Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 93, 2021, с. 12–17

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 93, 2021, p. 12–17
DOI: 10.26565/2221-5646-2021-93-02

УДК 519.216

Speed of convergence of complementary probabilities on finite group

A. L. Vyshnevetskiy

Kharkiv National Automobile and Highway University,
25 Yaroslava Mudrogo str., Kharkiv, 61002, Ukraine.
E-mail: alexwish50@gmail.com

Let RG be a group algebra of a finite group G over the field R of real numbers. A probability $P(g)$ on the group G corresponds to an element $p = \sum\limits_g P(g)g \in RG$; we call it probability on the algebra RG. For a natural number n, n-fold convolution of probability P on G corresponds to $p^n \in RG$. Let $e \in RG$ be the probability that corresponds to the uniform probability $E(g) = |G|^{-1} (g \in G)$. Two probabilities $p, p_1 \in RG$ are called complementary, if their convex linear combination equals to e, i.e. $\alpha p + (1-\alpha)p_1 = e$ for some α, $0 < \alpha < 1$. We find condition for existence of such α and compare $\| p^n - e \|$ and $\| {p_1}^n - e \|$ for arbitrary norm $\|.\|$.
Keywords: probability; finite group; convergence; convolution; group algebra.

Вишневецький О. Л. **Швидкість збіжності додаткових ймовірностей на скінченній групі.** Нехай RG – групова алгебра скінченної групи G над полем R дійсних чисел. Імовірність $P(g)$ на групі G відповідає елементу $p = \sum\limits_g P(g)g \in RG$; ми називаємо її ймовірністю на алгебрі RG. Для натурального числа n, n-кратна згортка ймовірності P на G відповідає $p^n \in RG$. Нехай $e \in RG$ – ймовірність, що відповідає рівномірній ймовірності $E(g) = |G|^{-1} (g \in G)$. Дві ймовірності $p, p_1 \in RG$ називаються додатковими, якщо їх опукла лінійна комбінація дорівнює e, тобто $\alpha p + (1-\alpha)p_1 = e$ для деякого α, $0 < \alpha < 1$. Ми знаходимо умови існування такого α і порівнюємо $\| p^n - e \|$ і $\| {p_1}^n - e \|$ для довільної норми $\|.\|$.
Ключові слова: ймовірність; скінченна група; збіжність; групова алгебра.

Вишневецкий А. Л. **Скорость сходимости дополнительных вероятностей на конечной группе.** Пусть RG – групповая алгебра конечной группы G над полем R вещественных чисел. Вероятность $P(g)$ на группе G соответствует элементу $p = \sum\limits_g P(g)g \in RG$; мы называем её вероятностью на алгебре RG. Для натурального числа n, n-кратная свертка вероятности P на G соответствует $p^n \in RG$. Пусть $e \in RG$ – вероятность, соответствующая равномерной вероятности $E(g) = |G|^{-1} (g \in G)$. Две вероятности $p, p_1 \in RG$ называются дополнительными, если их выпуклая линейная комбинация равна e, т. е. $\alpha p + (1-\alpha)p_1 = e$ для некоторого α, $0 < \alpha < 1$.

Мы находим условия существования такого α и сравниваем $\| p^n - e \|$ и $\| {p_1}^n - e \|$ для произвольной нормы $\|.\|$.
Ключевые слова: вероятность; конечная группа; сходимость; групповая алгебра.

2010 Mathematics Subject Classification: prim. 60B15, 60B10; sec. 20D99.

1. Introduction

Let G be a finite group of order $|G|$, RG the group algebra of the group G over the field R of real numbers. Each real function $F(g)$ on the group G corresponds to an element $f = \sum\limits_g F(g)g \in RG$ (we write $\sum\limits_g$ instead of $\sum\limits_{g\in G}$). We denote a function on the group G with a capital letter and the corresponding element of RG with the same (but small) letter, and call the latter a probability on RG. For instance, the trivial (uniform) probability $E(g) = \dfrac{1}{|G|}$ $(g \in G)$ corresponds to the element

$$e = \frac{1}{|G|} \sum_g g \in RG.$$

Exploring probabilities on group algebras is sometimes more convenient than on groups (see e.g. [4])

Convolution of two functions P, Q on G

$$(P * Q)(h) = \sum_g P(g)Q(g^{-1}h) \quad (h \in G)$$

corresponds to product pq of corresponding elements $p,\ q \in RG$.

Let function $P(g)$ be a probability on a group G, i.e.

$$P(g) \geq 0 \ (g \in G), \ \sum_g P(g) = 1 \tag{1}$$

and $P^{(n)} = P * ... * P$ (n times) an n-fold convolution of function P. There is a lot of works devoted to evaluation of speed of convergence of $P^{(n)}$ to the uniform probability $E(g)$ on G at $n \to \infty$ (see e.g. review [2]). In other words, a norm of $\| p^n - e \|$ is evaluated (for different norms) at $n \to \infty$. The case when $p^n = e$ for some finite n was studied in [4]. Conditions for convergence p^n to e are well known, some refinements are in [3].

For any element $b = \sum\limits_g b_g g \in RG$ we denote $|b| = \sum\limits_g |b_g| \in R$. We write $b \geq 0$ if $b_g \geq 0$ for all $g \in G$. Now for any probability

$$p = \sum_g a_g g \tag{2}$$

on RG conditions (1) can be written as follows:

$$p \geq 0, \quad |p| = 1 \tag{3}$$

Since $h\sum\limits_g g = \sum\limits_g g$ for any $h \in G$, then $he = e$ and by linearity, we get $be = |b|e$ for any element $b = \sum\limits_g b_g g \in RG$. So

$$pe = e \tag{4}$$

for any probability $p \in RG$.

2. Theorem

We study the case when a linear combination of two probabilities on RG equals to e. Since $|a| + |b| = |a + b|$ for any $a, b \in RG$, then from (3) this linear combination must be convex.

Convex linear combinations of idempotent distributions on countable groups were studied in [1])

Definition 1. *Probabilities p, $p_1 \in RG$ are called complementary, if their convex linear combination equals to e, i.e.*

$$\alpha p + (1 - \alpha)p_1 = e \tag{5}$$

for some number α, $0 < \alpha < 1$.

We find out when for a given probability $p \in RG$ a complementary probability $p_1 \in RG$ exists, i.e.

$$p_1 = \frac{e - \alpha p}{1 - \alpha} \tag{6}$$

is a probability for a number α, $0 < \alpha < 1$. By (3) we have to check if $p_1 \geq 0$ and $|p_1| = 1$. We also compare $\|p^n - 1\|$ and $\|p_1^n - 1\|$ (n is a natural number) for any norm $\|.\|$.

Theorem 1. *Let $p = \sum\limits_g a_g g$ be a probability in algebra RG, $a = \max\limits_{g \in G} a_g$. Then for any α, $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{a|G|}$ there exist a probability $p_1 \in RG$ such that (5) holds. Moreover,*

$$\|p_1^n - e\| = \frac{1}{(\alpha^{-1} - 1)^n} \|p^n - e\|. \tag{7}$$

P r o o f. Let p_1 be as defined in (6). $p_1 \geq 0$ if and only if $(1 - \alpha)p_1 \geq 0$. By (5)

$$(1 - \alpha)p_1 = e - \alpha p = \sum_g \Big(\frac{1}{|G|} - \alpha a_g\Big) g.$$

So $p_1 \geq 0$ if and only if

$$\sum_g \Big(\frac{1}{|G|} - \alpha a_g\Big) g \geq 0,$$

i.e.

$$\frac{1}{|G|} - \alpha a_g \geq 0$$

for any $g \in G$. It is equivalent to

$$\alpha \leq \frac{1}{a|G|} \tag{8}$$

where $a = \max\limits_{g \in G} a_g$. This necessary condition for two complementary probabilities to exist is equivalent to the condition $p_1 \geq 0$. Now we prove that $|p_1| = 1$:

$$|(1-\alpha)p_1| = |e - \alpha p| = \sum_g \Big(\frac{1}{|G|} - \alpha a_g\Big) = \sum_g \frac{1}{|G|} - \alpha \sum_g a_g = 1 - \alpha|p| = 1 - \alpha$$

i.e. $|p_1| = 1$ (as $\alpha \neq 1$). So under condition (8) p_1 is a probability.

Now we compare $\|p^n - 1\|$ and $\|p_1^n - 1\|$ (n is a natural number) for any norm $\|.\|$. As well known, e is an idempotent of the algebra RG: $e^k = e$ for any natural number k. Taking into account the binomial formula, (4) and (6), we obtain:

$$(1-\alpha)^n p_1^n = (e - \alpha p)^n =$$

$$= e^n - C_n^1 e^{n-1}\alpha p + C_n^2 e^{n-2}\alpha^2 p^2 - \dots + (-1)^n C_n^{n-1} e \alpha^{n-1} p^{n-1} + (-1)^n \alpha^n p^n =$$

$$= e\Big(1 - C_n^1 \alpha + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \alpha^{n-1} + (-1)^n \alpha^n - (-1)^n \alpha^n\Big) + (-1)^n \alpha^n p^n =$$

$$= e(1-\alpha)^n + (-1)^n \alpha^n (p^n - e).$$

We divide by $(1-\alpha)^n$:

$$p_1^n = \frac{e(1-\alpha)^n + (-1)^n \alpha^n (p^n - e)}{(1-\alpha)^n} = e + \frac{(-1)^n \alpha^n}{(1-\alpha)^n}(p^n - e).$$

Then

$$\|p_1^n - e\| = \Big\| \frac{(-1)^n \alpha^n}{(1-\alpha)^n}(p^n - e) \Big\| = \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)^n}\|p^n - e\| = \frac{1}{(\alpha^{-1} - 1)^n}\|p^n - e\|.$$

The theorem is proved. It can be formulated as follows.

If $\alpha p + (1-\alpha)p_1 = e$ for probabilities $p, p_1 \in RG$ and some number α, $0 < \alpha < 1$, then $\alpha \leq \dfrac{1}{a|G|}$, where $a = \max\limits_{g \in G} a_g$ and equality (7) holds.

Corollary 1. *If* $a = \dfrac{2}{|G|}$, *then* $\|p_1^n - e\| = \|p^n - e\|$.

Indeed, if $a = \dfrac{2}{|G|}$, one can put $\alpha = \dfrac{1}{2}$ in (2.3).

Corollary 2. *p^n converges to e iff p_1^n converges to e.*

ORCID ID

A. L. Vyshnevetskiy https://orcid.org/0000-0003-1757-0416

REFERENCES

1. A. D. Bendikov, A. A. Grigor'yan, Ch. Pittet, W. Woess. Isotropic Markov semigroups on ultra-metric spaces, Russian Math. Surveys, 2014. – Vol. **69**, No **4**. – P. 589–680. https://doi.org/10.1070/RM2014v069n04ABEH004907

2. L. Saloff-Coste. Random walks on finite groups. In: H. Kesten (editor). Probability on Discrete Structures, Encyclopaedia of Mathematical Sciences (Probability Theory), – 2004. – Vol. **110**. Springer, Berlin, Heidelberg, – P. 263-340. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-662-09444-0_5

3. A. L. Vyshnevetskiy. Conditions of convergence of a random walk on a finite group, Colloquium Mathematicum. https://doi.org/10.4064/cm8196-5-2020

4. A. L. Vyshnevetskiy, E. M. Zhmud'. Random walks on finite groups converging after finite number of steps, Journal Algebra and Discrete Mathematics, 2008. – Vol. **7**, No **2**, – P. 123-129. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/153370

Швидкість збіжності додаткових ймовірностей на скінченній групі.

Вишневецький О. Л.

Харківський національний автомобільно-дорожній університет, вул. Ярослава Мудрого 25, Харків, Україна, 61002

Нехай функція P є ймовірністю на скінченній групі G, тобто $P(g) \geq 0$ $(g \in G)$, $\sum_g P(g) = 1$ (ми пишемо $\sum\limits_g$ замість $\sum\limits_{g \in G}$). Згортка двох функцій P, Q на групі G є $(P * Q)(h) = \sum\limits_g P(g)Q(g^{-1}h)$ $(h \in G)$. Нехай $E(g) = \frac{1}{|G|}\sum\limits_g g$ є рівномірною (тривіальною) ймовірністю на групі G, $P^{(n)} = P * ... * P$ (n разів) - n -кратна згортка P. За добре відомої нескладної умови ймовірність $P^{(n)}$ збігається до $E(g)$ при $n \to \infty$. Багато робіт присвячено оцінці швидкості цієї збіжності для різних норм. Будь-яка ймовірність (і, загалом, будь-яка функція зі значеннями в полі R дійсних чисел) на групі може бути пов'язана з елементом групової алгебри цієї групи над полем R. Це можна зробити наступним чином. Нехай RG - групова алгебра скінченної групи G над полем R. Ймовірність $P(g)$ на групі G відповідає елементу $p = \sum\limits_g P(g)g$ алгебри RG. Ми позначаємо функцію на групі G великою

літерою, а відповідний елемент з RG тією ж (але малою) літерою, і останній називаємо ймовірністю на RG. Наприклад, рівномірна ймовірність $E(g)$ відповідає елементу $e = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g} g \in RG$. Згортка двох функцій P, Q на G відповідає добутку pq відповідних елементів P, Q в груповій алгебрі RG. Для натурального числа n, n-кратна згортка ймовірності P на G відповідає елементу $p^n \in RG$. У статті ми вивчаємо випадок, коли лінійна комбінація двох ймовірностей в алгебрі RG дорівнює ймовірності $e \in RG$. Така лінійна комбінація повинна бути опуклою. Точніше, ми співставляємо ймовірності $p \in RG$ іншу ймовірність $p_1 \in RG$ наступним чином. Дві ймовірності $p, p_1 \in RG$ називаються додатковими, якщо їх опукла лінійна комбінація дорівнює e, тобто $\alpha p + (1-\alpha)p_1 = e$ для деякого числа α, $0 < \alpha < 1$. Ми знаходимо умови існування такого α і порівнюємо $\| \, p^n - e \, \|$ та $\| \, {p_1}^n - e \, \|$ для довільної норми $\|.\|$.
Ключові слова: ймовірність; скінченна група; збіжність; згортка; групова алгебра.

Speed of convergence of complementary probabilities on finite group.

A. L. Vyshnevetskiy
Kharkiv National Automobile and Highway University,
25 Yaroslava Mudrogo str., Kharkiv, 61002, Ukraine

Let function P be a probability on a finite group G, i.e. $P(g) \geq 0 \ \ (g \in G)$, $\sum\limits_{g} P(g) = 1$ (we write $\sum\limits_{g}$ instead of $\sum\limits_{g \in G}$). Convolution of two functions P, Q on group G is $(P * Q)(h) = \sum\limits_{g} P(g)Q(g^{-1}h) \ \ (h \in G)$. Let $E(g) = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g} g$ be the uniform (trivial) probability on the group G, $P^{(n)} = P * ... * P$ (n times) an n-fold convolution of P. Under well known mild condition probability $P^{(n)}$ converges to $E(g)$ at $n \to \infty$. A lot of papers are devoted to estimation the rate of this convergence for different norms. Any probability (and, in general, any function with values in the field R of real numbers) on a group can be associated with an element of the group algebra of this group over the field R. It can be done as follows. Let RG be a group algebra of a finite group G over the field R. A probability $P(g)$ on the group G corresponds to the element $p = \sum\limits_{g} P(g)g$ of the algebra RG. We denote a function on the group G with a capital letter and the corresponding element of RG with the same (but small) letter, and call the latter a probability on RG. For instance, the uniform probability $E(g)$ corresponds to the element $e = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g} g \in RG$. The convolution of two functions P, Q on G corresponds to product pq of corresponding elements p, q in the group algebra RG. For a natural number n, the n-fold convolution of the probability P on G corresponds to the element $p^n \in RG$. In the article we study the case when a linear combination of two probabilities in algebra RG equals to the probability $e \in RG$. Such a linear combination must be convex. More exactly, we correspond to a probability $p \in RG$ another probability $p_1 \in RG$ in the following way. Two probabilities $p, p_1 \in RG$ are called complementary if their convex linear combination is e, i.e. $\alpha p + (1-\alpha)p_1 = e$ for some number α, $0 < \alpha < 1$. We find conditions for existence of such α and compare $\| \, p^n - e \, \|$ and $\| \, {p_1}^n - e \, \|$ for an arbitrary norm $\|.\|$.
Keywords: probability; finite group; convergence; convolution; group algebra.

Article history: Received: 11 February 2021; Final form: 27 May 2021;
Accepted: 9 June 2021.