$

умова непроникливості на дні:

$$\varphi_{1,z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -h_1 \quad (5)$$

умова непроникливості на крищі:

$$\varphi_{3,z} = 0 \quad \text{при} \quad z = h_2 + h_3 \quad (6)$$

тут $\varphi_j (j = 1, 2, 3)$ потенціали швидкості частинок в Ω_j , η_1, η_2 - відхилення поверхонь контакту, T_1, T_2 - коефіцієнти поверхневого натягу на поверхнях контакту, g - прискорення вільного падіння. З використанням методу багато масштабних розвинень, функції відхилення поверхонь контакту та потенціали швидкостей представлено у вигляді:

$$\begin{aligned} \eta_j(x, t) &= \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{jn}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), j = 1, 2 \\ \varphi_j(x, t, z) &= \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (7)$$

В результаті, задача першого наближення має вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi_{j1,x_0x_0} + \varphi_{j1,zz} &= 0 \text{ у } \Omega_j, j = 1, 2, 3 \\ \eta_{11,t_0} - \varphi_{j1,z} &= 0 \text{ на } z = 0, j = 1, 2 \\ \eta_{21,t_0} - \varphi_{j1,z} &= 0 \text{ на } z = h_2, j = 2, 3 \\ \varphi_{11,t_0} - \rho_2 \varphi_{21,t_0} + (1 - \rho_2) \eta_{11} - T_1 \eta_{11,x_0x_0} &= 0 \text{ на } z = 0 \\ \rho_2 \varphi_{21,t_0} - \rho_3 \varphi_{31,t_0} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_{21} - T_2 \eta_{21,x_0x_0} &= 0 \text{ на } z = h_2 \\ \varphi_{11,z} &= 0 \text{ на } z = -h_1 \\ \varphi_{31,z} &= 0 \text{ при } z = h_2 + h_3 \end{aligned} \quad (8)$$

задача другого наближення описується наступними рівняннями:

$$\begin{aligned} \varphi_{j2,x_0x_0} + \varphi_{j2,zz} &= -2\varphi_{j1,x_0x_1} \text{ у } \Omega_j, j = 1, 2, 3 \\ \eta_{12,t_0} - \varphi_{j2,z} &= -\eta_{11,x_0} \varphi_{j1,x_0} - \eta_{11,t_1} + \eta_{11} \varphi_{j1,zz} \text{ на } z = 0, j = 1, 2 \\ \eta_{22,t_0} - \varphi_{j2,z} &= -\eta_{21,x_0} \varphi_{j1,x_0} - \eta_{21,t_1} + \eta_{21} \varphi_{j1,zz} \text{ на } z = h_2, j = 2, 3 \\ \varphi_{12,t_0} - \rho_2 \varphi_{22,t_0} + (1 - \rho_2) \eta_{12} - T_1 \eta_{12,x_0x_0} &= -\varphi_{11,t_1} - \eta_{11} \varphi_{11,t_0z} + \\ &+ \rho_2 (\varphi_{21,t_1} + \eta_{11} \varphi_{21,t_0z}) - \frac{1}{2} ((\varphi_{11,x_0})^2 + (\varphi_{11,z})^2) + \frac{1}{2} \rho_2 ((\varphi_{21,x_0})^2 + (\varphi_{21,z})^2) + \\ &+ 2T_1 \eta_{11,x_0x_1} \text{ на } z = 0 \\ \rho_2 \varphi_{22,t_0} - \rho_3 \varphi_{32,t_0} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_{22} - T_2 \eta_{22,x_0x_0} &= -\rho_2 (\varphi_{21,t_1} + \eta_{21} \varphi_{21,t_0z}) + \\ &+ \rho_3 (\varphi_{31,t_1} + \eta_{21} \varphi_{31,t_0z}) - \frac{1}{2} \rho_2 ((\varphi_{21,x_0})^2 + (\varphi_{21,z})^2) + \frac{1}{2} \rho_3 ((\varphi_{31,x_0})^2 + \\ &+ (\varphi_{31,z})^2) + 2T_2 \eta_{21,x_0x_1} \text{ на } z = h_2 \\ \varphi_{12,z} &= 0 \text{ на } z = -h_1 \\ \varphi_{32,z} &= 0 \text{ при } z = h_2 + h_3 \end{aligned} \quad (9)$$

Для задачі першого наближення виведене дисперсійне співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2^2 \omega^4}{sh^2(kh_2)} - ((1 - \rho_2)k + T_1 k^3 - \omega^2 (cth(kh_1) + \rho_2 cth(kh_2))) ((\rho_2 - \rho_3)k + \\ + T_2 k^3 - \omega^2 (\rho_2 cth(kh_2) + \rho_3 cth(kh_3))) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Отримане дисперсійне рівняння має дві пари незалежних розв'язків:
для моди ω_1 :

$$\begin{aligned} \varphi_{11}^{(1)} &= \frac{2\omega_1}{ksh(kh_1)}ch(k(h_1+z))Asin(kx-\omega_1t) \\ \varphi_{21}^{(1)} &= -\left(\frac{2\omega_1ch(k(h_2-z))}{ksh(kh_2)} + \frac{2((1-\rho_2)k+T_1k^3-\omega_1^2cth(kh_1)-\rho_2\omega_1^2cth(kh_2))ch(kz)}{\rho_2\omega_1k}\right) \times \\ &\times Asin(kx-t\omega_1) \\ \varphi_{31}^{(1)} &= \frac{2sh(kh_2)((1-\rho_2)k+T_1k^3-\omega_1^2cth(kh_1)-\rho_2\omega_1^2cth(kh_2))ch(k(h_2+h_3-z))}{\rho_2\omega_1ksh(kh_3)} \times \\ &\times Asin(kx-t\omega_1) \\ \eta_{11}^{(1)} &= 2Acos(kx-\omega_1t) \\ \eta_{21}^{(1)} &= -\frac{sh(kh_2)((1-\rho_2)k+T_1k^3-\omega_1^2cth(kh_1)-\rho_2\omega_1^2cth(kh_2))}{\omega_1^2\rho_2} 2Acos(kx-\omega_1t) \end{aligned} \quad (11)$$

для моди ω_2 :

$$\begin{aligned} \varphi_{11}^{(2)} &= -\frac{2\rho_2\omega_2^3ch(k(h_1+z))Bsin(kx-\omega_2t)}{ksh(kh_1)sh(kh_2)((1-\rho_2)k+T_1k^3-\omega_2^2cth(kh_1)-\rho_2\omega_2^2cth(kh_2))} \\ \varphi_{21}^{(2)} &= \left(\frac{\rho_2\omega_2^2ch(k(h_2-z))}{sh(kh_2)((1-\rho_2)k+T_1k^3-\omega_2^2cth(kh_1)-\rho_2\omega_2^2cth(kh_2))} + ch(kz)\right) \frac{2\omega_2Bsin(kx-\omega_2t)}{ksh(kh_2)} \\ \varphi_{31}^{(2)} &= -\frac{2\omega_2ch(k(h_2+h_3-z))Bsin(kx-\omega_2t)}{ksh(kh_3)} \\ \eta_{11}^{(2)} &= -\frac{2Bcos(kx-\omega_2t)\omega_2^2\rho_2}{sh(kh_2)((1-\rho_2)k+T_1k^3-\omega_2^2cth(kh_1)-\rho_2\omega_2^2cth(kh_2))} \\ \eta_{21}^{(2)} &= 2Bcos(kx-\omega_2t) \end{aligned} \quad (12)$$

Де $\eta_{21}^{(1)}$ - хвиля-відгук на хвилю $\eta_{11}^{(1)}$ з частотою ω_1 та амплітудою A на нижній поверхні контакту. А $\eta_{21}^{(2)}$ є хвилею-відгуком на хвилю $\eta_{11}^{(2)}$ з частотою ω_2 та амплітудою B , яка поширюється на верхній поверхні контакту.

3. Аналіз форми хвильового пакету на нижній поверхні контакту

Нижче наведено розв'язки другого наближення задачі (9), які були знайдені в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \eta_{12} &= B_0 + B_1e^{i\theta} + B_2e^{2i\theta} + cc \\ \eta_{22} &= C_0 + C_1e^{i\theta} + C_2e^{2i\theta} + cc \\ \varphi_{12} &= F_{11}(z+h_1)sh(k(z+h_1))e^{i\theta} + F_{10}ch(k(z+h_1))e^{i\theta} + \\ &+ F_{20}ch(2k(z+h_1))e^{2i\theta} + cc \\ \varphi_{22} &= (N_{10} + N_{11}z)e^{i\theta+k(h_2-z)} + N_{20}e^{2i\theta+2k(h_2-z)} + \\ &+ (M_{10} + M_{11}z)e^{i\theta-k(h_2-z)} + M_{20}e^{2i\theta-2k(h_2-z)} + cc \\ \varphi_{32} &= L_{11}(z-(h_2+h_3))sh(k(z-(h_2+h_3)))e^{i\theta} + \\ &+ L_{10}ch(k(z-(h_2+h_3)))e^{i\theta} + L_{20}ch(2k(z-(h_2+h_3)))e^{2i\theta} + cc \end{aligned} \quad (13)$$

Невідомі коефіцієнти у (13) мають складний аналітичний вигляд та були отримані з використанням CAS Maple.

Формули відхилення нижньої поверхні контакту для перших двох наближень мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\eta_{11} &= Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta} \\ \eta_{12} &= B^*A\bar{A} + \Lambda_1 A^2 e^{2i\theta} + cc\end{aligned}\quad (14)$$

де cc - комплексно спряжена, A - обвідна хвильового пакету, $\Lambda_1 = B_2/A^2$, $B^* = B_0/A\bar{A}$.

Еволюційне рівняння на нижній поверхні контакту отримано у вигляді нелінійного рівняння Шредінгера:

$$A_{,t} + \omega' A_{,x} - 0.5\omega'' A_{,xx} = i\alpha^2 L A^2 \bar{A} \quad (15)$$

Відмітимо, що еволюційне рівняння на верхній поверхні контакту матиме такий самий вигляд.

Після переходу до системи, яка рухається з груповою швидкістю, розв'язок рівняння (2) має вигляд:

$$A = ae^{i\alpha^2 a^2 \omega^{-1} Lt}, \bar{A} = ae^{-i\alpha^2 a^2 \omega^{-1} Lt} \quad (16)$$

де a - стала. Після підстановки отриманого розв'язку (16) у рівняння (14) з врахуванням розкладу (7) за методом багатомаштабних розвинень, отримується рівняння (17), яким визначається форма хвильового пакету на нижній поверхні контакту:

$$\begin{aligned}\eta_1(x, t) &= 2a\cos(kx - t\tilde{\omega}) + a^2\alpha[2B^* + 2\Lambda_1\cos(2(kx - t\tilde{\omega}))], \\ \text{де } \tilde{\omega} &= \omega - a^2\alpha^2\omega^{-1}L\end{aligned}\quad (17)$$

З отриманого рівняння видно, що для дослідження форми поверхні контакту потрібно визначити знак коефіцієнту $\Lambda_1(\rho_2, \rho_3, T_1, T_2, k, h_1, h_2, h_3) = \frac{L_1}{L_2}$. При переході через криву $L_1 = 0$ вздовж якої $\Lambda_1(\rho_2, \rho_3, T_1, T_2, k, h_1, h_2, h_3) = 0$, або $L_2 = 0$ вздовж якої $\Lambda_1(\rho_2, \rho_3, T_1, T_2, k, h_1, h_2, h_3) \rightarrow \infty$ знак величини Λ_1 змінюється на протилежний.

На рис. 1а наведений графік знакосталості величини Λ_1 у системі (ρ_2, k) для першої пари частот ω_1 для наступних фіксованих значень параметрів: $\rho_3 = 0.8, T_1 = 0, T_2 = 0, h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$. З графіку видно, що криві $L_1 = 0$ та $L_2 = 0$ розбивають площину на 5 областей. В областях S_1, S_3, S_4 - $\Lambda_1 > 0$, а в областях S_2, S_5 - $\Lambda_1 < 0$. На рисунках 1б і 1в наведені графіки перших двох гармонік η_{11} та η_{12} та відхилення поверхні контакту η_1 для випадків $\Lambda_1 > 0$ та $\Lambda_1 < 0$ відповідно для першої пари частот ω_1 . Фіксовані параметри набувають наступних значень: $t = 0, a = 0.1, \alpha = 0.1, \rho_2 = 0.85, k = 1.5$ (рис. 1б) та $\rho_2 = 0.9, k = 0.5$ (рис. 1в). У випадку $\Lambda_1 > 0$ амплітуда першої гармоніки η_{11} значно менша за амплітуду другої η_{12} . Максимум другої гармоніки η_{12} співпадає з мінімумом першої η_{11} , далі наступний максимум η_{12} співпадає з максимумом η_{11} . Це призводить до загострення гребнів та затуплення підосв. Отже, в областях S_1, S_3, S_4 хвиля має U - подібну форму.

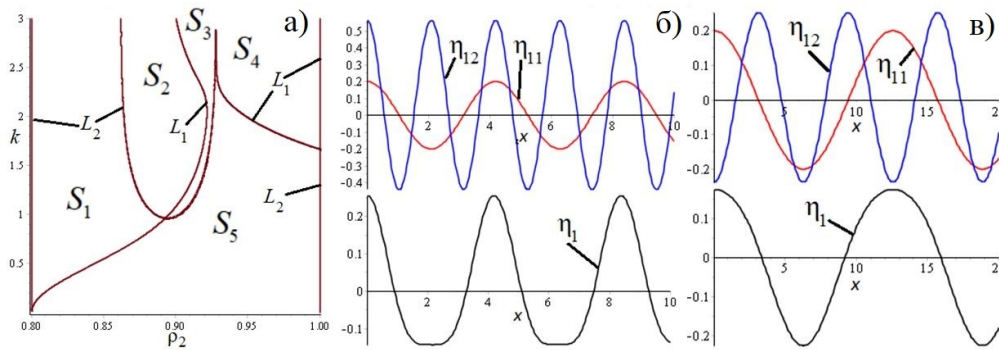


Рис. 1. а) Области знакосталості Λ_1 б) $\Lambda_1 > 0$ в) $\Lambda_1 < 0$.

Аналізуючи випадок $\Lambda_1 < 0$ видно, що амплітуда першої гармоніки η_{11} менша за амплітуда другої гармоніки η_{12} . Мінімуми η_{12} і η_{11} співпадають, наступний мінімум другої гармоніки η_{12} співпадає з максимумом першої гармоніки η_{11} . З цього слідує, що в областях S_2, S_5 хвиля має \cap - подібну форму.

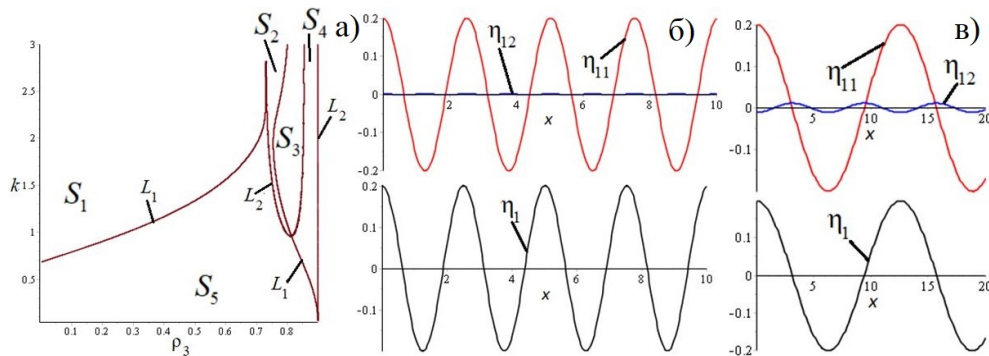


Рис. 2. а) Области знакосталості Λ_1 б) $\Lambda_1 > 0$ в) $\Lambda_1 < 0$.

На рис. 2а наведений графік знакосталості рівняння Λ_1 у системі (ρ_3, k) для першої пари частот ω_1 для наступних значень: $\rho_2 = 0.9, T_1 = 0, T_2 = 0, h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$. Аналогічно до попереднього графіку (рис. 1а) $L_1 = 0$ та $L_2 = 0$ розбивають площину на 5 областей. В областях S_1, S_2, S_4 - $\Lambda_1 > 0$, а в областях S_3, S_5 - $\Lambda_1 < 0$.

На рисунках 2б і 2в наведені графіки перших двох гармонік η_{11}, η_{12} та відхилення поверхні контакту η_1 для випадків $\Lambda_1 > 0$ та $\Lambda_1 < 0$ відповідно для першої пари частот ω_1 . Для $\Lambda_1 > 0$ фіксовані параметри густини верхнього шару і хвильового числа набувають значень: $\rho_3 = 0.7, k = 2.5$. На рис. 2б помітно, що амплітуда першої гармоніки значно перевищує амплітуду другої. Максимум η_{12} співпадає з мінімумом η_{11} , далі максимумами гармонік η_{11} та η_{12} співпадають. Це означає, що в областях S_1, S_2, S_4 відбувається незначне затушення підшків і загострення гребнів. Таким чином, хвильовий пакет має \cup - подібну форму.

На рис. 2в амплітуда другої гармоніки η_{12} також значно менша за амплітуду першої гармоніки η_{11} , проте порівняно з рис. 2б, амплітуда другої гармоніки більша. Фіксовані параметри у випадку $\Lambda_1 < 0$ набувають наступних значень: $\rho_3 = 0.4, k = 0.5$. З графіку видно, що мінімум другої гармоніки η_{12} співпадає з мінімумом першої гармоніки η_{11} . Потім мінімум η_{12} співпадає з максимумом η_{11} . Як наслідок, в областях S_3, S_5 відбувається загострення підосв і затуплення гребнів, тобто хвиля має \cap -подібну форму.

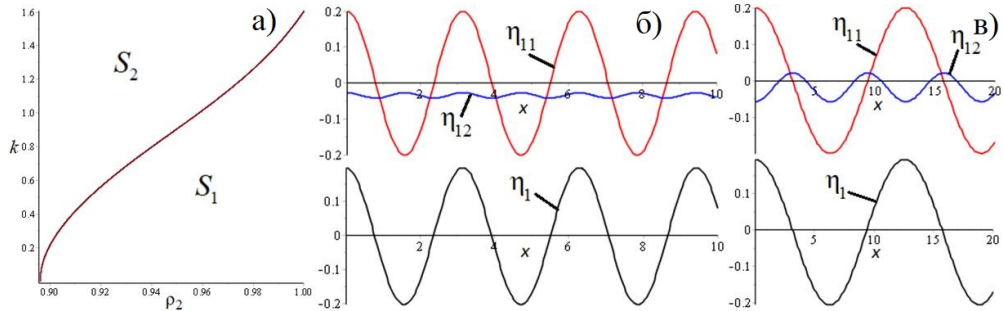


Рис. 3. а) Области знакосталості Λ_1 б) $\Lambda_1 > 0$ в) $\Lambda_1 < 0$.

На рис. 3а наведений графік знакосталості рівняння Λ_1 у системі (ρ_2, k) для другої пари частот ω_2 . Криві $L_1 = 0$ та $L_2 = 0$ ділять площину на дві області. В області S_1 - $\Lambda_1 < 0$, а в області S_2 - $\Lambda_1 > 0$.

На рисунках 3б і 3в наведені графіки перших двох гармонік η_{11} та η_{12} та відхилення поверхні контакту η_1 для випадків $\Lambda_1 > 0$ та $\Lambda_1 < 0$ відповідно для другої пари частот ω_2 . Для $\Lambda_1 > 0$ (рис. 3б) параметри густини середнього шару і хвильового числа наступні: $\rho_2 = 0.98, k = 2$. З графіку видно, що амплітуда першої гармоніки η_{11} значно більша за амплітуду другої гармоніки η_{12} . Максимум η_{12} співпадає з мінімумом η_{11} , далі наступний максимум η_{12} співпадає з максимумом η_{11} . Це призводить до загострення підосв і затуплення гребнів. Тобто в області S_2 хвиля має \cap -подібну форму. На графіку 3в при $\Lambda_1 < 0$ ($\rho_2 = 0.98, k = 0.5$) амплітуда другої гармоніки більша ніж у випадку на рис. 3б. Проте амплітуда η_{12} також значно менша за амплітуду η_{11} . Мінімуми η_{11} і η_{12} співпадають, далі максимум η_{11} співпадає з мінімумом η_{12} . В результаті форма хвильового пакету також має \cap -подібну форму.

На рис. 4а представлений графік знакосталості рівняння Λ_1 у системі (ρ_3, k) для другої пари частот ω_2 . Криві $L_1 = 0$ та $L_2 = 0$ розбивають площину на дві області. В області S_2 - $\Lambda_1 > 0$, а в області S_1 - $\Lambda_1 < 0$. На рисунку 4б наведені графіки відхилення нижньої поверхні контакту та перших двох гармонік η_{11} та η_{12} у випадку $\Lambda_1 > 0$ для таких фіксованих значень $\rho_3 = 0.3, k = 1$. Амплітуда другої гармоніки менша за амплітуду першої. Максимум η_{12} співпадає з мінімумом η_{11} , наступний максимум другої гармоніки співпадає з максимумом першої. Як наслідок хвиля має \cap -подібну форму. Якщо $\Lambda_1 < 0$ ($\rho_3 = 0.5, k = 0.5$) амплітуда другої гармоніки помітно менша за амплітуду першої. Мінімум другої гармоніки η_{12} співпадає з мінімумом η_{11} ,

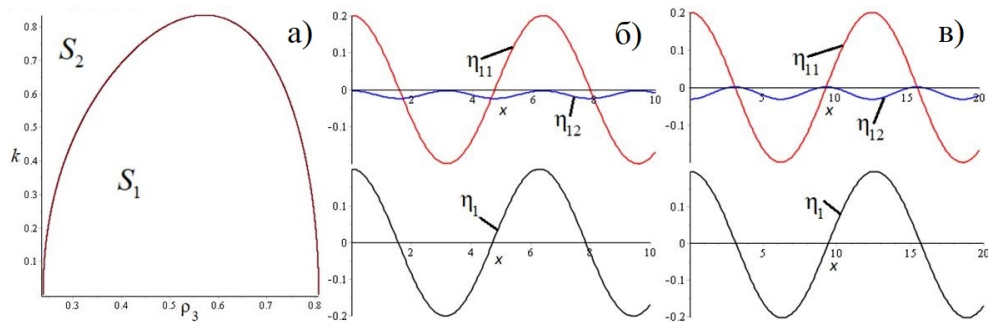


Рис. 4. а) Области знакосталості Λ_1 б) $\Lambda_1 > 0$ в) $\Lambda_1 < 0$

наступний мінімум другої гармоніки співпадає з максимумом першої. Отже, хвиля також має \cap - подібну форму.

4. Аналіз форми хвильового пакету на верхній поверхні контакту

Для верхньої поверхні контакту формули відхилення мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \eta_{21} &= K_5 A e^{i\theta} + K_5 \bar{A} e^{-i\theta} \\ \eta_{22} &= C^* \bar{A} + \Lambda_2 A^2 e^{2i\theta} + c c \end{aligned} \quad (18)$$

де $\Lambda_2 = C_2/A^2$, $C^* = C_0/A\bar{A}$.

Після виконання аналогічних до пункту 3 перетворень та підстановок отримується формула (19), яка визначає форму хвильового пакету на верхній поверхні контакту:

$$\eta_2(x, t) = 2K_5 a \cos(kx - t\tilde{\omega}) + a^2 \alpha [2C^* + 2\Lambda_2 \cos(2(kx - t\tilde{\omega}))] \quad (19)$$

З даного рівняння видно, що для дослідження форми верхньої поверхні контакту потрібно визначити знак коефіцієнту $\Lambda_2 = \frac{M_1}{M_2}$. При переході через криву $M_1 = 0$ вздовж якої $\Lambda_2(\rho_2, \rho_3, T_1, T_2, k, h_1, h_2, h_3) = 0$, або $M_2 = 0$ вздовж якої $\Lambda_2(\rho_2, \rho_3, T_1, T_2, k, h_1, h_2, h_3) \rightarrow \infty$ величина Λ_2 змінює знак.

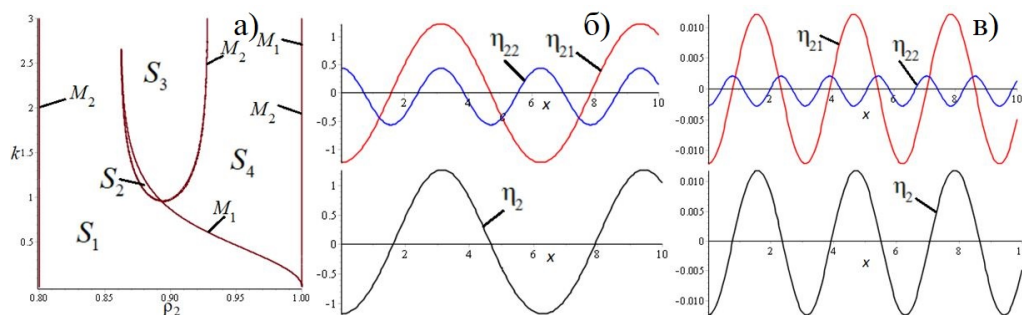


Рис. 5. а) Области знакосталості Λ_2 б) $\Lambda_2 > 0$ в) $\Lambda_2 < 0$.

На рис. 5а представлений графік знакосталості коефіцієнта Λ_2 верхньої поверхні контакту у системі (ρ_2, k) для першої пари коренів ω_1 . Для $\Lambda_2 > 0$ (рис. 5б) фіксовані параметри набувають значень: $\rho_2 = 0.85, k = 1$. Для $\Lambda_2 < 0$ (рис. 5в) фіксовані параметри набувають значень: $\rho_2 = 0.95, k = 2$. Інші параметри аналогічні попереднім випадкам. Криві $M_1 = 0, M_2 = 0$ розділяють площину на чотири області. В областях S_1, S_3 - $\Lambda_2 > 0$, а в областях S_2, S_4 - $\Lambda_2 < 0$. Аналізуючи графік 5б помітно, що амплітуда першої гармоніки η_{21} більша за амплітуду другої гармоніки η_{22} , максимум η_{22} співпадає з максимумом η_{21} , наступний максимум η_{22} навпаки співпадає з мінімумом. Отже в областях S_1, S_3 , в яких $\Lambda_2 > 0$ спостерігається загострення гребнів і затуплення підосв. Тобто, хвиля η_2 в такому випадку матиме \cup - подібну форму. На рис. 5в представлений випадок, коли $\Lambda_2 < 0$. Амплітуда другої гармоніки менша за амплітуду першої. Мінімум другої гармоніки співпадає з максимумом першої, далі мінімуми η_{21} та η_{22} співпадають. Отже, в областях S_2, S_4 спостерігається загострення підосв і затуплення гребнів. Тобто форма хвилі має \cap - подібну форму.

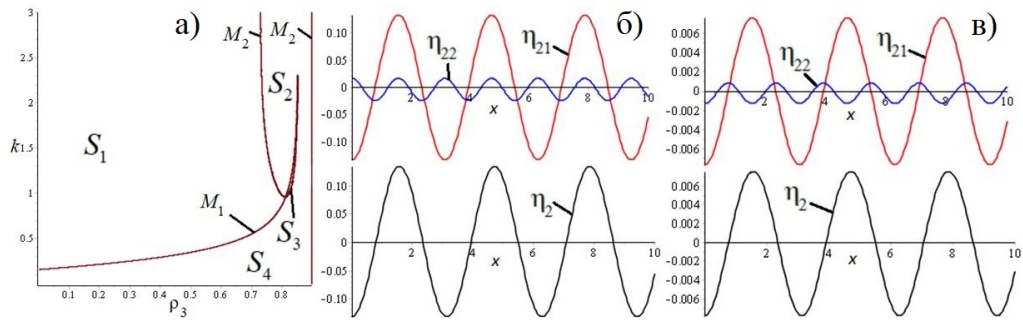


Рис. 6. а) Области знакосталості Λ_2 б) $\Lambda_2 > 0$ в) $\Lambda_2 < 0$.

На рис. 6а представлені графіки кривих $M_1 = 0, M_2 = 0$ коефіцієнта Λ_2 , що розділяють площину (ρ_3, k) на чотири області для першої пари коренів. В областях S_1, S_3 - $\Lambda_2 < 0$, в областях S_2, S_4 - $\Lambda_2 > 0$. Для $\Lambda_2 > 0$ (рис. 6б) фіксовані параметри набувають значень: $\rho_3 = 0.8, k = 2$. Для $\Lambda_2 < 0$ (рис. 6в) фіксовані параметри набувають значень: $\rho_3 = 0.5, k = 2$. З рис. 6б видно, що амплітуда другої гармоніки η_{22} значно менша за амплітуду першої гармоніки η_{21} . Максимуми η_{21} та η_{22} співпадають, далі максимум η_{22} співпадає з мінімумом η_{21} . Така ситуація означає, що в областях S_2, S_4 відбувається загострення гребнів та затуплення підосв. Отже хвиля має \cup - подібну форму. На рис. 6в продемонстрований випадок, коли $\Lambda_2 < 0$. З графіку видно, що амплітуда другої гармоніки значно менша за амплітуду першої. Мінімум другої гармоніки η_{22} співпадає з максимумом першої гармоніки η_{21} , далі мінімуми обох гармонік співпадають. Це означає, що в областях S_1, S_3 гребні затуплюються, а підосви загострюються. Отже, хвиля в цих областях має \cap - подібну форму.

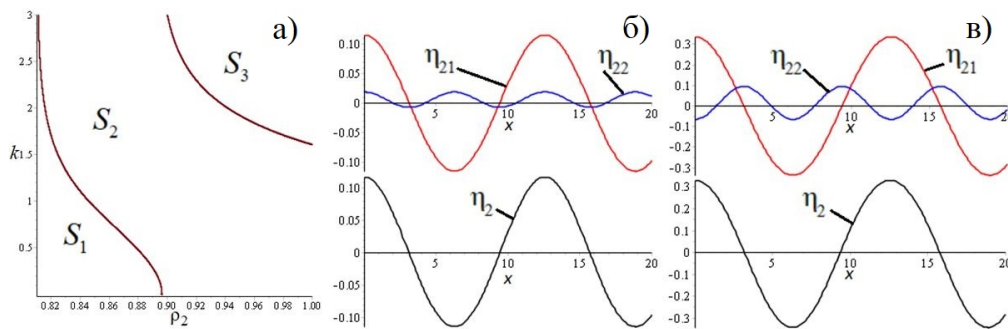


Рис. 7. а) Области знакосталості Λ_2 б) $\Lambda_2 > 0$ в) $\Lambda_2 < 0$

Графік 7а ілюструє зміну знаку коефіцієнта Λ_2 у системі (ρ_2, k) для другої пари коренів. Криві ділять площину на три області. В областях $S_1, S_3 - \Lambda_2 > 0$, а в області $S_2 - \Lambda_2 < 0$. Для $\Lambda_2 > 0$ (рис. 7б) фіксовані параметри набувають значень: $\rho_2 = 0.84, k = 0.5$. Для $\Lambda_2 < 0$ (рис. 7в) фіксовані параметри набувають значень: $\rho_2 = 0.94, k = 0.5$. Аналізуючи графіки 7б і 7в видно, що амплітуда другої гармоніки η_{22} значно менша за амплітуду першої гармоніки η_{21} в обох випадках. Проте на графіку 7б максимум η_{22} співпадає з мінімумом η_{21} , наступний максимум η_{22} співпадає з максимумом η_{21} . На рис. 7в мінімуми обох гармонік співпадають, далі наступний мінімум другої гармоніки співпадає з максимумом першої гармоніки. Це означає, що в областях S_1, S_3 відбувається загострення гребнів і затушення підосв. Отже, хвиля стає \cup - подібної форми. В області S_2 спостерігається затушення гребнів і загострення підосв. Тобто хвиля має \cap - подібну форму.

Графік 8а ілюструє зміну знаку коефіцієнта Λ_2 для другої пари коренів у системі (ρ_3, k) . Криві $M_1 = 0, M_2 = 0$ ділять площину на три області. В областях $S_1, S_3 - \Lambda_2 > 0$, а в області $S_2 - \Lambda_2 < 0$. Для $\Lambda_2 > 0$ (рис. 8б) фіксовані параметри набувають значень: $\rho_3 = 0.5, k = 2.5$. Для $\Lambda_2 < 0$ (рис. 8в) фіксовані параметри набувають значень: $\rho_3 = 0.5, k = 0.4$.

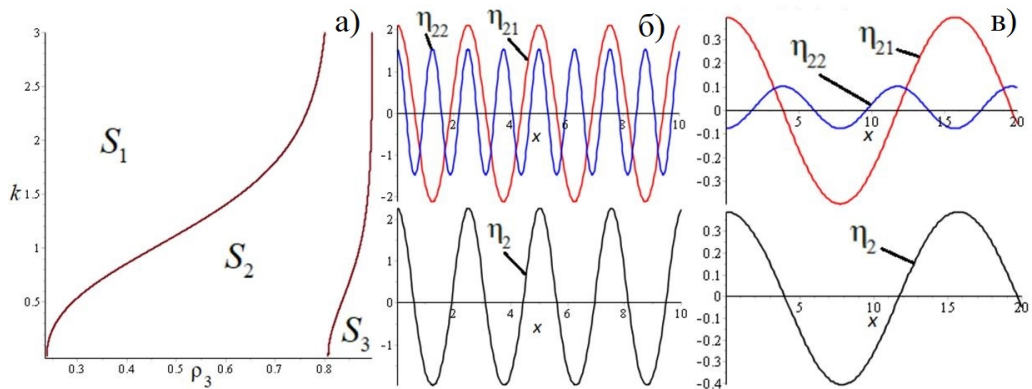


Рис. 8. а) Области знакосталості Λ_2 б) $\Lambda_2 > 0$ в) $\Lambda_2 < 0$


На рис. 8б видно, що амплітуда другої гармоніки η_{22} не на багато менша за амплітуду першої гармоніки η_{21} . Максимум η_{22} співпадає з мінімумом η_{21} , далі максимуми гармонік співпадають. Отже, в областях S_1, S_3 підшви хвилі затуплюються, а гребні загострюються. Тобто хвиля має \cup - подібну форму. На графіку 8в амплітуда другої гармоніки значно менша за амплітуду першої. Мінімуми обох гармонік співпадають, потім мінімум η_{22} співпадає з максимумом η_{21} . З цього випливає, що в області S_2 хвиля має \cap - подібну форму.

Висновок

В даній статті було досліджено поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою». Для обох поверхонь контакту виведені рівняння, якими визначається форма хвильового пакету. Графічно проілюстровано та проаналізовано межі знакосталості коефіцієнтів Λ_1 та Λ_2 , які впливають на форму хвилі, для обох коренів дисперсійного рівняння. Також наведено графіки відхилень поверхонь контакту для обох пар частот і отримано наступні результати. Для нижньої поверхні контакту при $\Lambda_1 > 0$ для першої пари частот у системах (ρ_2, k) і (ρ_3, k) хвиля приймає \cup - подібну форму. Отже, накладання максимумів другої гармоніки та мінімумів першої, і накладання максимумів обох гармонік призводить до загострення гребнів і затуплення підшв. Для $\Lambda_1 < 0$ при накладанні мінімумів обох гармонік відбувається затуплення гребнів і загострення підшв. Для другої пари частот при $\Lambda_1 > 0$ і при $\Lambda_1 < 0$ для нижньої поверхні контакту хвильові пакети мають \cap - подібну форму. Отже, для другої пари частот накладання максимумів другої гармоніки та мінімумів першої і накладання максимумів ($\Lambda_1 > 0$), та накладання мінімумів і накладання максимумів першої гармоніки та мінімумів другої ($\Lambda_1 < 0$) призводить до затуплення гребнів та загострення підшв.

Для верхньої поверхні контакту при $\Lambda_2 > 0$ для обох пар частот хвильові пакети мають \cup - подібну форму. Тобто, накладання максимумів (для першого кореня) та накладання максимумів другої гармоніки і мінімумів першої (для другого кореня) призводить до загострення гребнів і затуплення підшв. Для випадку $\Lambda_2 < 0$ для обох пар коренів хвилі приймають \cap - подібну форму. Отже, накладання мінімумів другої гармоніки і максимумів першої (для ω_1), та накладання мінімумів обох гармонік (для ω_2) веде до затуплення гребнів та загострення підшв.

ORCID ID

Д. С. Харченко  <https://orcid.org/0000-0002-7135-627X>

REFERENCES

1. O. V. Avramenko, V. Naradovyi. Analysis of Propagation of Weakly Nonlinear Waves in a Two-layer Fluid with Free Surface, Eastern-European Journal of

- Enterprise Technologies. – 2015. – Vol. 4, No 7(76). – P. 39–44. 10.15587/1729-4061.2015.48282
2. O. V. Avramenko, M. V. Lunyova. Analysis of the shape of wave packets in a three-layer hydrodynamic system "half-space-layer-layer with a solid cover", Mathematical methods and physical and mechanical fields. – 2019. – Vol. 62, No 3. – P. 127–142.
 3. V. Naradovyi, D. Kharchenko. Investigation of the energy of wave motions in a three-layer hydrodynamic system, Waves in Random and Complex Media. – 2019. 10.1080/17455030.2019.1699674
 4. I. T. Selezov, O. V. Avramenko, Yu. V. Hurtovyy. Propagation of nonlinear wave packets at near-critical wave numbers in a two-layer liquid of finite depth, Mathematical methods and physical and mechanical fields. – 2007. – Vol. 50, No 1. – P. 91–97.

Форма хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі

Харченко Д. С.

*Центральноукраїнський державний педагогічний університет
імені В. Винниченка, вул. Шевченка 1, м. Кропивницький, Україна, 25000*

Стаття присвячена проблемі поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою», стратифікованій за густиною. Виконано огляд сучасних досліджень з обраної тематики. Математична постановка задачі наведена в безрозмірному вигляді та містить рівняння руху рідини, кінематичні та динамічні умови на поверхнях контакту, а також граничні умови на кришці та на дні. З використанням методу багатомасштабних розвинень отримано перші три наближення досліджуваної задачі, з яких в статті наведено перші два, оскільки третє наближення має громіздкий аналітичний вигляд. Представлено розв'язки першого наближення та дисперсійне співвідношення. Виведено еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів на поверхнях контакту у вигляді нелінійного рівняння Шредінгера на основі дисперсійного співвідношення та умов розв'язності другого та третього наближень. Отримано частинний розв'язок нелінійного рівняння Шредінгера після переходу до системи, яка рухається з груповою швидкістю. Для першого та другого наближення виведено формули відхилень поверхонь контакту, з урахуванням розв'язку нелінійного рівняння Шредінгера. Виведено умови, при яких змінюється форма хвильових пакетів на верхній та нижній поверхнях контакту. Наведено та проаналізовано області знакосталості коефіцієнтів при других гармоніках на верхній та нижній поверхнях контакту для обох пар частот, які є коренями дисперсійного співвідношення. Також, для обох пар частот графічно проілюстровано та проаналізовано різні випадки накладання максимумів та мінімумів першої та другої гармонік, при яких виникає асиметрія форми хвильових пакетів. Всі результати проілюстровані графічно. Аналітичні перетворення, обчислення та графічне представлення результатів виконано з використанням пакету символьних обчислень та комп'ютерної алгебри Maple.

Ключові слова: тришарова гідродинамічна система; хвильові пакети; форма хвильових пакетів.

The shape of wave packets in a three-layer hydrodynamic system

D. S. Kharchenko

*Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University**1 Shevchenko str., Kropyvnytskyi, 25000, Ukraine*

The article is devoted to the problem of wave-packet propagation in a three - layer hydrodynamic system "layer with a hard bottom - layer - layer with a cover stratified by density. The current research on selected topics is reviewed. The mathematical formulation of the problem is given in dimensionless form and contains the equations of fluid motion, kinematic and dynamic conditions on the contact surfaces, as well as the boundary conditions on the lid and on the bottom. Using the method of multiscale developments, the first three approximations of the studied problem are obtained, of which the first two are given in the article, because the third approximation has a cumbersome analytical form. The solutions of the first approximation and the variance relation are presented. The evolution equations of the circumferential wave-packets on the contact surfaces are derived in the form of the nonlinear Schrodinger equation on the basis of the variance relation and the conditions for the solvability of the second and third approximations. A partial solution of the nonlinear Schrodinger equation is obtained after the transition to a system moving with group velocity. For the first and second approximations, the formulas for the deviations of the contact surfaces are derived, taking into account the solution of the nonlinear Schrodinger equation. The conditions under which the shape of wave-packets on the upper and lower contact surfaces changes are derived. The regions of familiarity of the coefficients for the second harmonics on the upper and lower contact surfaces for both frequency pairs, which are the roots of the variance relation, are presented and analyzed. Also, for both frequency pairs, different cases of superimposition of maxima and minima of the first and second harmonics, in which there is an asymmetry in the shape of wave packets, are graphically illustrated and analyzed. All results are illustrated graphically. Analytical transformations, calculations and graphical representation of results were performed using a package of symbolic calculations and computer algebra Maple.

Keywords: three-layer hydrodynamic system; wave-packets; shape of wave-packets.

Article history: Received: 24 September 2021; Final form: 9 November 2021;

Accepted: 11 November 2021.