Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 94, 2021, с. 60–76

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 94, 2021, p. 60–76
DOI: 10.26565/2221-5646-2021-94-04

УДК 517.9

Лінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача з виродженим імпульсним впливом

Чуйко С. М., Чуйко О. В., Шевцова К. С.

Донбаський державний педагогічний університет,
вул. Генерала Батюка, 19, м. Слов'янськ, Донецька обл., Україна 84 116
chujko-slav@ukr.net

У статті знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчного рівняння з виродженим імпульсним впливом. Знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна для лінійної нетерової крайової задачі для диференціально-алгебраїчного рівняння з виродженим імпульсним впливом.
Ключові слова: диференціально-алгебраїчні рівняння, крайові задачі, рівняння з імпульсним впливом.

S. M. Chuiko, E. V. Chuiko, K. S. Shevtsova. **Linear differential-algebraic boundary value problem with singular pulse influence.** In this article we found the conditions of the existence and constructive scheme for finding the solutions of the linear Noetherian differential-algebraic boundary value problem for a differential-algebraic equation with singular impulse action.
Keywords: differential-algebraic equations, boundary value problems, pulse influence.

Чуйко С. М., Чуйко Е. В., Шевцова Е. С. **Линейная дифференциально-алгебраическая краевая задача с вырожденным импульсным воздействием.** В статье найдены условия развязности, а также конструкцию обобщенного оператора Грина задачи Коши для дифференциально-алгебраического уравнения с вырожденным импульсным воздействием. Найдены условия развязности, а также конструкция обобщенного оператора Грина для линейной нетеровой краевой задачи для дифференциально-алгебраического уравнения с вырожденным импульсным воздействием.
Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, краевые задачи, уравнения с импульсным воздействием.

2010 Mathematics Subject Classifications: 15A24; 34B15; 34C25.

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу про знаходження розв'язків [1, 2]

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}$$

лінійного неоднорідного диференціально-алгебраїчного рівняння

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad t \neq \tau_i \tag{1}$$

з імпульсним впливом

$$\Delta z(\tau_i) = S_i z(\tau_i - 0) + a_i, \ i = 1, \ 2, \ \dots \ , \ p, \tag{2}$$

які задовольняють крайовій умові

$$\ell z(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^q. \tag{3}$$

Тут $A(t), \ B(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a,b]$ — неперервні матриці, $f(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ — неперервний вектор; $\ell z(\cdot)$ — лінійний обмежений векторний функціонал

$$\ell z(\cdot) : \mathbb{C}^1 \Big\{ [a,b] \setminus \{\tau_i\}_I \Big\} \to \mathbb{R}^q.$$

Матрицю $A(t)$ припускаємо, взагалі кажучи, прямокутною: $m \neq n$, або ж квадратною, але виродженою матрицею сталого рангу. Розв'язок $z(t)$ вважатимемо неперервним зліва

$$z(\tau_j) = \lim_{t \to \tau_j + 0} z(t), \quad j = 1, \ 2, \ \dots \ , \ p.$$

Крім того, розв'язок $z(t)$ нетерової ($q \neq n$) диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) – (3) з імпульсним впливом у точках

$$a < \tau_1 < \tau_2 < \ ... < \tau_p < b,$$

можливо, зазнає розриви

$$\Delta z(\tau_i) := z(\tau_i + 0) - z(\tau_i - 0), \quad i = 1, \ 2, \ \dots \ , \ p$$

першого роду; тут S_i- сталі $(n \times n)$-вимірні матриці, $a_i \in \mathbb{R}^n$. Імпульсний вплив (2) припускаємо виродженим, а саме, припускаємо, що принаймні для одного $i = 1, \ 2, \ \dots \ , \ p$ матриця $I_n + S_i$ стає виродженою: $(\det(I_n + S_i) = 0)$. У протилежному випадку, а саме, за умови $(\det(I_n + S_i) \neq 0)$ для усіх значень $i = 1, \ 2, \ \dots \ , \ p$ будемо казати, що імпульсний вплив (2) невироджений [1].

Дослідженню диференціально-алгебраїчних рівнянь за допомогою центральної канонічної форми і досконалих пар і трійок матриць присвячені монографії [3, 4, 5]. Достатні умови звідності диференціально-алгебраїчної лінійної системи до центральної канонічної форми були отримані А. М. Самойленком і В. П. Яковцем [6]. У статтях [7, 8] запропоновано достатні умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна для лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (3) без використання центральної канонічної форми і досконалих пар і трійок матриць.

Задача (1), (2) є узагальненням задач з невиродженим імпульсним впливом [1] на випадок диференціально-алгебраїчної лінійної системи (1). За умови $A(t) \equiv I_n$ задача про знаходження умов існування та побудову розв'язків системи диференціальних рівнянь (1) з невиродженим імпульсним впливом була розв'язана А. М. Самойленком та М. О. Перестюком у монографії [1] та узагальнювала задачу з крайовими умовами типу "shock conditions"[9]. За умови [7, 8]

$$P_{A^*(t)} \equiv 0 \tag{4}$$

система (1) розв'язна відносно похідної

$$z' = A^+(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)); \tag{5}$$

тут rank $A(t) = m \leq n$. Крім того

$$\mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)) := A^+(t)f(t) + P_{A_{\rho_0}}(t)\nu_0(t),$$

$A^+(t)$ — псевдообернена (за Муром – Пенроузом) матриця, $P_{A^*(t)}$ — матриця-ортопроектор [2]:

$$P_{A^*}(t) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(A^*(t)),$$

$P_{A_{\rho_0}}(t)$ — $(n \times \rho_0)$-вимірна матриця, утворена із ρ_0 лінійно-незалежних стовпців $(n \times n)$– матриці-ортопроектора

$$P_A(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(A(t)).$$

Таким чином, за умови (4) система (5), розв'язана відносно похідної, як і її розв'язок, залежать від довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$. Позначимо $X_0(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$X_0'(t) = A^+(t)B(t)X_0(t), \quad X_0(a) = I_n$$

отриманої традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь (5). За умови (4) для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ система (5), а відповідно і система (1), має розв'язок вигляду [7, 8]

$$z(t,c) = X_0(t)c + K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) := X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)\,\mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s))\,ds, \quad a \leq t \leq \tau_1$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1).

2. Критичний випадок За умови (4) система (1) розв'язна для довільної неоднорідності $f(t)$. Крім того, нормальна фундаментальна матриця

$X_0(t)$ невироджена, тому для розв'язання диференціально-алгебраїчної системи (1), (2) з невиродженим імпульсним впливом застосовний метод, запропонований А. М. Самойленком та М. О. Перестюком у монографії [1]. Загальний розв'язок задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1) з виродженим імпульсним впливом (2) для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ на відрізку $[\tau_1, \tau_2]$ зображується у вигляді

$$z(t, \gamma_1) = X_0(t)\gamma_1 + X_0(t) \int\limits_{\tau_1}^{t} X_0^{-1}(s)\, \mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s))\, ds, \quad \gamma_1 \in \mathbb{R}^n.$$

Нормальна фундаментальна матриця $X_0(t)$ невироджена, тому

$$\gamma_1 = X_0^{-1}(\tau_1)(I_n + S_1)K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\tau_1) + X_0^{-1}(\tau_1)\, a_1.$$

Таким чином, за умови (4) для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ система (1) з невиродженим імпульсним впливом (2) має розв'язок вигляду

$$z(t, c) = X_1(t)c + K_1\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$X_1(t) = X_0(t)X_0^{-1}(\tau_1)(I_n + S_1)X_0(\tau_1), \quad \tau_1 \le t \le \tau_2,$$

крім того

$$K_1\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) := X_0(t)X_0^{-1}(\tau_1)(I_n + S_1)K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\tau_1) +$$

$$+ X_0(t)X_0^{-1}(\tau_1)\, a_1 + X_0(t) \int\limits_{\tau_1}^{t} X_0^{-1}(s)\, \mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s))\, ds, \quad \tau_1 \le t \le \tau_2$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1) з виродженим імпульсним впливом (2). Продовжуючи, за умови (4), для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ отримуємо розв'язок системи (1) з виродженим імпульсним впливом (2)

$$z(t, c) = X_p(t)\, c + K_p\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$X_p(t) = X_0(t)X_0^{-1}(\tau_p)(I_n + S_p)X_{p-1}(\tau_p), \quad \tau_p \le t \le b,$$

крім того

$$K_p\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) := X_0(t)X_0^{-1}(\tau_p)(I_n + S_p)K_{p-1}\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\tau_p) +$$

$$+X_0(t)X_0^{-1}(\tau_p)\,a_p + X_0(t)\int\limits_{\tau_p}^{t} X_0^{-1}(s)\,\mathfrak{F}_0(s,\nu_0(s))\,ds, \quad \tau_p \le t \le b$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1) з виродженим імпульсним впливом (2). Таким чином, за умови (4), для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ отримуємо розв'язок системи (1) з невиродженим імпульсним впливом (2)

$$z(t,c) = X(t)\,c + K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

де [10]

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t), & a \le t \le \tau_1, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_p(t), & \tau_p \le t \le b, \end{cases}$$

крім того

$$K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t) = \begin{cases} K_0\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t), & a \le t \le \tau_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_p\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t), & \tau_p \le t \le b \end{cases}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1) з невиродженим імпульсним впливом (2). Останній оператор у випадку $A(t) \equiv I_n$ дещо відрізняється від побудованого у статті [10]. За умови $A(t) \equiv I_n$ задача про знаходження умов існування та побудову розв'язків лінійної крайової задачі (1) — (3) з невиродженим імпульсним впливом була розв'язана А.М. Самойленком, М.О. Перестюком та О.А. Бойчуком у статті [11]. Таким чином, метою даної статті є перенесення результатів [3, 4, 5, 6, 7, 8] на диференціально-алгебраїчну крайову задачу (1) — (3) з виродженим імпульсним впливом. На відміну від статті [11], отримана нормальна фундаментальна матриця $X(t)$ системи (1) з виродженим імпульсним впливом (2) вироджена [12], причому її ранг вздовж проміжку $[a,b]$ не зростає.

Підставляючи загальний розв'язок $z(t,c)$ задачі Коші $z(a) = c$ для диференціально-алгебраїчної системи (1) з виродженим імпульсним впливом (2) у крайову умову (3), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння

$$Q\,c = \alpha - \ell K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](\cdot). \tag{6}$$

Рівняння (6) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{7}$$

Тут P_{Q^*} — ортопроектор: $\mathbb{R}^q \to \mathbb{N}(Q^*)$; матриця $P_{Q_d^*}$ утворена з d лінійно-незалежних рядків ортопроектора P_{Q^*}, крім того $Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{q\times n}$. За умови (7) і тільки за неї загальний розв'язок рівняння (6)

$$c = Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} + P_{Q_r}\, c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає загальний розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) – (3)

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + X(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t),\ c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут P_Q — матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q)$; матриця $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ утворена з r лінійно-незалежних стовпців ортопроектора P_Q. Таким чином, доведена наступна лема.

Лема 1. *За умови (4) для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ розв'язок задачі Коші $z(a) = 0$ для системи (1) з виродженим імпульсним впливом (2)*

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}$$

має вигляд

$$z(t, c) = X(t)\, c + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$, за умови (7) і тільки за неї, загальний розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) – (3)

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t), \quad X_r(t) := X(t)P_{Q_r}, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t) := X(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t)$$

диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) – (3).

Доведена лема узагальнює відповідні результати, отримані для задач з невиродженим імпульсним впливом [1, 2] на випадок диференціально-алгебраїчної лінійної системи (1). Відзначимо, що навідміну від [5], при доведенні леми ми не використовували центральну канонічну форму і досконалі пари матриць.

Приклад 1. *Знайдемо розв'язок*

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[0, 3\pi] \setminus \{\pi, 2\pi\}_I\Big\}$$

лінійної диференціально-алгебраїчної антиперіодичної крайової задачі з імпульсним впливом

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta z(\tau_i) = S_i\, z(\tau_i - 0), \quad \ell z(\cdot) = 0. \qquad (8)$$

Тут

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \end{pmatrix}, \; B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix},$$

крім того

$$f(t) := \begin{pmatrix} 2\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \quad S_1 := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\ell z(\cdot) := z(0) + z(\pi) + z(2\pi) + z(3\pi).$$

Умову (4) виконано, отже, система (8), розв'язна відносно похідної, а її розв'язок, залежить від довільної неперервної скалярної функції $\nu_0(t)$. Покладемо $\nu_0(t) := 0$, при цьому система (8), має розв'язок вигляду

$$z(t, c) = X_0(t)c + K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \quad 0 \leq t < \tau_1, \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 - \cos 2t \\ -2\sin 2t \\ 1 - \cos 2t \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(0) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (8), крім того

$$X_0(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \cos t & \sin t & \cos t - 1 \\ -2\,\sin t & 2\,\cos t & -2\,\sin t \\ \cos t - 1 & \sin t & 1 + \cos t \end{pmatrix}.$$

Система (8) з імпульсним впливом має розв'язок вигляду

$$z(t, c) = X_1(t)c + K_1\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \quad \pi \leq t < 2\pi, \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$K_1\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t),$$

крім того

$$X_1(t) = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc} -1-\cos t & 0 & 1-\cos t \\ 2\,\sin t & 0 & 2\,\sin t \\ 1-\cos t - 1 & 0 & -1-\cos t \end{array}\right).$$

Система (8) з імпульсним впливом має розв'язок вигляду

$$z(t,c) = X_2(t)c + K_2\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t), \quad 2\pi \le t \le 3\pi, \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$K_2\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t) = K_0\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t),$$

крім того $X_2(t) \equiv 0$. У наслідок виродженості імпульсного впливу (8)

$$\det(I_3 + S_1) = \det(I_3 + S_2) = 0$$

матриця $X(t)$ вироджена. Крайова задача (8) з виродженим імпульсним впливом являє собою критичний випадок, оскільки

$$P_{Q^*} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \neq 0.$$

У той же час, крайова задача (8) розв'язна, оскільки умову (7) виконано. Загальний розв'язок

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t), \quad X_r(t) = X(t), \quad c_r \in \mathbb{R}^1$$

крайової задачі (8) з невиродженим імпульсним впливом (8) визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t) = K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t),$$

крім того

$$X_r(t) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right), \quad 0 \le t < \pi, \quad X_r(t) = \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right) \quad \pi \le t < 2\pi,$$

$$X_r(t) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right), \quad 2\pi \le t \le 3\pi.$$

У загальному випадку, а саме для довільної неперервної вектор-функції

$$\nu_0(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}[a,b]$$

розв'язність лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) – (3) істотно залежить від вибору цієї функції. Покладемо

$$\nu_0(t) := \Psi(t)\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}^w;$$

тут

$$\Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0 \times w}[a, b]$$

— довільна неперервна матриця повного рангу. За умови (4) узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1) з виродженим імпульсним впливом (2) зображується у вигляді

$$K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = K\Big[f(s)\Big](t) + K\Big[P_{A_{\rho_0}}(s)\nu_0(s)\Big](t).$$

Позначимо матрицю

$$\mathcal{D} := \Big[\ Q\ ;\ \ell K\Big[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s)\Big](\cdot)\ \Big] \in \mathbb{R}^{q\times(n+w)}.$$

Підставляючи загальний розв'язок задачі Коші для диференціально-алгебраїчного рівняння (1) з виродженим імпульсним впливом (2) у крайову умову (3), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{D}\,\check{c} = \alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot), \quad \check{c} := \operatorname{col}(c, \gamma) \in \mathbb{R}^{n+w}. \tag{9}$$

Рівняння (9) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{\mathcal{D}_d^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{10}$$

Тут $P_{\mathcal{D}^*}$ — ортопроектор:

$$\mathbb{R}^q \to \mathbb{N}(\mathcal{D}^*);$$

матриця $P_{\mathcal{D}_d^*}$ утворена з d лінійно-незалежних рядків ортопроектора $P_{\mathcal{D}^*}$. За умови (10) і тільки за неї загальний розв'язок рівняння (9)

$$\check{c} = \mathcal{D}^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} + P_{\mathcal{D}}\,\delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^{n+w}$$

визначає загальний розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) — (3)

$$z(t,\delta) = K\Big[f(s)\Big](t) + \Big\{X(t); K\Big[P_{A_{\rho_0}}\Psi(s)\Big](t)\Big\}\mathcal{D}^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} +$$

$$+\Big\{X(t); K\Big[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s)\Big](t)\Big\}P_{\mathcal{D}}\,\delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^{n+w}.$$

Тут $P_{\mathcal{D}}$ — матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^{n+w} \to \mathbb{N}(\mathcal{D})$. Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема 1. *За умови (4) для фіксованої неперервної матриці повного рангу $\Psi(t)$ у випадку (10) розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) — (3) з виродженим імпульсним впливом*

$$z(t) \in \mathbb{C}^1 \Big\{ [a, b] \setminus \{\tau_i\}_I \Big\}$$

має вигляд

$$z(t, c_r) = W_r(t) c_r + G\Big[f(s); \psi(s); \alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r;$$

тут

$$G\Big[f(s); \psi(s); \alpha\Big](t) := K\Big[f(s)\Big](t) + W(t)\,\mathcal{D}^+ \Big\{ \alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot) \Big\}$$

— узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) — (3) з виродженим імпульсним впливом. Матриця $W_r(t)$ утворена з r лінійно-незалежних стовпців матриці $W(t)P_{\mathcal{D}}$; тут

$$W(t) := \Big\{ X(t); K\Big[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s)\Big](t) \Big\}.$$

Відзначимо, що навідміну від [5, 13] при доведенні теореми не використовується вимога про приведення системи (1) до центральної канонічної форми. На відміну від [14, 15] доведена теорема узагальнює узагальнений оператор Гріна, отриманий для диференціальної крайової задачі, до диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) — (3) з невиродженим імпульсним впливом.

3. Приведення до некритичного випадку. За умови $P_{\mathcal{D}^*} \neq 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (1) — (3) з виродженим імпульсним впливом представляє критичний випадок, і навпаки: за умови $P_{Q^*} \neq 0, \ P_{\mathcal{D}^*} = 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (1) — (3) з виродженим імпульсним впливом приведена до некритичного випадку. Останнє означення є узагальненням некритичного випадку ($P_{Q^*} = 0$) для нетерової крайової задачі для диференціальної системи, яка отримується з системи (1) при $A(t) \equiv I_n$, на випадок залежності узагальненого оператора Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (1) від довільної неперервної функції [8].

Приклад 2. *Знайдемо розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з виродженим імпульсним впливом*

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad t \neq \tau_1 := \pi, \ \ \Delta z(\tau_1) = S_1\, z(\tau_1 - 0), \ \ \ell z(\cdot) = 0. \quad (11)$$

Тут

$$\ell z(\cdot) := \Omega\,(z(0) + z(2\pi)), \quad \Omega := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

матриці $A(t), S_1$ та функція $f(t)$ наведені у прикладі 1.

Оскільки умову (4) виконано, система (11), розв'язна відносно похідної, а її розв'язок, залежить від довільної неперервної скалярної функції $\nu_0(t)$. Покладемо $\nu_0(t) := 0$, при цьому система (11), має розв'язок вигляду

$$z(t,c) = X_0(t)c + K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \quad 0 \le t < \tau_1, \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-\cos 2t \\ -2\sin 2t \\ 1-\cos 2t \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(0) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (11), крім того

$$X_0(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos t & \sin t & \cos t - 1 \\ -2\,\sin t & 2\,\cos t & -2\,\sin t \\ \cos t - 1 & \sin t & 1+\cos t \end{pmatrix}.$$

Також система (11), має розв'язок вигляду

$$z(t,c) = X_1(t)c + K_1\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \quad \pi \le t \le 2\pi, \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$K_1\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t)$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (11), крім того

$$X_1(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-\cos t & 0 & 1-\cos t \\ 2\,\sin t & 0 & 2\,\sin t \\ 1-\cos t - 1 & 0 & -1-\cos t \end{pmatrix}.$$

У наслідок виродженості імпульсного впливу (11)

$$\det(I_3 + S_1) = 0$$

матриця $X(t)$ вироджена. Крайова задача (11) з виродженим імпульсним впливом являє собою критичний випадок, оскільки для фіксованої функції $\nu_0(t) := 0$ має місце нерівність

$$P_{Q^*} = 1 \ne 0.$$

В той же час для функції $\Psi(t) := \sin t$ крайова задача (11) з виродженим імпульсним впливом являє собою некритичний випадок, оскільки

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— матриця повного рангу, отже умову (10) виконано. Загальний розв'язок

$$z(t,c_r) = W_r(t)c_r + G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^3$$

крайової задачі (11) з виродженим імпульсним впливом визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-\cos 2t \\ -2\sin 2t \\ 1-\cos 2t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi;$$

тут

$$W_r(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos t & \sin t & \cos t - 1 \\ -2\,\sin t & 2\,\cos t & -2\,\sin t \\ \cos t - 1 & \sin t & 1+\cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \pi,$$

крім того

$$W_r(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-\cos t & 0 & 1-\cos t \\ 2\,\sin t & 0 & 2\,\sin t \\ 1-\cos t - 1 & 0 & -1-\cos t \end{pmatrix}, \quad \pi \le t \le 2\pi.$$

У найпростішому, а саме, у некритичного випадку $P_{Q^*} = 0$ умова (7) виконується, отже лінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача (1) – (3) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ та α.

Наслідок. *За умов (4) та $P_{Q^*} = 0$ для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ та довільних неоднорідностей $f(t)$ та α розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з виродженим імпульсним впливом (1) – (3)*

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t), \quad X_r(t) := X(t)P_{Q_r}, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t) := X(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t).$$

Приклад 3. *Знайдемо розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі*

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad t \ne \tau_1, \quad \Delta z(\tau_1) = S_1\, z(\tau_1 - 0), \quad \ell z(\cdot) = 0. \qquad (12)$$

з виродженим імпульсним впливом. Тут

$$\ell z(\cdot) := \Omega\,(z(0) + z(2\pi)), \quad \Omega := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

матриці $A(t), S_1$ та функція $f(t)$ наведені у прикладі 1.

Оскільки умову (4) виконано, система (12), розв'язна відносно похідної, а її розв'язок, залежить від довільної неперервної скалярної функції $\nu_0(t)$. Покладемо $\nu_0(t) := 0$, при цьому система (12), має розв'язок вигляду

$$z(t,c) = X_0(t)c + K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \quad 0 \le t < \tau_1, \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-\cos 2t \\ -2\sin 2t \\ 1-\cos 2t \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(0) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (12); матриця $X_0(t)$ наведена у прикладі 1. Система (12) з виродженим імпульсним впливом має розв'язок вигляду

$$z(t,c) = X_1(t)c + K_1\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \quad \tau_1 \le t \le 2\pi, \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$K_1\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t),$$

крім того

$$X_1(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-\cos t & 0 & 1-\cos t \\ 2\sin t & 0 & 2\sin t \\ 1-\cos t & 0 & -1-\cos t \end{pmatrix}, \quad \pi \le t \le 2\pi.$$

Крайова задача (11) з виродженим імпульсним впливом являє собою некритичний випадок, оскільки $P_{Q^*} = 0$, отже, вона розв'язна, оскільки умову (7) виконано. Розв'язок

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^2$$

крайової задачі (11) з виродженим імпульсним впливом визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t) = K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

крім того

$$X_r(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos t & 0 & \cos t - 1 \\ 2\sin t & 0 & -2\sin t \\ \cos t - 1 & 0 & 1+\cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t < \pi,$$

$$X_r(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-\cos t & 0 & 1-\cos t \\ 2\sin t & 0 & 2\sin t \\ 1-\cos t & 0 & -1-\cos t \end{pmatrix}, \quad \pi \le t \le 2\pi.$$

Отримані результати аналогічно [17] можуть бути використані в теорії стійкості для диференціально-алгебраїчних рівнянь з виродженим імпульсним впливом.

ORCID ID

S. M. Chuiko https://orcid.org/0000-0001-7186-0129

E. V. Chuiko https://orcid.org/0000-0002-6032-490X

K. S. Shevtsova https://orcid.org/0000-0002-1112-1145

REFERENCES

1. A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk. Impulsive Differential Equations. 1987. Vishcha shkola, Kiev, 287 p. (in Russian).

2. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). 2016. De Gruyter, Berlin; Boston, 298 pp. https://doi.org/10.1515/9783110378443.

3. S. L. Campbell. Singular systems of differential equations. 1980. Pitman Advanced Publishing Program, San Francisco–London–Melbourne, 178 p.

4. Yu. E. Boyarintsev, V. F. Chistyakov. Algebro-Differential Systems. Methods for Solving and Studying. 1998. Nauka, Novosibirsk, 224 p. (in Russian).

5. A. A. Boichuk, L. M. Shehda. Degenerate Fredholm boundary-value problems, Nonlinear oscillation, — 2007. — V. **10**, 3. — P. 306-314. https://doi.org/10.1007/s11072-007-0024-y.

6. A. M. Samoilenko, M. I. Shkil', V. P. Yakovets. Linear systems of differential equations with degeneration. 2000. Vyshcha Shkola, Kiev, 296 p. (in Russian).

7. S. M. Chuiko. On a reduction of the order in a differential-algebraic system, Journal of Math. Sciences, — 2018. — V. **235**, 1. — P. 2-14. https://doi.org/10.1007/s10958-018-4054-z.

8. S. M. Chuiko. A generalized Green operator for a linear Noetherian differential-algebraic boundary value problem, Siberian Advances in Mathematics, — 2020. — V. **30**, 4. — P. 177-191. https://doi.org/10.3103/S1055134420030037.

9. D. Wexler. On Boundary Value Problems for an Ordinary Linear Differential Systems, Ann. Vft. Pura et Appl., — 1968. — V. **80**. — P. 123-136.

10. A. A Boichuk, E. V. Chuiko, S. M. Chuiko. Generalized Green operator of a boundary-value problem with degenerate pulse influence, Ukrainian Mathematical Journal, — 1996. — V. **48**, 5. — P. 588-594 (in Russian).

11. A. A. Boichuk, N. A. Perestyuk, A. M. Samoilenko. Periodic solutions of impulse differential systems in critical cases, Differents. Uravn., — 1991. — V. **27**, 9. — P. 1516-1521 (in Russian).

12. S. M. Chuiko. Noether boundary value problems for degenerate differential-algebraic systems with linear pulse conditions, Dynamical systems, — 2014. — V. **4 (32)**, 1–2. — P. 89-100 (in Russian).

13. A. A. Boichuk, A. A. Pokutnyi, V. F. Chistyakov. Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations, Computational Mathematics and Mathematical Physics, — 2013. — V. **53**, 6. — P. 777-788. https://doi.org/10.1134/S0965542513060043.

14. S. M. Chuiko. A generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action, Differential Equations, — 2001. — V. **37**, 8. — P. 1189-1193. https://doi.org/10.1023/A:1012440123296.

15. S. M. Chuiko. A Green operator for boundary value problems with an impulsive effect, Doklady Mathematics, — 2001. — V. **64**, 1. — P. 41–43.

16. S. M. Chuiko, O. V. Nesmelova. Nonlinear boundary-value problems for degenerate differential-algebraic systems, Journal of Mathematical Sciences, — 2021. — V. **252**, 4. — P. 463-471. https://doi.org/10.1007/s10958-020-05174-5.

17. V. I. Korobov, M. O. Bebiya. Stabilization of one class of nonlinear systems, uncontrollable in the first approximation, Rep. NAS Ukraine, — 2014. — V. **2**. — P. 20-25. https://doi.org/10.15407/dopovidi2014.02.020.

Лінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача з виродженим імпульсним впливом

Чуйко С. М., Чуйко О. В., Шевцова К. С.

Донбаський державний педагогічний університет, вул. Генерала Батюка, 19, м. Слов'янськ, Донецька обл., Україна 84 116

Дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач започатковане у роботах К. Вейєрштрасса, М. М. Лузіна та Ф. Р. Гантмахера. Систематичному вивченню диференціально-алгебраїчних крайових задач присвячені роботи С. Кемпбелла, Ю. Є. Бояринцева, В. Ф. Чистякова, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка, В. П. Яковця, О. А. Бойчука, А. Ілчманна та Т. Рейса. Вивчення диференціально-алгебраїчних крайових задач пов'язане з численними застосуваннями таких задач у теорії нелінійних коливань, у механіці, біології, радіотехніці, теорії керування, теорії стійкості руху. В той же час дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач тісно пов'язане з дослідженням імпульсних крайових задач для диференціальних рівнянь, започаткованим у роботах М. М. Боголюбова, А. Д. Мишкіса, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка та О. А. Бойчука. Отже, актуальною проблемою є перенесення результатів, отриманих у статтях С. Кемпбелла, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка та О. А. Бойчука на імпульсні крайові задачі для диференціально-алгебраїчних рівнянь, зокрема, знаходження необхідних та достатніх умов існування

шуканих розв'язкiв, а також, конструкцiї оператора Грiна задачi Кошi та узагальненого оператора Грiна iмпульсної крайової задачi для диференцiально-алгебраїчного рiвняння.

У статтi знайдено умови розв'язностi, а також конструкцiю узагальненого оператора Грiна задачi Кошi для диференцiально-алгебраїчного рiвняння з виродженим iмпульсним впливом. Знайдено умови розв'язностi, а також конструкцiю узагальненого оператора Грiна для лiнiйної нетерової крайової задачi для диференцiально-алгебраїчного рiвняння з виродженим iмпульсним впливом. Запропонована у статтi схема дослiдження лiнiйних нетерових крайових задач для диференцiально-алгебраїчного рiвняння з виродженим iмпульсним впливом у критичних i некритичних випадках може бути перенесена на крайовi задачi для диференцiально-алгебраїчних рiвнянь з виродженим iмпульсним впливом. Побудована схема аналiзу лiнiйної нетерової крайової задачi для диференцiально-алгебраїчного рiвняння з виродженим iмпульсним впливом узагальнює результати С. Кемпбелла, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка та О. А. Бойчука i може бути поширена для доведення розв'язностi та побудови розв'язкiв нелiнiйної iмпульсної крайової задачi для диференцiально-алгебраїчного рiвняння у критичних i некритичних випадках.

Ключовi слова: диференцiально-алгебраїчнi рiвняння; крайовi задачi; рiвняння з iмпульсним впливом.

Linear differential-algebraic boundary value problem with singular pulse influence

S. M. Chuiko, E. V. Chuiko, K. S. Shevtsova
Donbas State Pedagogical University, 19, Batiuk General str., Slavyansk, Donetsk region, 84 116, Ukraine

The study of differential-algebraic boundary value problems was initiated in the works of K. Weierstrass, N. N. Luzin and F. R. Gantmacher. Systematic study of differential-algebraic boundary value problems is devoted to the work of S. Campbell, Yu. E. Boyarintsev, V. F. Chistyakov, A. M. Samoilenko, M. O. Perestyuk, V. P. Yakovets, O. A. Boichuk, A. Ilchmann and T. Reis. The study of the differential-algebraic boundary value problems is associated with numerous applications of such problems in the theory of nonlinear oscillations, in mechanics, biology, radio engineering, theory of control, theory of motion stability. At the same time, the study of differential algebraic boundary value problems is closely related to the study of pulse boundary value problems for differential equations, initiated M. O. Bogolybov, A. D. Myshkis, A. M. Samoilenko, M. O. Perestyk and O. A. Boichuk. Consequently, the actual problem is the transfer of the results obtained in the articles by S. Campbell, A. M. Samoilenko, M. O. Perestyuk and O. A. Boichuk on a pulse linear boundary value problems for differential-algebraic equations, in particular finding the necessary and sufficient conditions for the existence of the desired solutions, and also the construction of the Green's operator of the Cauchy problem and the generalized Green operator of a pulse linear boundary value problem for a differential-algebraic equation.

In this article we found the conditions of the existence and constructive scheme for finding the solutions of the linear Noetherian differential-algebraic boundary value problem for a differential-algebraic equation with singular impulse action. The proposed scheme of the research of the linear differential-algebraic boundary value problem for a differential-algebraic equation with impulse action in the critical case in this article can be transferred to the linear differential-algebraic boundary value problem for a differential-algebraic equation with singular impulse action. The above scheme of the analysis of the seminonlinear differential-algebraic boundary value problems with impulse action generalizes the results of S. Campbell, A. M. Samoilenko, M. O. Perestyuk and O. A. Boichuk and can be used for proving the solvability and constructing solutions of weakly nonlinear boundary value problems with singular impulse action in the critical and noncritical cases.

Keywords: differential-algebraic equations; boundary value problems; pulse influence.

Article history: Received: 14 August 2021; Final form: 10 October 2021;
Accepted: 20 October 2021.